بسمه تعالی

جزوه کنترل خطی

مشتمل بر درسنامه، نکات کنکوری و مفهومی، حل تستهای کنکورهای سراسری ارشد و دکتری

مولف: سعید دهقانی

استفاده از این جزوه برای تمام دانشجویان از نظر مولف بلامانع است.

توضیحات جزوه:

- **جزوه حاضر در طول ضبط فیلم آموزشی کنترل خطی تهیه شده است و لذا این جزوه در کنار فیلم آموزش کنترل خطی یک مجموعه کامل برای درس کنترل خطی خواهد بود، در صورتی که با مطالعه جزوه به تسلط کامل دست نیافتید، می‌توانید برای تهیه فیلم های آموزشی به سایت www.liveamooz.com مراجعه نمایید.**
- **جزوه تهیه شده حاصل تجربه ۸ سال تدریس کنترل خطی در موسسات آموزشی مختلف در تهران می‌باشد و سعی شده است تا حد امکان کنترل خطی به صورت مفهومی و ساده توضیح داده شود تا به راحتی بتوانید سوالات کنکور ارشد و دکتری را پاسخ دهید.**
- **برای ملموس بودن مفاهیم کنترل خطی در حین تدریس از مثالهای عملی استفاده شده است تا دانشجویان با علاقه بیشتر این درس را مطالعه نمایند و علاوه بر کنکور، در آینده در عمل نیز قابل استفاده باشد.**
- **در جزوه حاضر، چون در حین تدریس تهیه شده است، بیشتر از زیبایی جزوه تمرکز بر تدریس کامل مفاهیم بوده است و لذا بابت ظاهر جزوه انشالله مولف را خواهید بخشید.**
- **در جزوه حاضر رویه تدریس بدین صورت بوده است که ابتدا درسنامه با مثالهای ساده و عملی توضیح داده شده است، سپس نکات کنکوری با حل سوالات کنکورهای سراسری آورده شده است. با توجه به اینکه در جزوه حاضر تمام سوالات کنکورهای ارشد برق، مکانیک، مهندسی پزشکی، و اتوماسیون ابزار دقیق از سال ۱۳۶۸ تا سال ۱۳۹۷ و نیز سوالات کنکورهای دکتری برق از سال ۱۳۹۱ تا ۱۳۹۸ حل شده است، لذا با مطالعه جزوه نیازی منابع کمک آموزشی نخواهید داشت.**
- **مولف در طول تدریس سعی کرده است تا علاوه بر مباحث کنکوری و تجربه تدریس کنکور ارشد، حاصل تجربه فعالیت ۱۱ ساله در زمینه مهندسی کنترل در صنایع مختلف را نیز به صورت مثالهای ساده انتقال دهد.**

مثال ← کنترل دمای اتاق با استفاده از کولر

سیستم ← اتاق + هوای اتاق

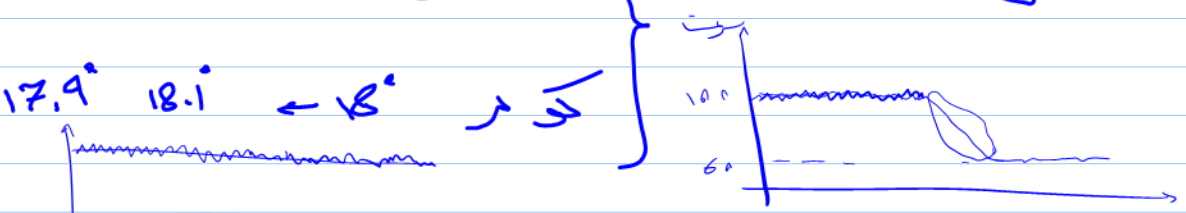
چه چیزی کنترل شود ← دما ← متغیر کنترل شونده

با چه چیزی کنترل می شود ← کولر ← متغیر تأثیرگذار کنترلی

خروجی سیستم ← ؟ میزان تبرید ← مرغوبی

سیگنال یا عوامل ناخواسته ← پنجره باز

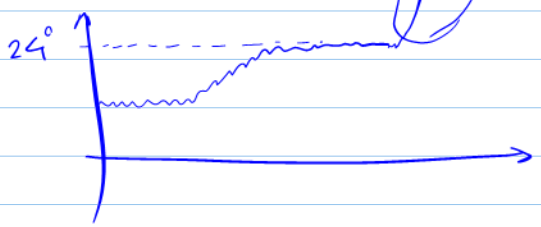
کولر



عوامل ناخواسته ←

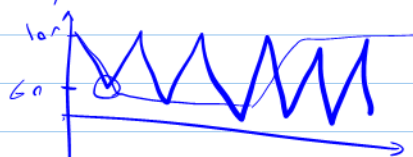
① اغتشاش ② نویز

(دو اطلاعات)



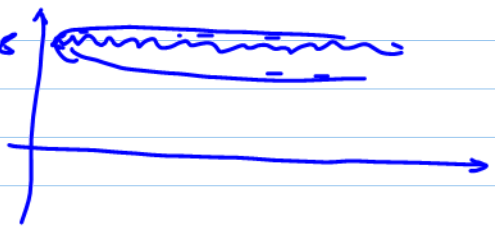
عوامل ناخواسته با تغییرات زیاد ← نویز

" " " " کم ← اغتشاش

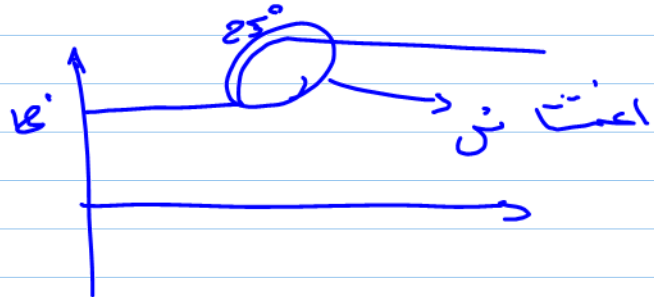


مثال ← پنجره اتاق ←

کولر



عوامل ناخواسته با تأثیرگذاری زیاد ← 25c ← 18°

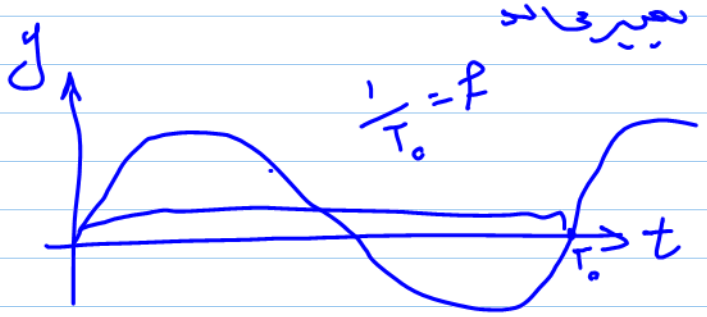


* فرکانس ← میزان تغییرات در واحد زمان

$$f = \frac{1}{T}$$

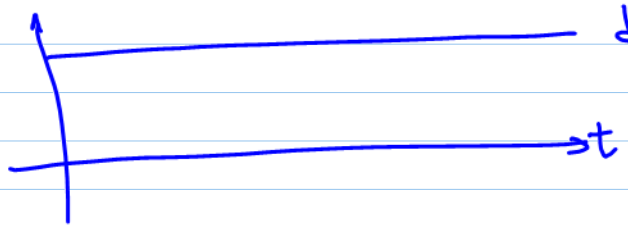
واحد زمان ← ثانیه

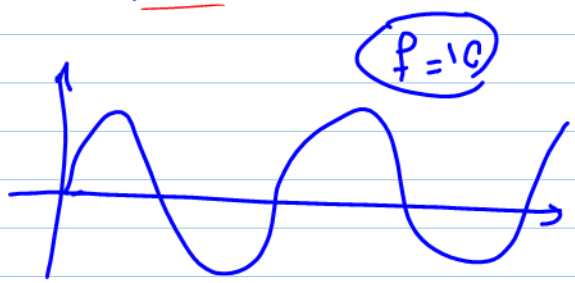
دمای اتاق در دو ثانیه چند بار تغییر می‌کند

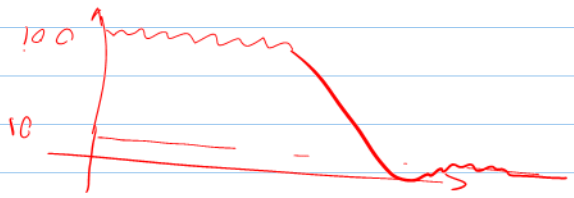




هر چقدر تغییرات در حوزه زمان بیشتر ← فرکانس بالاتر

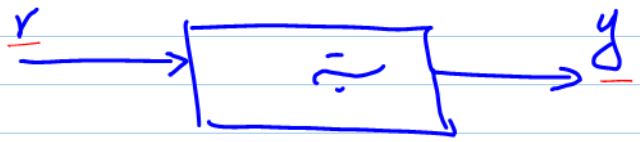






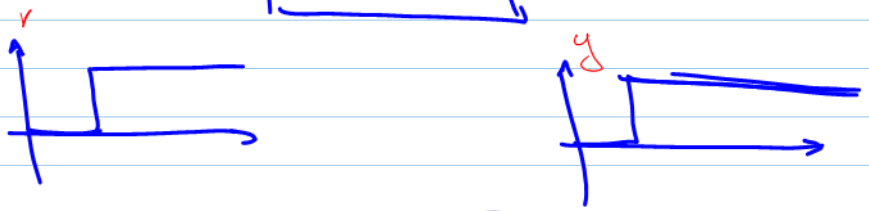
اعشاری ← فرکانس پایین

نویز ← فرکانس بالا



حذف ←

y سیگنال x شود.



کنترل ← یعنی دستیابی y به x (دارای مرجع)

حلقه باز ← سعود ندارد ← مثل ماشین بنزینی

← چراغ راهنمای راننده

هوشمند ← هدف ← از سمت به سرعت ۱۵۵ میرسد

۱) راننده‌ای ← کارمندی ← ۷۵۰ کیلومتر می‌رود

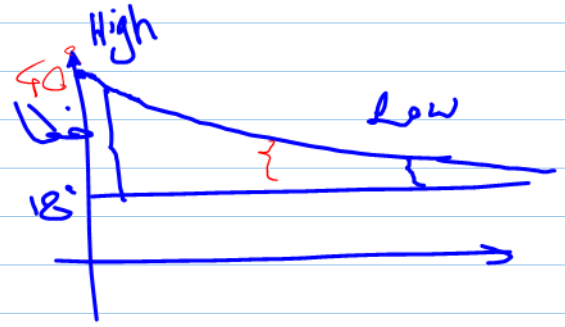
2500 ✓ ... " "

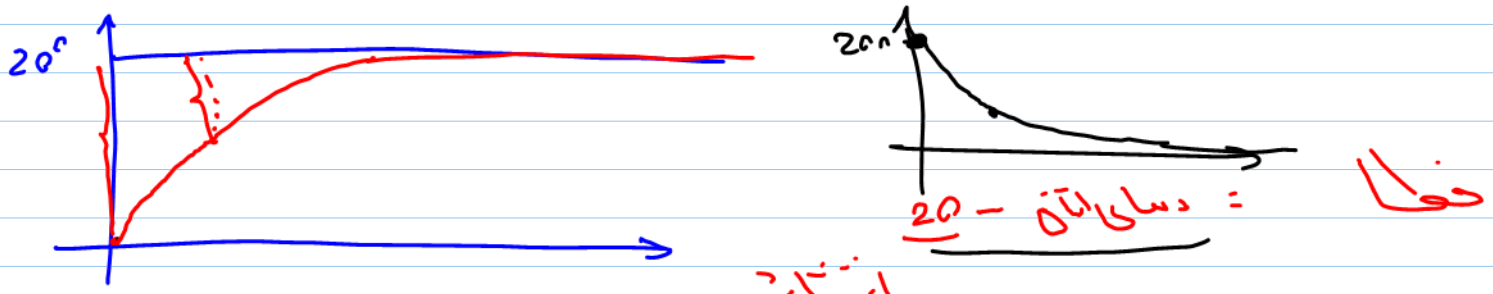
کنترل حلقه بسته ← یعنی کنترل کننده وضعیت سرعت را مدیریت می‌کند

