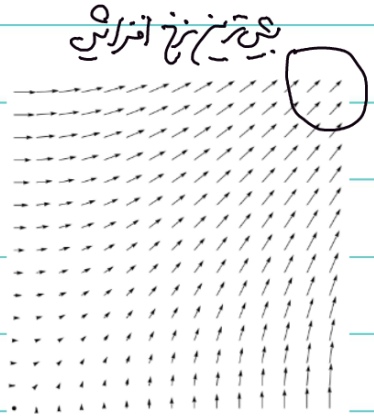
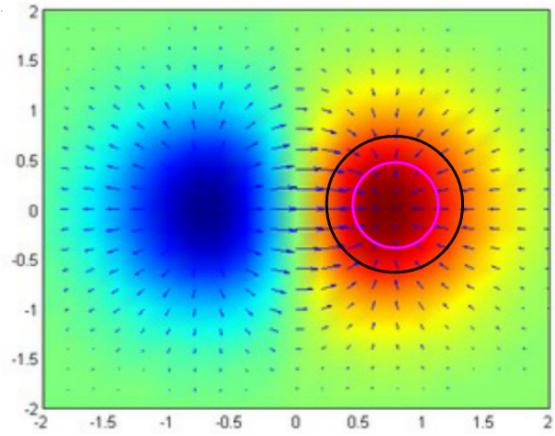
۱-۸ مشتق میدان‌های اسکالر و برداری

* **گرادیان:** برداری را که اندازه و جهت حداکثر نرخ افزایش یک کمیت اسکالر را نشان می‌دهد

این عملگر یک تابع می‌گیرد و یک بردار تحویل می‌دهد. (عملگر گرادیان: ∇f)





تابع: دمای یک اتاق

* **گرادیان در دستگاه‌های مختصات مختلف:** (f یک تابع اسکالر دلخواه)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$ کارتزین

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{a}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$ استوانه‌ای

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi$$ کروی $R = r\sin\theta$



گرادیان تابع اسکالر $f(x,y,z)$ (یعنی ∇f) برداری است که بر سطح $f(x,y,z)=K$ عمود می‌باشد.

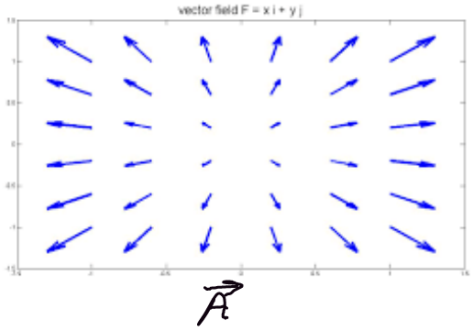
↓ ثابت

* دیورژانس: مشتق فضائی است که روی یک میدان برداری عمل می‌کند و حاصل تابع اسکالر برمی‌گرداند.

دیورژانس یک میدان برداری بیانگر: آهنگ تغییر یک مولفه بردار در راستای خودش می‌باشد

و معیاری برای تعیین همگرایی یا واگرایی میدان برداری در نقطه مورد نظر است.

✓ دیورژانس را با عملگر $\vec{\nabla}.\vec{A}$ نشان می‌دهند.



$\vec{A}$

$\vec{\nabla}.\vec{A} > 0$ واگرا

(تغییرات در راستای جهت A داریم)

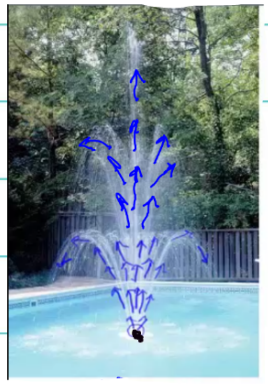


برای بردار $\vec{A}$ با توجه به علامت $\vec{\nabla}.\vec{A}$ در سوال طبقه‌بندی زیر را ترتیب دار:

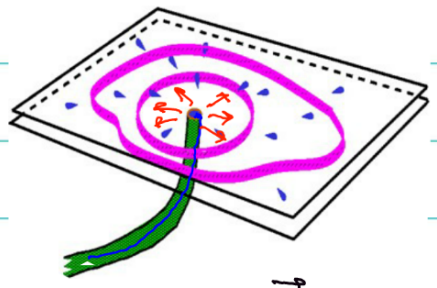
$\vec{\nabla}.\vec{A} > 0 \longrightarrow$ $\vec{A}$ به صورت منبع یا چشمه (میدان $\vec{E}$ یک بار الکتریکی مثبت)

$\vec{\nabla}.\vec{A} < 0 \longrightarrow$ $\vec{A}$ به صورت چاه یا سینک (میدان $\vec{E}$ یک بار الکتریکی منفی)

