به نام خدا

فصل اول: آنالیز برداری

۱-۱ مقدمه

۱-۲ اسکالر و بردار

۱-۳ قواعد ساده برداری

۱-۴ دستگاه های مختصات

۱-۵ تبدیل عنصر دیفرانسیل سطحی

۱-۶ معادله قطبی کره در حالت های مختلف

۱-۷ انتگرال های خط، سطح، حجم برداری

۱-۸ مشتق میدان های اسکالر و برداری

۱-۹ قضایای مهم در الکترومغناطیس

۱-۱۰ پیوست

۱-۱۱ تست های تکمیلی

فصل اول : آنالیز برداری

مباحث پدیده های الکترومغناطیسی مطرح شده در الکترومغناطیس را می توان در معادلات ماکسول خلاصه کرد :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

که در آن

∇ = عملگر مشتق گیری برداری

$\vec{D}$ = چگالی شار الکتریکی

$\vec{B}$ = چگالی شار مغناطیسی

$\vec{E}$ = شدت میدان الکتریکی

$\vec{H}$ = شدت میدان مغناطیسی

ρ_v = چگالی بار حجمی

$\vec{J}$ = چگالی جریان

۱ـ۲ اسکالر و بردار

هر کمیتی می‌تواند اسکالر یا بردار باشد.

کمیتی اسکالر است که فقط دارای اندازه بوده و جهت نداشته باشد، مثل: حجم، بار، پتانسیل الکتریکی

کمیتی بردار است که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز باشد مثل: میدان، گشتاور، نیرو و ...

البته یک دسته‌ی دیگر از کمیت‌های فیزیکی تانسور نامیده می‌شوند که کمیت‌های اسکالر و بردار حالت‌های خاصی از آن‌ها هستند.

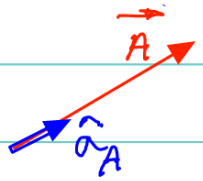
نظریه‌ی الکترومغناطیس در واقع مطالعه‌ی چند میدان خاص است. میدان تابعی است که به هر نقطه از فضا عددی یا کمیتی نسبت می‌دهد. اگر این کمیت اسکالر (یا بردار) باشد، میدان را میدان اسکالر (یا بردار) می‌نامیم.

۱-۳ قواعد ساده برداری

۱-۳-۱ بردار یکه یا واحد

بردار $\vec{A}$ هم اندازه و هم جهت دارد. اندازه‌ی $\vec{A}$ یک کمیت اسکالر است که با A یا $|\vec{A}|$ نشان داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{a}_A$ در امتداد $\vec{A}$، طبق تعریف برداری با اندازه‌ی واحد است که هم‌جهت با $\vec{A}$ باشد یعنی:



$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A} \Rightarrow \vec{A} = A\hat{a}_A \quad , \quad |\hat{a}_A| = 1$$

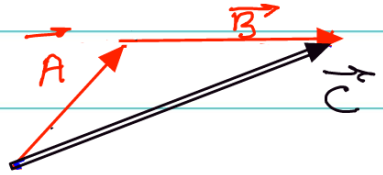
چون اندازه‌ی $\hat{a}_A$ واحد است پس می‌توان $\vec{A}$ را به صورت $\vec{A} = A\hat{a}_A$ نوشت که A برابر است با اندازه‌ی $\vec{A}$

و جهت $\hat{a}_A$ به طور کامل مشخص می‌کند.

۱-۳-۲ جمع و تفریق بردارها

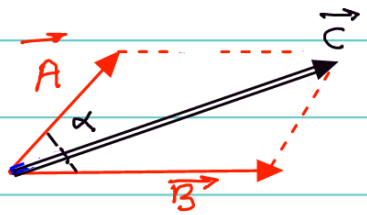
جمع و تفریق بردارها به روش ترسیم، یا با استفاده از روش تجزیه متوازی الاضلاع یا قاعده‌ی Cascading انجام می‌شود.

✓ جمع دو بردار $\vec{A}$, $\vec{B}$:



روش Cascading

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



روش قطر متوازی الاضلاع

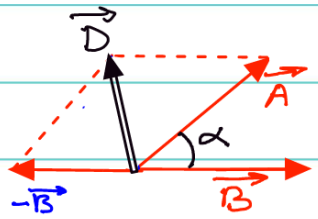
در روش Cascading بردار $\vec{C}$ از اتصال ابتدای بردار $\vec{A}$ به انتهای بردار $\vec{B}$ حاصل می‌شود.