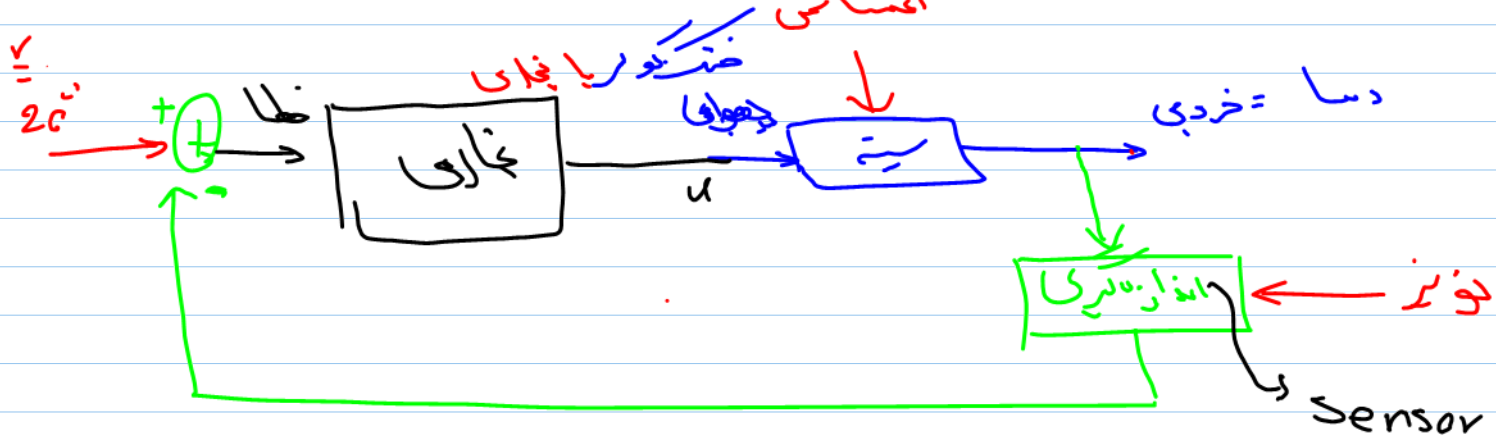
دمای اتاق را از ۱۸° به ۴۵° برسان

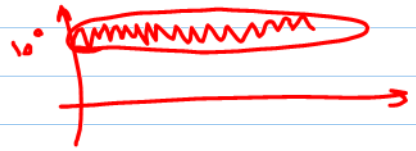
کنترل حلقه باز ← کولر مستقیم روشن

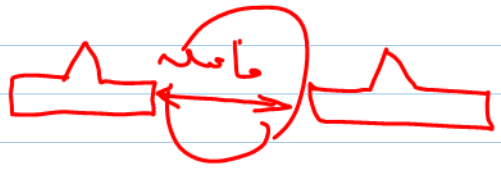
حلقه بسته ← ترموستات











راننده

کنترلر

تصمیم گیر

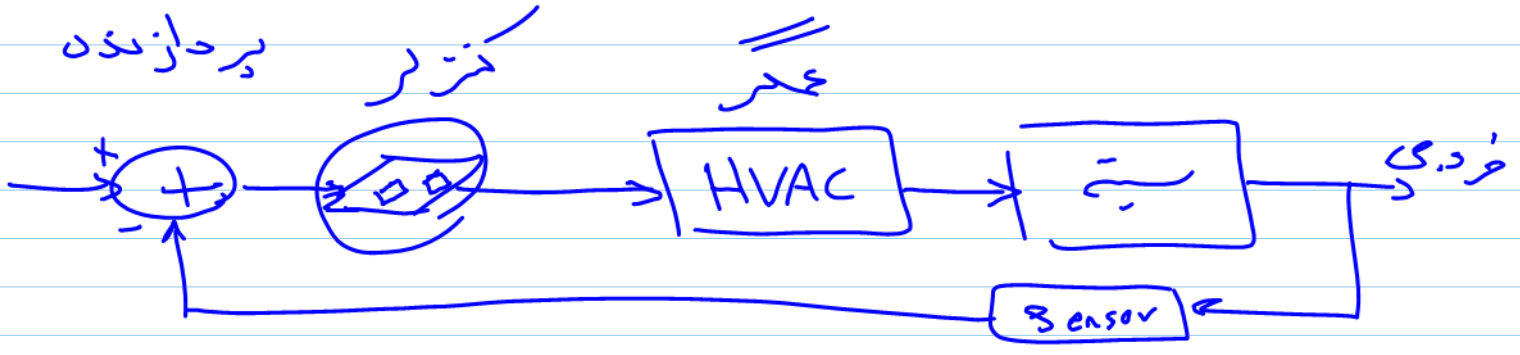
عمل کننده

عمل

سرعت دادم کم ← ذهن ← تصمیم گیری

فشار گاز دادم کم ← پای راننده

کنترلر ← چیزی برنامه از قبل نوشته شده روی



چایدار ساز ←

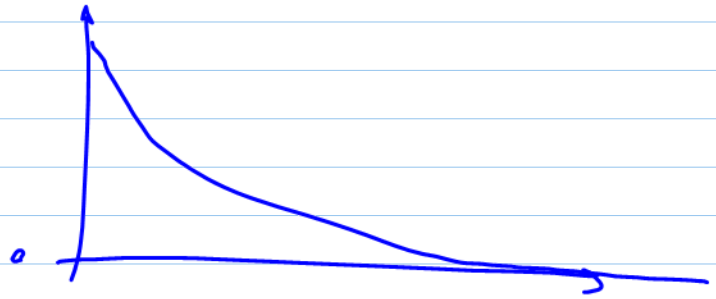
دو چاپ



هدف ← متوقف سازی خودرو

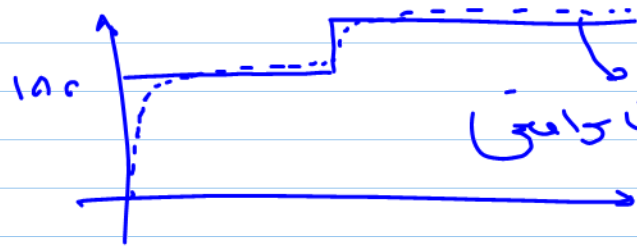
↓

خروجی به صفر برسد



دو چاپ

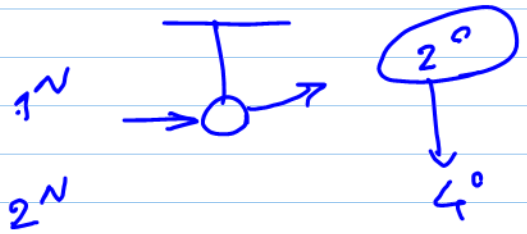
خروجی به مقدار مطلوب (دلخواه) برسد

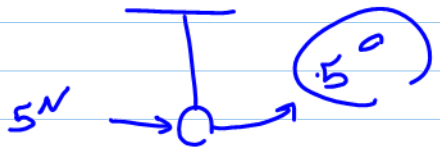


چایدار ساز

زیر مجموعه‌ای از کنترل دو چاپ است

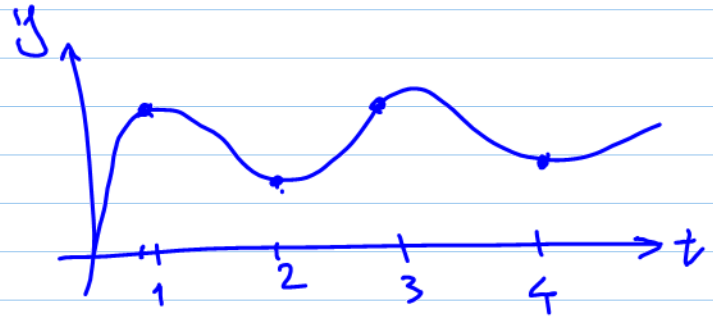
سیستم خطا ←

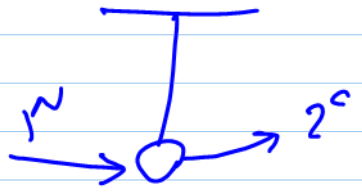




$1^N + 5^N \longrightarrow 2^\circ + 5^\circ$

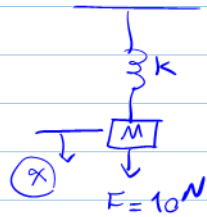
سیستم TI ←





۱N یک ل بعد ← 2°

سلسازی ←

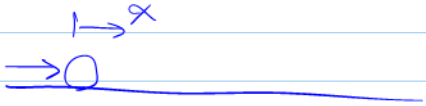


نحوه حرکت جرم M تحت تأثیر نیروی F چگونه است؟

* تغییرات متغیرها ←

تغییرات مکان M = نحوه حرکت
با گذر زمان

تغییرات با گذر زمان = عکس مشتق = $\frac{d(x)}{dt}$ = ؟



① نیروی F چقدر است

② مکان اولیه جرم کجا بوده

حرکت خودرو A از تبریز به تهران :

هدف : خودرو A از تبریز به تهران برسد.

در طول مسیر سرعت 120 km/h

تهران ← 15 مایع ، دنجان ← 7 مایع ، مجاز بخار 7 مایع ← 6 مایع ، تبریز

7 h

در هر ساعت 120 km = تغییر مکان در واحد زمان = سرعت

(1) ← 120 → (2)

تغییرات مکان را سرعت می‌نامیم

سرعت = مسافت طی شده = $\frac{dx}{dt}$

90 km/h

$\frac{dv}{dt}$

قانون دوم نیوتن

مجموع نیروهای وارد = جرم × شتاب

مجموع نیروهای وارد = جرم × تغییرات سرعت در واحد زمان = شتاب

F_1 → M ← F_2 ، x

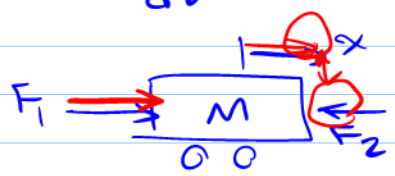
شتاب = تغییرات سرعت = $\frac{d(v)}{dt}$

سرعت = $\frac{d(x)}{dt}$ → شتاب = $\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$= \frac{d^2x}{dt^2}$

جابجایی x — سرعت $\frac{dx}{dt}$ — شتاب $\frac{d^2x}{dt^2}$

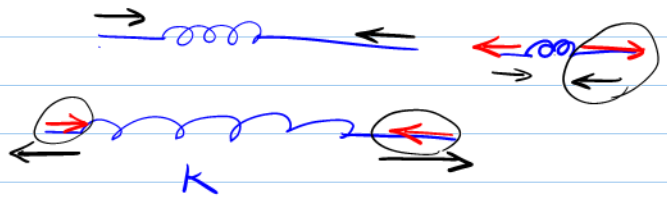
$$M \times \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - F_2$$



$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - F_2$$

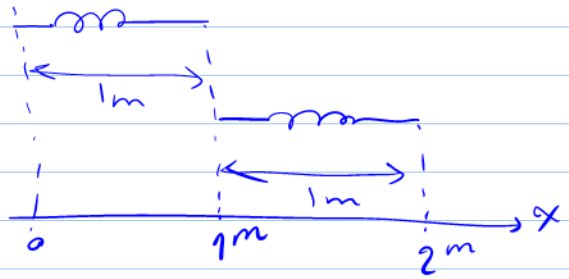
اصطکاک و کشش ← نیروهایی که در مقابل حرکت مقاومت می‌کنند.

فنر و دمپر



ثابت فنر = k = $\frac{N}{\text{واحد جابجایی}}$ = N/m

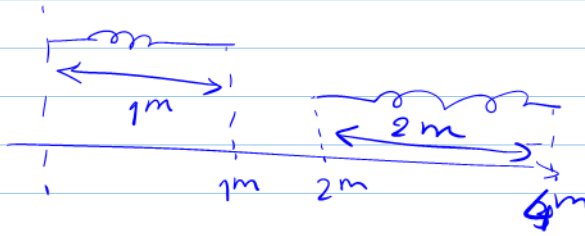
نیروی فنر $f = k \times$ میزان تغییر طول فنر



جابجایی ≠ تغییر طول فنر

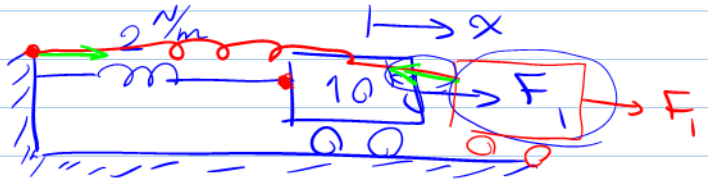
↓

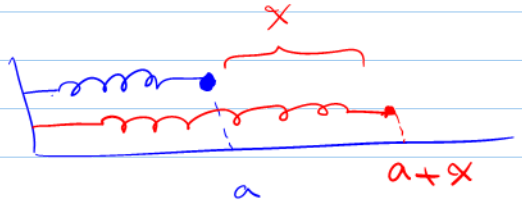
1^m



K

نیروی فنر = ثابت نیروی فنر × میزان تغییر طول



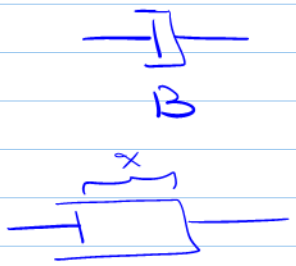


$$10 \times \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - f_{\text{نیروی فنر}}$$

$$f = 2 \times x$$

$$10 \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - 2x$$

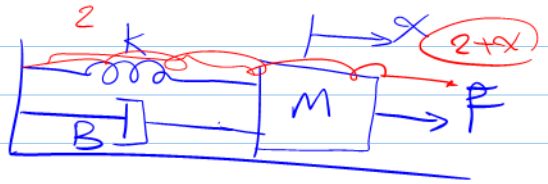
دمپر B ← در مقابل تغییرات سرعت مقاومت می‌کند.



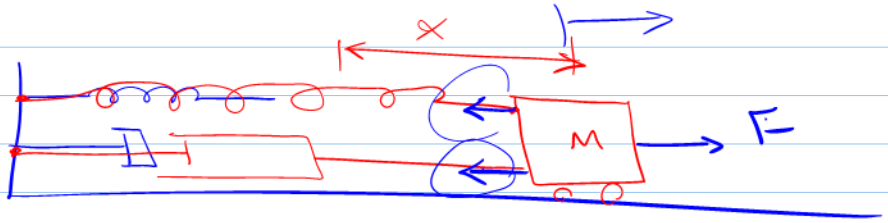
نیروی دمپر = $B \times \frac{dx}{dt}$

مشتق تغییر طول دمپر $\times B$ =

دمپر مثل فنر عمل می‌کند.



$2+x - 2 = x$



اگر جرم داریم

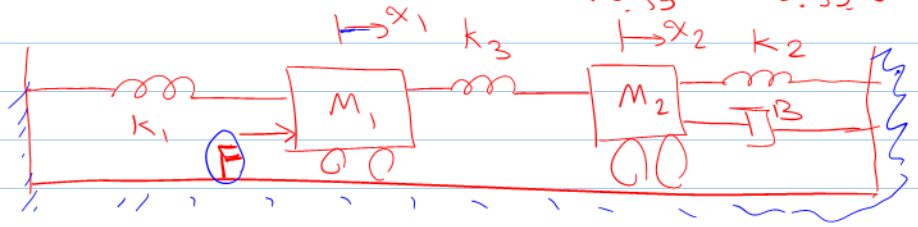
فنر و دمپر خلاف جهت حرکت

نیروی فنر = $k \times x$

نیروی دمپر = $B \frac{d}{dt}(x)$

$$M \times \frac{d^2x}{dt^2} = F - \left(kx + B \frac{dx}{dt} \right)$$

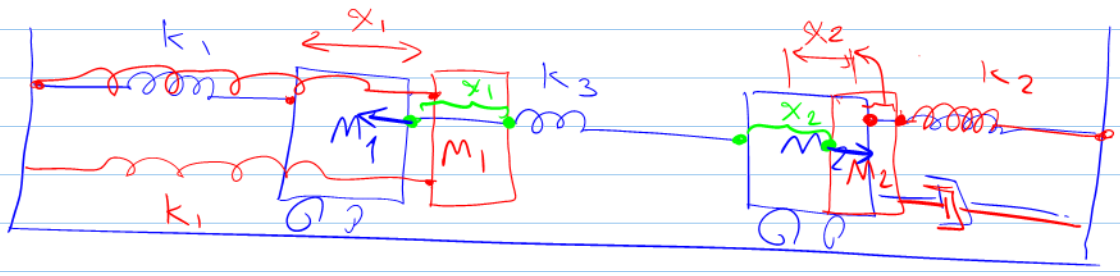
معادلات حرکت سیستم زیر را بدست آورید.



(1) برای هر جرم یک معادله قانون دوم نیوتن نوشته می‌شود.

