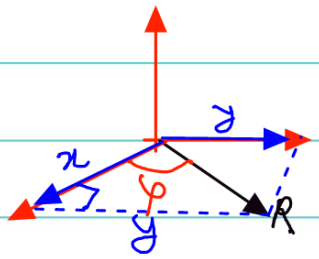
✓ المان حجمی : به صورت ضرب هر سه المان طول در هم می‌باشد.

$$dv = dR(R\,d\varphi)(dz) = R\,dR\,d\varphi\,dz$$

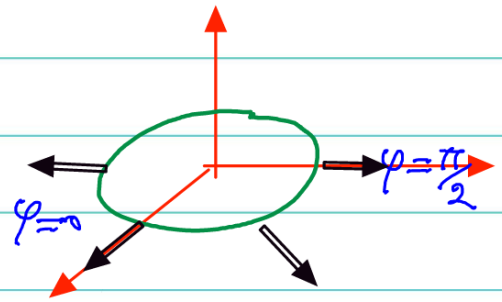
*نکته : تبدیل پارامترهای استوانه‌ای و کارتزین و بالعکس :



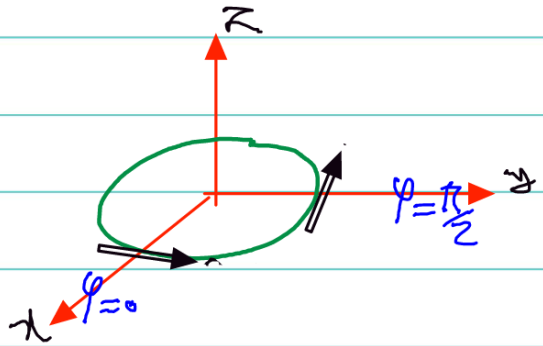
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \leftarrow \text{فیثاغورث}$$

$$(R, \varphi, z) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\ z\right)$$

* نکته: تبدیل بردارهای یکه استوانه‌ای به کارتزین با استفاده از یک تحلیل هندسی:



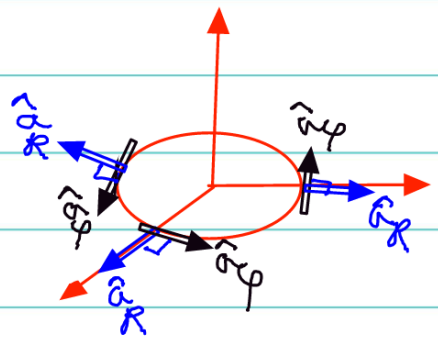
$$\hat{a}_R = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y$$



$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$

* نکته: روش حلالی محاسبه‌ی $\hat{a}_\varphi$ از روی $\hat{a}_R$:

با توجه به شکل زیر مشخص است که در هر نقطه روی محیط استوانه (سطح مقطع فلزی) بردار یکه $\hat{a}_\varphi$ نسبت به $\hat{a}_R$ 90 درجه جلو تر است. بنابراین از این واقعیت می‌توان استفاده کرد و از روی $\hat{a}_R$، $\hat{a}_\varphi$ را استخراج کرد:



$$\hat{a}_\varphi = \hat{a}_R\left(\varphi \to \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

یا

$$\hat{a}_\varphi = \frac{d}{d\varphi}\,\hat{a}_R$$

توجه کنید که اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ در بین دو بردار متعامد به معنای عمود است.

$$\hat{a}_R = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y \xrightarrow{\varphi+\frac{\pi}{2}} \hat{a}_\varphi = \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_x + \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\hat{a}_y$$

$$= -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_R = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y \xrightarrow{d/d\varphi} \hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$

نکته: تبدیل بردارهای واحد $\hat{a}_R$ و $\hat{a}_\varphi$ به خصوص وقتی در عبارتی که باید از آن انتگرال گرفته شود ظاهر شوند، ضرورت پیدا می‌کند، چون بردارهای اعلام شده ثابت نیستند و با φ تغییر می‌کنند.

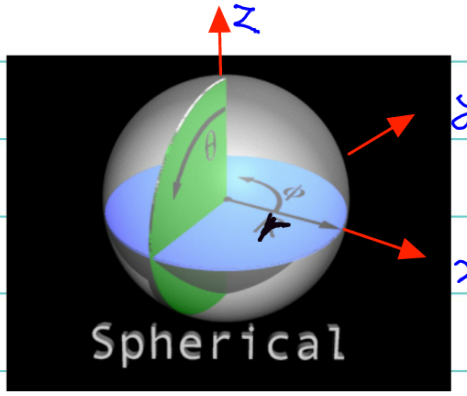
۱-۴-۳ دستگاه مختصات کروی

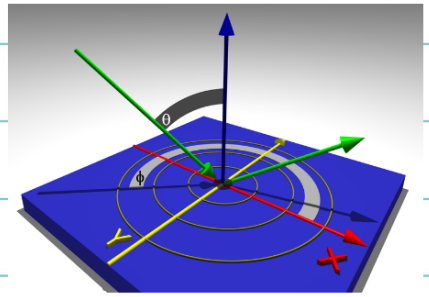
دستگاه مختصات کروی برای مسائل دارای تقارن کروی بسیار مناسب است. مختصات هر نقطه در فضا را می‌توان با مختصات دستگاه کروی به صورت (r, θ, φ) (R, φ, z) نشان داد. r فاصله نقطه P تا مبدأ یا شعاع کره‌ای به مرکز مبدأ که از نقطه P می‌گذرد، و θ زاویه بین محور z و بردار مکان نقطه P است؛ و φ (همانند دستگاه مختصات استوانه‌ای) نسبت به محور x^+ اندازه‌گیری می‌شود.

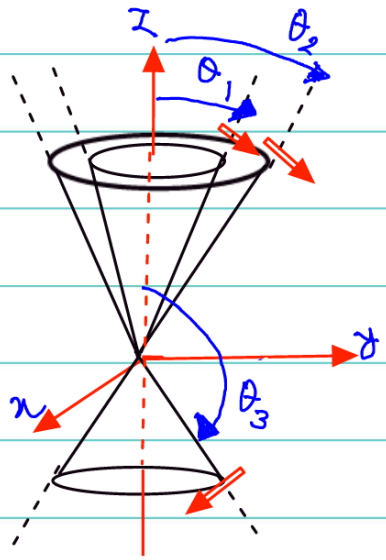
براساس این تعاریف، محدوده‌ی متغیرهای دستگاه مختصات کروی به صورت زیر است:

$0 \leq r < \infty \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

در شکل‌های زیر می‌توان براحتی مختصات r، θ و φ را مشاهده کرد.

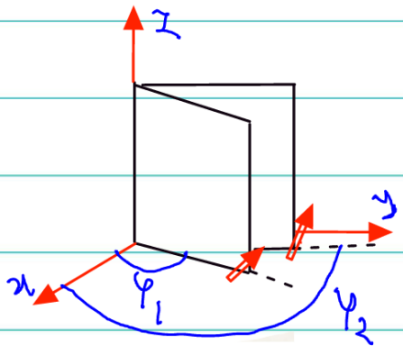






θ زاویه باز شدگی از محور $+z$ است

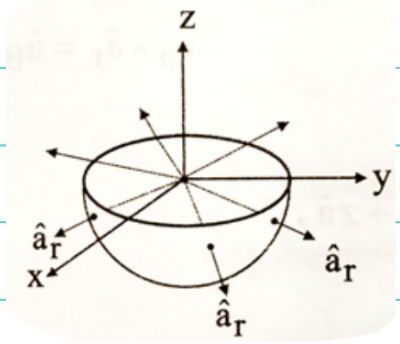
$0 \leq \theta \leq \pi$

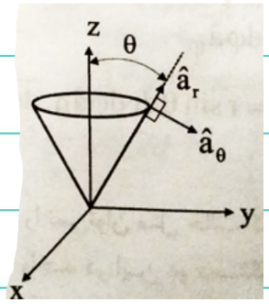


$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

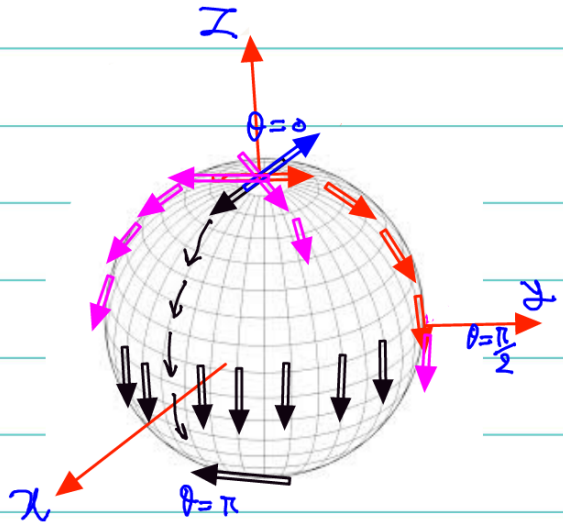
* بردارهای واحد: عبارتند از $\hat{a}_r$ ، $\hat{a}_\theta$ ، $\hat{a}_\varphi$

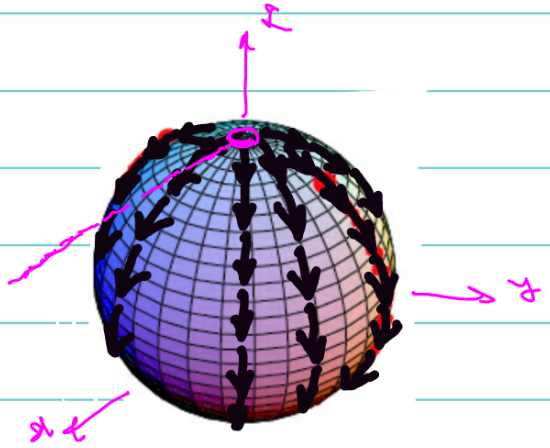
$\hat{a}_r$ در امتداد شعاع و در جهت افزایش r است. $\hat{a}_\theta$ در جهت افزایش θ و $\hat{a}_\varphi$ در جهت افزایش φ است.