اندازه‌ی بردار $\vec{C}$ برابر است با زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با:

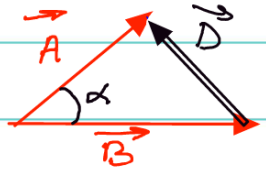
$$|\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

در تفریق دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

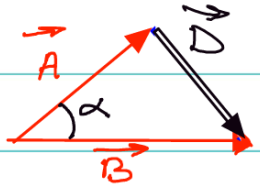


روش قطر متوازی الاضلاع



روش Cascading

در تفریق به روش Cascading بردار $\vec{D}$ از اتصال انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول حاصل می‌شود. بنابراین بردار $\vec{B} - \vec{A}$ متفاوت از $\vec{A} - \vec{B}$ خواهد بود:



$$\vec{D'} = \vec{B} - \vec{A}$$

اندازه‌ی تفریق دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با زاویه‌ی بین آن‌ها برابر است با:

$$|\vec{B}| = |\vec{D}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

۱-۳-۳ ضرب‌های برداری

ساده‌ترین ضرب در آن نیز برداری ضرب یک عدد (کمیت اسکالر) در بردار است که حاصل بردار می‌شود مثل:

$$\vec{F} = q\vec{E} \begin{cases} q>0 \longrightarrow \text{هم‌جهت } \vec{F},\vec{E} \\ q<0 \longrightarrow \text{خلاف‌جهت } \vec{F},\vec{E} \end{cases}$$

ضرب دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌تواند نتیجه‌ی اسکالر یا برداری داشته باشد. این به چگونگی عمل ضرب بستگی دارد. بنابراین دو نوع ضرب برداری وجود دارد:

۱. ضرب داخلی یا نقطه‌ای: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ ← اسکالر

۲. ضرب خارجی یا برداری: $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ ← بردار

ضرب سه بردار $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌تواند به یکی از دو شکل زیر باشد:

۳. ضرب سه‌گانی اسکالر: $\underbrace{\vec{A}}_{\text{بردار}}.(\underbrace{\vec{B}\times\vec{C}}_{\text{بردار}})$ ← اسکالر

۴. ضرب سه‌گانی برداری: $\underbrace{\vec{A}}_{\text{بردار}}\times(\underbrace{\vec{B}\times\vec{C}}_{\text{بردار}})$ ← بردار

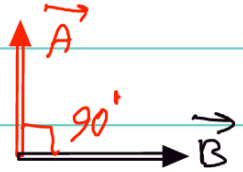
۱. ضرب داخلی دو بردار $(\vec{A}.\vec{B})$

طبق تعریف حاصلضرب اندازه‌های دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در کسینوس زاویه بین آن‌هاست. همچنین می‌توان گفت که حاصل

این ضرب برابر است با اندازه‌ی

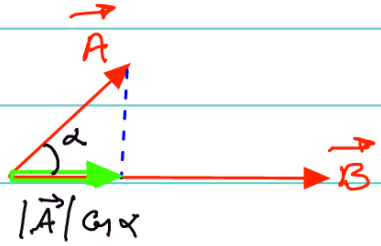
$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha \quad , \quad 0<\alpha<\pi$$

* نکته: شرط تعامد دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را می‌توان از ضرب داخلی بدست آورد.



$$\alpha = 90^\circ \rightarrow \cos\alpha = 0 \rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

* نکته: زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را می‌توان از تعریف ضرب داخلی بدست آورد.



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

قواعد زیر در مورد ضرب نقطه‌ای قابل اعمال است:

الف) قاعده جابجایی $\quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

ب) قاعده توزیع پذیری $\quad \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

ج) ضرب داخلی یک بردار در خودش $\quad \vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2 = A^2$

* حاصلضرب داخلی دو بردار که در یک مختصات دلخواه قرار دارند برابر است با

$$\vec{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$$

$$\vec{B} = B_u\hat{u} + B_v\hat{v} + B_w\hat{w}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} = A_uB_u + A_vB_v + A_wB_w$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_u^2 + A_v^2 + A_w^2$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_u^2 + A_v^2 + A_w^2}$$

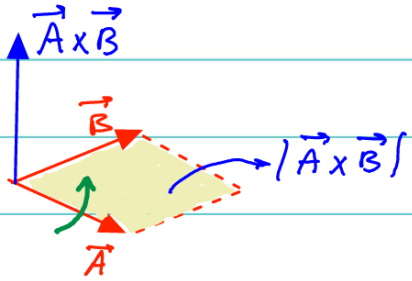
ضرب دو بردار واحد در هم را می‌توان از تعریف ضرب داخلی به صورت زیر نوشت:

$$\hat{a}_A \cdot \hat{a}_B = |\hat{a}_A|\,|\hat{a}_B| \cos\alpha_{AB} = \cos\alpha_{AB}$$

$$\hat{a}_A \cdot \hat{a}_A = |\hat{a}_A|^2 = 1$$

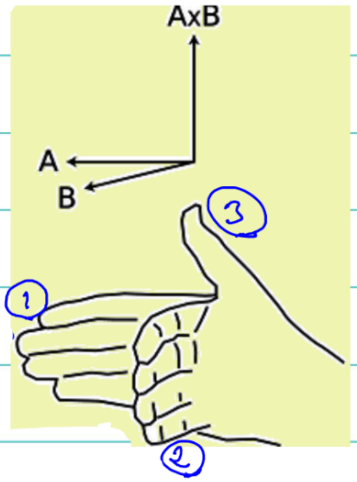
2. ضرب خارجی دو بردار $\vec{C} = (\vec{A} \times \vec{B})$