(2) وقتی بیش از یک جرم داریم $x_1 > x_2$

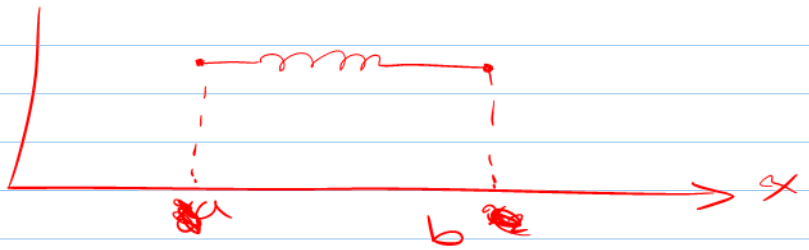
فرض کنیم $x_2 > x_1$ یا $x_1 > x_2$



k_1 تغییر طول فنر $= x_1$

k_2 ~ ~ ~ $= x_2$

k_3 ~ ~ ~ $= x_2$

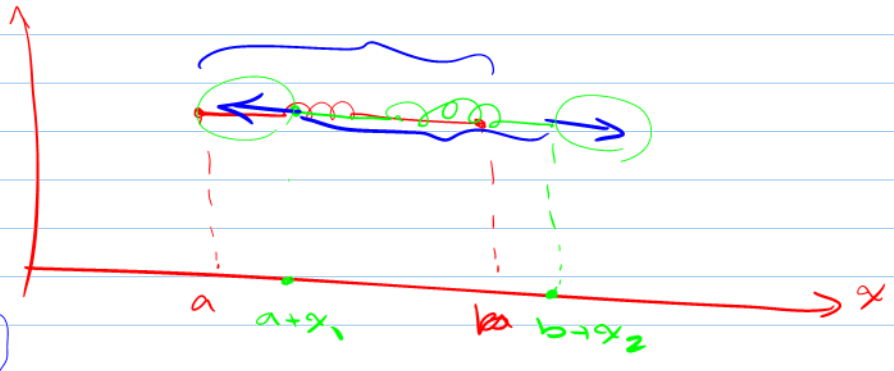


طول فنر $= b - a \neq l_0$

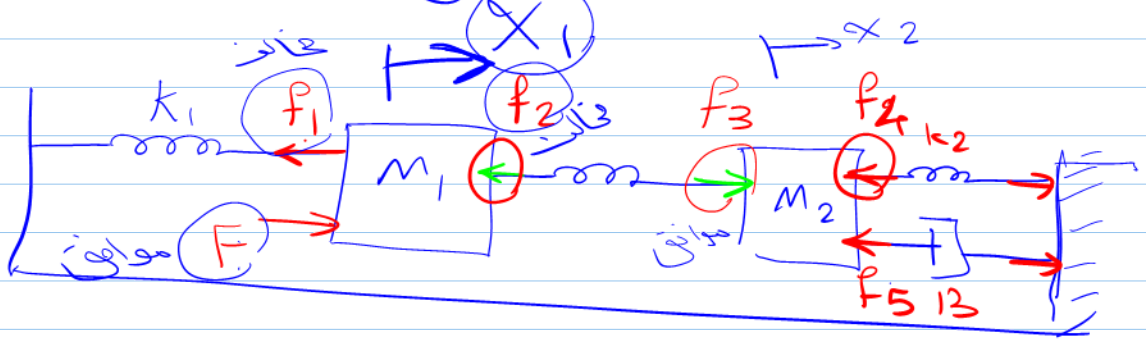
~ ~ $= b + x_2 - (a + x_1)$

$= \underbrace{b - a}_{l_0} + (x_2 - x_1)$

$x_2 - x_1$ عددی مثبت $\quad x_1 > x_2$



$l_0 - 2 = 8$



$f_1 = k_1 x_1 \qquad f_2 = k_3 |x_2 - x_1| \qquad f_4 = k_2 x_2$

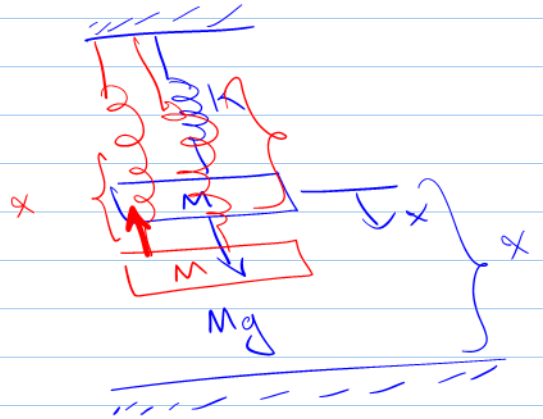
$f_3 = k_3 |x_2 - x_1| \qquad f_5 = B \frac{dx_2}{dt}$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F - (\underbrace{k_1 x_1}_{f_1} + \underbrace{k_3 |x_2 - x_1|}_{f_2}) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \underbrace{k_3 |x_2 - x_1|}_{f_3} - (\underbrace{k_2 x_2}_{f_4} + \underbrace{\beta \dfrac{dx_2}{dt}}_{f_5}) \end{cases}$$

اگر $x_1 > x_2$ → $x_2 - x_1 < 0$ → $|x_2 - x_1| = -(x_2 - x_1) = x_1 - x_2$

$|-10| = -(-10) = 10$

حل



مثال بعد.

شتاب گرانش $g = 9.8$

نیروی جاذبه $= Mg$

$$Mx\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - kx$$

نوع دوم سدسازی ← حرکت دوره‌ای

نوع سوم ← اطراف اتمال دهنده نیرو

~ چهارم ← سیستم‌های میدوری

~ پنجم ← ~ اتریا

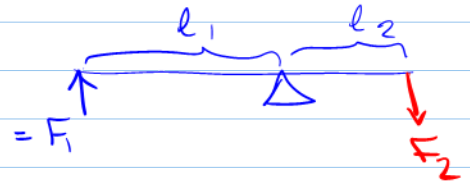
جلسه سوم کنترل خطا

جلسه سوم کنترل خطا

خلاصه جلسه دوم:

1. مدلسازی = قانون دوم نیوتن
2. نیروی فنر و دمپر متناسب با تغییر طول است نه جابجایی.
3. اگر بیش از یک جرم داریم برای هر جرم یک قانون نیوتن
4. فنر و دمپر اگر بین دو جرم مشترک باشند تفاضل نیروی فنالت جهت حرکت
5. اگر بیش از یک جرم داریم دمپر دو جرم فنر یا دمپر مشترک است
   طول یا سرعت فرق کند $x_1 \neq x_2$ یا $\dot{x}_1 \neq \dot{x}_2$
6. فنر یا دمپر اگر بین دو جرم مشترک باشد نیروی آن برای یک جرم فالت جهت حرکت دیگر موافق

اعلان امتحان دهنده نیرو ← اهرم (حل یک سوال)



1. اهرم جهت نیرو را برعکس می‌کند.

F_2: اثر F_1 در جهت مقابل اهرم

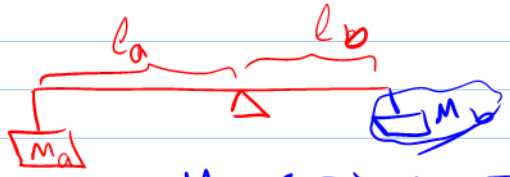
2. $F_1 l_1 = F_2 l_2$

هرچقدر طول اهرم کمتر باشد نیرو بیشتر است.

$F_1 = 10\,N$ $\quad l_1 = 10\,m$ $\quad l_2 = 1\,m$ $\quad F_2 = ?$ $\quad F_2 = \frac{F_1 l_1}{l_2} = 100\,N$

طول l_2 ۱۰ برابر کمتر از l_1

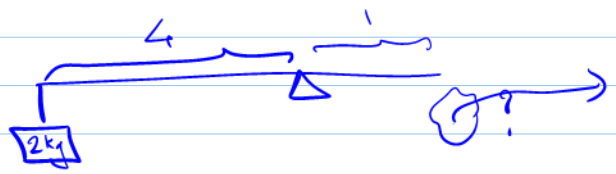
نیروی تحت l_2 ۱۰ برابر بزرگتر نیروی تحت l_1



③ جرم ← ،

تأثیر جرم M_a در دست ط به صورت یک جرم M_b است.

$$M_a l_a^2 = M_b l_b^2$$

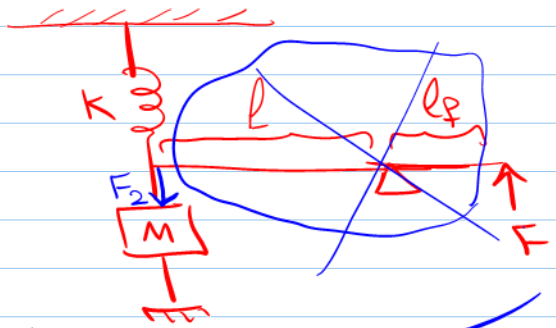


تأثیر جرم 2kg در طرف دوم اهرم

$$2 \times 4^2 = M_b \times 1^2 \qquad M_b = 32\,kg$$

④* هرگاه در مسأله‌ای اهرم دیدید، اول تأثیرآن را در نظر گرفته و اهرم را حذف کنید.

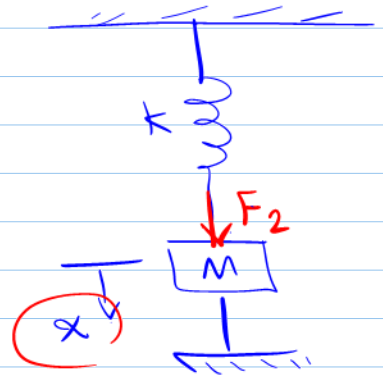
مثال: هوا هفتاد و سه.



تأثیر اهرم ← نیروی F در دست دوم منتقل شد.

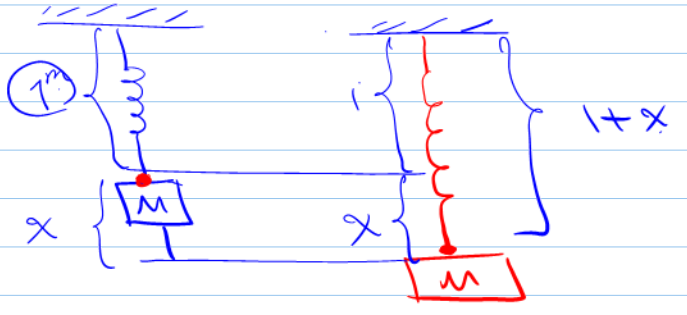
اگر تأثیر نیروی F در دست دوم را با سه‌پنج اهرم حذف می‌کنیم.

تأثیر اهرم $F_2 l = F l_f$ $\boxed{F_2 = \frac{l_f}{l} F}$



$M\ddot{x} = F_2 -$ نیروی فنر $\Rightarrow$

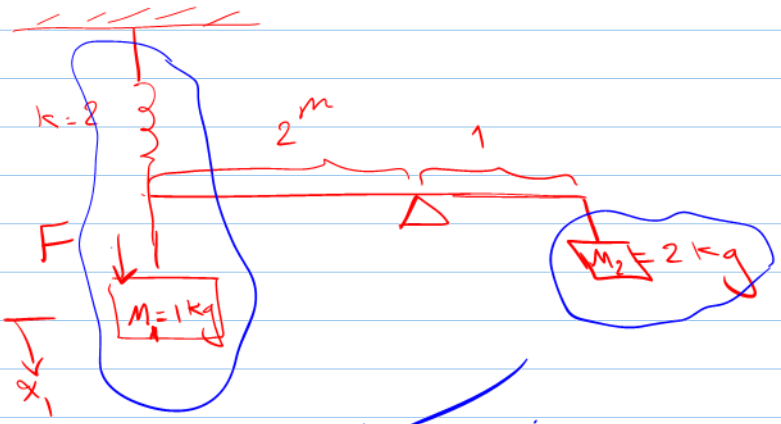
نیروی فنر $= K x$ تغییر طول فنر $= K x$



$$M\ddot{x} = \frac{\ell_f}{\ell} F - kx$$

$$F_2 = \frac{\ell_f}{\ell} F$$

معادلات حرکت؟

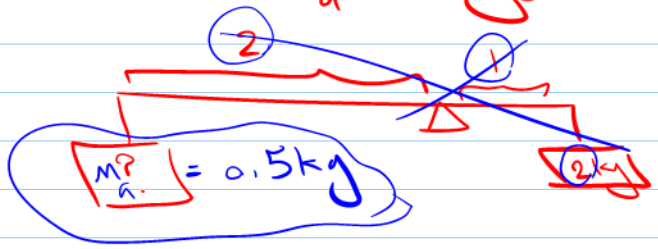


اثر اهرم ←

M_1 , k , F رابطه است M_2 متقابل بین ×

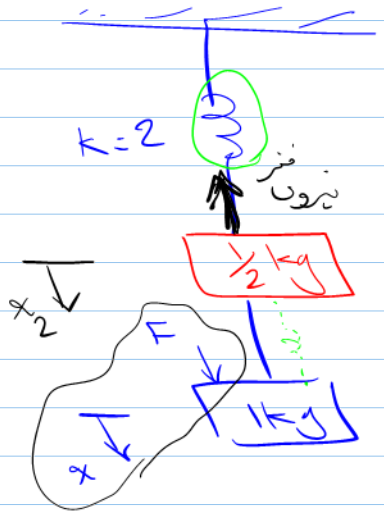
M_2 ✓ رابطه است اول ~ ~

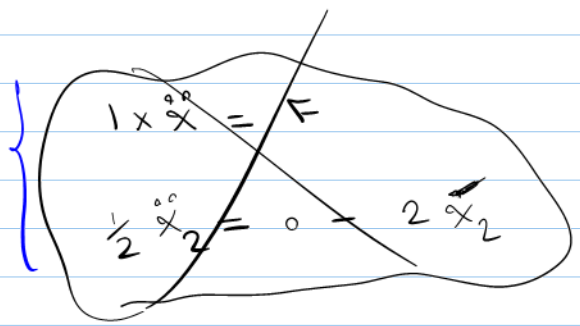
اثر جرم M_2 در طرف اول = M_a



$$M_a \times 2^2 = 2 \times 1^2$$

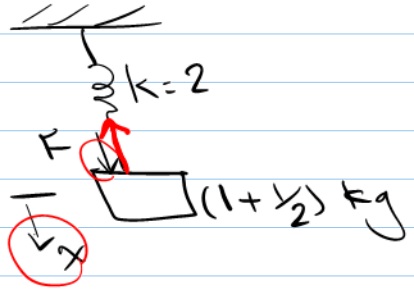
$$M_a = \frac{1}{2}\,kg$$





وقتی فنر بین دو جرم باشد

دو جرم با هم جمع می شوند.



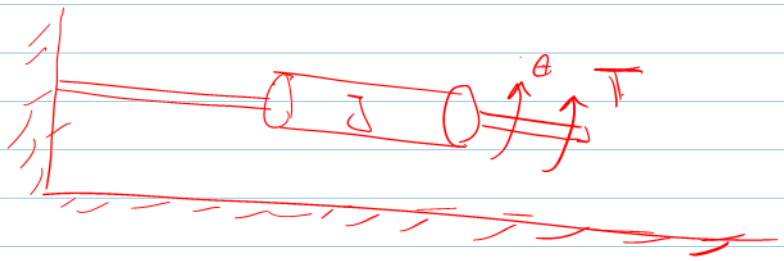
$$\left(\frac{3}{2}\right)\ddot{x} = F - 2x$$

« حرکت دورانی : فوق العاده مهم »

حرکت دورانی کاملاً معادل حرکت خطی است.

حرکت خطی	حرکت دورانی
جرم M	اینرسی J
فنر k	فنر k
بس B	دمپر B
نیروی F	گشتاور T
جابجایی x	زاویه θ

تمام قوانین حرکت خطی برای حرکت دورانی صادق است.