با توجه به شکل زیر و جهت تغییر $\hat{a}_\varphi$ در نقاط مختلف روی سطح کره می‌توان این بردار یکه را برحسب بردارهای یکه کارتزین نوشت:





@ $\theta=0$: $\hat{a}_\varphi =$

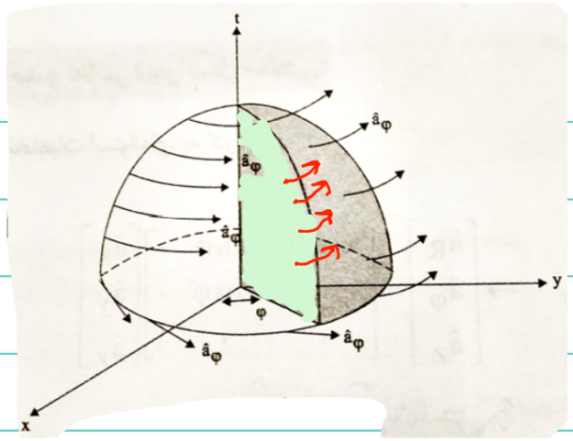
$\hat{a}_x$ $\quad \varphi = 0$

$\hat{a}_y$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$-\hat{a}_x$ $\quad \varphi = \pi$

$-\hat{a}_y$ $\quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$ یا $-\frac{\pi}{2}$

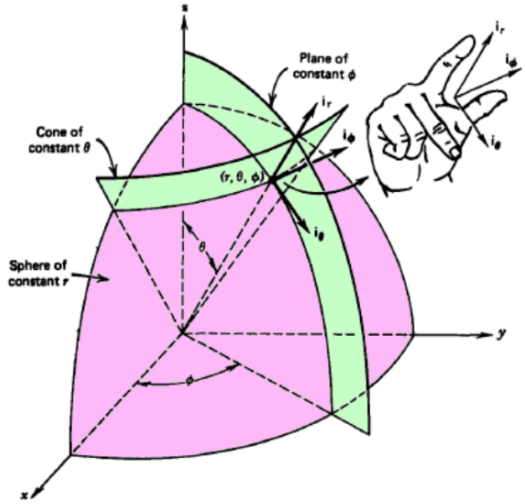
@ $\theta=\frac{\pi}{2}$: $\hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$



✓ $\hat{a}_\varphi$ محور حامل $\hat{a}_\varphi$ استوانه‌ای است.

✓ φ زاویه باز شدگی از محور x^+ است

✓ به دلیل متعامد بودن صفحات، بردارهای یکه دو به دو بر هم عمود هستند:

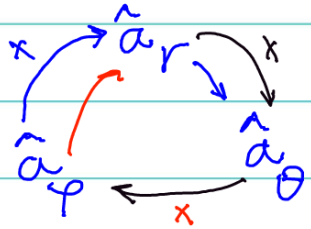


$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\varphi = |\hat{a}_r||\hat{a}_\varphi| \cos\theta_{r\varphi} = 0$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\theta = 0$$

$$\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\varphi = 0$$

✓ به دلیل راست‌گرد بودن دستگاه مختصات، ضرب خارجی بردارهای یکه دو بر هم از جایگشت چرخشی حاصل می‌شود.

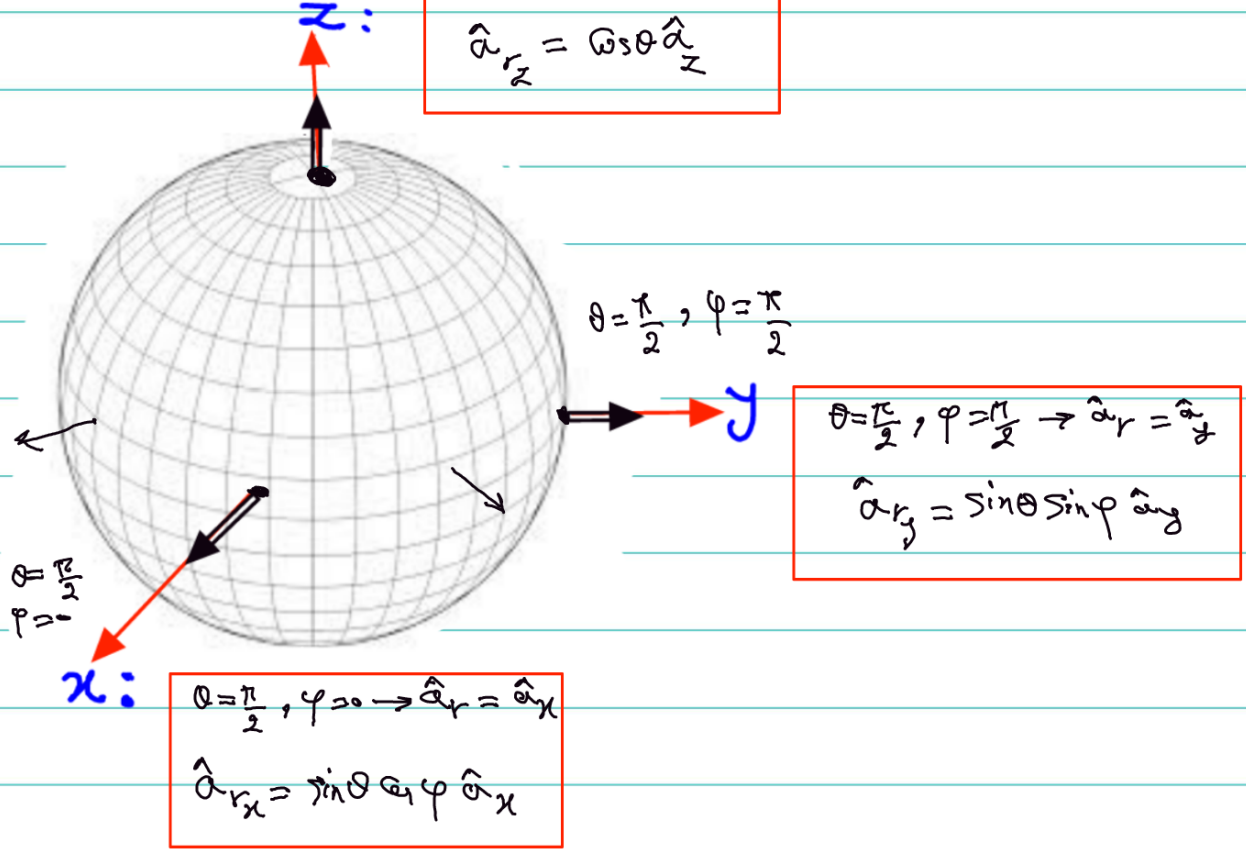


$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi$$

$$\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_r$$

$$\hat{a}_\varphi \times \hat{a}_r = \hat{a}_\theta$$

✓ نحوه‌ی نوشتن بردارهای یکه‌ی کروی برحسب کارتزین : تکنیک طلایی هندسی



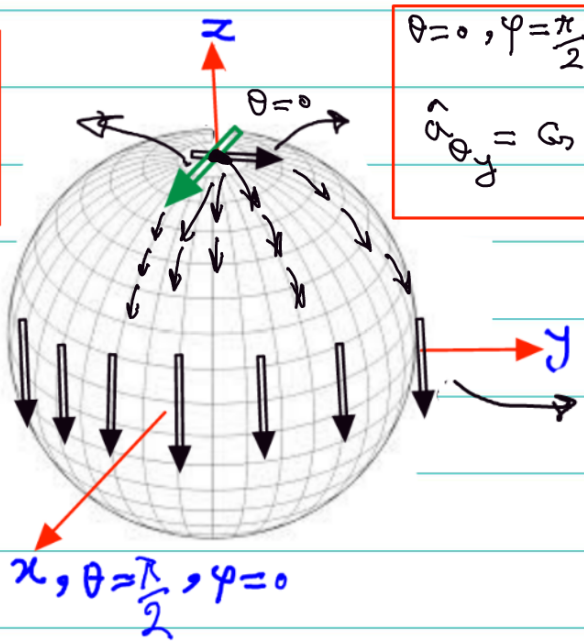
$$\hat{a}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y+\cos\theta\,\hat{a}_z$$