بردار $\vec{C}$ است عمود بر صفحه‌ی عمل بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که اندازه آن برابر حاصلضرب اندازه‌های $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در سینوس زاویه بین آنهاست و جهت آن از قاعده دست راست پیروی می‌کند. اندازه $\vec{A}\times\vec{B}$ را می‌توان گفت که با مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نیز برابر است.



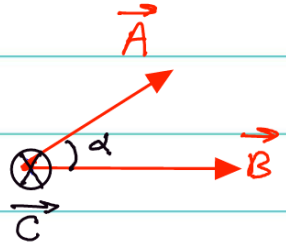
$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\alpha_{AB}$$

شکل زیر که به قاعده‌ی دست راست معروف است نحوه مشخص کردن جهت $\vec{A}\times\vec{B}$ را نشان می‌دهد. مطابق شکل چهار انگشت دست راست در جهت بردار اولی که $\vec{A}$ است قرار می‌گیرد طوری که کف دست راست به سمت بردار دوم یعنی $\vec{B}$ باشد یا به عبارتی جهت چرخش چهار انگشت در راستای ① به سمت بردار $\vec{B}$ باشد یعنی زاویه ② در این صورت جهت انگشت شست جهت $\vec{A}\times\vec{B}$ خواهد بود.



* حالت اول: $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$

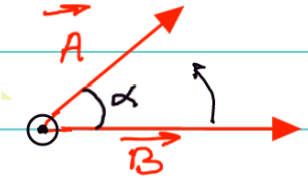
جهت بردار $\vec{C}$ با استفاده از قانون دست راست به سمت داخل صفحه است که با علامت ⊗ نشان داده می‌شود.



$$|\vec{C}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\sin\alpha_{AB}$$

* حالت دوم: $\vec{C}=\vec{B}\times\vec{A}$

در این حالت جهت $\vec{C}$ به سمت خارج صفحه است که با علامت ⊙ نشان داده می‌شود.



$$|\vec{C}| = |\vec{B}||\vec{A}|\sin\alpha_{AB}$$

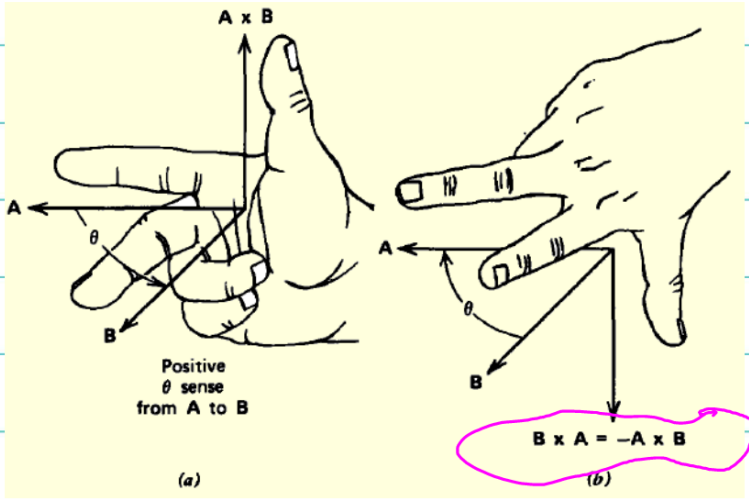
ضرب خارجی دارای ویژگی‌های زیر است :

الف) خاصیت جابجایی ندارد :

$$\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$$

بلکه پادجابجایی است ، یعنی

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$



ب) شرکت پذیر نیست :

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

ج) روی جمع بخش پذیر است :

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

د) ضرب خارجی یک بردار در خودش صفر است

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0$$

* نکته: ضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ واقع در یک دستگاه مختصات دلخواه به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\vec{A} = A_u \hat{a}_u + A_v \hat{a}_v + A_w \hat{a}_w \quad , \quad \vec{B} = B_u \hat{a}_u + B_v \hat{a}_v + B_w \hat{a}_w$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_u & \hat{a}_v & \hat{a}_w \\ A_u & A_v & A_w \\ B_u & B_v & B_w \end{vmatrix} = \hat{a}_u (A_v B_w - A_w B_v) - \hat{a}_v (A_u B_w - A_w B_u) + \hat{a}_w (A_u B_v - A_v B_u)$$