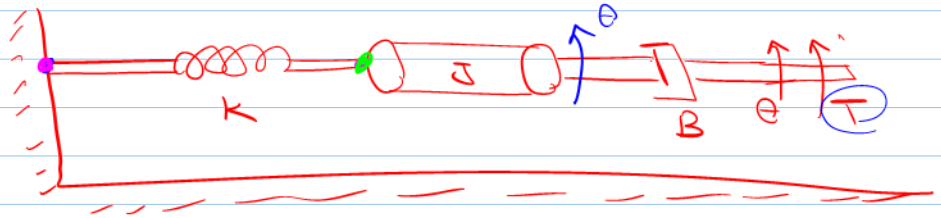


$M\ddot{x}$ = نیروهای محرک − نیروهای مخالف

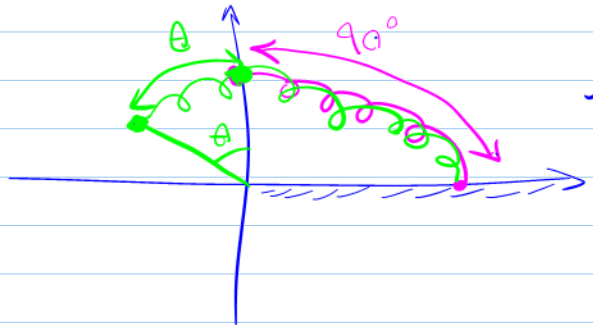
(گشتاور) (گشتاور)

$J\ddot{\theta} = T - \sigma$

$J\ddot{\theta} = T$

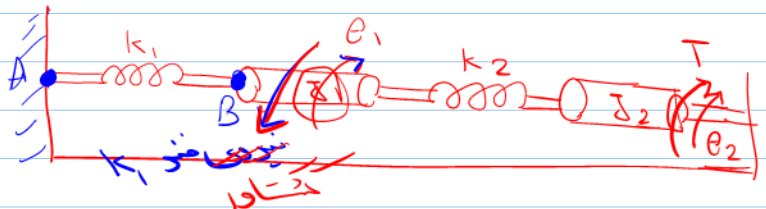


$J\ddot{\theta} = T - ($گشتاور دمپر + گشتاور فنر$)$



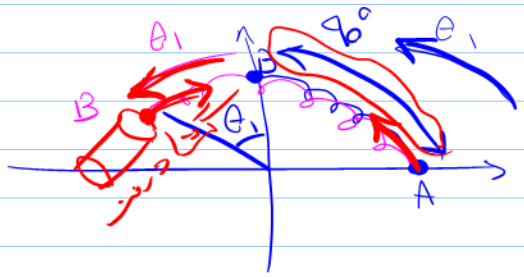
θ = تغییرات فنر

$J\ddot{\theta} = T - (k\theta + B\dot{\theta})$



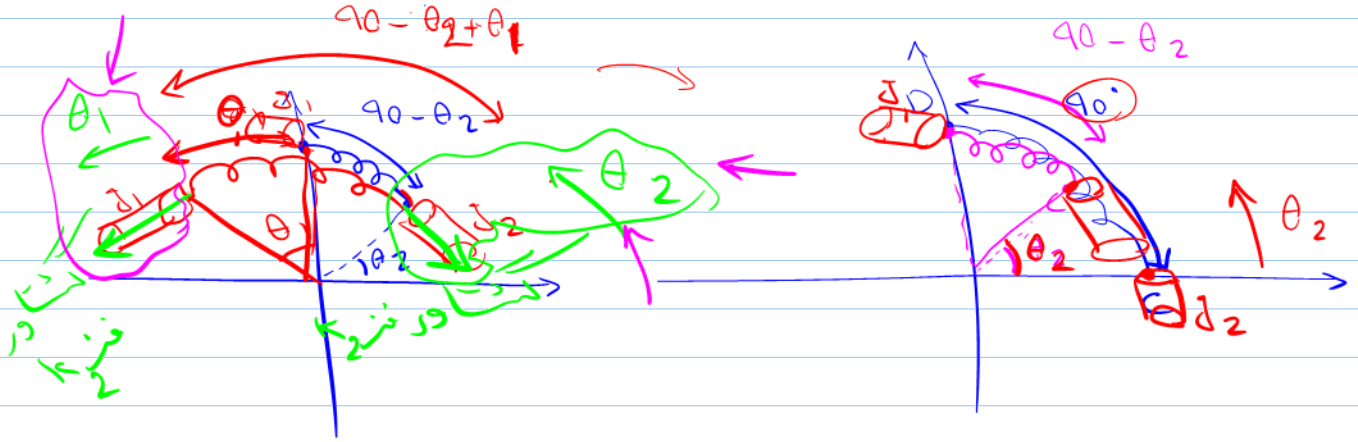
فرض $\theta_1 < \theta_2$

فرض k_1:



طول فنر = $90 + \theta_1$

کشش در فنر k_1 = $k_1 \times \theta_1$



تغییر طول فنر k_2 = $\theta_1 - \theta_2$

فرض $\theta_1 < \theta_2$

$\theta_1 - \theta_2 < 0$ (−10)

طول فنر = $90 + (\theta_1 - \theta_2)$

طول اولیه = 90

طول نهایی = $90 - 10 = 80°$



$$J_1 \ddot{\theta}_1 = T_2 - T_1 \qquad T_1 = k_1 \theta_1$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = T - T_2 \qquad T_2 = k_2(\theta_1 - \theta_2)$$

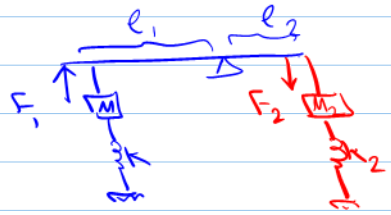
$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 = k_2(\theta_1 - \theta_2) - k_1\theta_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = T - k_2(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

اگر استقال دهنده نیرو ← چرخ دنده

جلسه چهارم کنترل خطی

مرور جلسه قبل:

① اگر اهرم داریم با در نظر گرفتن تأثیر اهرم، عکس اعداد را به یک سمت منتقل میکنیم و اهرم را حذف میکنیم



F_1 معادل $= \frac{l_1 F_1}{l_2}$

M_2 معادل جرم M $\rightarrow$ $M_2 = (\frac{l_1}{l_2})^2 M$

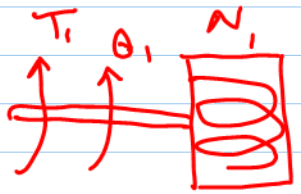
$k_2 = (l_1/l_2)^2 k$

② حرکت دورانی کاملاً مثل حرکت خطی است.

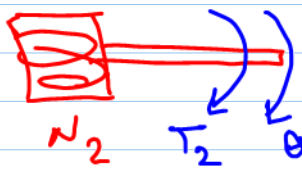
خطی	دورانی
M	J
B	B
K	K
F	T
x	θ

المان انتقال دهنده گشتاور = چرخ دنده

چرخ دنده، گشتاور را منتقل میکند



① جهت گشتاور برعکس

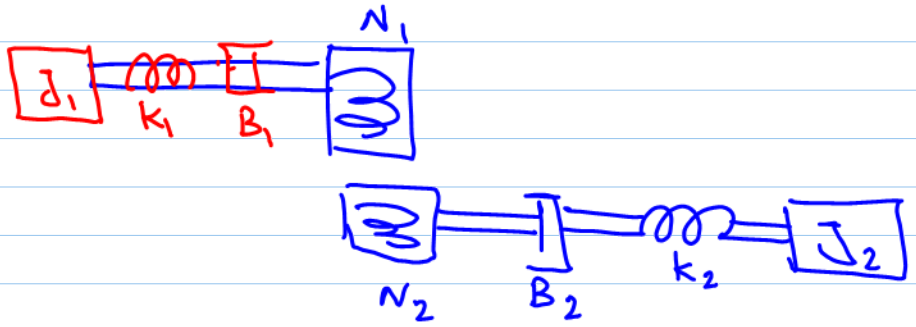


$\frac{T_2}{T_1} = \frac{N_2}{N_1}$ $\quad \begin{cases} T_1 = 10\ Nm \\ N_1 = 10 \\ N_2 = 5 \end{cases}$ $\quad \frac{T_2}{10} = \frac{5}{10} \rightarrow T_2 = 5Nm$

② جهت حرکت برعکس

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

③ اعداد بابت توان دوم منتقل میکنند.



معادل J_2 و B_2 و k_2 در طرف اول ← تأثیر

اثر اینرسی J_2 در طرف اول

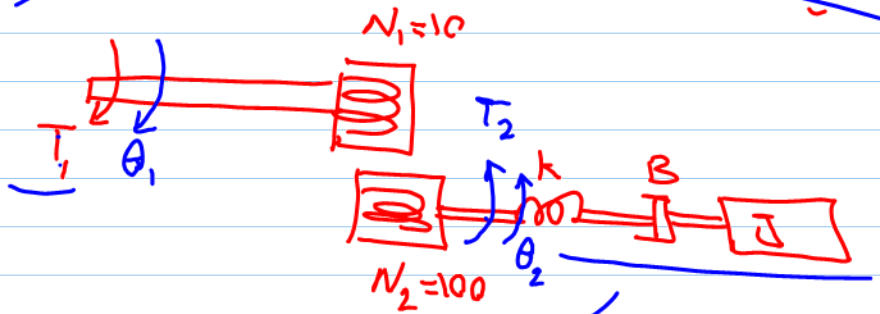
$$\frac{J_1}{J_2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \qquad J_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 J_2$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \qquad k_1 = \left(N_2/N_1\right)^2 k_2$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \qquad B_1 = \left(N_2/N_1\right)^2 B_2$$

توجه: ابتدا اثر المانهای سمت چرخ دنده منتقل کنید و چرخ دنده را حذف کنید.

معادله حرکت؟



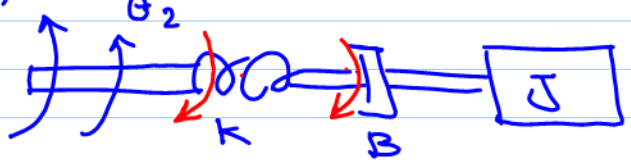
① گشتاور T_1 را به سمت دوم منتقل کنید ✓

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{100}{10}$$

$$T_2 = 10 T_1$$

② J و B و k را به طرف اول ← ؟

اثر گشتاور T_1 در طرف دوم؟



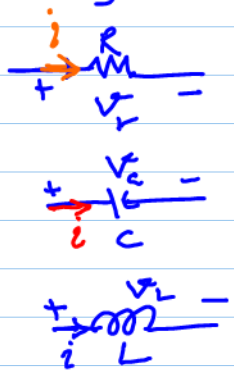
$$T_{فنر} = k\theta_2$$

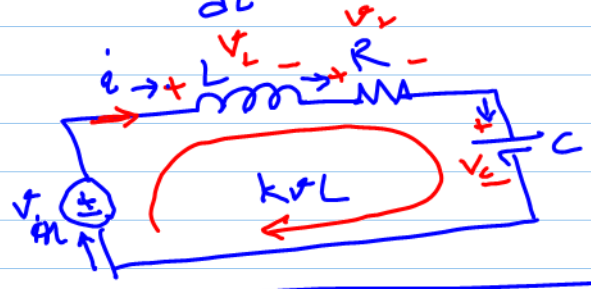
$$T_{میرا} = B\dot{\theta}_2$$

$$J\ddot{\theta}_2 = 10T_1 - (k\theta_2 + B\dot{\theta}_2)$$

③ سیستمهای الکتریکی ← مدار ۱ — KCL و KVL

$$\begin{cases} V_R = R\,i \\ i = C\dfrac{dV_c}{dt} \\ V_L = L\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$





$$-V_{in} + V_L + V_r + V_c = 0$$

$$V_c \quad C\frac{dV_c}{dt} = i$$

$$C \times V_c = \int i$$

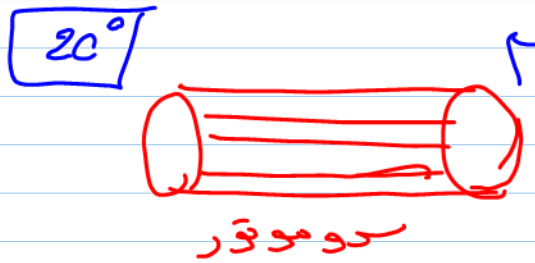
$$V_c = \frac{1}{C}\int i$$

$$-V_{in} + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i + Ri = 0$$

ورودی

مثال معروف سرو موتور:

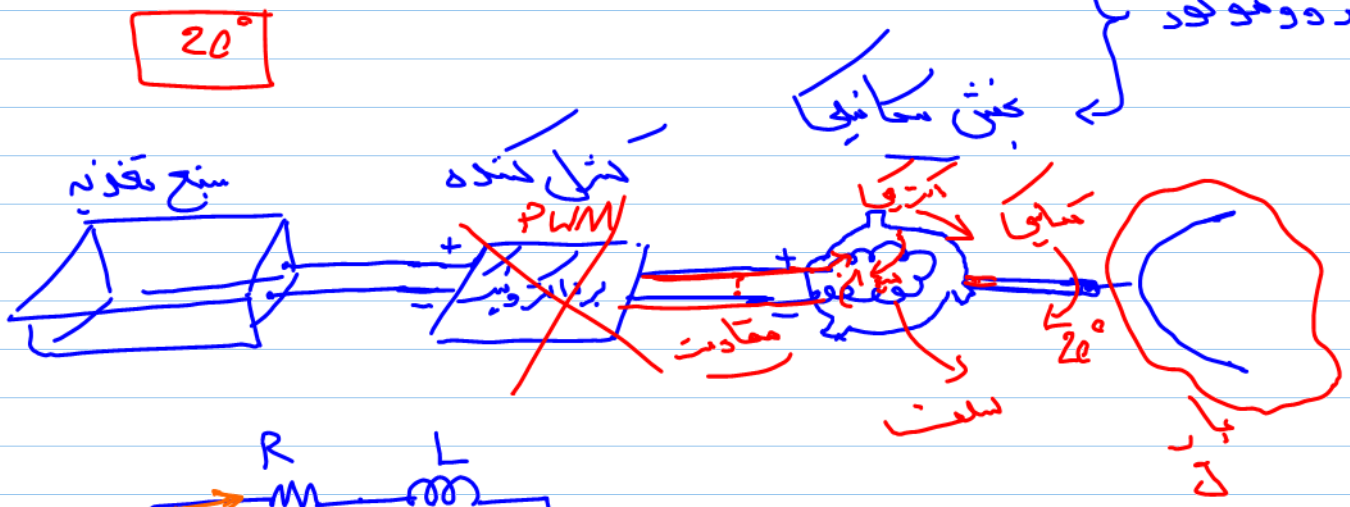
سرو موتور برای تنظیم زاویه به صورت دقیق استفاده می شود. مثل موتور دیش ماهواره

