به نام خدا

فصل دوم : میدان الکتریکی ساکن (الکترواستاتیک)

2-1 مقدمه

2-2 قانون کولمب

2-3 شدت میدان الکتریکی توزیع‌های مختلف

- ✓ میدان الکتریکی ناشی از بارهای نقطه‌ای
- ✓ دو قطبی الکتریکی
- ✓ میدان الکتریکی ناشی از توزیع‌های پیوسته خطی
- ✓ " " " " " سطحی
- ✓ " " " " " حجمی

2-4 معادله خطوط میدان الکتریکی

2-5 تأملی درباره‌ی تقارن هندسی توزیع بارها

2-6 قانون گوس و میدان الکتریکی

- ✓ زاویه فضایی
- ✓ قانون گوس و میدان الکتریکی

1-2 مقدمه

منشأ میدان‌های الکترومغناطیس بارهای الکتریکی هستند. تغییرات میدان‌ها در فضا بستگی به مقدار، موقعیت، سرعت و شتاب بارها دارد.

در الکترواستاتیک به مطالعه‌ی میدان‌هایی پرداخته می‌شود که از بارهای الکتریکی ساکن ناشی می‌شوند و حرکت نمی‌کنند. میدان مغناطیسی از حرکت بارهای الکتریکی ایجاد می‌شود. تغییرات بارهای الکتریکی در الکترومغناطیس ساکن مطالعه نمی‌شود.



توزیع بارهای الکتریکی در فضا، ممکن است به 4 صورت باشد:

1) توزیع نقطه‌ای ← بارها در یک یا چند نقطه متمرکز هستند.

2) توزیع خطی ← بارها در امتداد یک خط (مستقیم، منحنی و...) توزیع می‌شوند

3) توزیع سطحی ← بارها روی یک سطح قرار می‌گیرند

4) توزیع حجمی ← بارها در یک حجم پراکنده هستند.



روش‌های محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از بارهای ساکن:

1) مستقیماً با استفاده از قانون کولمب

2) استفاده از قانون گوس

3) از طریق محاسبه‌ی پتانسیل و به دست آوردن گرادیان آن

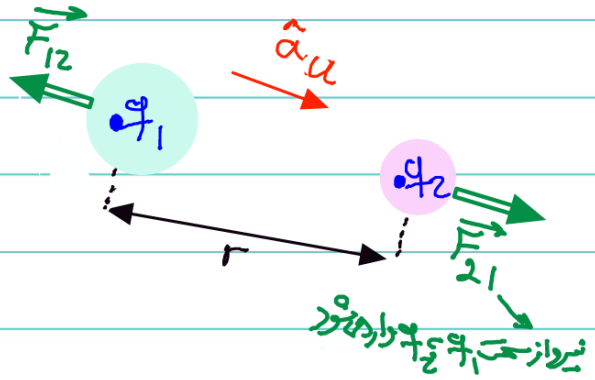
Coulomb's Law

2-2 قانون کولمب

✓ هر دو بار الکتریکی به یکدیگر نیرو واردمی کنند.

✓ این قانون بیان می‌دارد که نیروی وارد بر بار $\begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases}$ ناشی از $\begin{cases} q_2 \\ q_1 \end{cases}$ که در فاصله r از آن و در حالت سکون، قرار دارد، از روابط زیر به دست می‌آید:

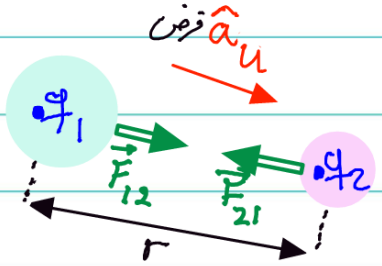
۱) نیروی دافعه: نیروی بین بارهای هم‌نام



$q_1 q_2 > 0$: بارهای هم‌نام

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_u$$

۲) نیروی جاذبه: نیروی بین بارهای غیرهم‌نام



$q_1 q_2 < 0$: بارهای غیرهم‌نام

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_u$$

توجه کنید که $\vec{F}_{ij}$ نیروی وارد شونده از بار زام به بار نام است و $\vec{F}_{ji}$ نیروی وارد شونده از بار نام به بار زام است و در خلاف جهت هم می‌باشند.