$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \longrightarrow$ $\vec{A}$ سیملوله‌ای

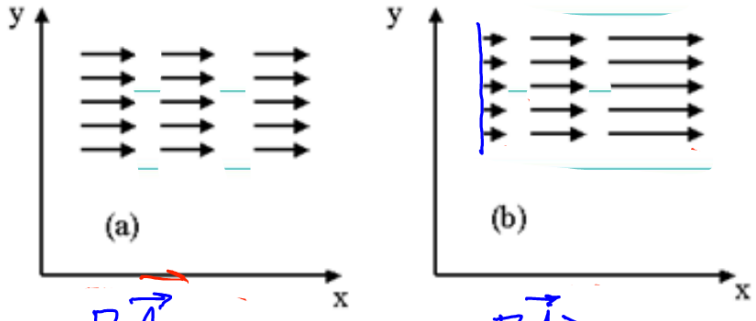


$\vec{\nabla}.\vec{A} > 0$

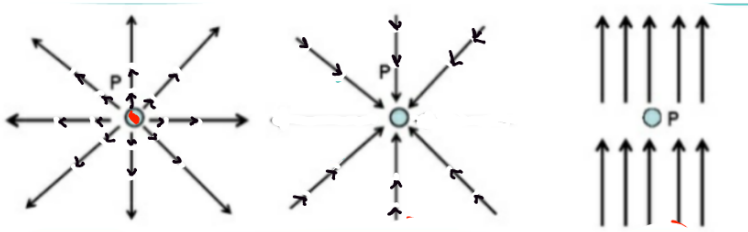


$\vec{\nabla}.\vec{A} > 0$

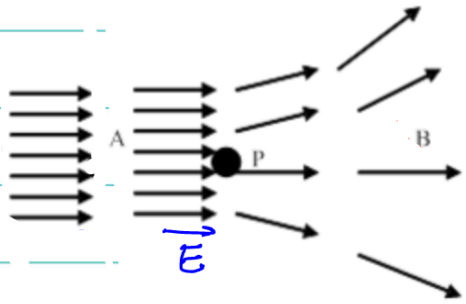
✍ کدام یک از میدان‌های برداری زیر دیورژانس دارند؟



$\nabla.\vec{A}=0$ $\nabla.\vec{A}>0$



منبع $\nabla.\vec{A}>0$ $\nabla.\vec{A}<0$ $\nabla.\vec{A}=0$



دیورژانس در نقطه A: $\nabla.\vec{E}=0$

دیورژانس در نقطه P: $\nabla.\vec{E}<0$ چاه

دیورژانس در نقطه B: $\nabla.\vec{E}=0$

مفهوم فیزیکی عملگر دیورژانس به زبان ساده:

وقتی اپراتور دیورژانس روی یک تابع برداری در یک نقطه دلخواه از فضا عمل می‌کند، نتیجه‌ای که به ما می‌دهد وجود یا عدم وجود منبع اسکالر تولید کننده آن بردار است.

* دیورژانس در دستگاه مختصات مختلف:

$\vec{A}$ بردار دلخواه در دستگاه مختصات است.

کارتزین $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

استوانه‌ای $\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R A_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کروی $\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$

$A_r(r,\theta,\varphi)$ $A_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$



دیورژانس بیانگر آهنگ تغییر مولفه یک بردار در راستای خودش می‌باشد.

مثلاً در کارتزین با فرض $\vec{A} = A_x \hat{a}_x$:

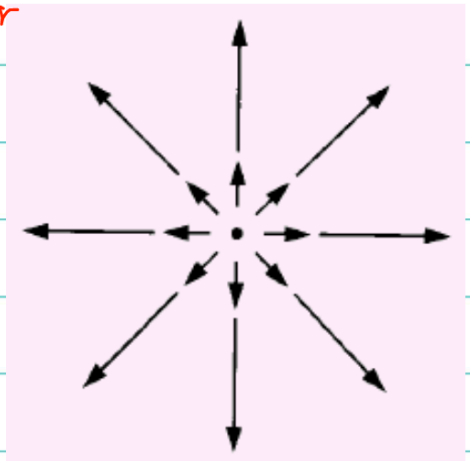
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

یا در کروی با فرض $\vec{A} = A_\varphi \hat{a}_\varphi$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$



مطابق شکل زیر بردار A تابعیت r و در جهت $\hat{a}_r$ است پس:



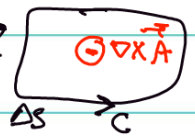
$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r$$

$$\nabla \cdot \vec{A} \neq 0 \;,\; > 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$$

* **کرل:** مشتق فضائی است که روی یک میدان برداری اعمال می‌شود و حاصل یک بردار است

$$\nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \hat{a}_n$$ ← (قضیه استوکس)



$\hat{a}_n$ توسط قاعده دست راست مشخص می‌شود ←
- انگشت در جهت مسیر C
- انگشت شست جهت $\hat{a}_n$



کرل یک میدان برداری تعیین کننده مقدار چرخش بردار حول نقطه مورد نظر است

و سنجشی از قدرت گردابی بودن بردار $\vec{A}$ می‌باشد.