$\theta=0, \varphi=0 \rightarrow \hat{a}_\theta = \hat{a}_x$

$\hat{a}_{\theta_x} = \cos\theta\cos\varphi\, \hat{a}_x$

$\theta=0, \varphi=\frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{a}_\theta = \hat{a}_y$

$\hat{a}_{\theta_y} = \cos\theta\sin\varphi\, \hat{a}_y$



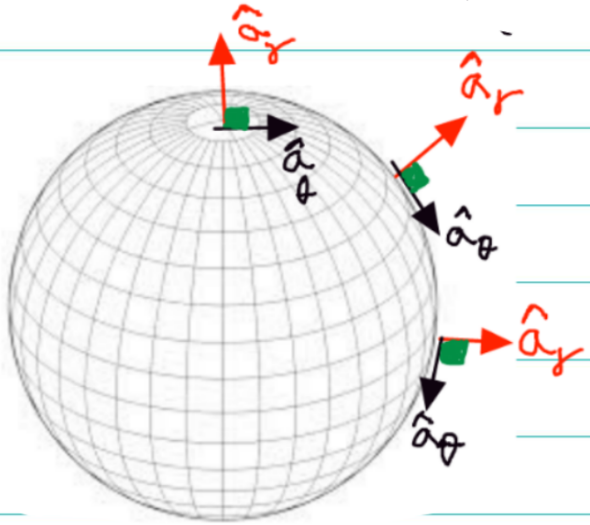
$\theta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$

$\hat{a}_{\theta_z} = -\sin\theta\, \hat{a}_z$

$$\hat{a}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\, \hat{a}_x + \cos\theta\sin\varphi\, \hat{a}_y - \sin\theta\, \hat{a}_z$$

*نکته: روش ساده در استخراج مولفه‌ی $\hat{a}_\theta$ از روی $\hat{a}_\varphi$: استفاده از هندسه‌ی مسئله

در هر نقطه روی سطح کره بردار یکه $\hat{a}_\theta$ به اندازه‌ی $\hat{a}_\varphi$ است حلوتر از



$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_r\left(\theta \rightarrow \theta+\frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\hat{a}_\theta = \frac{d}{d\theta}\hat{a}_r \quad (2)$$

بنابراین می‌توان با دوران شیفت فاز $\frac{\pi}{2}$ یا مشتق‌گیری نسبت به θ، $\hat{a}_\varphi$ را از روی $\hat{a}_\theta$ بدست آورد.

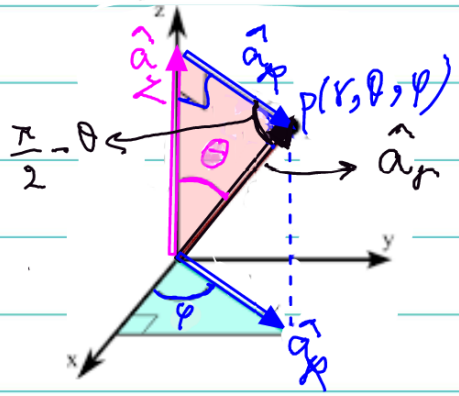
$$\hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y + \cos\theta\,\hat{a}_z$$

① $\theta \to \theta+\frac{\pi}{2}$ $\quad \hat{a}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y - \sin\theta\,\hat{a}_z$

② $\frac{d}{d\theta}$ $\quad \hat{a}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \dots$

* تبدیل بردارهای یکه کروی به استوانه‌ای:

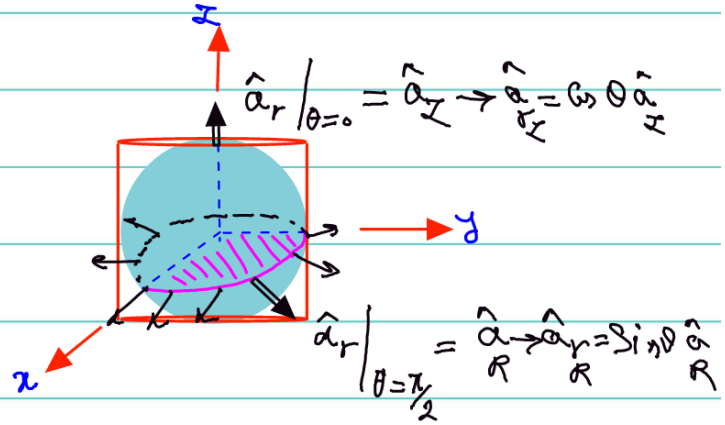
با توجه به شکل زیر و زوایای بین بردارهای یکه می‌توان این تبدیلات را استخراج کرد:



$$\begin{cases} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_r = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \\ \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = \cos\theta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta\,\hat{a}_R + \cos\theta\,\hat{a}_z$$



$$\hat{a}_r|_{\theta=0} = \hat{a}_z \to \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \cos\theta$$

$$\hat{a}_r|_{\theta=\pi/2} = \hat{a}_R \to \hat{a}_r \cdot \hat{a}_R = \sin\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta\,\hat{a}_R + \cos\theta\,\hat{a}_z$$

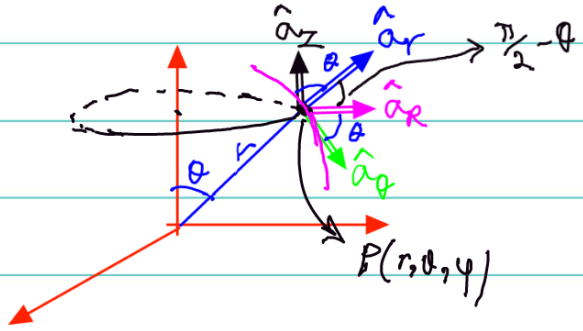
همچنین از رابطه رشته که با مشتق گیری از $\hat{a}_r$ نسبت به θ ، $\hat{a}_\theta$ بدست می‌آید می‌توان براحتی براساس بردارهای یکه قابل نوشتن است:

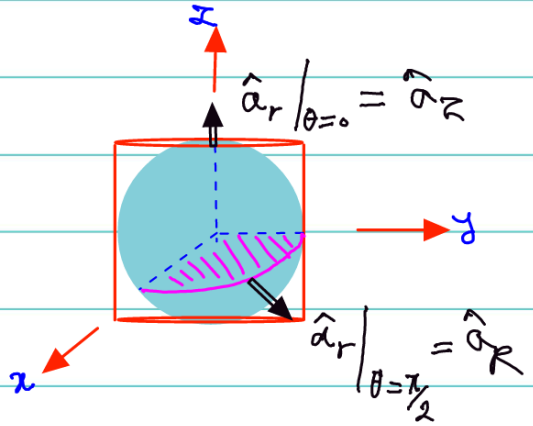
$$\hat{a}_\theta = \frac{d}{d\theta}\hat{a}_r = \cos\theta\,\hat{a}_R - \sin\theta\,\hat{a}_z$$

از طرفی پیش‌تر گفتیم که مختصه φ در هر دو دستگاه استوانه‌ای و کروی تعریف یکتایی دارد:

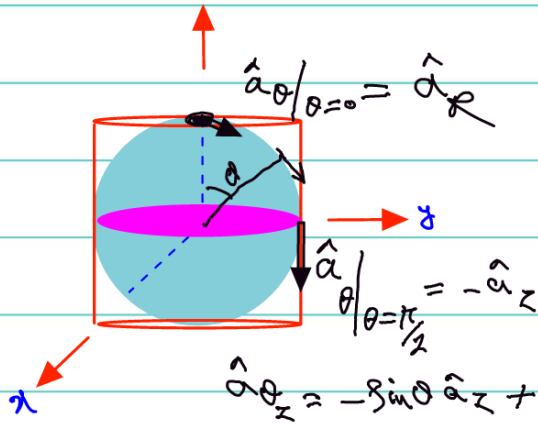
$$\hat{a}_\varphi = \text{استوانه‌ای} \quad \hat{a}_\varphi = \text{کروی} = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$

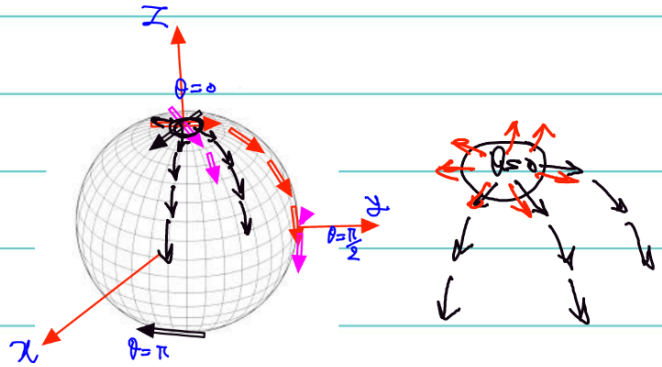
* نکته: شکل زیر در پیدا کردن ارتباط بین بردارهای یکه کروی و استوانه‌ای کمک زیادی می‌کند.