با توجه به رابطه‌ی قانون کولمب می‌توان گفت که نیروی بین بارهای نقطه‌ای q_1 و q_2:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

1) در امتداد خطی است که از دو بار می‌گذرد

2) با حاصلضرب دو بار، $(q_1 q_2)$ نسبت مستقیم دارد. $F \propto q_1 q_2$

3) با مجذور فاصله‌ی بین دو بار (r) نسبت عکس دارد. $F \propto \frac{1}{r^2}$



در حالت کلی ضریب دی الکتریک یک ماده‌ی عایق برابر است با:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

که در آن ε_r ضریب دی الکتریک نسبی ماده است و برای محیط‌های مورد مطالعه در الکترومغناطیس کلاسیک همواره عددی مثبت است. هرچند موادی نیز وجود دارند که دارای $\varepsilon_r < 0$ می‌باشند. برای فضای آزاد $\varepsilon_r = 1$ است، بنابراین ضریب دی الکتریک فضای آزاد برابر است با:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \quad \left(\frac{F}{m}\right)$$



نقطه‌گور

✓ یعنی نقطه‌ای که: اگر باری در آن محل قرار دهیم، هیچ نیرویی به آن وارد نخواهد شد.

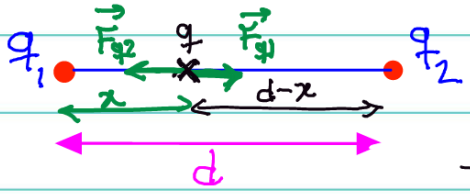
↳ یعنی میدان در آن نقطه برابر صفر است.

✓ حالات مختلف نقطه‌گور: فرض $q_1 < q_2$

$F=\frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

۱) اگر هر دو بار هم نام باشند:

نقطه‌ای که در محلی بین دو بار q_1 و q_2 و نزدیک‌تر به بار کوچک‌تر خواهد بود.

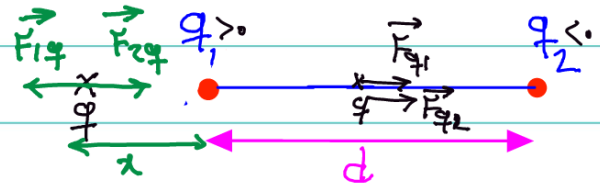


$$\frac{|q||q_1|}{x^2}=\frac{|q||q_2|}{(d-x)^2} \rightarrow x=\cdots$$

x: فاصله بار q از بار کوچکتر (q_1) است.

۲) اگر هر دو بار غیرهم نام باشند:

نقطه‌ای که در محلی خارج دو بار q_1 و q_2 و نزدیک‌تر به بار کوچک خواهد بود.



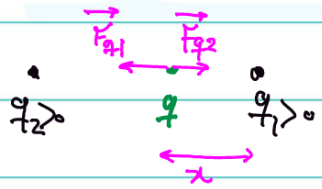
شرط تعادل: $|F_{1q}|=|F_{2q}| \rightarrow \frac{|q_1|}{x^2}=\frac{|q_2|}{(d+x)^2} \rightarrow x=\cdots$



تست ۱

دو بار $q_1=25^{nc}$ و $q_2=36^{nc}$ به فاصله 22^{cm} از هم قرار دارند، بار مثبت q در چه فاصله ای از q_1 قرار گیرد تا بی حرکت بماند. (تالیفی)

۱) 36^{cm} ۲) 10^{cm} ۳) 28^{cm} ۴) 20^{cm}



$$\frac{|q_1|}{x^2}=\frac{|q_2|}{(d-x)^2}$$

$$\frac{25\times10^{-9}}{x^2}=\frac{36\times10^{-9}}{(d-x)^2} \rightarrow 5(d-x)=6x$$

$$x=\frac{5}{11}d=\frac{5}{11}\times22^{cm}=10^{cm}$$

گزینه ۲

2-3 شدت میدان الکتریکی

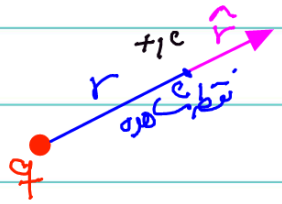
✓ هر بار الکتریکی در اطراف خود یک میدان الکتریکی به وجود می‌آورد و هر بار متحرک (جریان) در اطراف خود ایجاد میدان مغناطیسی می‌کند.

✓ طبق تعریف، میدان الکتریکی یک بار q در یک نقطه (r) برابر است با نیروی وارد بر بار مثبت $+1C$ (بار آزمون) از طرف بار q، یعنی:

q ——r—— $\vec{E}(r)=?$ $\Rightarrow$ q ---r--- $\vec{F}$ $+1C$ $\quad \vec{F}=\frac{q\times(1C)}{4\pi\varepsilon r^2}=\vec{E}_q$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}\ \left(\frac{N}{C}\right)$$

و طبق رابطه نیرو، میدان الکتریکی یک بار q در فاصله r از آن برابر است با:



$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r$$

تصور کنید که بار q_1 در فاصله r میدان الکتریکی به شدت $\vec{E}$ ایجاد می‌کند (در ادامه خواهیم دید که برای بار نقطه‌ای خطوط میدان بصورت خطوط خارج یا وارد شونده به بار است)، حال اگر بار q_2 را در این میدان $\vec{E}$ و به فاصله r از بار q_1 قرار دهیم نیروی که به این بار وارد خواهد شد برابر است با:

q_1 ——r—— q_2 $\quad \vec{E}(r)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r \longrightarrow \vec{F}_{21}=q_2\vec{E}_{q_1}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{a}_r$

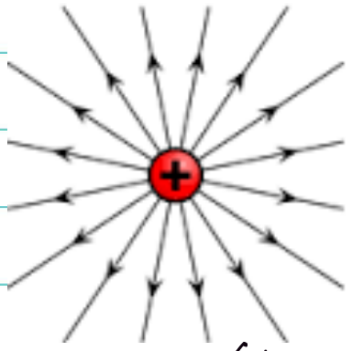
طبق رابطه $\vec{F}=q\vec{E}$، نیرو و میدان الکتریکی در یک راستا خواهند بود و اگر $q>0$ این دو بردار هم جهت و اگر $q<0$ باشد در خلاف جهت هم خواهند بود.

نکته: شکل خطوط میدان در اطراف بار نقطه‌ای:

$q>0 \rightarrow \nabla.\vec{E}>0 \rightarrow$ بار $+q$ به صورت چشمه یا منبع

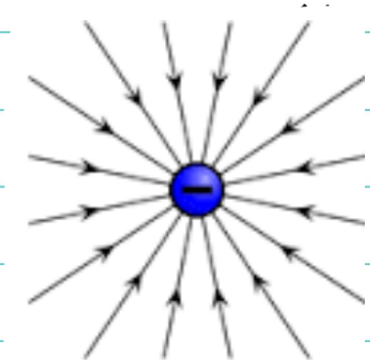
$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r$

بردار دیورژانس دانسیته در جهت خود تغییرات دامنه داشته باشد.



خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار مثبت $(+q)$

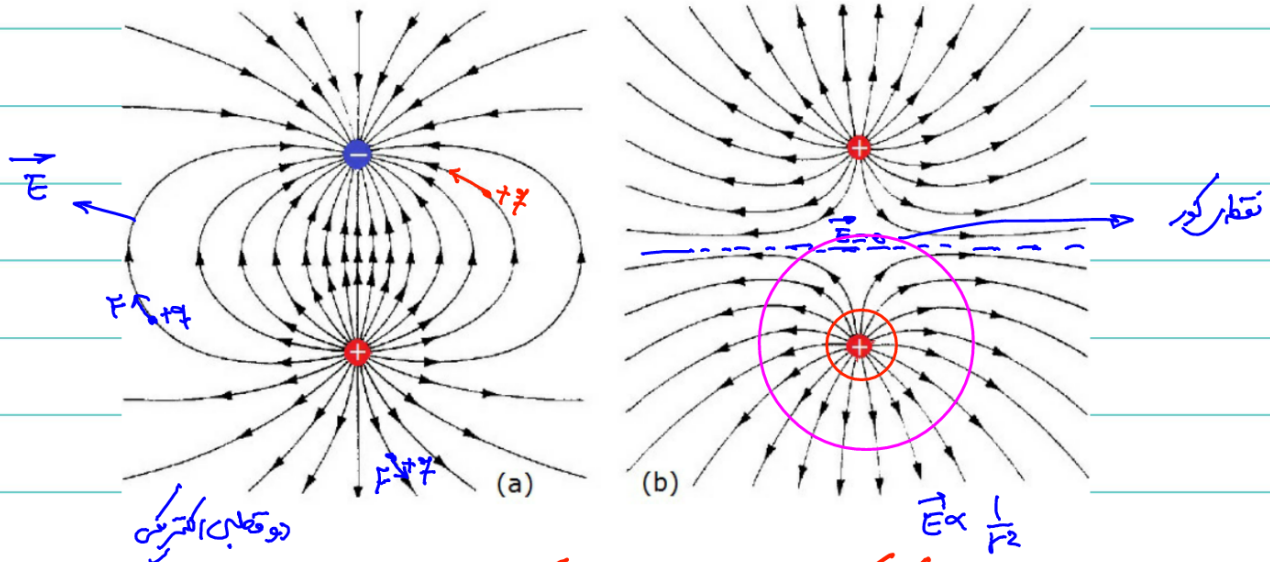
$q<0 \rightarrow \nabla.\vec{E}<0 \rightarrow$ بار $-q$: چاه یا حفره