$\nabla \times \vec{A} \neq 0$



اگر کرل یک برداری صفر باشد $(\nabla \times \vec{A} = 0)$ ← بردار $\vec{A}$: غیرچرخشی، ذخیره‌شونده، یا پایستار

* کرل در دستگاه‌های مختلف:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

کارتزین $\rightarrow \hat{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \dots$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_R & RA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

استوانه‌ای

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\,\hat{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

کروی

* نکته: کرل بیانگر آهنگ تغییر مولفه‌ی بردار در خلاف راستای خودش در یک مسئله:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{a}_x - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y$$

$\leftarrow \vec{A} = A_z \hat{a}_z$: مثال

$\leftarrow \vec{A} = A_r \hat{a}_r$: مثال

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[-r\hat{a}_\theta \left(\frac{-\partial A_r}{\partial \varphi} \right) + r\sin\theta\,\hat{a}_\varphi \left(\frac{-\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right]$$

در حالیکه دیورژانس بیانگر آهنگ تغییر مولفه‌ی بردار در راستای خودش می‌باشد.

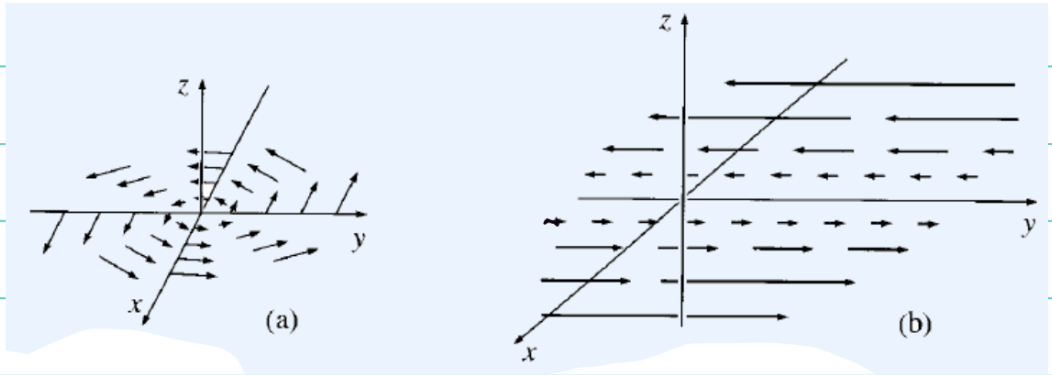
$$\vec{A} = A_\theta \hat{a}_\theta \rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta)$$

دیورژانس بیانگر آهنگ تغییر مؤلفه یک بردار خروجی می‌باشد :

مثال: $\vec{A} = A_\theta \hat{a}_\theta$

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial}(\quad \cdot A_\theta)$$

سوال : کرل و دیورژانس میدان‌های زیر را در صورت وجود مشخص کنید :



a) $\vec{A} = A_\varphi \hat{a}_\varphi$

$$\begin{cases} \nabla.\vec{A} = 0 \\ \nabla\times\vec{A} \neq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x>0 \rightarrow \vec{A} = A_y \hat{a}_y \\ x<0 \rightarrow \vec{A} = -A_y \hat{a}_y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \nabla.\vec{A} = 0 \\ \nabla\times\vec{A} \neq 0 \end{cases}$$



با فرض اینکه f یک تابع اسکالر و $\vec{A}$ میدان برداری باشد، اتحادهای زیر در زمینه کرل برقرار اند:

$$\nabla \times (f\vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) + \nabla f \times \vec{A}$$

(بردار = بردار + بردار × بردار)

کرل گرادیان هر کمیت اسکالر همواره صفر است

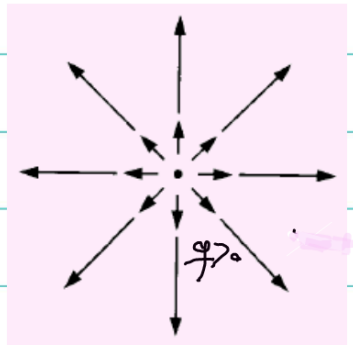
$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

دیورژانس کرل هر بردار همواره صفر است.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$



شدت میدان الکترواستاتیکی $\vec{E}$ در اطراف یک بار منفرد q دارای ویژگی‌های زیر است:



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} \neq 0 \ , >0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$q<0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} < 0$$

$$\nabla \times \vec{A} = 0$$



در میدان‌های غیرچشمه روابط زیر معادل‌اند:

1) $\nabla \times \vec{A} = 0$

2) $\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l}$ مستقل از مسیر است. (از قضیه استوکس)

3) $\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}$ صفر خواهد بود

4) $\vec{A}$ گرادیان یک تابع اسکالر است $\vec{A} = \nabla V$ (V اسکالر)

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$



در میدان‌های سیملوله‌ای روابط زیر برقرار است:

1) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

2) $\iint \vec{A} \cdot \vec{ds}$ بستگی به مسیر ندارد و فقط مستقل از سطح

3) $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = 0$ (قانون گوس)

4) $\vec{A}$ کرل یک بردار است: $\vec{A} = \nabla \times \vec{B}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$

$\vec{A}$

* لاپلاسین: $\nabla^2 f$ (مشتق دوم)

✓ این عملگر (اپراتور ریاضی) یک { تابع برداری } را تبدیل به خودش می‌کند { تابع برداری } است.

✓ لاپلاسین یک تابع اسکالر، به صورت دیورژانس گرادیان آن تابع تعریف می‌شود.

$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$

اسکالر — برداری — اسکالر

✓ لاپلاسین در دستگاه مختصات مختلف: f تابع اسکالر است

کارتزین

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

استوانه‌ای

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

کروی

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



لاپلاسین یک تابع برداری به صورت گرادیان دیورژانس، منفی‌های کرل کرل آن بردار تعریف می‌شود:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{A})$$

✓ در دستگاه مختصات کارتزین، لاپلاسین یک بردار مساوی مجموع لاپلاسین مولفه‌های آن در راستای $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ است:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_x\,\hat{a}_x + \nabla^2 A_y\,\hat{a}_y + \nabla^2 A_z\,\hat{a}_z$$

ولی در دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی $\nabla^2\vec{A}$ باید از رابطه سمت راست عبارت اولی حاصل شود.

۱-۹ قضایای مهم در الکترومغناطیس

دیورژانس ← قانون گوس، معادله‌ی دوم ماکسول، قضیه‌ی دیورژانس

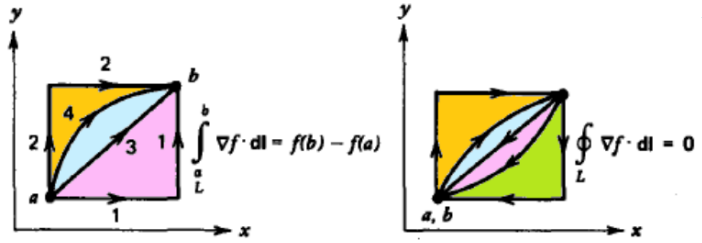
کرل ← قانون آمپر، معادله‌ی اول ماکسول، قضیه‌ی استوکس



انتگرال مشتق تابع روی یک ناحیه برابر مقدار تابع روی مرز آن ناحیه است

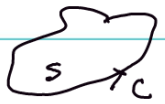
- ابتدا و انتهای خط
- خط
- ∇V

قضیه‌ی گرادیان:



قضیه‌ی دیورژانس: $\nabla \cdot \vec{F}$ — حجم — خط در برگیرنده حجم

قضیه‌ی استوکس: $\nabla \times \vec{F}$ — سطح — خط در برگیرنده سطح



$$\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

* قضیه دیورژانس

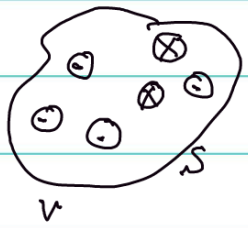
برای بردار $\vec{A}$ و سطح بسته S که دارای حجمی برابر V است طبق این قضیه:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A})\, dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \vec{A} \text{ عبور از سطح } S \text{ توسط بردار}$$



✓ به عبارت دیگر انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری مانند $\vec{A}$ برابر است با شار کل خروجی بردار $\vec{A}$ از حجم در برگیرنده‌ی مورد نظر.