$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \cos\theta$$
$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_R = \sin\theta$$



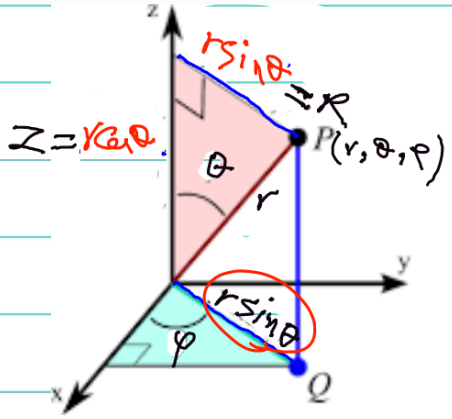


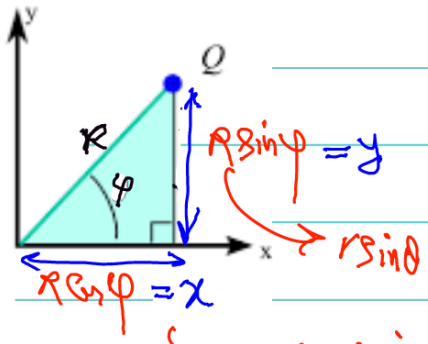
$$\hat{a}_\theta = -\sin\theta\,\hat{a}_z + \cos\theta\,\hat{a}_R$$

$$\begin{cases} \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z = -\sin\theta \\ \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_R = \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \\ \hat{a}_r \cdot \hat{a}_R = \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z = \\ \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_R = \end{cases}$$

نکته: با استفاده از شکل‌های زیر براحتی می‌توان متغیرهای (x,y,z) ، (R,φ,z) ، (r,θ,φ) را بهم تبدیل کرد:





$\rightarrow y = r\sin\theta\sin\varphi$

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$\hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x$

$$\begin{cases} R = r\sin\theta \quad , \quad z = r\cos\theta \\ x = R\cos\varphi \quad , \quad y = R\sin\varphi \end{cases}$$

درنتیجه:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\cos\varphi = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{R} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

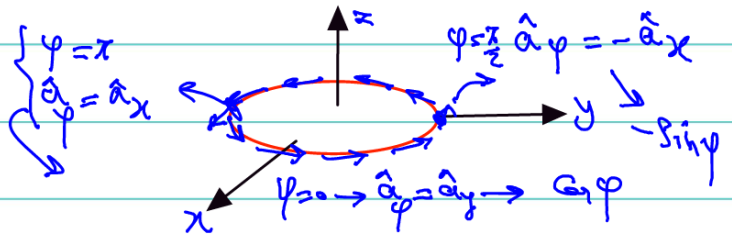
$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$, $\rho^2 = x^2+y^2$

تبدیل مختصات کارتزین به کروی:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ یا } \sqrt{\rho^2+z^2} \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y$$



بردارهای یکه کروی برحسب مختصات مکانی (طولی) در کارتزین و استوانه‌ای

$\vec{r} = |\vec{r}|\,\hat{a}_r$

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{cases} \dfrac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{r} = \dfrac{}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{کارتزین} \\ \dfrac{\rho\hat{a}_\rho + z\hat{a}_z}{r} \ , \ \rho\hat{a}_\rho = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y & \text{استوانه} \end{cases}$$

($r = \sqrt{\rho^2+z^2}$)

$\vec{R} = |\vec{R}|\,\hat{a}_R$

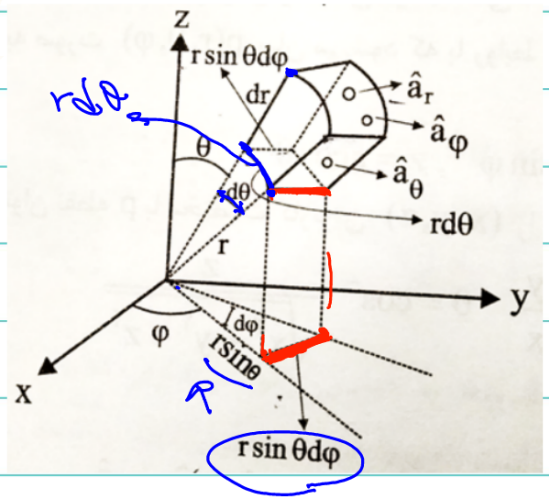
$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

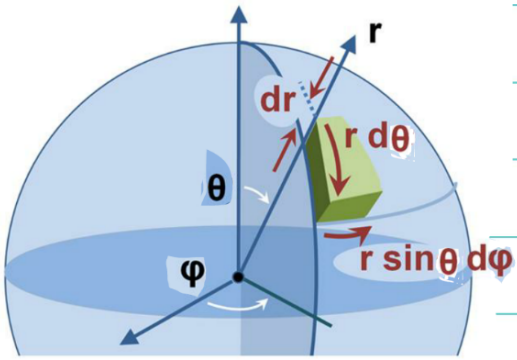
$$\hat{a}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{a}_x + \cos\varphi\,\hat{a}_y = -\frac{y}{R}\hat{a}_x + \frac{x}{R}\hat{a}_y$$

$$\hat{a}_\theta = -\sin\theta\,\hat{a}_z + \cos\theta\,\hat{a}_R \qquad \hat{a}_R = \frac{R}{r}\,\hat{a}_z + \frac{r}{r}\,\hat{a}_R$$

* المان‌های طولی، سطحی و حجمی در مختصات کروی:

در شکل زیر متغیرهای کروی و المان‌های طولی مشخص شده‌اند:





✓ المان طول در راستای r : dr (از جنس متر)

✓ " " " " θ : $rd\theta$ (طولی که زاویه $d\theta$ را جاروب می‌کند r است)

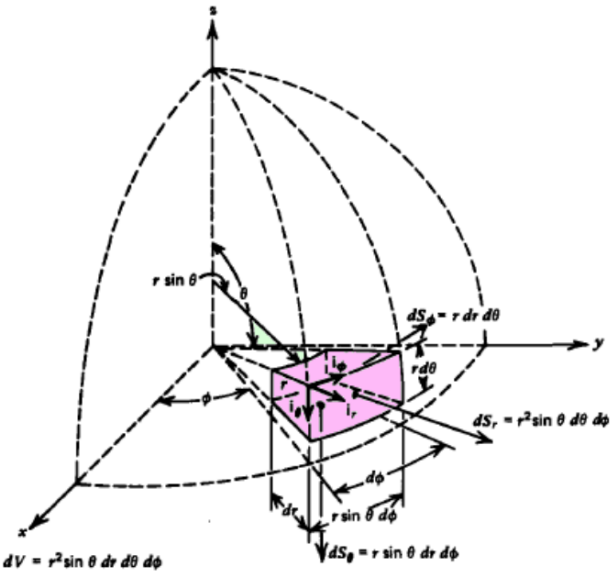
✓ المان طول در راستای φ : $r\sin\theta\,d\varphi$

(طولی که زاویه $d\varphi$ را جاروب می‌کند، R است و این یا به عبارتی $r\sin\theta$ است و این ضریب باعث می‌شود که $d\varphi$ به المان طولی و از جنس متر تبدیل شود)

پس:

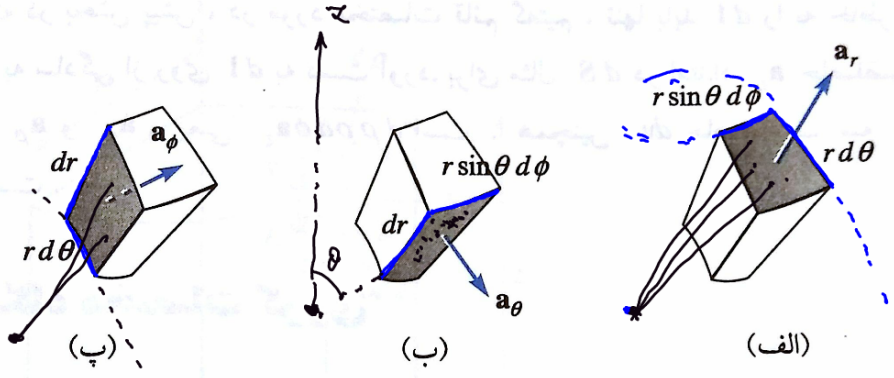
$$\vec{dl} = dr\hat{a}_r + r d\theta \hat{a}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\, \hat{a}_\varphi \qquad |\vec{dl}| = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2}$$

* المان سطحی:



در شکل زیر هر المان سطح مستطیل با بردارهای یکه مربوطه قابل تعریف هستند.