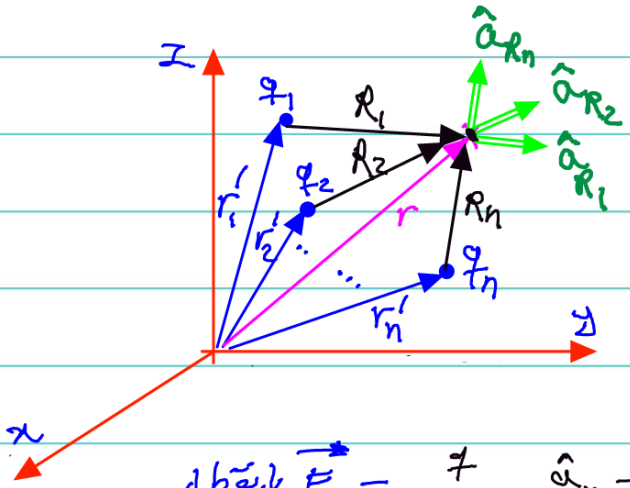
خطوط میدان الکتریکی در اطراف بار منفی $(-q)$

هر بار الکتریکی مثبت مثل یک چشمه نابع و هر بار الکتریکی منفی مثل یک چاه عمل می کند

بنابراین شکل میدان الکتریکی در حضور بارهای همنام و غیرهمنام به صورت شکل‌های زیر خواهد بود:

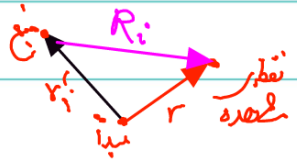


2-3-1 میدان الکتریکی ناشی از بارهای گسسته (چندین بار نقطه‌ای)



بار نقطه‌ای $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \longrightarrow \vec{E} \propto q$: رابطه خطی بین q و $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\hat{a}_{R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\hat{a}_{R_2} + \cdots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 R_n^2}\hat{a}_{R_n}$$



$$R_i = |\vec{r} - \vec{r}_i'|$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon R_i^2} \hat{a}_{R_i} \;,\; |\vec{R_i}| = |\vec{r} - \vec{r_i'}| \;,\; \hat{a}_{R_i} = \frac{\vec{R_i}}{|\vec{R_i}|}$$

$$\vec{E}(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R_i}}{R_i^2 |R_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r_i'}}{|\vec{r} - \vec{r_i'}|^3}$$

* قرارداد : برای پارامترهای مرتبط با منبع از مختصات پریم دار مثل r' و برای پارامترهای مربوط به نقطه مشاهده از مختصات بدون پریم استفاده می‌کنیم.

تست 2

شدت میدان الکتریکی در مبدأمختصات ناشی از بی نهایت بار نقطه ای که به صورت های زیر توزیع شده اند، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (تالیفی)

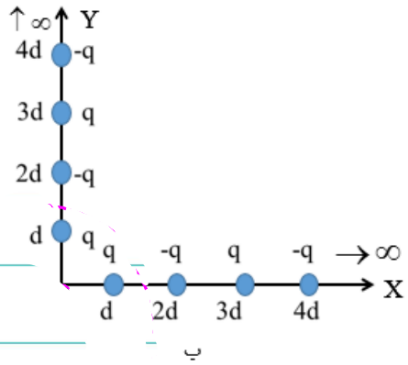
همه بارها اندازه یکسان $|q|$ داشته و فاصله بار n ام روی هر یک از محورها از مبدأ مختصات برابر nd می باشد.

۱) $\frac{-q\pi}{12\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y), \frac{q\pi}{24\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)$ (ب، الف)

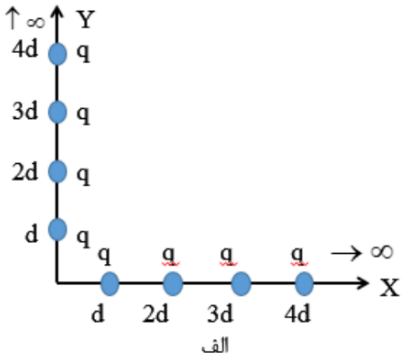
۲) $\frac{-q\pi}{24\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y), \frac{q\pi}{48\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)$ (الف، ب)

۳) $\frac{-q\pi}{24\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y), \frac{-q\pi}{12\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)$ (الف، ب)

۴) $\frac{-q\pi}{48\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y), \frac{-q\pi}{24\varepsilon_0 d^2}(\hat{a}_x+\hat{a}_y)$ (ب، الف)



ب



الف

راهنمایی:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پاسخ:

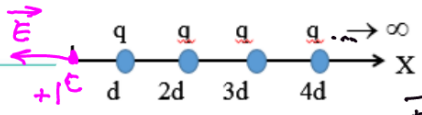
بردار بارهای نقطه‌ای $\pm q$ جهت میدان $\vec{E}$ به صورت‌های زیر است:

$$\vec{E}=\vec{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{a}_u$$

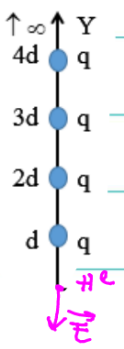
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\hat{a}_u)$$