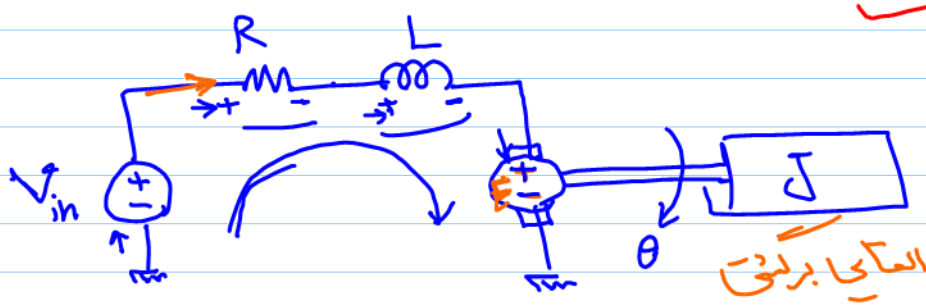


بخش الکتریکی (موتور و استاتور)

سرو موتور

بخش مکانیکی





$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

وسایل الکتریکی برقی

$$-V_{in} + V_R + V_L + E = 0$$

$E = k_w \times$ سرعت زاویه‌ای بار

$= k_w \times w$

$$\boxed{-V_{in} + Ri + L\frac{di}{dt} + E = 0}$$

$$T_e = k_t\, i \qquad T_M = \left(\frac{P}{2}\right) \times T_e$$

$$(1)\quad -V_{in} + Ri + L\frac{di}{dt} + k_w\frac{d\theta}{dt} = 0$$

بحث مکانیکی

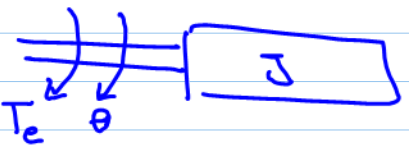
$T_e = T_M$ $\quad T$

$$\text{جرم} \times \ddot{x} = F_{\text{محرک}} - F_{\text{مقاوم}}$$

$$J \times \ddot{\theta} = T_{\text{محرک}} - T_{\text{مقاوم}}$$

↓

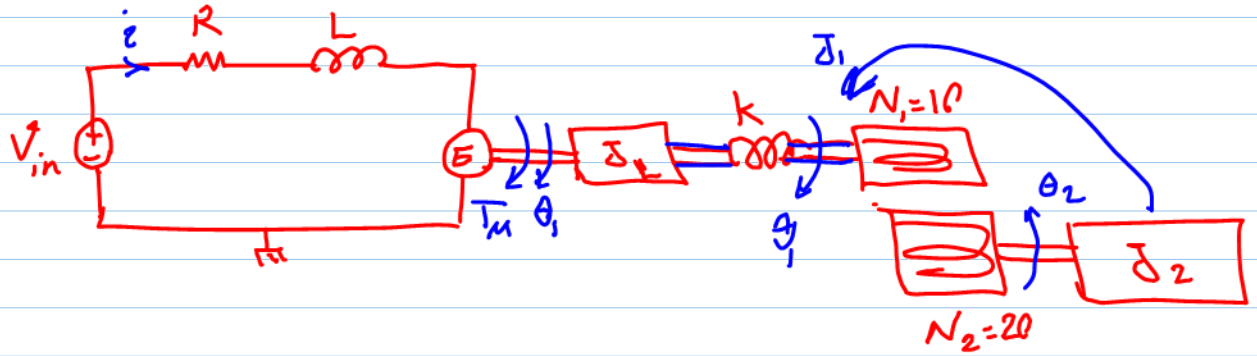
از سیم



$$(2)\quad J\ddot{\theta} = T_M = T_e = k_t\, i$$

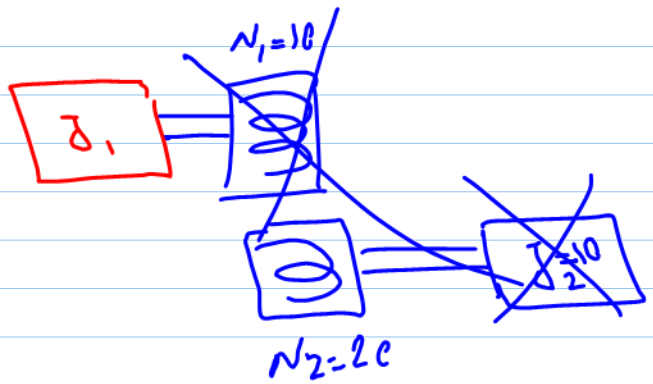
$$\begin{cases} -V_{in} + Ri + L\dfrac{di}{dt} + k_w\dfrac{d\theta}{dt} = 0 \\ J\ddot{\theta} = k_t\, i \end{cases}$$

معادلات وضعیت موتور

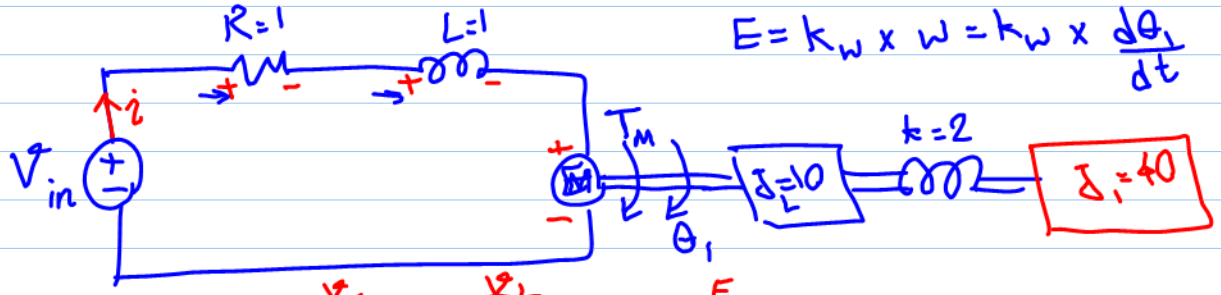


بافرض $R=L=1$ ، $J_2=10$ ، $k=2$ ، $J_L=10$

و $k_t=1$ ؛ $k_w=0.1$ معادلات وقتی واحدی ها وارد.



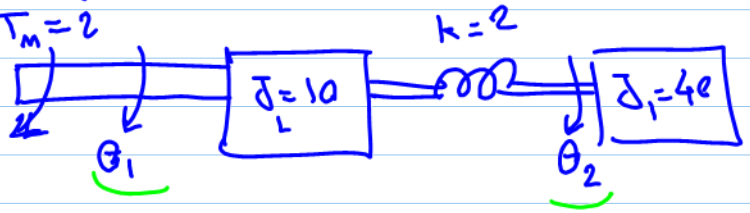
$$\frac{J_1}{J_2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \rightarrow \frac{J_1}{10} = \left(\frac{20}{10}\right)^2 \rightarrow \boxed{J_1 = 40}$$



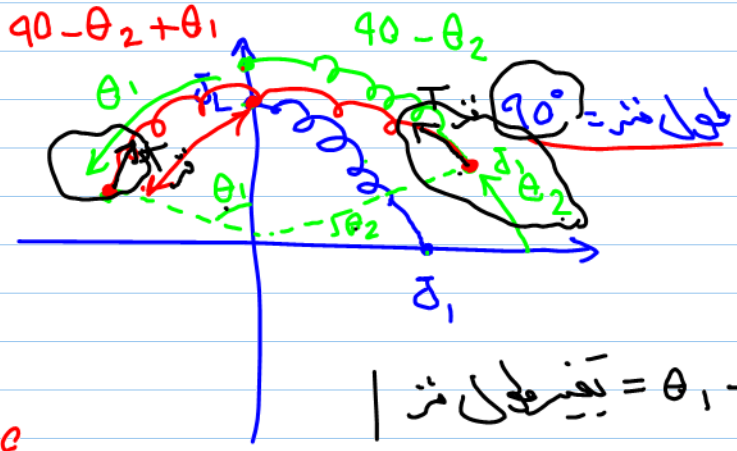
$$E = k_w \times w = k_w \times \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$① \quad -V_{in} + \overbrace{1 \times i}^{V_R} + \overbrace{1 \times \frac{di}{dt}}^{V_L} + \overbrace{0.1 \times \frac{d\theta_1}{dt}}^{E} = 0$$

$$T_e = k_t\, i = 1 \times i \qquad T_M = T_e = 1 \times i$$



فرض : $\theta_1 > \theta_2$



طول مز = 90 + θ1 - θ2

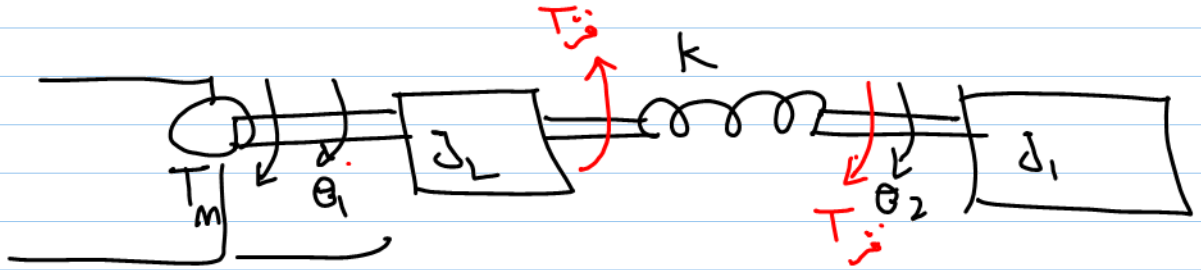
فرق: θ1 > θ2

θ1 = 60 θ2 = 30

طول مز = 120°

تغير طول مز = θ1 - θ2

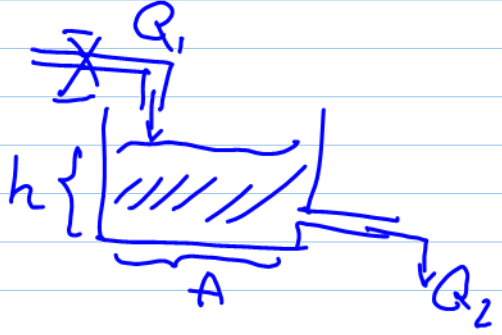
~~جاي مز = θ1 + θ2~~



T مز = k x تغير طول مز = k x (θ1 - θ2) = 2(θ1 - θ2)

$$\begin{cases} J_L \ddot{\theta}_1 = T_M - 2(\theta_1 - \theta_2) \\ J_1 \ddot{\theta}_2 = 2(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \qquad T_M = i$$

$$\begin{cases} -V_{in} + i + \frac{di}{dt} + 0.1 \frac{d\theta_1}{dt} = 0 \\ J_L \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = i - 2(\theta_1 - \theta_2) \\ J_1 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = 2(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

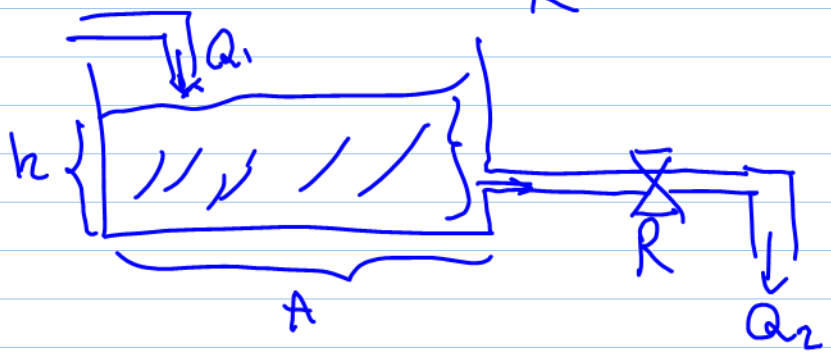


④ سیستمی هیدرولیکی

تغییرات ارتفاع مایع داخل مخزن را بدست آورید.

جریان خروجی − جریان ورودی = (ارتفاع مایع) $\frac{d}{dt}$ × سطح مقطع ظرف

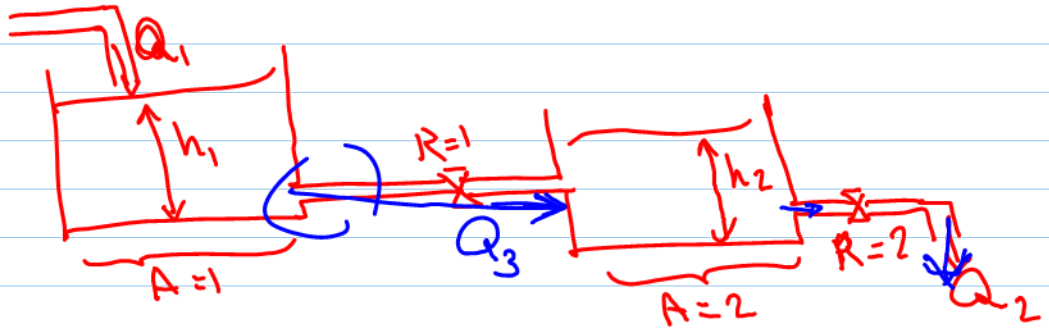
جریان خروجی شیر = $\frac{\text{ارتفاع مایع در مخزن}}{R}$



$$A \times \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 \qquad Q_2 = \frac{h}{R}$$

$$A \frac{dh}{dt} = Q_1 - \frac{h}{R}$$

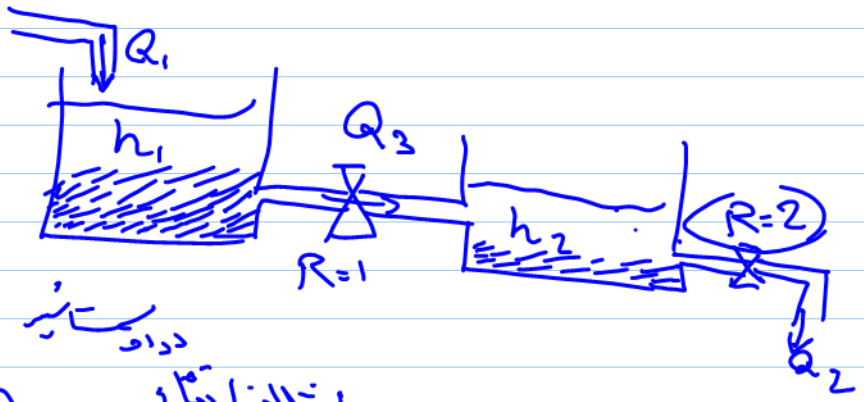
مکانیک ۹۲.