۳. ضرب سه گانه اسکالر

ضرب سه گانه اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

این حاصلضرب را می‌توان با محاسبه ماتریس 3 در 3 تشکیل شده از $\vec{A}$، $\vec{B}$، $\vec{C}$ در یک دستگاه مختصات هستند به صورت زیر بدست آورد:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_u & A_v & A_w \\ B_u & B_v & B_w \\ C_u & C_v & C_w \end{vmatrix} = \text{اسکالر (عدد)}$$

۴. ضرب سه گانه برداری

برای بردارهای $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌توان ضرب سه گانه برداری زیر را تعریف کرد:

bac - cab

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\underbrace{\vec{A} \cdot \vec{C}}_{\text{عدد}}) - \vec{C}(\underbrace{\vec{A} \cdot \vec{B}}_{\text{عدد}}) = \text{بردار}$$

$$\neq \vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{C})$$

این ضرب با قاعده طلایی bac-cab (بخوانید بک-کب) محاسبه می‌شود.

۱-۴ دستگاه‌های مختصات

دستگاه مختصات متعامد دستگاه مختصاتی است که در آن خطوط مختصه

دستگاه‌های مختصات کارتزین، استوانه‌ای، کروی، استوانه‌ای بیضوی، استوانه‌ای سهموی، مخروطی بزرگترین مختصات متعامد هستند که در این بین سه دستگاه مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی مهمترین آنها هستند و اکثر مسائل الکترومغناطیس در این دستگاه‌ها قابل حل هستند.

۱-۴-۱ دستگاه مختصات کارتزین (قائم، مستطیلی و دکارتی)

* یک نقطه در فضا را می‌توان با مختصه‌های (x, y, z) در دستگاه کارتزین نمایش داد. گستره متغیرهای x، y، z به صورت زیر است:

$$-\infty < x < \infty \quad , \quad -\infty < y < \infty \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

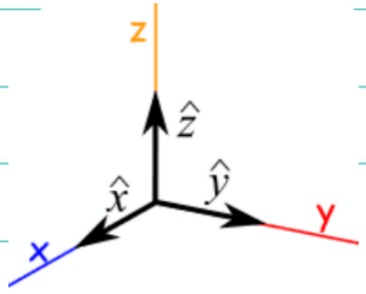
بردار $\vec{A}$ در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر بیان می‌شود

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z \quad \text{یا} \quad (A_x, A_y, A_z)$$

اندازه بردار $\vec{A}$ عبارت است از

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

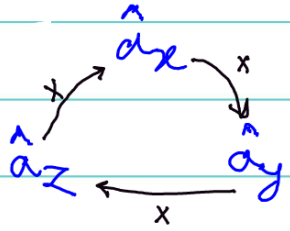
* بردارهای واحد: عبارتند از $\hat{a}_x$ ، $\hat{a}_y$ ، $\hat{a}_z$ ←



✓ به دلیل متعامد بودن صفحات ، ضرب داخلی بردارهای یک صفر خواهد بود :

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0 \quad , \quad \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0$$

✓ به دلیل راستگرد بودن سیستم ضرب خارجی بردارهای یک با استفاده از جایگشت چرخشی (پ عمگرد) حاصل میشود:



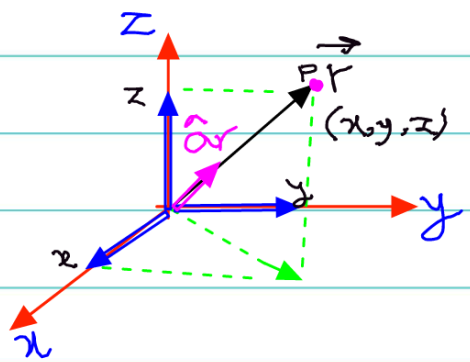
$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z$$
$$\hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x$$
$$\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

✓ ضرب داخلی و خارجی بردارهای واحد :

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = 1 \quad , \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = 1 \quad , \quad \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = 0 \quad , \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_y = 0 \quad , \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

* بردار مکان : بردار است که از اتصال مبدأ مختصات به نقطه مورد نظر بدست می‌آید و با $\vec{r}$ نشان می‌دهیم



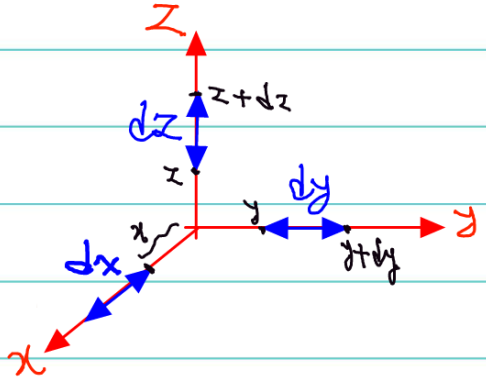
$$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