*نکته: تعبیر فیزیکی قضیه:



$\nabla \cdot \vec{A}$ → قدرت چشمه‌ای یا واگرایی (منبع یا چاه بودن)

$\int_V (\nabla \cdot \vec{A})\, dV$ → مجموع چشمه‌ها یا چاه‌های موجود در حجم V

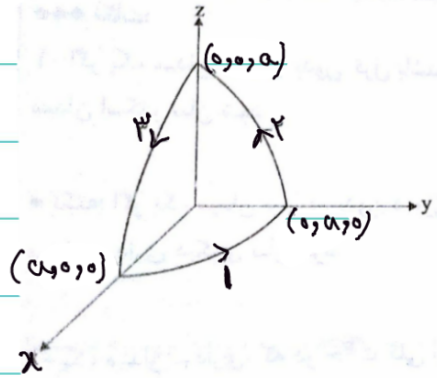
$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ → میزان آب (شار) گذرنده از سطح بسته S حاوی حجم V

*نکته: با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس می‌توان یک انتگرال سطحی را به یک انتگرال حجمی و یا برعکس تبدیل کرد. از این قضیه در مسائلی که شار خروجی از سطح بسته‌ای داده شده که کار با آن سخت باشد می‌توان استفاده کرد.

تست ۴

حجم $r \le a$ ، $x > 0$ ، $y > 0$ ، $z > 0$ یک هشتم کره‌ای به شعاع a است (شکل زیر)، $\oint_S \vec{A}.\vec{ds}$ روی سطح دربرگیرنده این حجم کدام گزینه است؟ ($\vec{A}$ به صورت زیر است)

$$\vec{A} = r^2 \cos\theta \hat{a}_r + r^2 \cos\varphi \hat{a}_\theta - r^2 \cos\theta \sin\varphi \hat{a}_\varphi$$



۱) $\frac{\pi a^2}{4}$

۲) $\frac{\pi a^2}{2}$

۳) πa^2

۴) $\frac{\pi a^4}{4}$

پاسخ: با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\int_v (\nabla.\vec{A})\,dv = \oint_s \vec{A}.\vec{ds}$$

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$= 4r\cos\theta + r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi - r\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi = 4r\cos\theta$$

$$\oint_s \vec{A}.\vec{ds} = \int_v (\nabla.\vec{A})\,dv = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} (4r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 4\times\frac{a^4}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^4}{4}$$

* قضیه‌ی استوکس (کرل)

طبق این قضیه:

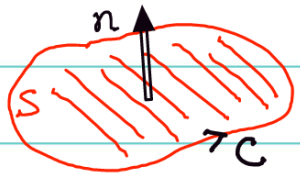
$$\int_s (\nabla\times\vec{A}).\vec{ds} = \oint_c \vec{A}.\vec{dl}$$



به عبارت دیگر انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری مانند $\vec{A}$، روی یک سطح باز برابر است با انتگرال مسیر بسته بردار $\vec{A}$ روی مسیری که سطح s را در بر می‌گیرد.



در استفاده از قضیه‌ی استوکس، انتگرال سطحی را فقط روی سطح ناشی از مسیر C انجام می‌دهیم، یعنی همان سطح ناشی از مسیر C. (با استفاده از قاعده دست راست، طوری که 4 انگشت در جهت مسیر بپیچد و انگشت شست جهت $\hat{a}_n$ سطح را نشان می‌دهد)



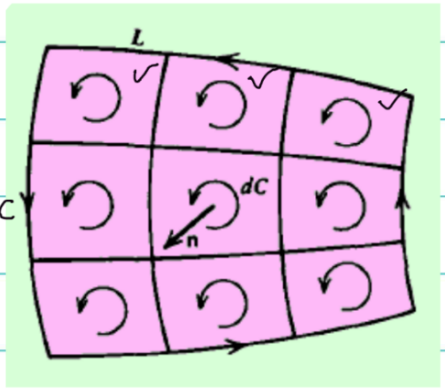


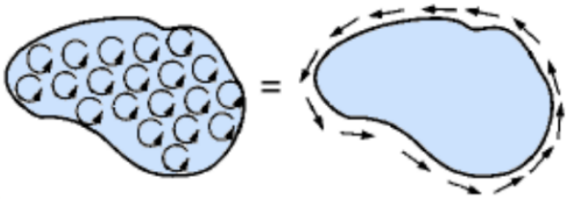
تعبیر فیزیکی قضیه‌ی استوکس:

$\nabla \times \vec{A}$ → قدرت گردابی بودن میدان برداری $\vec{A}$

$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$ → مجموع چشمه‌های آب روی سطح

$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ → جمع آب‌شور مسیر در برگیرنده‌ی سطح S