① برای هر مخزن یک معادله

مخزن اول: $1 \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - Q_3$

مخزن دوم: $2 \frac{dh_2}{dt} = Q_3 - Q_2$



دبی ساده

$$Q_3 = \frac{\text{اختلاف ارتفاع}}{R} \qquad Q_2 = \frac{h_2}{2}$$

$$Q_3 = \frac{h_1 - h_2}{1}$$

$$\begin{cases} 1 \quad \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - \frac{h_1 - h_2}{1} \\ 2 \quad \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1 - h_2}{1} - \frac{h_2}{2} \end{cases}$$

اعمال مدلسازی

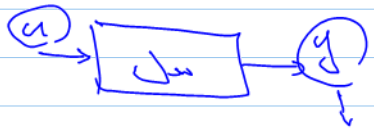
② تابع تبدیل

جلسه پنجم کنترل خطا

تبدیل لاپلاس:

مدلسازی ← معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان توصیف کننده سیستم

مثال: $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{dy}{dt} = u(t) + \frac{du(t)}{dt}$



$u(t) = 1 \rightarrow y(t) = ?$ $\quad Y(s)$

حوزه زمان ← لاپلاس ← حوزه S

↓

روابط ساده و قابل حل می‌شود

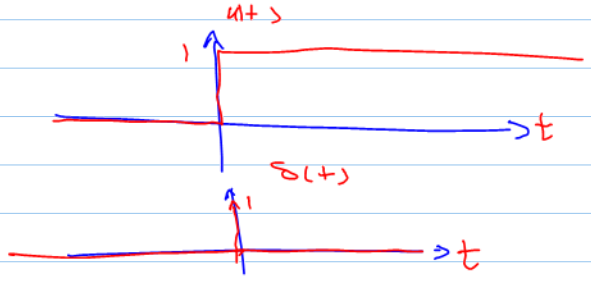
↓

تحلیل انجام شده و خروجی $y(t)$ در حوزه زمان ← لاپلاس معکوس ← خروجی در حوزه S

یادآوری لاپلاس: L (Laplace)

$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ $\quad s = j\omega$ $\quad s = \sigma + j\omega$

$* \; X(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt \; *$ $\quad s$: اعداد مختلط



$u(t) \rightarrow \frac{1}{s}$

$\delta(t) \rightarrow 1$

$e^{at}u(t) \rightarrow \frac{1}{s-a}$

$e^{at} \rightarrow \frac{1}{s-a}$ $\quad$ تبدیل لاپلاس برخی ← فقط در کنترل خطا

$\sin(at) \rightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$

$$\cos(at) \longrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0^+)$$

مقدار اولیه x در حوزه زمان ($t=0^+$)

مرتبه اول → $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s)$

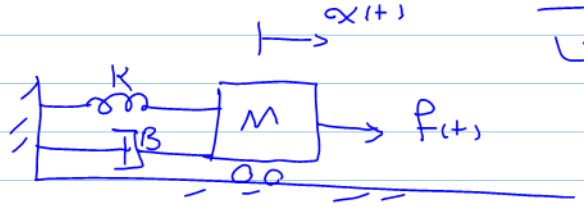
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s)$$

هر مشتق در حوزه زمان = ضرب در s در حوزه فرکانس

$$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as}X(s)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}x(t)\} = X(s+a)$$

تابع تبدیل = تبدیل لاپلاس خروجی / تبدیل لاپلاس ورودی



با فرض $y(t) = x(t)$، تابع تبدیل $\frac{Y}{F}$ را بیابید.

معادله دیفرانسیل: $M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$

$\frac{Y(s)}{F(s)} = ?$ $\quad y(t) = x(t) \rightarrow Y(s) = X(s)$

$\frac{X(s)}{F(s)} = ?$

f در حوزه زمان و x را بیابید $\quad \mathcal{L}\left\{M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx(t)\right\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$

↓ ورودی

$$\mathcal{L}\left\{M\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{B\frac{dx}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{kx(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$x(t) \longrightarrow X(s)$

$$M\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + B\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + K\,\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$M\left(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right) + B\left(sX(s) - x(0^+)\right) + KX(s) = F(s)$$

توضیح:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}$$

h

$$\frac{dx}{dt} = h(t) \longrightarrow H(s) = sX(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dh}{dt}\right\} = sH(s) - h(0^+)$$

$$= s\left(sX(s) - x(0^+)\right) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0^+}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0^+)$$

معادله دیفرانسیل ← تبدیل لاپلاس

$$Ms^2X(s) - Msx(0^+) - M\dot{x}(0^+) + BsX(s) - Bx(0^+) + KX(s) = F(s)$$

(تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل)

نکته: تابع تبدیل با فرض شرایط اولیه صفر بدست می‌آید.

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$X(s)\left(Ms^2 + Bs + K\right) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$ تابع تبدیل

* برای بدست آوردن تابع تبدیل، به جای هر مشتق در حوزه زمان s در حوزه لاپلاس

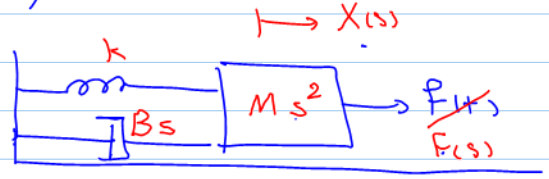
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + kx(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow Ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s) \rightarrow$$

بدست آوردن تابع تبدیل بدون تعیین معادله دیفرانسیل

در حرکت خطی

مکانیکی	معوزه ای
M	Ms^2
B	Bs
k	k

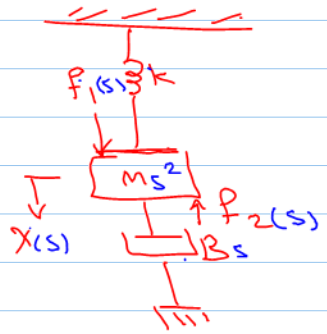


روش ماتریسی ← ① سیستم جرم

[نیروهای فنر خارجی − مجموع نیروهای اصطکاک خارجی] = [مجموع حاصلضرب جرم در شتاب جرم]

$$[Ms^2 + Bs + k] \times X(s) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k}$$



$$[Ms^2 + Bs + k] * X(s) = F_1(s) - F_2(s)$$

---

② بیش از سیستم جرم

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}$$

n: تعداد جرم‌ها

	M_1	M_2	M_3
M_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
M_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
M_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

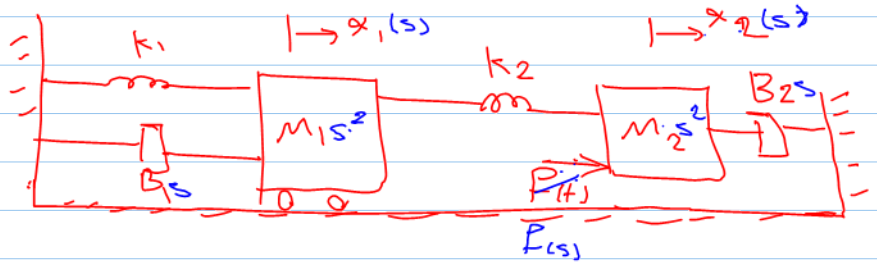
a_{11} = مجموع تمام اعضای متصل به جرم M_1

$a_{33} = M_3$ اعضای متصل به جرم

a_{22} = مجموع تمام اعضای متصل به جرم M_2

$a_{12} = -$ (مجموع تمام اعضای مشترک بین جرم M_1 و M_2)

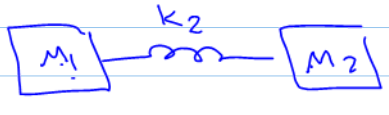
$a_{13} = -$ (مجموع تمام اعضای مشترک بین جرم M_1 و M_3)



	M_1	M_2
M_1	a_{11}	a_{12}
M_2	a_{21}	a_{22}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

$a_{11} = M_1 s^2 + k_2 + B_1 s + k_1$



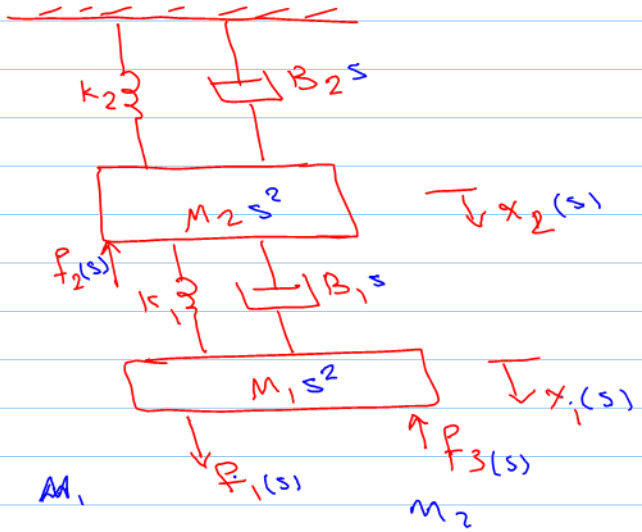
$$a_{22} = M_2 s^2 + B_2 s + k_2 \qquad a_{12} = -(k_2)$$

$$a_{21} = -(k_2)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + B_1 s + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & M_2 s^2 + B_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

معادلات در حوزه لاپلاس

حل تشریحی - تعیین



M_1 M_2

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} M_1 s^2 + B_1 s + k_1 & -(B_1 s + k_1) \\ -(B_1 s + k_1) & M_2 s^2 + B_1 s + k_1 + B_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(s) - f_3(s) \\ 0 - f_2(s) \end{bmatrix}$$

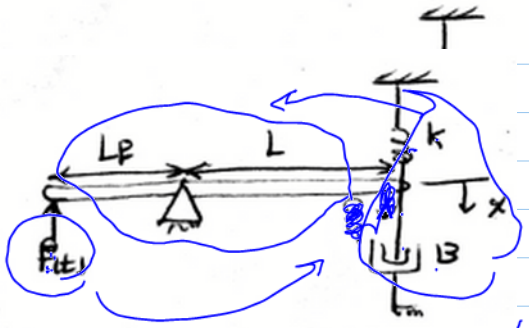
$x \to \theta$, $f \to T$, $M \to J$ ← حرکت دورانی (2)

سوال ۴۸

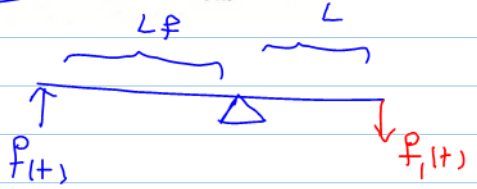
هوافضا ۹۳ س ۴۲۴ - تساز. سیستم شکل زیر تابع تبدیل $\frac{X(s)}{F(s)}$ کدام است؟ جرم اهرم و اسکاک ناچیز

۱) $\frac{\frac{L}{Lp}}{k+Bs}$ ۲) $\frac{\frac{Lp}{L}}{B+ks}$ ۳) $\frac{\frac{L}{Lp}}{Bs+k}$ ۴) $\frac{\frac{Lp}{L}}{k+Bs}$

قابل صرف نظر کردن است.

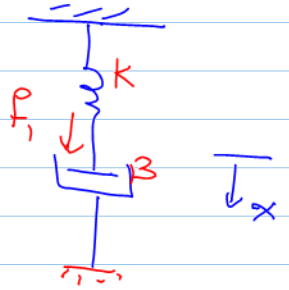


دوستی ماتریسی ← پیش آزاد جرم



$f(t)\,Lp = f_1(t)\,L$

$$f_1(t) = f(t)\,\frac{Lp}{L}$$



نیروی دمپر $= B\dot{x}$

نیروی فنر $= kx$

$$\text{جرم} \times \ddot{x} = f_1(t) - B\dot{x} - k\dot{x}$$

$$0 \times \ddot{x} = f_1(t) - B\dot{x} - kx$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = ?$$

$$B\dot{x} + kx = f_1(t)$$

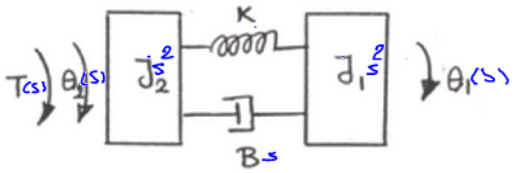
$$B\dot{x} + kx = \frac{Lp}{L} f(t)$$

$$BsX(s) + kX(s) = \frac{Lp}{L} F(s)$$

$$(Bs + k)\,X(s) = \frac{Lp}{L} F(s)$$

تابع تبدیل $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{Lp}{L}}{Bs+k}$

۶۸. در سیستم مکانیکی دورانی شکل مقابل تابع تبدیل $\frac{\theta_1(s)}{T(s)}$ کدام است؟



۱) $\frac{(Bs+k)^2}{(J_1s^2+Bs+k)(J_2s^2+Bs+k)}$

۲) $\frac{(Bs+k)}{(J_1s^2+Bs+k)(J_2s^2+Bs+k)}$

۳) $\frac{(Bs+k)^2}{s^2[(J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$

۴) ✓ $\frac{Bs+k}{s^2[J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$

روش ماتریسی

فیزیکی	حوزه
x	θ
f	T

J_1 J_2

$$\begin{matrix} J_1 \\ J_2 \end{matrix}\begin{bmatrix} J_1s^2+Bs+k & -(Bs+k) \\ -(Bs+k) & J_2s^2+Bs+k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ T(s) \end{bmatrix}$$

$\frac{\theta_1}{T}=?$ ← معادلات ماتریسی را ساده کنیم.

ضرب ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{11}b_1+a_{12}b_2=c_1 \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2=c_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s)+(-(Bs+k)\theta_2(s)) \\ -(Bs+k)\theta_1(s)+(J_2s^2+Bs+k)\theta_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ T(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s)-(Bs+k)\theta_2(s)=0 \\ -(Bs+k)\theta_1(s)+(J_2s^2+Bs+k)\theta_2(s)=T(s) \end{cases}$$

$\frac{\theta_1}{T}=?$

θ_2 حالا θ_2 را حذف می‌کنیم.

رابطه‌ای که فقط شامل θ_1 و T باشد.