ابتدا هر دو شکل را به دو قسمت محور عمودی و افقی (با بارهای روی آنها) تفکیک می‌کنیم:

الف)



$$\vec{E}_x=-\hat{a}_x\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]=-\hat{a}_x\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\sum\frac{1}{i^2}$$

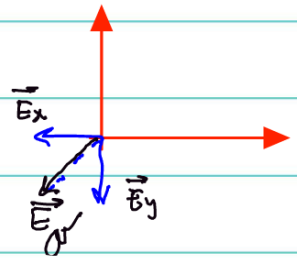


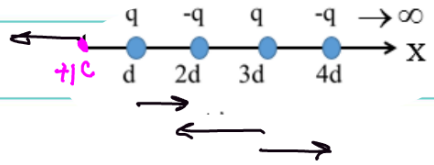
$$\vec{E}_y=-\hat{a}_y\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]=-\hat{a}_y\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\sum\frac{1}{i^2}$$

میدان کل از جمع آثار $\vec{E}_x$ و $\vec{E}_y$ حاصل می‌شود:

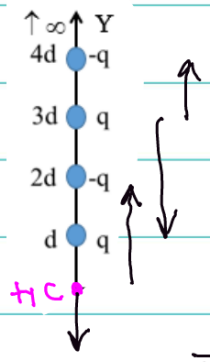
$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{-q}{4\pi\varepsilon d^2}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)\sum \frac{1}{i^2}$$

$$= \frac{-q\pi}{24\pi\varepsilon d^2}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$





$$\vec{E}_x = \frac{-q}{4\pi\varepsilon d^2}\hat{a}_x \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$$



$$\vec{E}_y = \frac{-q}{4\pi\varepsilon d^2}\hat{a}_y \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$$

$$\vec{E}_y = \frac{-q}{4\pi\varepsilon d^2}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)\sum \frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$$

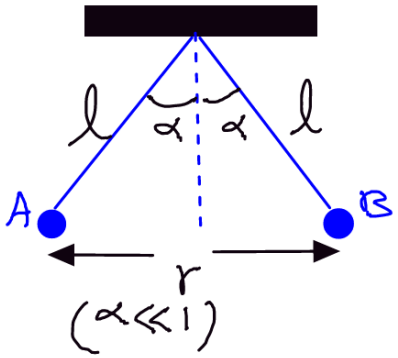
$$= \frac{-q}{48\varepsilon d^2}(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

روش دوم ← حذف ترمینه ← از طریق دامنه‌ی میدان محل الف نسبت به شکل ب

جهت میدان در شکل ب با توجه به نزدیک بودن بارهای هم نام q به مبدأ

تست 3

« بار نقطه‌ای با جرم‌های یکسان m و بار یکسان q توسط ریسمان به طول l و جرم ناچیز از یک نقطه آویزان شده‌اند. زاویه‌ی میل α هر ریسمان نسبت به راستای قائم در حالت تعادل و با فرض کوچک بودن آن کدام گزینه است؟ (تألیفی)

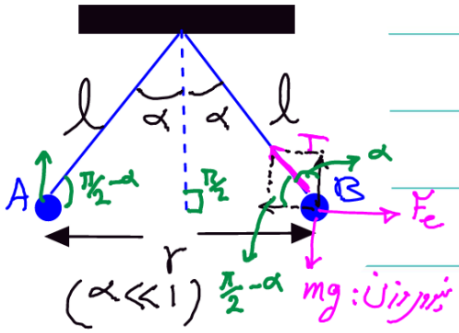


۱) $\sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}}$

۲) $\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 mgl^2}}$

۳) $\sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 mgl^2}}$

۴) $\sqrt[3]{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 mgl^2}}$



شرط تعادل { برآیند نیروهای افقی = ۰ ، برآیند نیروهای عمودی = ۰

افقی: $F_e - T\sin\alpha = 0 \rightarrow F_e = T\sin\alpha$ (1)

عمودی: $mg - T\cos\alpha = 0 \rightarrow mg = T\cos\alpha$ (2)

$\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{F_e}{mg}$ ، $F_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon r^2}$