$r\sin\theta\,d\phi$ ← طول
$r\,d\theta$ ← عرض



الف) $\vec{ds_r} = (r d\theta)(r\sin\theta\, d\varphi)\hat{a}_r = r^2\sin\theta\, d\theta d\varphi\, \hat{a}_r$

ب) $\vec{ds_\theta} = (dr)(r\sin\theta\, d\varphi)\hat{a}_\theta = r\sin\theta\, dr\, d\varphi\, \hat{a}_\theta$

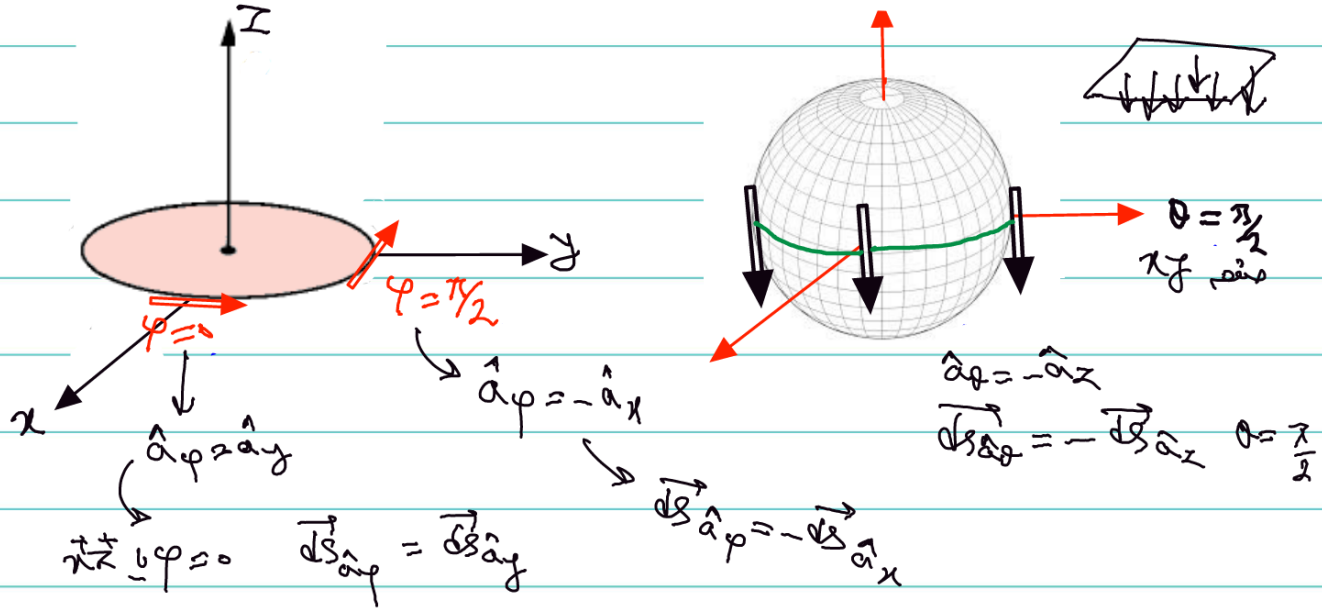
پ) $\vec{ds_\varphi} = (dr)(r d\theta)\hat{a}_\varphi = r\, dr\, d\theta\, \hat{a}_\varphi$

* المان حجمی: از ضرب هر سه المان طولی در مختصات کروی حاصل می‌شود و جهت ندارد.

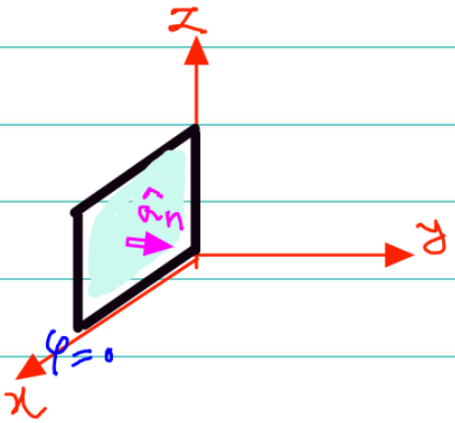
$$dV = (dr)(r\,d\theta)(r\sin\theta\,d\varphi) = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

۱-۵ تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی (روش حلالی و نوینی)

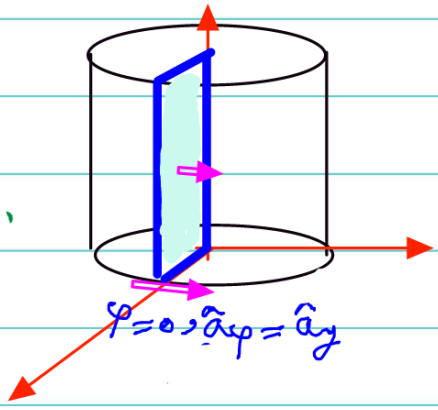
در ادامه این تبدیل‌ها که متناظر با صفحات مرزی دستگاه‌های مختصات صورت می‌گیرد، به طور گرافیکی ارائه می‌شود.



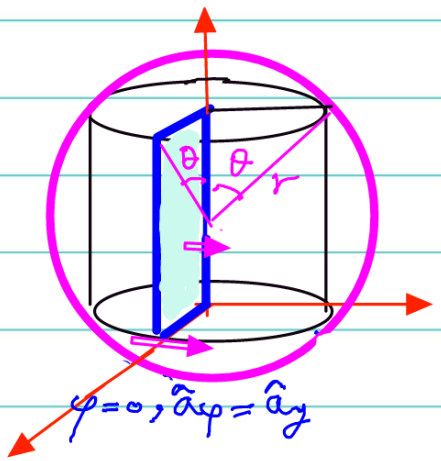
✓ در صفحه‌ی $\varphi=0$ تبدیلات مورد نظر به صورت های زیر خواهد بود:



$$\overrightarrow{ds}_y = dx\,dz\,\hat{a}_y\Big|_{\varphi=0}$$



$$\overrightarrow{ds}_\varphi = dR\,dz\,\hat{a}_\varphi\Big|_{\varphi=0}$$



$$\overrightarrow{ds}_\varphi = (dr)(r\,d\theta)\hat{a}_\varphi = r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi$$

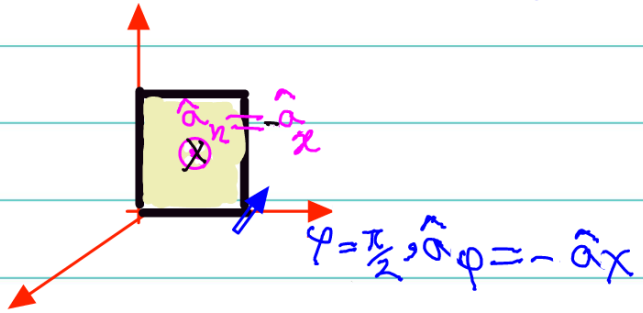
می‌توان تبدیلات گرافیکی را به صورت روابط زیر در $\varphi=0$ جمع بندی کرد:

$\varphi=0 \rightarrow \hat{a}_\varphi = \hat{a}_y$

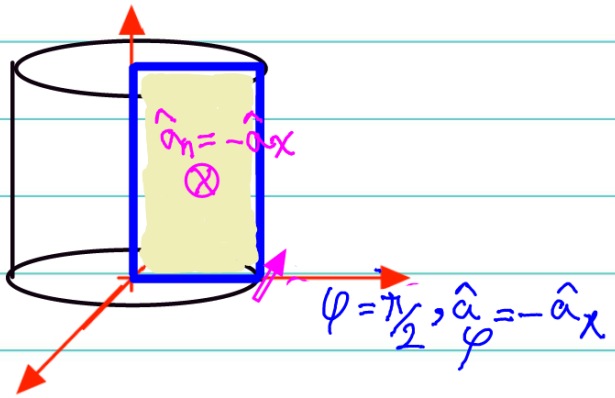
$\vec{ds}_y = dx\,dz\,\hat{a}_y \xrightarrow{\varphi=0} \vec{ds}_\varphi$:

- استوانه‌ای و $\varphi=0$: $dr\,dz\,\hat{a}_\varphi$
- کروی و $\varphi=0$: $r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi$

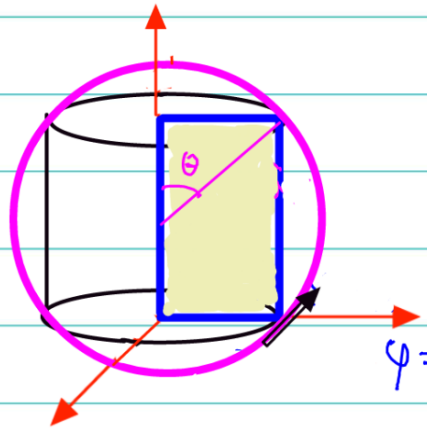
* مشابه $\varphi=0$ برای $\varphi=\frac{\pi}{2}$ نیز می‌توان این تبدیل را انجام داد:



$\vec{ds}_x = dy\,dz\,\hat{a}_x$



$\vec{ds}_\varphi = dr\,dz\,\hat{a}_\varphi\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\vec{ds}_x\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$



$\vec{ds}_\varphi = r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\vec{ds}_x\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$

در تبدیل $\varphi = \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$$

$$\overrightarrow{ds}_x = dy\,dz\,\hat{a}_x \xrightarrow{\varphi = \frac{\pi}{2}} \overrightarrow{ds}_\varphi = \begin{cases} -dr\,dz\,\hat{a}_\varphi & , \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ استوانه‌ای} \\ -r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi & , \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ کروی} \end{cases}$$

* به طور مشابه برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ می‌توان نوشت:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$$

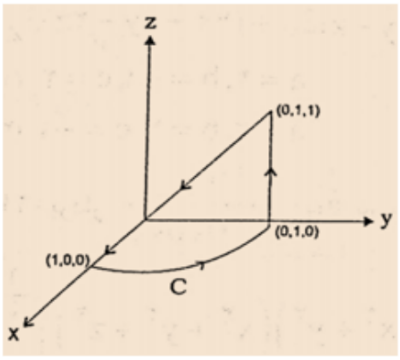
$$\overrightarrow{ds}_z = \begin{cases} dy\,dx\,\hat{a}_z \\ R\,dR\,d\varphi\,\hat{a}_z \end{cases} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} \overrightarrow{ds}_\theta = \begin{cases} -r\sin\theta\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_\theta & , \theta = \frac{\pi}{2} \\ = -r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

بعنوان کاربرد از این تبدیلات در ادامه نمونه سئوالی حل می‌شود.