θ_2 برحسب θ_1 و T بنویسیم.

$$(J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s)=(Bs+k)\theta_2(s)$$

$Bs+k$ $Bs+k$

$$\frac{J_1 s^2 + Bs + K}{Bs + K}\,\theta_1(s) = \theta_2(s)$$

$$-(Bs+K)\,\theta_1(s) + (J_2 s^2 + Bs + K)\,\theta_2(s) = T(s)$$

$$-(Bs+K)\,\theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + Bs + K\right)\frac{\left(J_1 s^2 + Bs + K\right)}{Bs+K}\,\theta_1(s) = T(s)$$

$$\left[\frac{-(Bs+K)^2 + (J_2 s^2 + Bs + K)(J_1 s^2 + Bs + K)}{Bs+K}\right]\theta_1(s) = T(s)$$

$$\frac{-(Bs+K)^2 + J_2 J_1 s^4 + J_2 s^2 (Bs+K) + (Bs+K) J_1 s^2 + (Bs+K)^2}{Bs+K}\,\theta_1 = T$$

$$\frac{J_2 J_1 s^4 + (Bs+K)(J_1 + J_2)s^2}{Bs+K}\,\theta_1(s) = T(s)$$

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{Bs+K}{s^2\left(J_1 J_2 s^2 + (Bs+K)(J_1+J_2)\right)}$$

$\frac{\theta_1}{T(s)} = ?$ ← تبدیل لاپلاس ← معادلات دیفرانسیل ← تعریف

مکانیک ۹۳ - فارغ - تا ۱۰ سیستم شکل زیر شامل دو مخزن است. اگر سطح مقطع مخزن

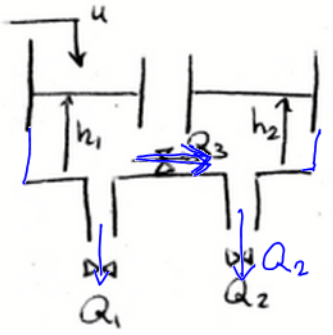
$h_2(t)$ ، $h_1(t)$ مساوی هم و برابر $A=1$ و مقاومت شیرها مساوی $R=1$ باشد، با فرض

بخش اول

$A=1$ به عنوان ارتفاع سیال در دو مخزن، u دبی ورودی به Q_1 و Q_2 دبی خروجی و Q_3 دبی بین

دو ظرف باشد، با فرض خطی بودن سیستم یعنی $Q_1=\frac{h_1}{R_1}$, $Q_2=\frac{h_2}{R_2}$, $Q_3=\frac{h_1-h_2}{R_3}$ تابع تبدیل

بین u و Q_3 کدام است؟



۱) $\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ ۲) $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$ ۳) $\frac{1}{(s+1)^2}$ ۴) $\frac{1}{s+3}$

$A=1$

$\frac{\text{دبی ورودی}}{\text{سطح مقطع مخزن}} = \frac{\text{دبی ورودی}}{A} = \frac{\text{دبی ورودی}}{1}$

$\frac{\text{دبی ورودی}}{\text{سطح مقطع مخزن}} = \frac{\text{دبی ورودی}}{A} = \frac{\text{دبی ورودی}}{1}$

$\frac{Q_3}{u} = ?$

① $\frac{dh_1}{dt} = u - (Q_1 + Q_3)$

② $\frac{dh_2}{dt} = Q_3 - Q_2$

به دنبال ارتباطی در حوزه زمان

متغیرهای حالت: h_1, h_2, Q_1, Q_2 نه شامل Q_3 و u نباشد.

$Q_1 = h_1 \quad Q_2 = h_2 \quad Q_3 = h_1 - h_2 = Q_1 - Q_2$

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = u - Q_1 - Q_3 \\ \frac{dQ_2}{dt} = Q_3 - Q_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sQ_1(s) = u(s) - Q_1(s) - Q_3(s) \\ sQ_2(s) = Q_3(s) - Q_2(s) \end{cases}$$

$$sQ_2 + Q_2 = Q_3 \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_3}{s+1}$$

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 \rightarrow Q_3 = Q_1 - \frac{Q_3}{s+1}$$

$$\frac{(s+1)Q_3}{s+1} + \frac{Q_{i3}}{s+1} = Q_1 \rightarrow Q_1 = \left(\frac{s+2}{s+1}\right)Q_3$$

$$\frac{sQ_3 + Q_3 + Q_3}{s+1} = Q_1$$

(1) $$sQ_1 = U - Q_1 - Q_3$$

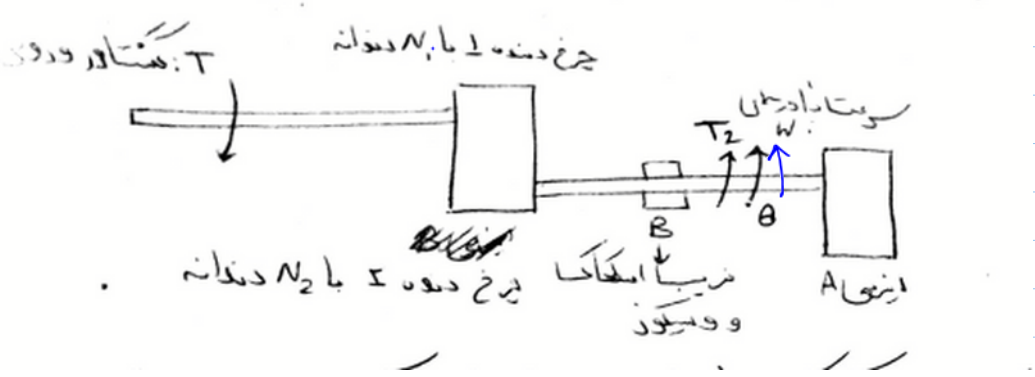
$$(s+1)Q_1 = U - Q_3 \rightarrow \left(\frac{s+2}{s+1}\right)Q_3 = U - Q_3$$

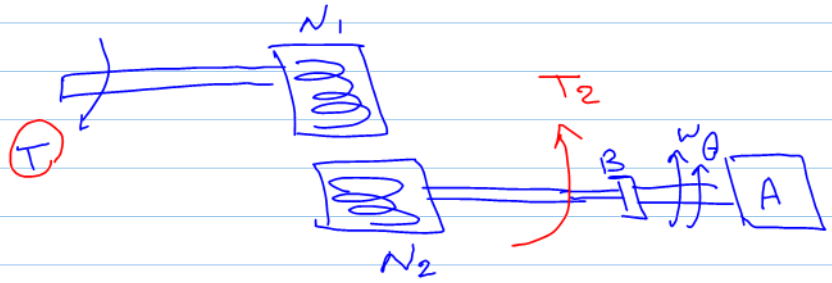
$$(s+2)Q_3 = U - Q_3 \rightarrow (s+3)Q_3 = U$$

$$\boxed{\frac{Q_3}{U(s)} = \frac{1}{s+3}}$$

سوال ۹۲- مرجع ۴۱۳ - تست ۱ تابع تبدیل $\frac{W(s)}{T(s)}$ کدام است؟

۱) $\frac{N_2}{N_1(Bs+A)}$ ۲) $\frac{N_1}{N_2(As+B)}$ ۳) $\frac{N_1}{N_2(Bs+A)}$ ۴) $\frac{N_2}{N_1(Bs+A)}$

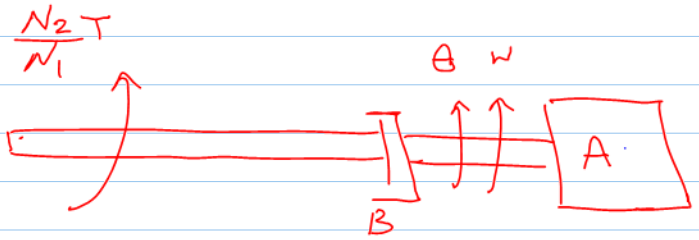




$J = A$

حذف چرخ دنده

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{T}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow \boxed{T_2 = \frac{N_2}{N_1}T}$$



$\frac{w}{T} = ?$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{N_2}{N_1}T - B\frac{d\theta}{dt}$$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} = \frac{N_2}{N_1}T$$

$$As^2\theta(s) + Bs\theta(s) = \frac{N_2}{N_1}T(s)$$

$$(As^2+Bs)\theta(s) = \frac{N_2}{N_1}T(s) \rightarrow \boxed{\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{As^2+Bs}}$$

$\frac{w}{T} = ?$ $\qquad w = \frac{d\theta}{dt} \qquad w(s) = s\theta(s)$

$$s\frac{\theta(s)}{T(s)} = \not{s} \times \frac{\frac{N_2}{N_1}}{As^{\not{2}}+B\not{s}}$$

$$\boxed{\frac{w(s)}{T(s)} = \frac{N_2/N_1}{As+B}}$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

توضیحات:

① درجه سیستم: بزرگترین توان s در تابع تبدیل ← درجه سیستم = 2

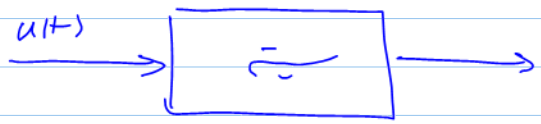
② درجه نسبی: اختلاف درجه خروجی و ورودی ← درجه نسبی = 1 - 2

صفر ؟ قطب:

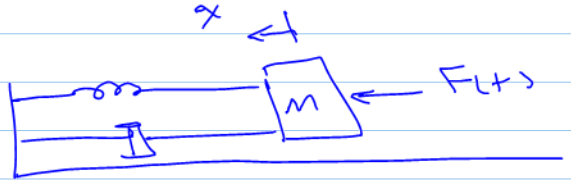
$$\frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s+1}$$

$s=-2$ صفر سیستمای معرفی تابع تبدیل را مشخص میکند.

← یعنی اگر ورودی با فرکانس -2 به سیستم اعمال شود خروجی صفر است.



$u(t) = \sin(-2t + \pi/6)$



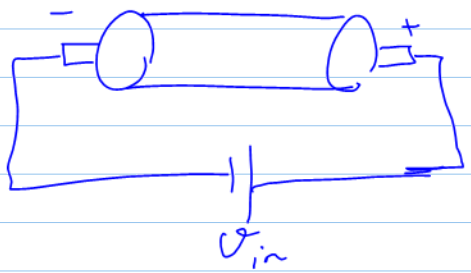
$s=2$ $\quad f(t) = e^{2t} \rightarrow y(t) = 0 = x(t)$

سیستمها ← ثابت ، $\sin(\omega t)$ ، e^{at}

$$\frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s+1}$$ قطب سیستم یا مخرج صفر

$s+1 = 0$ $\quad s=-1$ ← قطب سیستم

اگر ورودی با فرکانس قطب سیستم به سیستم اعمال شود خروجی به سمت ∞ میرود.



تابع تبدیل $= \frac{W(s)}{V_{in}} = \frac{1}{s+2}$ خروجی

$V_{in} = \sin(-2t + \pi/2)$

* میرا نوسانی:

معادلات دیفرانسیل $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ شرایط اولیه $\rightarrow$ تابع

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

فرض شرایط اولیه صفر

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

معادلات دیفرانسیل ←

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = 1 \times U(s)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

در حوزه زمان

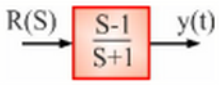
لاپلاس

$$s^2Y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+) + 2\left(sY(s) - y(0^+)\right) + Y(s) = U(s)$$

تابع تبدیل ← معادلات دیفرانسیل ← لاپلاس با فرض شرایط اولیه صفر

ادامه ۹۲

۶۳. در سیستم روبه‌رو، تحت چه شرایطی $y(s) \equiv 0$ می‌شود.



۱) $R(t) = e^{+t}$ و $y(0) = 1$

۲) $R(t) = e^{+t}$ و $y(0) = -1$

۳) $R(t) = e^{-t}$ و $y(0) = 0$

۴) $R(t) = e^{-t}$ و $y(0) =$ هر عدد

شرایط اولیه

$$R(t) = \begin{cases} e^{1t} \rightarrow & \text{فرکانس } +1 \\ e^{-1t} \rightarrow & \text{فرکانس } -1 \end{cases}$$

صفرها $\rightarrow$ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{s+1} \rightarrow s=1$

فرکانس ورودی $=1$ $\rightarrow$ فرکانس صفر $=0$

تابع تبدیل ← معادلات دیفرانسیل ← لاپلاس

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{s+1} \rightarrow sY(s) + Y(s) = sR(s) - R(s)$$

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = \frac{dr(t)}{dt} - r(t)$$

$r(t) = e^{t}u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s-1}$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = sR(s) - r(0) - R(s)$$

$$(s+1)Y(s) = sR(s) - R(s) - r(0) + y(0)$$

صورت تست

$$0 = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{s-1} - 0 + y(0)$$

$$=$$

ورودی متداریه نداره. چون مبدأ زمانی پیدا جایی که ورودی شروع شده.

$$r(0^+) = r(0^-) = 0$$

$r(t) = e^{t}$

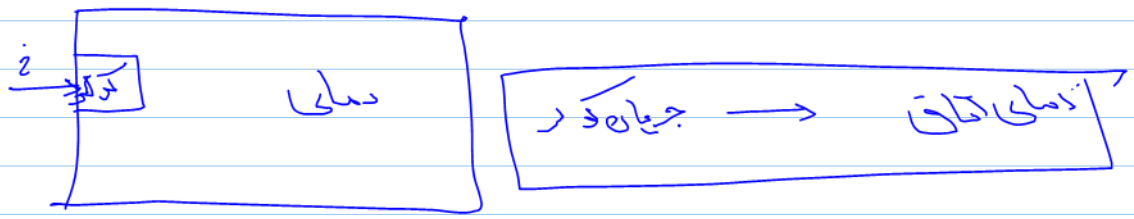
$$0 = \frac{1}{s-1} - 0 + y(0) \rightarrow y(0) = -1$$

$y(0) = 0$ ✓

جلسه شش کنترل خطی

① معادلات دیفرانسیل ② تابع تبدیل

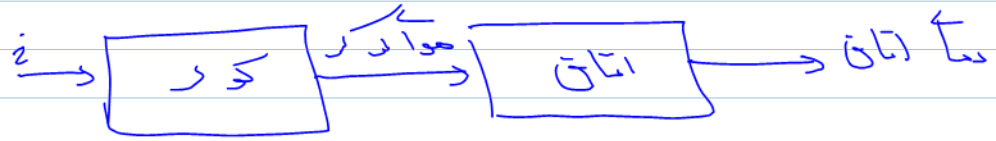
③ نمایش بلوک دیاگرام



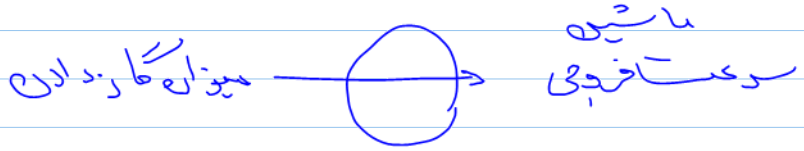
$$\frac{\text{عملی}}{\text{جریان}} = \frac{s^9 + \cdots}{s^{20} + \cdots}$$

سخت

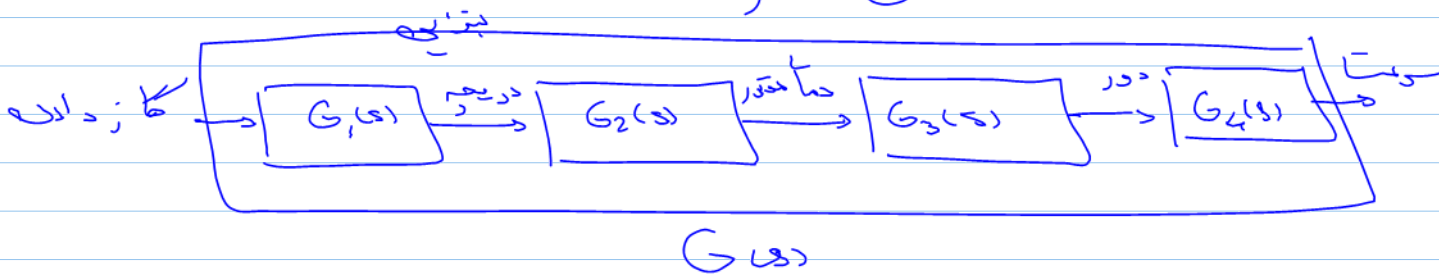
عملی اتاق → عملی فیزیکی کنترلر → جریان کنترلر