$\frac{r}{2} = l\sin\alpha \rightarrow r = 2l\sin\alpha$

$tg\alpha = \frac{q^2}{mg(4\pi\varepsilon)(2l\sin\alpha)^2}$

$\alpha \ll 1$ ⇒ $\sin\alpha \sim \alpha$ ، $tg\alpha \sim \alpha$

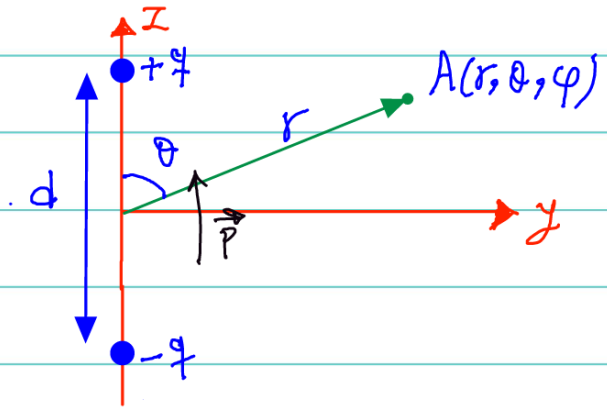
$q^2 = 16\pi\varepsilon mgl^2\sin^2\alpha\, tg\alpha$

$\simeq 16\pi\varepsilon mgl^2\alpha^3 \rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\varepsilon mgl^2}}$

گزینه ۱

2-3-2 دوقطبی الکتریکی:

یک دوقطبی الکتریکی عبارت است از زوج بارهای $+q$ و $-q$ که در فاصله d از یکدیگر قرار دارند. میدان الکتریکی ناشی از دوقطبی واقع بر روی محور z در فاصله دور $(r \gg d)$ عبارت است از:



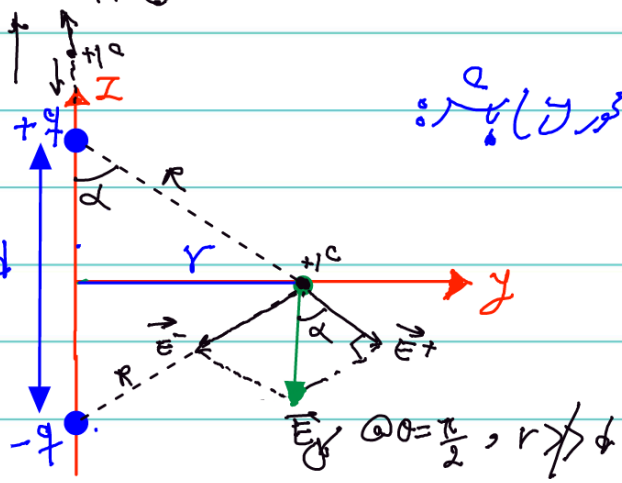
$$\vec{E}\Big|_{r\gg d} = \frac{pd}{4\pi\varepsilon r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right)$$

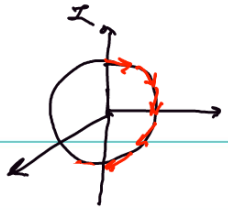
کمیت $p = qd$ را گشتاور دوقطبی نامیده و برای آن جهتی از بار $-q$ به سمت بار $+q$ در نظر گرفته می‌شود. میدان $\vec{E}$ دوقطبی الکتریکی با گشتاور $\vec{P}$ در امتداد محور z برابر است با:

$$\vec{E} = \frac{|\vec{P}|}{4\pi\varepsilon r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{a}_r + \sin\theta\,\hat{a}_\theta\right) \quad , \quad \vec{P} = qd\,\hat{a}_z$$



اگر نقطه مشاهده در $\theta = \frac{\pi}{2}$ (روی محور y) باشد:





$$\vec{E}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon r^3}\hat{a}_\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{-qd}{4\pi\varepsilon r^3}\hat{a}_z \quad , r \gg d$$

① $r \gg d$:

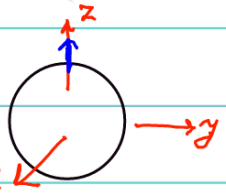
② اگر $d \gg r$:

$$|\vec{E}^-| = |\vec{E}^+| = |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2} \quad , \cos\alpha = \frac{d/2}{R} \quad , R = (r^2+d^2)^{1/2}$$

$$\vec{E}_{\text{net}} = -2|\vec{E}|\cos\alpha(\hat{a}_z) = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{d}{2R}\hat{a}_z = \frac{-qd}{4\pi\varepsilon(r^2+d^2)^{3/2}}\hat{a}_z$$