تست ۱

انتگرال میدان $\vec{A} = ۳\cot\theta\,\hat{a}_r - ۶\hat{a}_\theta$ روی سطح حاصل از مسیر بسته مشخص شده در شکل زیر کدام است؟



$\oint_S \vec{A}.\vec{ds}$

۱) $\frac{\pi}{۲}$

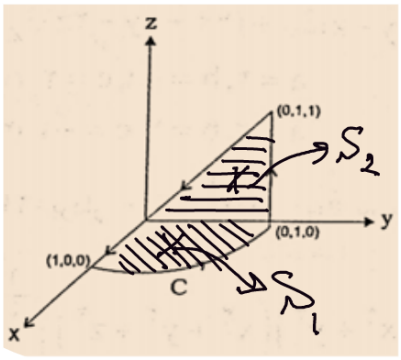
۲) $-\pi$

۳) $\frac{۳\pi}{۲}$

۴) $-\frac{\pi}{۲}$

پاسخ:

$\vec{A}$ در مختصات کروی است ولی S_1 و S_2 به ترتیب در مختصات استوانه‌ای و کارتزین است پس در ابتدا باید تمامی کمیت‌ها را به شکل استاندارد درآوریم و کل پارامترها را به یک مختصات انتقال دهیم.



$S = S_1 + S_2$

$$I = \int \vec{A}.\vec{ds} = \int_{S_1} \vec{A}.\vec{ds_1} + \int_{S_2} \vec{A}.\vec{ds_2}$$

S_1 یعنی @ $z=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ ، $\hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$

$\overrightarrow{ds_1} = R\,dR\,d\varphi\,\hat{a}_z \xrightarrow{\theta=\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{ds_\theta} = -dr(r\sin\theta\,d\varphi)\,\hat{a}_\theta$

$= -r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_\theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$

S_2 یعنی @ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ و $x=0 \longrightarrow \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$

$\overrightarrow{ds_2} = dy\,dz\,\hat{a}_x \xleftrightarrow{\varphi=\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{ds_\varphi} = -dr(r\,d\theta)\,\hat{a}_\varphi$

$$\int_{S_1} \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds_1} = \iint (3\cot\theta\,\hat{a}_r - 6\hat{a}_\theta)\cdot(-r\,dr\,d\varphi\,\hat{a}_\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 6r\,dr\,d\varphi$$

$$= 6 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\int_{S_2} \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds_2} = \iint (3\cot\theta\,\hat{a}_r - 6\hat{a}_\theta)\cdot(-r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi) = 0$$

$$\int \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{3\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}$$

۱-۷ معادله قطبی کره در حالتهای مختلف:

در بعضی از مسائل الکترومغناطیس و حل انتگرالهای میدانی بهتر است مختصات مکانی یک کره به صورت قطبی بیان شود.

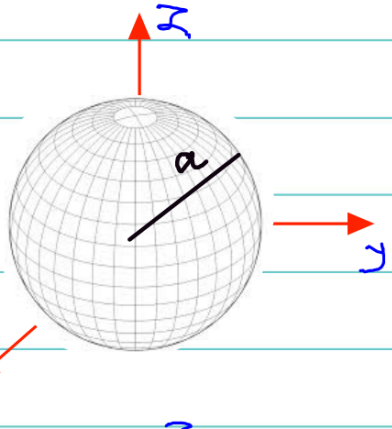
تا اینجا حل تست بالا بود.

معادله استاندارد کره: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ $\quad \{(x_0,y_0,z_0), r=a$

فرم قطبی کره: $r=Af(\theta)g(\varphi)$

$A=r_{max}$ دورترین نقطه سطح کره از مبدأ مختصات

۱) کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات:



$x^2+y^2+z^2=a^2$

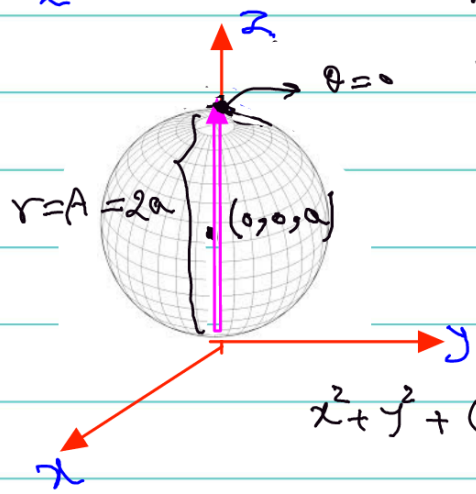
$r^2=a^2 \longrightarrow r=a$

۲) کره‌ای به مرکز $(0,0,a)$:

$r=Af(\theta)g(\varphi)$

$r=2a\,((1))$

$f(\theta=0)$



الف) استفاده از فرم کارتزین و تبدیل به قطبی:

$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=2az \quad , z=r\cos\theta$

$r^2=2a(r\cos\theta) \longrightarrow \boxed{r=2a\cos\theta}$

$r = A f(\theta) g(\varphi)$

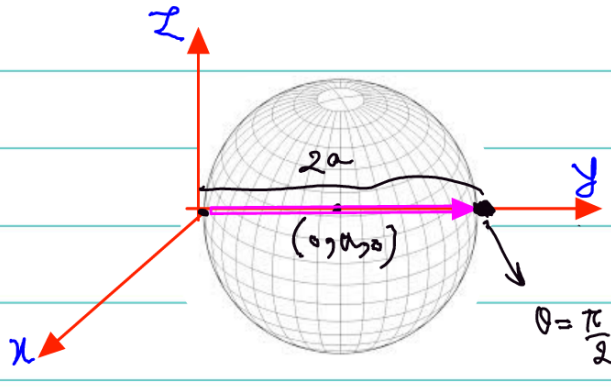
ب) مشخص کردن $f(\theta)$ ، $g(\varphi)$ ، A در هر شکل:

$f(\theta)\big|_{\theta=0} = 1 \rightarrow f(\theta) = \cos\theta$

$r=2a$ با $\theta=0$ مشخص شرطات و φ تقعشی ندارد پس مستقل از φ خواهد بود.

$r = 2a\cos\theta$

2) کره‌ای به مرکز $(0, a, 0)$:

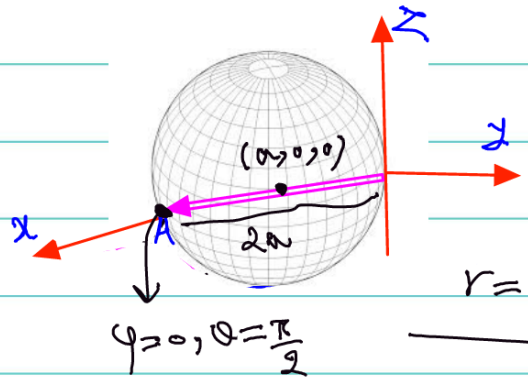


$r_{max} = A = 2a \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}}$

$\longrightarrow r = 2a \sin\theta \sin\varphi$

$x^2 + (y-a)^2 + z^2 = a^2 = \cdots \curvearrowleft$

3) کره به مرکز $(a,0,0)$



$r = 2a\cos\varphi\sin\theta$

$\varphi=0, \theta=\frac{\pi}{2}$

$$(x-a)^2+y^2+z^2=a^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=2ax$$

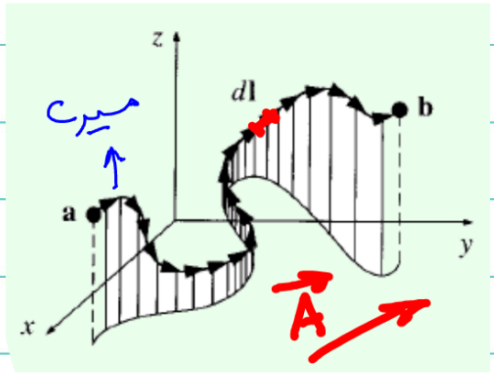
$$r^2 = 2a(r\sin\theta\cos\varphi)$$

$$\longrightarrow r = 2a\sin\theta\cos\varphi$$

۱-۷ انتگرال‌های مهم توابع برداری:

* انتگرال خط: $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$

حاصل این انتگرال یک کمیت اسکالر بوده و بیانگر کار انجام شده توسط بردار $\vec{A}$ در مسیر C است.



$\vec{dl}$: عنصر طول در امتداد مسیر

$\vec{A}$: بردار دلخواه و در حالت کلی تابع مکان

اگر مسیر بسته باشد از $\oint_C$ برای انتگرال روی خط استفاده می‌شود.