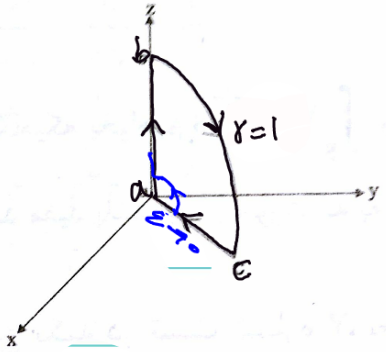




تست 5

انتگرال خط $\oint_c \vec{A}\cdot\vec{dL}$ برای مسیر c داده شده در زیر، کدام گزینه است؟ (تألیفی)

$$\vec{A}=\frac{e^{-r}}{r}\hat{a}_\theta$$



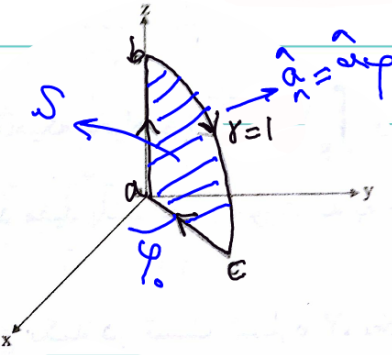
۱) $\pi(e-1)$

۲) نا محدود

۳) $\frac{\pi}{2}(e-1)$

۴) $\frac{\pi}{2}(\frac{1}{e}-1)$

پاسخ:

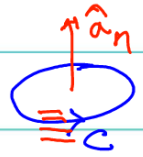


قانون استوکس

$$I=\int_{abca}\vec{A}\cdot\vec{dl}=\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{ds}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ 0 & rA_\theta=e^{-r} & 0\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{A}=-\frac{e^{-r}}{r}\hat{a}_\varphi,\quad \vec{ds}=+r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi,\quad 0<r<1,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$



$$I=\int_S\left(-\frac{e^{-r}}{r}\hat{a}_\varphi\right)\cdot\left(r\,dr\,d\theta\,\hat{a}_\varphi\right)$$

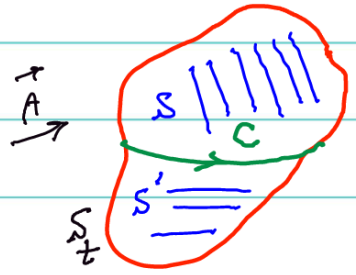
$$=-\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r}\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

گزینه 4

دو سطح S و S' با مرز مشترک C را در نظر بگیرید، طبق قضیه استوکس:

$$\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{ds}=\int_{S'}(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{ds'}=\oint_C\vec{A}\cdot\vec{dl}$$

$$S_t=S+S',\quad \vec{ds'}=-\vec{ds}$$

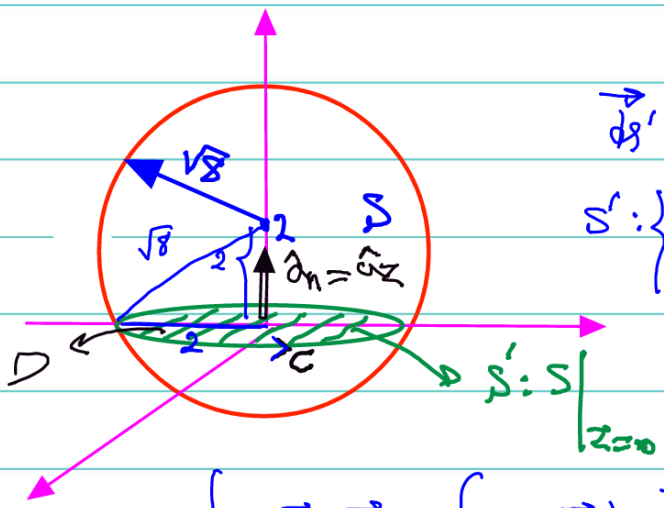


تست ۶

مقدار $I = \int_s (\nabla \times \vec{A}).\vec{ds}$ کدام گزینه است. به طوری که s قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که در صفحه z^+ قرار می گیرد و $\vec{A} = y^2 \cos z\, \hat{a}_x + x^3 e^{yz} \hat{a}_y - e^{-xyz} \hat{a}_z$ می‌باشد.

۱) 6π ۲) 18π ۳) 4π ۴) 12π

پاسخ:



$\vec{ds'} = R\,dR\,d\varphi\,\hat{a}_z$

$S': \begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ z=0 \end{cases} \longrightarrow$ دایره‌ای به شعاع ۲

$$I = \int_S (\nabla \times \vec{A}).\vec{ds} = \int_{S'} (\nabla \times \vec{A}).\vec{ds'}$$

$$(\nabla \times \vec{A})\big|_{z=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3 e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos z)\right]\Big|_{z=0} = 3x^2 - 2y$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3x^2 - 2y)\, R\,dR\,d\varphi = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 R^3 \cos^2\varphi\, dR\,d\varphi = 12\times\pi = 12\pi$$

$x = R\cos\varphi$ $\quad$ $y = R\sin\varphi$

گزینه ۴

تست 7

اگر $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ فاصله از مبدا در مختصات کروی باشد، حاصل انتگرال زیر روی حجم کره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدا چقدر است؟ (α ثابت است) و $I=\int_v (1+e^{-\alpha r})\nabla.(\frac{\hat{r}}{r^2})dv$ (دکتری 91)