* عناصر دیفرانسیل طولی، سطحی و حجمی

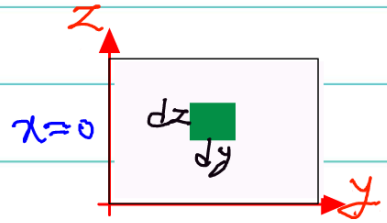
✓ المان طولی یا دیفرانسیل طولی برداری از نقطه (x,y,z) به نقطه $(x+dx, y+dy, z+dz)$ است



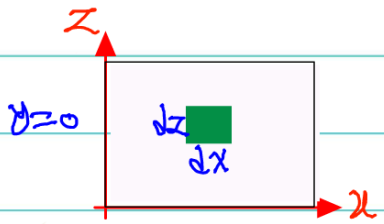
$$\begin{cases} \vec{dl} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z \\ |\vec{dl}| = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \end{cases}$$

✓ المان سطحی یا دیفرانسیل سطحی : $\vec{ds}$

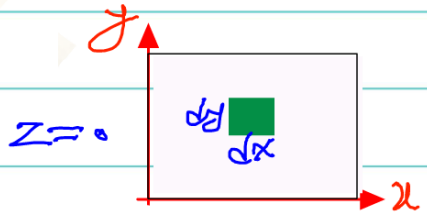
نحوه تعریف $\vec{ds}$ هم است، در حالت کلی المان سطحی را می‌توان به صورت $\vec{ds} = ds\,\hat{a}_n$ تعریف کرد که در آن ds مساحت عنصر سطح و $\hat{a}_n$ بردار یکه عمود بر سطح ds (و به سمت بیرون سطح) است. برای سطوح مختلف در دستگاه کارتزین مطابق شکل‌های زیر $\vec{ds}$ را می‌توان نوشت :



$$\vec{ds_x} = dy\,dz\,\hat{a}_x$$

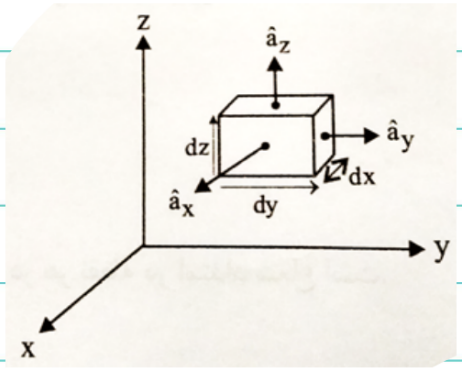


$$\vec{ds_y} = dx\,dz\,\hat{a}_y$$



$$\vec{ds_z} = dx\,dy\,\hat{a}_z$$

✓ المان حجم :



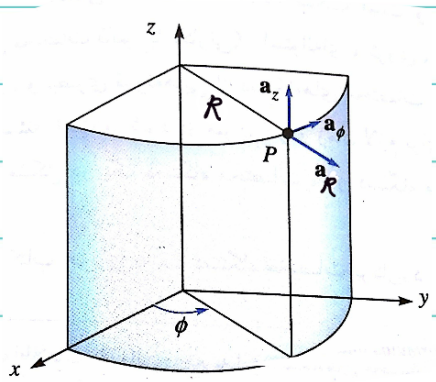
برخلاف المان‌های طولی و سطحی این المان جهت ندارد.

$$dv = dx\,dy\,dz$$

۱-۴-۲ دستگاه مختصات استوانه‌ای

دستگاه مختصات استوانه‌ای در مسائلی که تقارن استوانه‌ای دارند بسیار مناسب است.

✓ یک نقطه در فضا را می‌توان با مختصات مکانی $P(R, \varphi, z)$ در دستگاه استوانه‌ای نشان داد.



R : شعاع استوانه‌ای که از نقطه P می‌گذرد

φ : زاویه باز شده از محور x^+

z : فاصله از صفحه xy

گستره متغیرها به صورت زیر است :

$$0 \leq R < \infty \;,\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \;,\; -\infty < z < \infty$$

بردار $\vec{A}$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

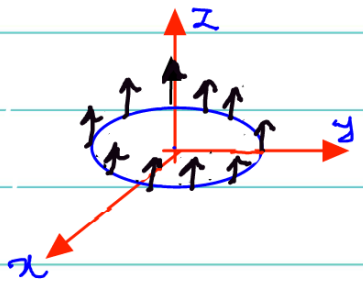
$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z \quad \text{یا} \quad (A_R, A_\varphi, A_z)$$

اندازه‌ی $\vec{A}$ عبارت است از:

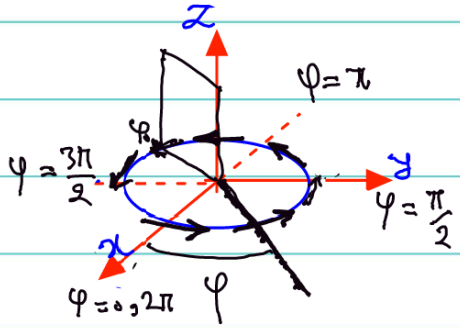
$$|\vec{A}| = \sqrt{A_R^2 + A_\varphi^2 + A_z^2}$$