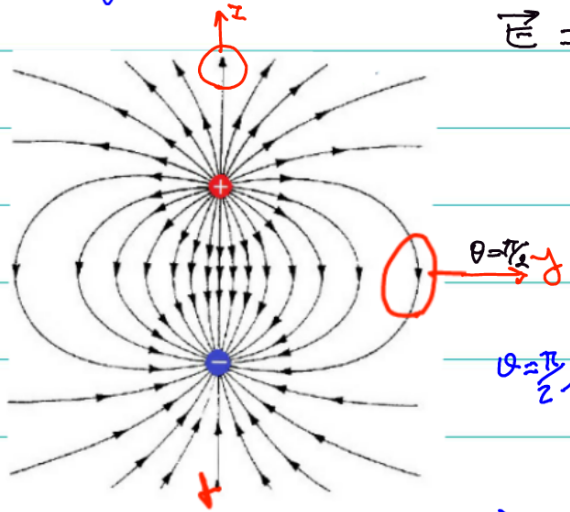


برای نقاطی که در $\theta = 0$ (روی محور z) : (وقتی $r \gg d$)



$$\vec{E}\Big|_{\theta=0} = \frac{qd}{4\pi\varepsilon r^3}(2\hat{a}_r)_{\theta=0} = \frac{qd}{2\pi\varepsilon r^3}\hat{a}_z \quad , r|_{\theta=0} = z$$

$$\vec{E} = \frac{qd}{2\pi\varepsilon z^3}\hat{a}_z$$



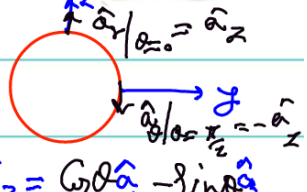
همانطور که از شکل خطوط میدان یک دوقطبی الکتریکی مشخص است، $\vec{E}$

در $\theta = 0$ در جهت $\hat{a}_z$ و در $\theta = \frac{\pi}{2}$ در جهت $-\hat{a}_z$ است.

همچنین در $r \gg d$ اندازه‌ی میدان در $\theta = 0$ دوبرابر اندازه‌ی $\vec{E}$ در $\theta = \frac{\pi}{2}$ است.



میدان دوقطبی در حالت کلی : $(\vec{P} = P\hat{a}_z)$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left[3(\hat{a}_r\cdot\vec{P})\hat{a}_r - \vec{P}\right]$$

$$\vec{P} = P_0\hat{a}_z \quad , \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left[3(\hat{a}_r\cdot P_0\hat{a}_z)\hat{a}_r - P_0\hat{a}_z\right]$$

میدان ناشی از یک 2^n قطبی، با افزایش r به $\frac{1}{r^{n+2}}$ تضعیف می‌گردد.

دوقطبی الکتریکی : $n=1 \longrightarrow \frac{1}{r^3}$

چهارقطبی الکتریکی : $n=2 \longrightarrow \frac{1}{r^4}$

گشتاور دوقطبی الکتریکی ناشی از یک توزیع بار دلخواه:

$$\vec{P} = \int r' \, dq$$

که در آن r' و dq عبارتند از :

dq = $\rho_L dl$ (توزیع بار خطی) $\rightarrow$ dl : m ، ρ_L : C/m

$\rho_S ds$ (سطحی) $\rightarrow$ ds : m^2 ، ρ_S : C/m^2

$\rho_v dv$ (حجمی) $\rightarrow$ dv : m^3 ، ρ_v : C/m^3

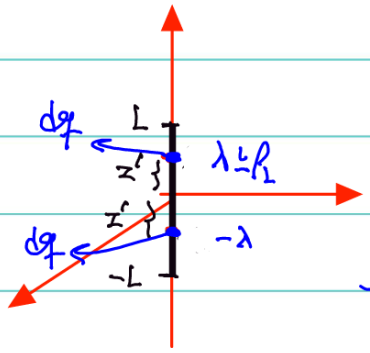
تست ۴

یک توزیع بار خطی با چگالی بار $p=\begin{cases}+\lambda, & 0<z<L\\ -\lambda, & -L<z<0\end{cases}$ که در آن λ یک عدد ثابت است، در نظر می‌گیریم. اندازه گشتاور دو قطبی (Dipole Moment) این توزیع بار برابر است با:

(ارشد ۸۸)

۱) λL^2
۲) $\frac{\lambda L^2}{2}$
۳) $2\lambda L^2$
۴) $4\lambda L^2$

پاسخ:



$P=\int r' dq$

با انتگرال‌گیری از توزیع بار در راستای z به صورت dq و استفاده از رابطه

گشتاور دوقطبی الکتریکی:

$dq=\rho_l dl'=\lambda' dl'$ ، $\lambda'=\begin{cases}-\lambda & -L<z'<0\\ \lambda & 0<z'<L\end{cases}$ ، $dl'=dz'$

بردار مکان منبع $\vec{r}'=z'\hat{a}_z$

$$\vec{P}=\int_{-L}^{0} z'\hat{a}_z(-\lambda\, dz')+\int_{0}^{L} z'\hat{a}_z(\lambda dz')$$

$$=-\frac{\lambda}{2}(-L^2)\hat{a}_z+\frac{\lambda}{2}L^2\hat{a}_z=\hat{a}_z\lambda L^2 \rightarrow |\vec{P}|=\lambda L^2$$