۱) -8π ۲) 4π ۳) 8π ۴) $4\pi(1+\frac{1}{e})$

پاسخ:

$\nabla.(\frac{1}{r^2}\hat{r})$ ← بردار ، $\frac{1}{r^2}\hat{r}=\vec{A}$ ، اسکالر f

روش اول:

انتگرال داده شده را تجزیه کرده و از قضیه دیورژانس و اتحاد بردار $\nabla.(f\vec{A})$ استفاده می‌کنیم:

1) $\int_v \nabla.\vec{A}\,dv=\oint_s A.d\vec{s}$

2) $\nabla.(f\vec{A})=f\nabla.\vec{A}+\nabla f.\vec{A} \longrightarrow f\nabla.\vec{A}=\nabla.(f\vec{A})-\nabla f.\vec{A}$

$$I=\int_v (1+e^{-\alpha r})\nabla.(\frac{\hat{r}}{r^2})dv=\int_v \nabla.(\frac{\hat{r}}{r^2})dv+\int_v e^{-\alpha r}\nabla.(\frac{\hat{r}}{r^2})dv$$

قابل انتگرال ← $\vec{A}=\frac{1}{r^2}\hat{r}$

$$I=\oint_s(\frac{1}{r^2}\hat{r}).(r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi\hat{r})+\int_v\left[\nabla.(e^{-\alpha r}\frac{\hat{r}}{r^2})-\nabla(e^{-\alpha r}).\frac{\hat{r}}{r^2}\right]dv$$

قابل انتگرال $\vec{B}=\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\hat{r}$

$$I=\underbrace{\oint_{S_1}\sin\theta\,d\theta d\varphi}_{4\pi}+\oint_{S_2}(\frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\hat{r}).(r^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{r})+\int\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r^2}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=4\pi+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-\alpha r}\sin\theta\,d\theta d\varphi+\alpha\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\alpha r}\sin\theta\,dr\,d\theta d\varphi$$

$$=4\pi+4\pi e^{-\alpha r}+4\pi(1-e^{-\alpha})=8\pi$$

گزینه 3

روش دوم: استفاده از تعریف تابع ضربه دیراک:

$$\nabla.(\frac{\hat{r}}{r^2})=4\pi\delta(r)$$

$$I=\int_v(1+e^{-\alpha r})4\pi\delta(r)\,dv=\int(1+e^{0})4\pi\delta(r)dv=8\pi\underbrace{\int\delta(r)dv}_{1}=8\pi$$

۱-۱۰ پیوست ← جمع بندی مختصات های بردار
اتحادهای برداری

مختصات های برداری: u، v و w متغیرهای دستگاه مختصات هستند. h_u، h_v، h_w ضرایب مقیاس یا متریک هستند و $\vec{A}$ بردار دلخواه و f تابع اسکالر است.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v h_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_w h_u A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v A_w)\right]$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{a}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{a}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{a}_w$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{a}_u & h_v\hat{a}_v & h_w\hat{a}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_w h_u}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

✓ ضرایب مقیاس (متری) در دستگاه‌های مختصات مختلف به صورت جدول زیر است:

ضرائب متری	مختصات کارتزین (x,y,z)	مختصات استوانه ای (R,ϕ,z)	مختصات کروی (r,θ,ϕ)
h_u	۱	۱	۱
h_v	۱	R	r
h_w	۱	۱	$r\sin\theta$

✓ مشتق‌های برداری در دستگاه مختصات مختلف :

* مختصات استوانه‌ای

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{a}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_R & RA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* مختصات کارتزین

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* مختصات کروی

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{a}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r\sin\theta\hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

✓ اتحادهای برداری :

۱) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$

۲) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$: bac − cab

۳) $\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\vec{B}$

۴) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

۵) $\nabla\times(\vec{A}+\vec{B})=\nabla\times\vec{A}+\nabla\times\vec{B}$

۶) $\nabla\cdot(f\vec{A})=f\nabla\cdot\vec{A}+\nabla f\cdot\vec{A}$

۷) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

۸) $\nabla\times(f\vec{A})=f\nabla\times\vec{A}+\nabla f\times\vec{A}$

۹) $\nabla.(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$

۱۰) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$

۱۱) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\nabla)-\vec{B}(\vec{A}\cdot\nabla)$

۱۲) $\nabla\cdot\nabla f=\nabla^{2}f$

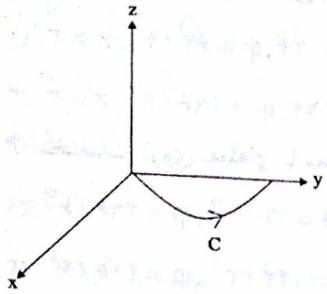
۱۳) $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0$