$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}$

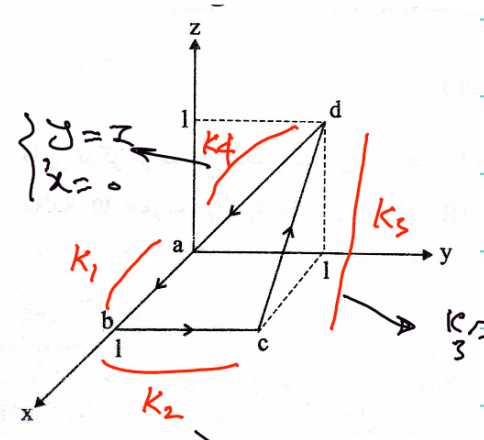


صورت‌های دیگر از انتگرال خطی به صورت $\int_C \vec{A}\times\vec{dl}$ ، $\int A\,\vec{dl}$ (حاصل آن‌ها کمیت برداری است)

$\int \vec{A}\,dl$ (حاصل کمیت برداری) و $\int A\,dl$ (حاصل انتگرال) برداشتر.



مثال ۱ : انتگرال خطی $\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}$ را برای مسیر بسته C در شکل زیر محاسبه نمایید.

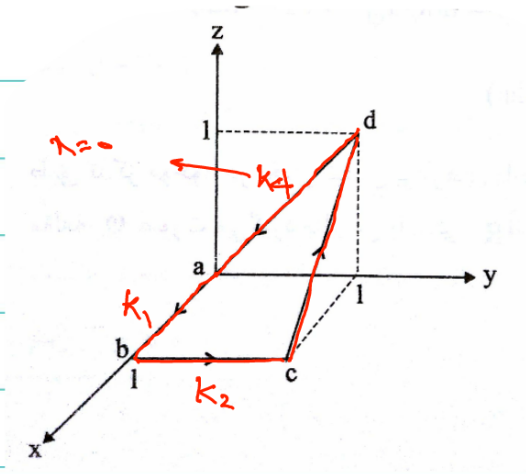


$\vec{A} = xy\,\hat{a}_x + yz\,\hat{a}_y + xz\,\hat{a}_z$

K_3 معادله مسیر : $\begin{cases} x+z=1 \rightarrow x=1-z \\ y=1 \end{cases}$

پاسخ :

$x=1,\ 0<y<1,\ z=0$



$$\oint_{abcda} \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int_a^b \vec{A}\cdot\vec{dl_1} + \int_b^c A\cdot\vec{dl_2} + \int_c^d \vec{A}\cdot\vec{dl_3} + \int_d^a \vec{A}\cdot\vec{dl_4}$$

$$k_1 = \int_a^b \vec{A}\cdot\vec{dl_1}\ ,\quad \left\{ \vec{dl_1} = dx\,\hat{a}_x\ ,\ 0<x<1\ ,\ y=z=0 \right.$$

$$= \int_0^1 \vec{A}\cdot dx\,\hat{a}_x = \int_0^1 (xy\,\hat{a}_x)\cdot(dx\,\hat{a}_x) = 0$$

($y=0$)

$$k_2 = \int_b^c \vec{A}\cdot\vec{dl_2}\ ,\quad \left\{ \vec{dl_2} = dy\,\hat{a}_y\ ,\ 0<y<1\ ,\ x=1, z=0 \right.$$

$$k_2 = \int \vec{A}\cdot dy\,\hat{a}_y = \int_0^1 (yz\,\hat{a}_y)\cdot dy\,\hat{a}_y = 0$$

($z=0$)

$$k_3 = \int_c^d \vec{A}\cdot\vec{dl_3}\ ,\quad \left\{ \vec{dl_3} = dx\,\hat{a}_x + dz\,\hat{a}_z\ ,\ y=1,\ 0<x<1,\ 0<z<1 \right.$$

$$k_3 = \int A_x\,dx + \int A_z\,dz$$

$$= \int_1^0 xy\,dx + \int_0^1 xz\,dz = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

($y=1$, $x=1-z$)

$$K_4=\int_d^c \vec{A}\cdot\vec{dl}_4 \;,\; \vec{dl}_4 = dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z \;,\; x=0,\quad \begin{matrix} y:1\to 0 \\ z:1\to 0 \end{matrix}$$

$$K_4 = \int A_y\,dy + \int A_z\,dz = \int_1^0 yz\,dy + \int_1^0 xz\,dz = -\frac{1}{3}$$

$$\oint_{abcda}\vec{A}\cdot\vec{dl} = \sum_{i=1}^{4} K_i = 0+0-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\ \checkmark$$

تست 2

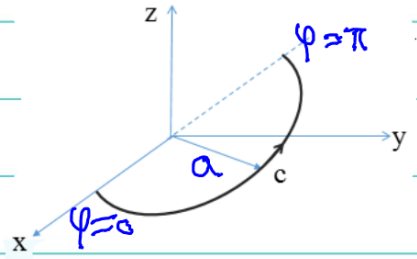


انتگرال $\int_c \vec{A}dL$ وقتی که A در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت $\vec{A}=\sin\varphi\hat{a}_R$ بیان شود و c نیم دایره ای به شعاع a واقع در صفحه x-y و محدود به $0<\varphi<\pi$ باشد، کدام است؟ (مرکز نیم دایره بر مبدأ مختصات منطبق است).

(تألیفی)

۱) $\frac{\pi}{2}\hat{a}_x$ ۲) $-\frac{\pi a}{2}\hat{a}_x$ ۳) $\frac{a}{4}\hat{a}_y$ ۴) $\frac{\pi a}{2}\hat{a}_y$

پاسخ:



$$dl = s\cdot$$

$$\vec{dl} = dr\,\hat{a}_R + R\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi + dz\,\hat{a}_z$$

$$\vec{dl} = a\,d\varphi\,\hat{a}_\varphi \longrightarrow dl = a\,d\varphi$$

$$\int \vec{A}\,dl = \int_0^\pi \sin\varphi\,\hat{a}_R\,(a\,d\varphi) \qquad \hat{a}_R = \cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y$$

$$= \int_0^\pi \sin\varphi\,(\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\varphi\,\hat{a}_y)\,a\,d\varphi$$

$$= a\left[\hat{a}_x\int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \hat{a}_y\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi\right]$$

$$= a\left[\hat{a}_x(0) + \hat{a}_y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi a}{2}\hat{a}_y$$

گزینه ۴

* نکته: انتگرال‌های مربع سینوس در یک بازه‌ی متقارن با اختلاف $\frac{\pi}{2}$، π و 2π برابر نصف بازه خواهد بود:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi - 0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\pi}{2}$$

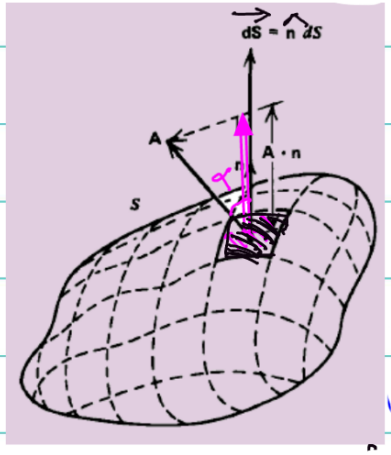
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{2\pi - 0}{2} = \pi$$

* انتگرال سطح $\oint_S \vec{A}.d\vec{s}$ ، $\int_S \vec{A}.d\vec{s}$

$d\vec{s}$ بردار به اندازه عنصر سطح ds و در جهت عمود بر آن است:

$$d\vec{s} = \hat{a}_n ds$$
$$\text{یا } ds\,\hat{a}_n$$



$$\vec{A}.d\vec{s} = |\vec{A}||d\vec{s}|\cos\alpha = (A\cos\alpha)ds$$

$$\vec{A}.d\vec{s} = \vec{A}.(\hat{a}_n ds) = (\vec{A}.\hat{a}_n)ds$$

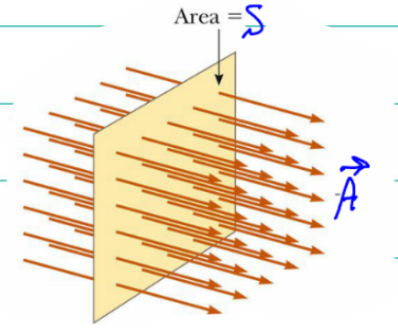
✓ مقدار $\vec{A}.d\vec{s}$ یک کمیت اسکالر است و می‌تواند مقدار مثبت یا منفی باشد.

✓ اگر انتگرال روی سطح بسته انجام شود، معمول است که بردار $d\vec{s}$ در تمام نقاط سطح به طرف بیرون آن در نظر گرفته شود.

✓ عنصر ds این‌قدر کوچک است که بردار $\vec{A}$ در محل آن فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.



انتگرال $\oint_S \vec{A}.\vec{ds}$ معرف شار عبوری توسط بردار $\vec{A}$ از سطح S می‌باشد.