* بردارهای واحد: عبارتند از $(\hat{a}_R, \hat{a}_\varphi, \hat{a}_z)$

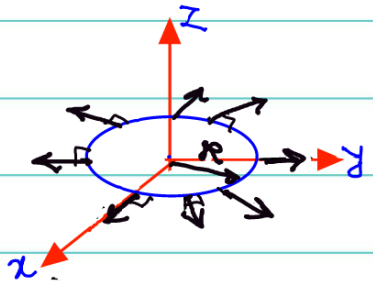
* توجه: مولفه‌ی شعاعی را در مختصات استوانه‌ای با R و در مختصات کروی با r نشان خواهیم داد.



$\hat{a}_z$ بردار یکه عمود بر سطح z ثابت است.



$\hat{a}_\varphi$ بردار یکه عمود بر سطح φ ثابت است



$\hat{a}_R$ بردار یکه عمود بر سطح R ثابت است.

*نکته: جمع بردارها در مختصات استوانه‌ای:

$\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\varphi$ جهت ثابتی ندارند

$2\hat{a}_R + 3\hat{a}_R = 5\hat{a}_R$ ~~$5\hat{a}_R$~~

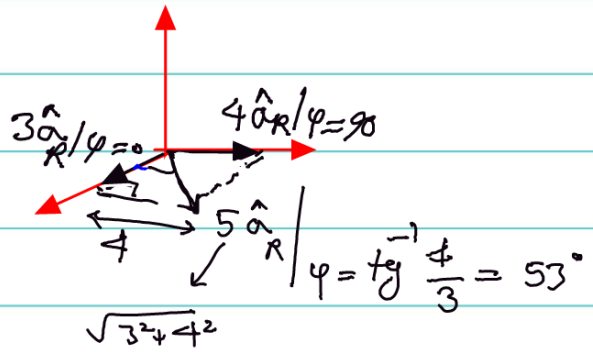
---

*در مختصات کروی نیز این نکته صادق است

با توجه به شکل‌های بالا، جهت ثابتی ندارند

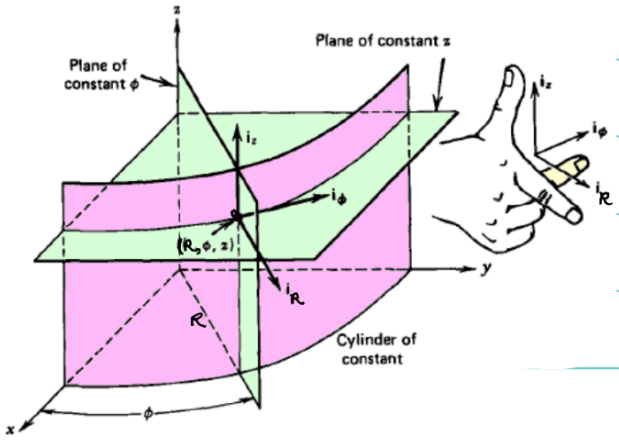
ا):

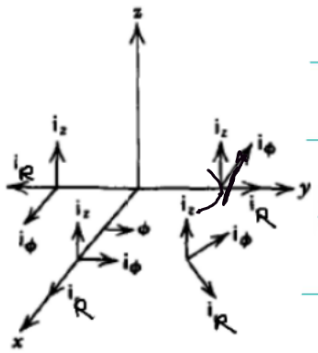
$$3\hat{a}_R\big|_{\varphi=0} + 4\hat{a}_R\big|_{\varphi=90} = 5\hat{a}_R\big|_{\varphi=53^\circ}$$



*توجه: به غیر از بردار واحد $\hat{a}_z$، بردارهای واحد $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\varphi$ جهت شان متغیر بوده و بستگی به نقطه ای دارد که بردار $\vec{A}$ از آن نقطه رسم می شود. به عبارت دیگر بردارهای واحد $\hat{a}_R$، $\hat{a}_\varphi$ تابع φ می باشند.