۱۴) $\nabla\times\nabla f=0$

۱۵) $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^{2}\vec{A}$

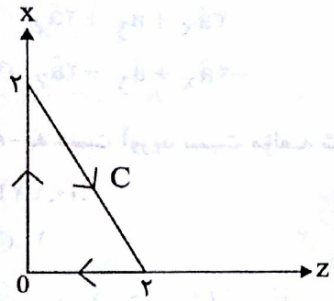
۱-۱۱-۱ تست‌های تکمیلی

۱- مسیر نشان داده شده در شکل زیر یک نیم‌دایره به شعاع یک و مرکز $(۰,۱,۰)$ است. انتگرال میدان برداری $\vec{A}$ روی این مسیر کدام گزینه است. میدان $\vec{A}$ در مختصات استوانه‌ای بیان شده است. $\vec{A} = R^۲ z \hat{a}_R + \sin\varphi\cos\varphi\hat{a}_\varphi + R^۲\cos^۲\varphi\hat{a}_z$



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۲- حاصل $\oint_c \vec{A}.\vec{dL}$ برای بردار $\vec{A} = \left(۲x^۲ + z^۲\right)\hat{a}_x + \left(xz - z^۲\right)\hat{a}_z$ و مسیر بسته c مطابق شکل زیر کدام است؟

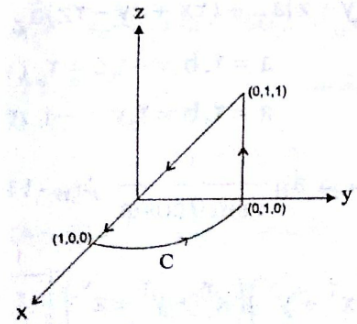


۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

۳- اگر $\vec{A} = ۳x^۲\hat{a}_x + ۴xy\hat{a}_y$، انتگرال خط $\vec{A}.\vec{dL}$ روی مسیری با معادلات پارامتری $y = ۳\sin t, x = ۲\cos t$ $(۰ \le t \le \pi)$ کدام است.

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

۴- انتگرال میدان $\vec{A} = \left(r\cos^۲\theta\right)\hat{a}_r - \left(r\sin\theta\cos\theta\right)\hat{a}_\theta + ۳r\hat{a}_\varphi$ روی مسیر بسته‌ی مشخص شده در شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) $-\pi$
۳) $\frac{۳\pi}{۲}$
۴) $-\frac{\pi}{۲}$

۵- انتگرال $\int \vec{A}.\vec{ds}$ روی سطح بسته‌ی دربردارنده‌ی حجم $۰ < \theta \le \frac{\pi}{۶}, ۰ < \varphi \le ۲\pi, r \le a$ که $\vec{A}$ به صورت زیر می‌باشد، کدام است؟

$$\vec{A} = r^۲\sin\theta\hat{a}_r + ۴r^۲\cos\theta\hat{a}_\theta + rtg\theta\hat{a}_\varphi$$

۱) $\pi a^۴\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$
۲) $\pi a^۴\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$
۳) $\pi a^۴\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$
۴) $\pi a^۴\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$

۶- تابع برداری $\vec{A}=\left(x+y^{۲}\right)\hat{a}_x-۲x\,\hat{a}_y+۲yz\,\hat{a}_z$ را در نظر بگیرید. انتگرال این تابع روی سطح مثلثی $۲x+y+۲z=۶$ واقع در $z>۰, y>۰, x>۰$ کدام است؟

۱) ۸۱ ۲) ۵۸ ۳) ۲۱۶ ۴) ۷۲

۷) مساحت قسمتی از خروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد، برابر کدام گزینه است؟

۱) ۶π ۲) $۶\pi\sqrt{۲}$ ۳) ۳π ۴) $۳\pi\sqrt{۲}$

۸) مقدار انتگرال $\int_V e^{-۲r}\left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dv$ کدام است؟ (V اندازه بردار $\vec{r}$، V حجم کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a است).

۱) ۴π ۲) -۴π ۳) $۴\pi(۱-e^{-۲a})$ ۴) $-۴\pi(۱-e^{-۲a})$

۹) اگر S حجم سطح بسته‌ای باشد که مساحت هر آن S است، در این صورت حاصل عبارت $\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{\sigma}$ کدام است؟ ($\vec{r}$ بردار مکان و $d\vec{\sigma}$ بردار در راستای عمود بر سطح است.)

۱) $۳S$ ۲) $۲S$ ۳) $۳V$ ۴) $۲V$