اگر بردار $\vec{A}$ یکنواخت باشد یعنی تغییرات مکانی نداشته باشد در این صورت $\oint \vec{A}.\vec{ds} = AS$

✓ شار را با علامت ψ نشان می‌دهند.

$$\psi = \oint_S \vec{A}.\vec{ds}$$

✓ در الکترومغناطیس اگر $\vec{A}$ میدان الکتریکی باشد ψ شار الکتریکی و اگر $\vec{A}$ میدان مغناطیسی باشد

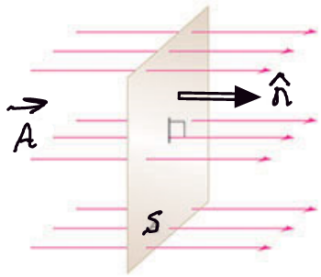
ψ شار مغناطیسی خواهد بود.

$$\vec{A}.\vec{ds} = |\vec{A}||\vec{ds}|\cos\alpha$$

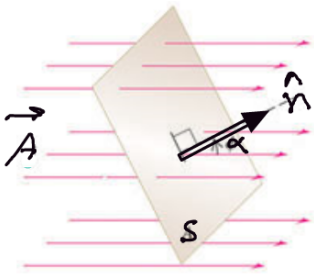
Max مقدار این عبارت یعنی شار گذرنده از سطح:

$\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha = 1 \rightarrow (\vec{A}.\vec{ds}) \rightarrow$ Max

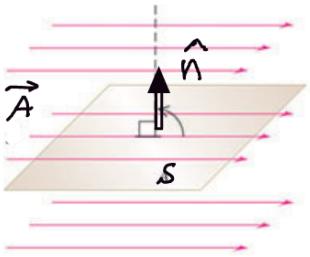
↳ $\vec{A}$ و $\vec{ds}$ هم جهت باشند ← شار عبوری از سطح S توسط $\vec{A}$ بیشترین مقدار خواهد بود



(a) Surface is face-on to electic field.



(b) Surface is tilted from a face-on orientation by an angle φ.



(c) Surface is edge-on to electric field.

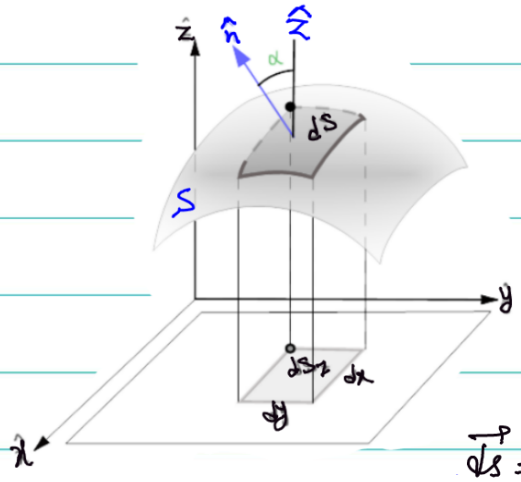
$\Psi = \Psi_{max} = AS$ $\quad 0 < \Psi < \Psi_{max}$ $\quad \Psi = 0 = \Psi_{min}$

$\Psi = |\vec{A}| S \cos\alpha$

بازهم A یکنواخت



سطح S در حالت کلی معادله‌ای به صورت $f(x,y,z)=k$ دارد



$$\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

بردار یکه عمود بر سطح S

$\vec{ds} = ds\,\hat{a}_n$, $ds_z = \vec{ds}\cdot\hat{a}_z = ds(\hat{a}_n\cdot\hat{a}_z) = ds\cos\alpha$

$$\rightarrow \begin{cases} ds_z = ds\,|\cos\alpha| \rightarrow ds = \dfrac{ds_z}{|\cos\alpha|} \\ \hat{a}_n\cdot\hat{a}_z = \cos\alpha \end{cases}$$

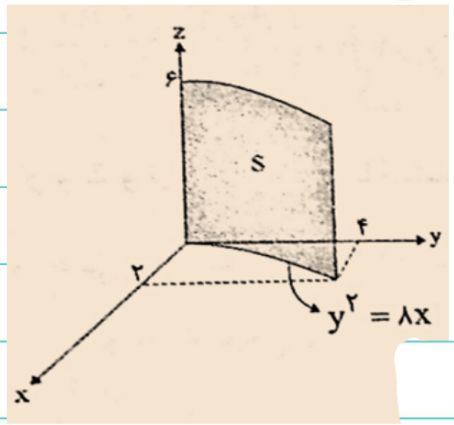
$$\vec{ds} = ds\,\hat{a}_n = \frac{ds_z}{|\cos\alpha|}\hat{a}_n \rightarrow \boxed{\vec{ds} = \hat{a}_n \frac{dx\,dy}{|\hat{a}_n\cdot\hat{a}_z|}}$$

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} \int_{S_x} \vec{A}\cdot\hat{a}_n \dfrac{dy\,dz}{|\hat{a}_n\cdot\hat{a}_x|} & \text{یک تصویر کردن صفحه } x=0 \text{ است} \\ \int_{S_y} \vec{A}\cdot\hat{a}_n \dfrac{dx\,dz}{|\hat{a}_n\cdot\hat{a}_y|} & \text{یک تصویر کردن صفحه } y=0 \text{ است} \\ \int_{S_z} \vec{A}\cdot\hat{a}_n \dfrac{dx\,dy}{|\hat{a}_n\cdot\hat{a}_z|} & \text{یک تصویر کردن صفحه } z=0 \text{ است} \end{cases}$$



تست 3

مقدار انتگرال $\int_s \vec{A}\cdot\vec{ds}$ که در آن $\vec{A} = 2y\hat{a}_x - z\hat{a}_y + x^2\hat{a}_z$ می باشد و S به صورت شکل زیر است، کدام است؟ (تالیفی)



۱) ± 132

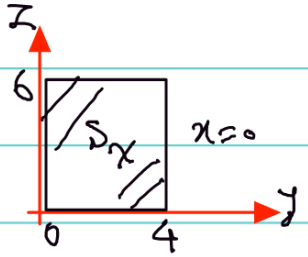
۲) ± 128

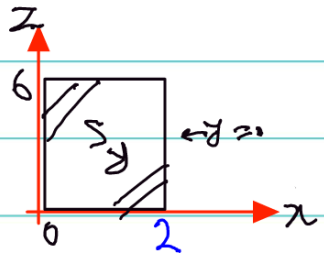
۳) ۱۳۲

۴) ۱۲۸

پاسخ:

معادله رویه $f(x,y,z) \Rightarrow 8x - y^2 = 0$ یا $-8x + y^2 = 0$





$$f = 8x - y^2 = 0 \longrightarrow \hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad , \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\hat{a}_n = \frac{8\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y}{\sqrt{8^2 + (2y)^2}}$$

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_{S_x} \vec{A}\cdot\hat{a}_n \frac{dy\,dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_x|} \quad , \quad \hat{a}_n \cdot \hat{a}_x = \frac{8}{\sqrt{64+4y^2}} = \frac{4}{\sqrt{16+y^2}}$$

$$= \int_{S_x} (2y\hat{a}_x - z\hat{a}_y + x\hat{a}_z)\cdot \frac{8\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y}{\sqrt{64+4y^2}} \frac{dy\,dz}{4\sqrt{16+y^2}} \quad , x=0$$

$$= \iint_{S_x} \frac{1}{4}(8y + yz)\,dy\,dz = \frac{1}{4}\int_0^4 y\,dy \int_0^6 (8+z)\,dz = 128$$

$$f = y^2 - 8x = 0 \longrightarrow \hat{a}_n = -\frac{8\hat{a}_x - 2y\hat{a}_y}{\sqrt{64+4y^2}} \dashrightarrow \text{انتگرال} = -128$$

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{s} = \pm 128$$

گزینه 2



در بعضی از سوال‌ها لازم است که معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه را بلد باشیم. معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه‌ی معلوم (a_1, b_1, c_1)، (a_2, b_2, c_2) و (a_3, b_3, c_3) در دستگاه کارتزین به صورت حل دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \text{----}$$

* انتگرال حجم : $\int \vec{A}\,dv$



سؤال ۲:

انتگرال $\int_v \vec{A}dv$ را وقتی که $\vec{A}$ در دستگاه مختصات کروی به صورت $\vec{A}=\frac{1}{r^2}\hat{a}_r$ بیان شود و v حجم $\frac{1}{8}$ کره ای به شعاع a و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات و محدود به $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ و $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ باشد، محاسبه کنید.

پاسخ:

$$dv = r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\vec{A}\,dv = \left(\frac{1}{r^2}\hat{a}_r\right)\left(r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\right) = \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,\hat{a}_r$$

$$\hat{a}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{a}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{a}_y + \cos\theta\,\hat{a}_z$$

$$\int \vec{A}\,dv = \hat{a}_x\left[\int_0^a dr \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta}_{\pi/4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi\right]$$

$$+\hat{a}_y\left[\int_0^a dr \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta}_{\pi/4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi\right]$$

$$+\hat{a}_z\left[\int_0^a dr \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta}_{1/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right]$$

$$\int \vec{A}\,dv = \frac{\pi a}{4}\left(\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z\right)$$