گزینه ۱

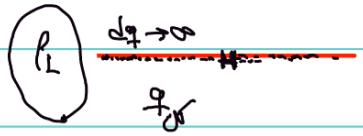
2-3-3 میدان الکتریکی توزیع‌های پیوسته خطی



میدان ناشی از چندین بار نقطه‌ای ← استفاده ← جمع آثار ← علامت $\sum_{i=1}^{n}$

✓ توزیع پیوسته ← استفاده از علامت انتگرال جای سیگما

← مثل بی‌نهایت dq (خرد بار یا المان بار)



* روش کلاسیک محاسبه $\vec{E}$ برای این توزیع بارها به صورت زیر است:

ثبت میدان یکی از dqها و انتگرال گرفتن از آن در طول l، سطح S یا حجم V

توزیع بار خطی: چگالی بار خطی $\rho_L = \frac{dq}{dl}\ (\frac{C}{m}) \iff q = \int \rho_L\, dl$

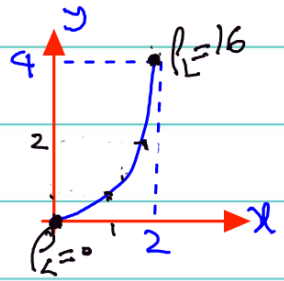
" سطحی: چگالی بار سطحی $\rho_S = \frac{dq}{ds}\ (\frac{C}{m^2}) \iff q = \iint \rho_S\, ds$

" حجمی: چگالی بار حجمی $\rho_V = \frac{dq}{dv}\ (\frac{C}{m^3}) \iff q = \iiint \rho_V\, dv$



کل بار موجود روی سیمی به معادله $y = x^2$، چگالی بار خطی $\rho_L = y + 3x^2$ ؟

پاسخ:



$$q = \int \rho_L\, dl \ ,\ \vec{dl} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z \ ,\ z = 0$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \ ,\ y = x^2 \to dy = 2x\,dx$$

$$dl = dx\sqrt{1 + 4x^2}$$

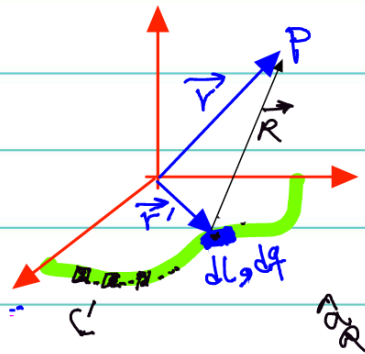
$$\rho_L = y + 3x^2 = 4x^2 \ (2)$$

$$(1) \to q = \int 4x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \cdots$$





میدان ناشی از توزیع بار یکنواخت با چگالی $\rho_L \left(\frac{C}{m}\right)$:



توزیع بار خطی ← متشکل از بی‌نهایت المان بار dq

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R = \frac{\rho_L dl'}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R$$

$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{R}}{R},\quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

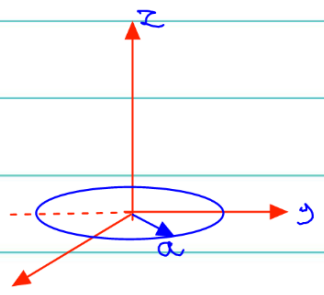
$\vec{r}'$: بردار مکان میدأ برای المان dq و dl می‌باشد.
$\vec{r}$: " " " " نقطه مشاهده "

$\vec{R}$: بردار است که از المان بار به سمت نقطه مشاهده رسم می‌شود.

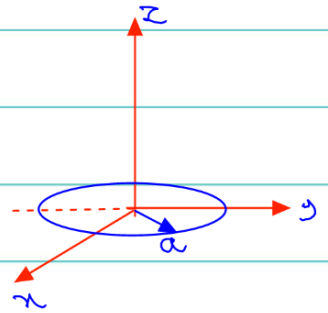
$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_L dl'}{4\pi\varepsilon R^2}\hat{a}_R = \int \frac{\rho_L dl'}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{R}}{R^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{C'} \frac{\rho_L(r')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dl'$$

مثال: حلقه‌ای داریم به شعاع a و چگالی بار خطی $\rho_L \left(\frac{C}{m}\right)$. مطلوب است محاسبه میدان $\vec{E}$ روی محور حلقه با فاصله z.



الف) حلقه به شعاع a و چگالی بار خطی ρ_L



ب) آماده سازی حلقه جهت محاسبه $\vec{E}$ (انتگرال‌گیری و مشخص کردن $d\vec{E}$)