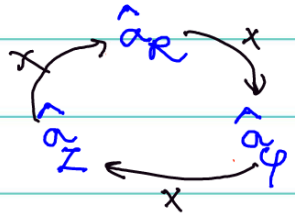
✓ به دلیل متعامد بودن صفحات، ضرب داخلی بردارها یک صفر است.





$$\begin{cases} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\varphi = 0 \\ \hat{a}_R \cdot \hat{a}_z = 0 \\ \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_z = 0 \end{cases}$$

✓ به دلیل راست‌گرد بودن سیستم، ضرب خارجی بردارهای یک از جایگشت چرخشی (راست‌گرد) حاصل می‌شوند:

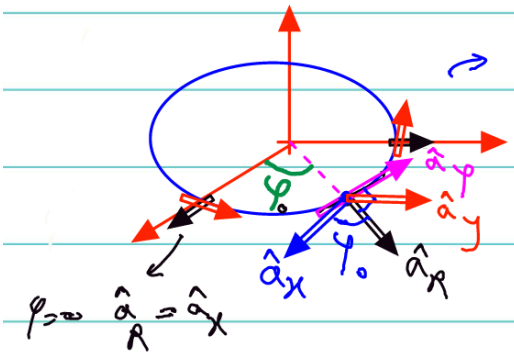


$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_z \quad , \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_R = -\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_\varphi \times \hat{a}_z = \hat{a}_R \quad , \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_R$$

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_R = \hat{a}_\varphi \quad , \quad \hat{a}_R \times \hat{a}_z = -\hat{a}_\varphi$$

✓ ضرب خارجی بردارهای واحد استوانه‌ای و کارتزین:



$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\alpha_{AB}$$

$$\hat{a}_R = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_x = \begin{cases} |\hat{a}_R||\hat{a}_x| \sin\alpha_{Rx} = \sin\varphi\,(-\hat{a}_z) \\ (\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y) \times \hat{a}_x = \sin\varphi\,(-\hat{a}_z) \end{cases}$$

$\hat{a}_R \to \hat{a}_x, \hat{a}_y$

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_y = \begin{cases} |\hat{a}_R||\hat{a}_y| \sin\varphi_{Ry} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{a}_z = \cos\varphi\,\hat{a}_z \\ (\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y) \times \hat{a}_y = \cos\varphi\,\hat{a}_z \end{cases}$$

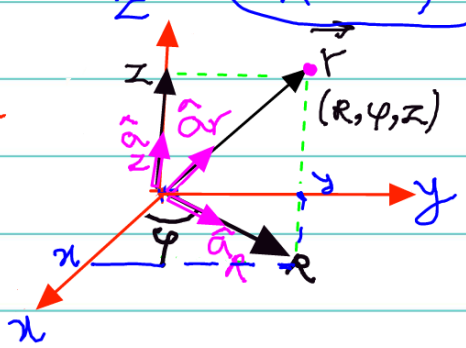
$$\hat{a}_\varphi \times \hat{a}_x = \begin{cases} |\hat{a}_\varphi||\hat{a}_x| \sin\varphi_{\varphi x} = \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)(-\hat{a}_z) = \cos\varphi(-\hat{a}_z) \\ (-\sin\varphi\hat{a}_x + \cos\varphi\hat{a}_y)\times\hat{a}_x = \cos\varphi(-\hat{a}_z) \end{cases}$$

$$\hat{a}_\varphi \times \hat{a}_y = \begin{cases} |\hat{a}_\varphi||\hat{a}_y| \sin\varphi_{\varphi y} = \sin\varphi\,(-\hat{a}_z) \\ (-\sin\varphi\hat{a}_x + \cos\varphi\hat{a}_y)\times\hat{a}_y = -\sin\varphi\,\hat{a}_z \end{cases}$$

فاصله در جهت بردار — یعنی

$\vec{r} = 2\hat{a}_R|_{\varphi=30^\circ} + 4\hat{a}_z$

$P(2, 30^\circ, 4)$



* بردارمکان:

$x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$

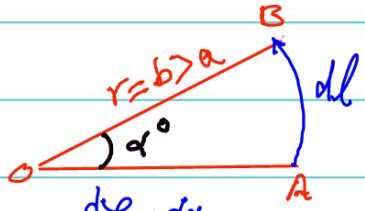
$$\vec{r} = R\hat{a}_R + z\hat{a}_z = |\vec{r}|\,\hat{a}_r$$

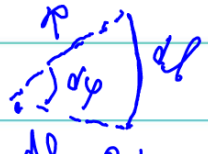
$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{R\hat{a}_R + z\hat{a}_z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

* عناصر دیفرانسیل طولی، سطحی و حجمی:

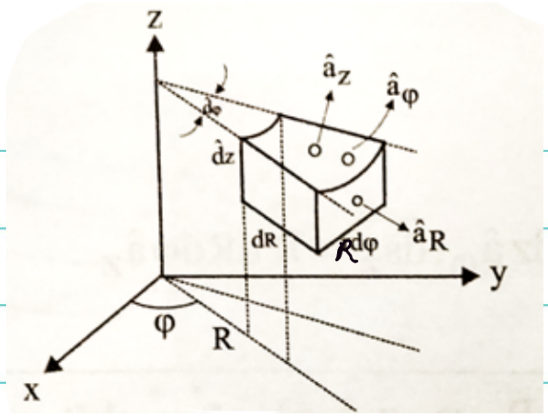






نتیجه: شعاع کمان خیلی هم است، پس اینجا R یک ضریب تبدیل کننده است و dα را جنبش رادیان است، به طول تبدیل می‌کند ←

$$dl = R\,d\alpha$$

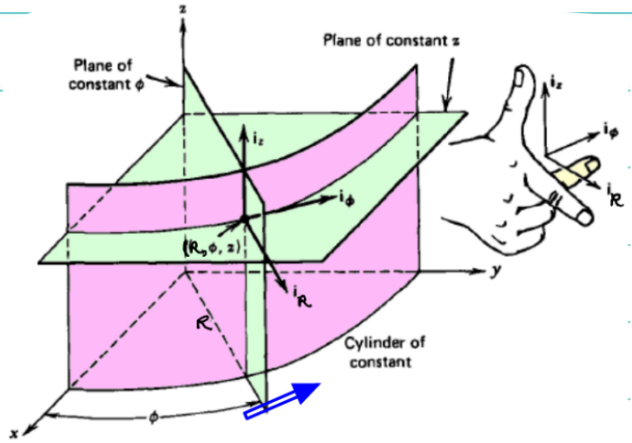


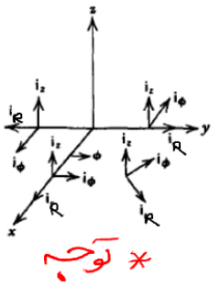
✓ المان طولی یا دیفرانسیل طولی:

$$\overrightarrow{dl} = dR\,\hat{a}_R + R\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi + dz\,\hat{a}_z$$

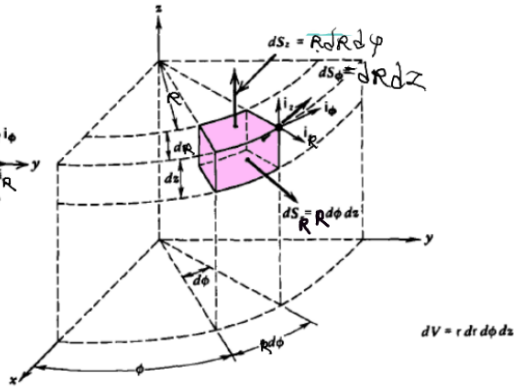
$$|\overrightarrow{dl}| = \sqrt{dR^2 + (R\,d\varphi)^2 + dz^2}$$

✓ المان سطحی:

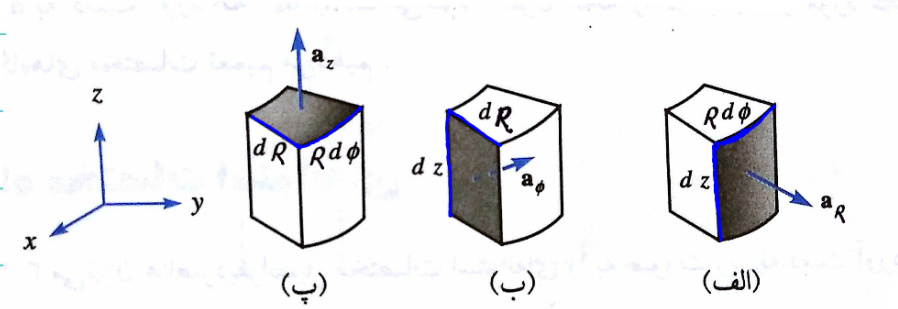




* توجه



در شکل زیر المان های سطحی متناظر با بردارهای یکه استوانه‌ای قابل مشاهده است.



الف) $\overrightarrow{dS_R} = (R\,d\varphi)(dz)\,\hat{a}_R = R\,d\varphi\,dz\,\hat{a}_R$

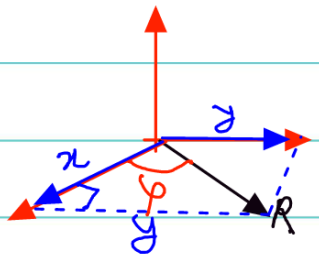
ب) $\overrightarrow{dS_\varphi} = dR\,dz\,\hat{a}_\varphi$

ج) $\overrightarrow{dS_z} = (dR)(R\,d\varphi)\,\hat{a}_z = R\,dR\,d\varphi\,\hat{a}_z$

✓ المان حجمی : به صورت ضرب هر سه المان طول در هم می‌باشد.

$$dv = dR(R\,d\varphi)(dz) = R\,dR\,d\varphi\,dz$$

*نکته : تبدیل پارامترهای استوانه‌ای و کارتزین و بالعکس :



فیثاغورث ←

$$\begin{cases} x= \\ y= \end{cases} \qquad \begin{cases} R= \\ \varphi= \end{cases}$$

$$(R,\varphi,z)=$$