کنترل حلقه باز

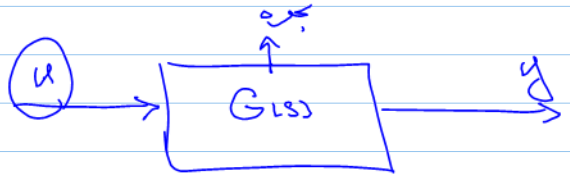


سرعت فرزنی → دور موتور → افزایش توربو → باز شدن دریچه → گاز

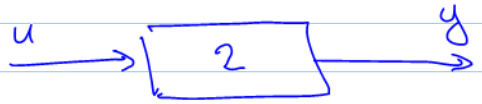


$G(s)$

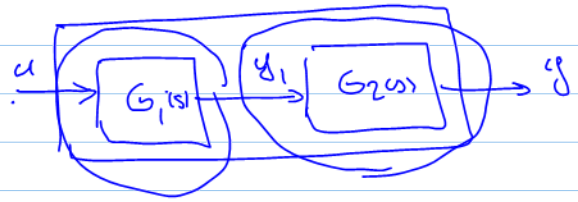
نمایش بلوک دیاگرام



$$Y(s) = U(s) \times G(s)$$



$$y = 2 \times u$$



$Y(s) = ?\ U(s)$

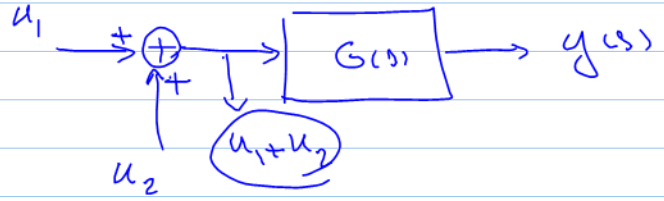
← از خروجی به ورودی

$$y(s) = G_2(s) \times y_1(s)$$

$$y_1(s) = G_1(s) \times u(s)$$

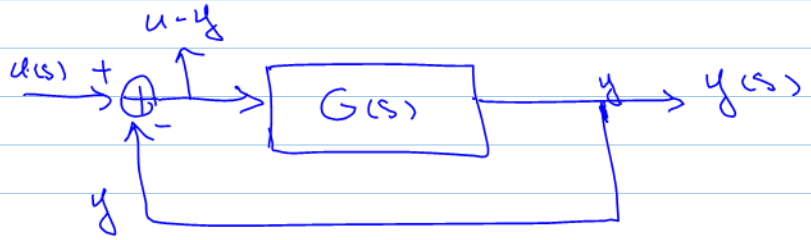
$$y(s) = G_2(s) \times (G_1(s) \times u(s))$$

$$y(s) = G_2(s)\ G_1(s)\ u(s) \rightarrow \frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s) G_2(s)$$



← نقطه جمع

$$y(s) = G(s) \times (u_1(s) + u_2(s))$$



نقطه پخش

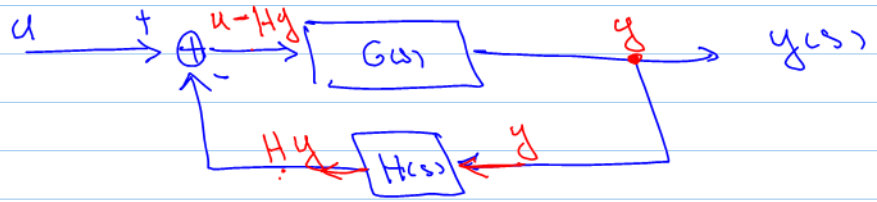
$\frac{Y(s)}{U(s)} = ?$

$$y(s) = G(s) \times (u - y) = G(s)\,u(s) - G(s)\,y(s)$$

$$y(s) + G(s)\,y(s) = G(s)\,u(s)$$

$$y(s)(1 + G(s)) = G(s)\,u(s)$$

$$\frac{y}{u} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

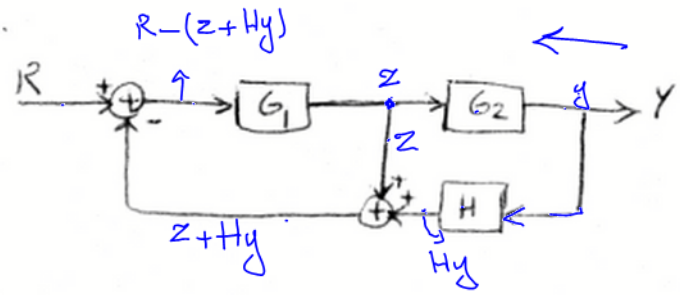


خروجی = $H(s)\,y$

$$y(s) = G(s)(u - Hy)$$

$$\frac{y}{u} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$ ✓

مثال: (مکانیک ۷۸) تابع تبدیل سوک دیاگرام شکل زیر را بیابید.



$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$

برای هر خط اسم بیدا کنید.

$$y = G_2 z$$

z : R , y

$$z = G_1(R - z - Hy) \rightarrow$$

$$z = G_1 R - G_1 z - G_1 H y \qquad z + G_1 z = G_1 R - G_1 H y$$

$$z(1 + G_1) = G_1 R - G_1 H y$$

$$z = \frac{G_1 R}{1 + G_1} - \frac{G_1 H y}{1 + G_1}$$

$$y = G_2\left(\frac{G_1 R}{1 + G_1} - \frac{G_1 H y}{1 + G_1}\right)$$

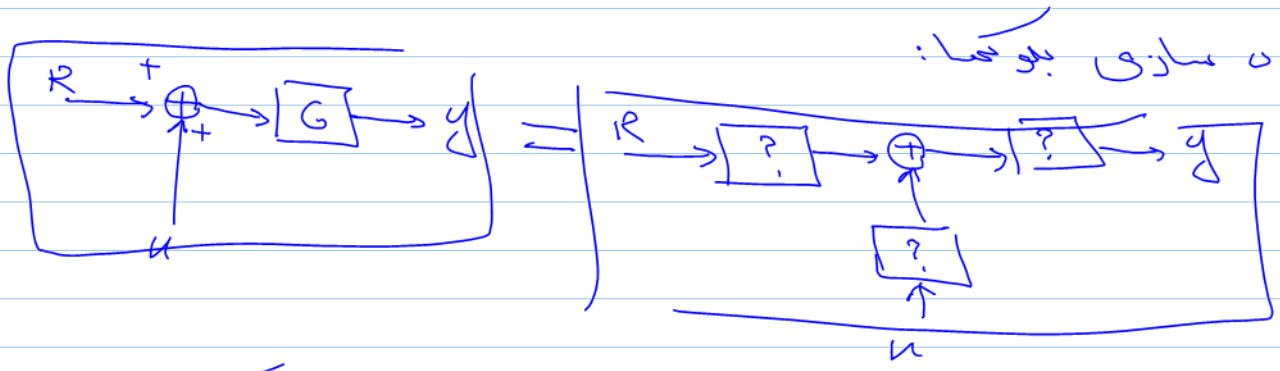
$$y = \frac{G_2 G_1 R}{1 + G_1} - \frac{G_2 G_1 H y}{1 + G_1}$$

$$y + \frac{G_2 G_1 H}{1 + G_1} y = \frac{G_1 G_2 R}{1 + G_1}$$

$$y\left(1 + \frac{G_1 G_2 H}{1 + G_1}\right) = \frac{G_1 G_2 R}{1 + G_1}$$

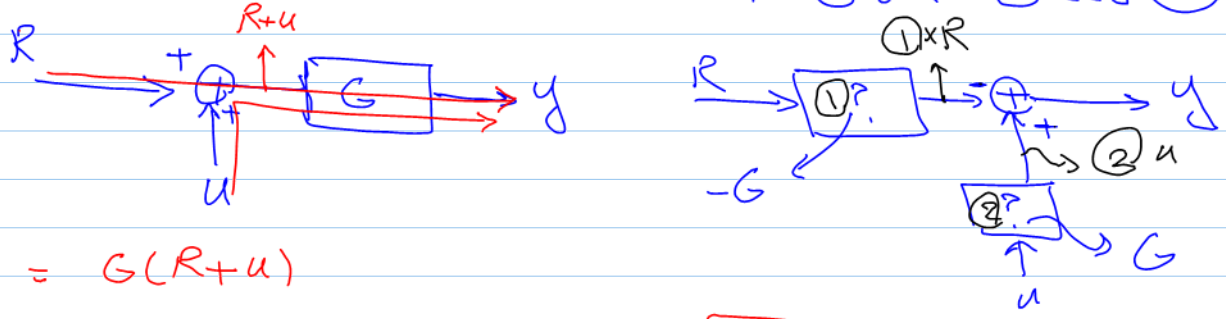
$$\frac{y}{R} = \frac{1 \times \frac{G_1 G_2}{1 + G_1}}{(1 + G_1)\left(1 + \frac{G_1 G_2 H}{1 + G_1}\right)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_1 G_2 H}$$ ✓

ساده سازی بلوکها:



۱) بعد سیگنال ورودی به هر خروجی باید تقسیم شد

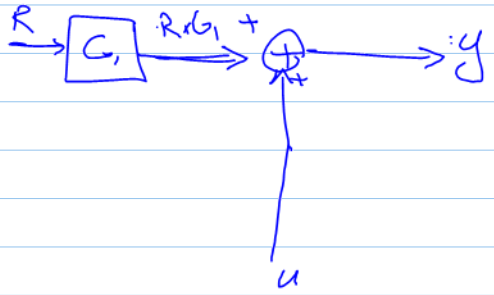
۲) ورودی جدیدی باید اضافه شود.

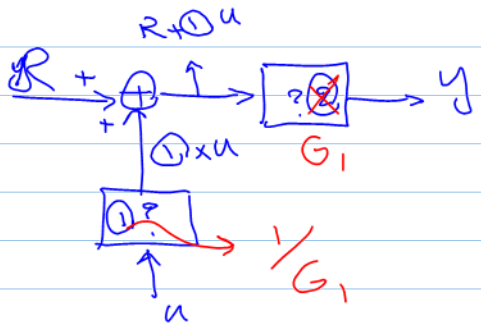


$$y = G(R+u)$$

$$y = GR + Gu \quad = \quad y = -①\times R + ②\times u$$

$$y = -(-G)R + (G)u$$





$$y = R\times G_1 + 1u$$

$$y = R\times \frac{G_1}{②} + \frac{G_1}{②}\times ①\, u$$

$$y = ②\times(R + ①\times u)$$

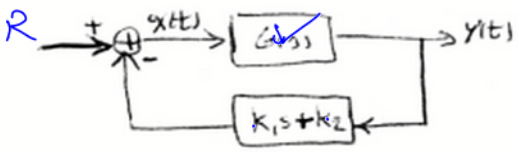
$$G_1 \times ① = 1 \rightarrow ① = \frac{1}{G_1}$$

مثال: معادله دیفرانسیل سیستم حلقه باز $G(s)$ به صورت زیر است:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

ضرایب k_1 و k_2 چه مقدار باشند تا قطبهای تابع تبدیل حلقه بسته در نقاط -1 و -3 قرار گیرد؟

$\frac{Y(s)}{R(s)}$



$k_1=5, k_2=3$ (2 $\quad k_1=7, k_2=1$ (1

$k_1=13, k_2=3$ (4 $\quad k_1=16, k_2=5$ (3

بیت $x \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y \longrightarrow Y(s) = G(s) \times X(s)$

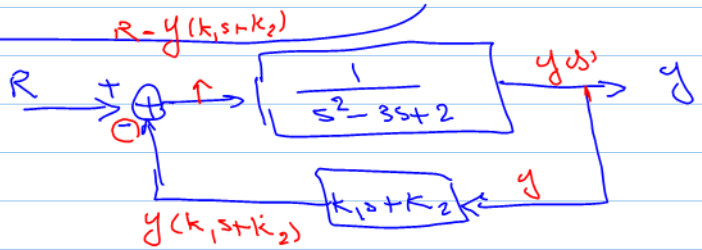
معادله $\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$ $\quad$ تابع تبدیل $G(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$

$s^2 y(s) - 3sy(s) + 2y(s) = x(s)$ $\quad \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{s^2-3s+2} = G(s)$

$y(s)(s^2-3s+2) = x(s)$

$\frac{Y}{R}$ = قطبهای حلقه بسته = ریشه های مخرج تابع تبدیل $\quad -3, -1$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$



$y(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}(R - y(k_1 s + k_2))$

$(s^2-3s+2)\,y(s) = R - y(s)(k_1 s + k_2)$

$y(s)(s^2-3s+2+k_1 s+k_2) = R(s)$

$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2-3s+2+k_1 s+k_2}$ $\quad$ حلقه بسته

$s^2 + (k_1 - 3)s + 2 + k_2 = 0 \rightarrow$ $\begin{cases} s = -1 \\ s = -3 \end{cases}$

$1 + (k_1 - 3)(-1) + 2 + k_2 = 0$

① $k_2 - k_1 = -6$

$9 + (k_1 - 3)\times -3 + 2 + k_2 = 0$

$k_2 - 3k_1 = -20$

$\begin{cases} k_2 - k_1 = -6 \\ k_2 - 3k_1 = -20 \end{cases}$ $\quad k_2 = 7 - 6 = 1$

$2k_1 = 14 \rightarrow k_1 = 7$

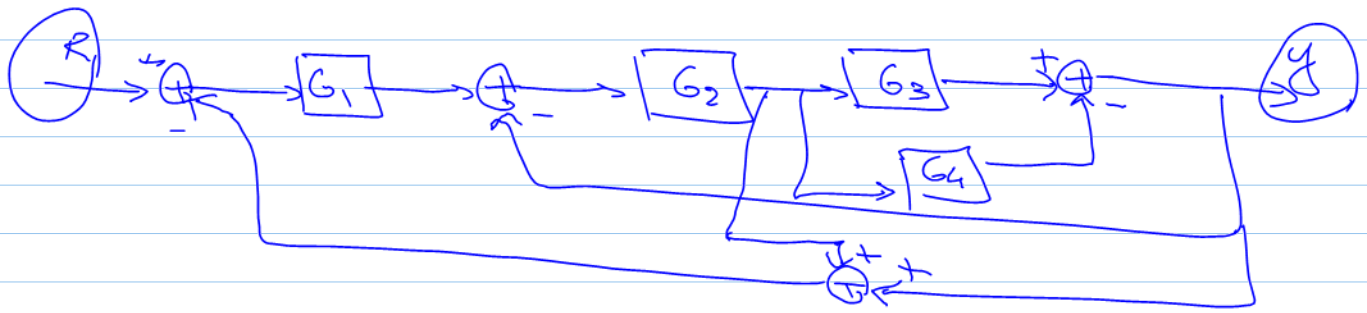
$1s^2 + (k_1 - 3)s + 2 + k_2 = 0$ $\quad -1, -3$

$(s - (-1))(s - (-3)) = 0$

$(s+1)(s+3) = 0$

$1s^2 + 4s + 3 = 0$

$\begin{cases} k_1 - 3 = 4 \rightarrow k_1 = 7 \\ k_2 + 2 = 3 \quad k_2 = 1 \end{cases}$

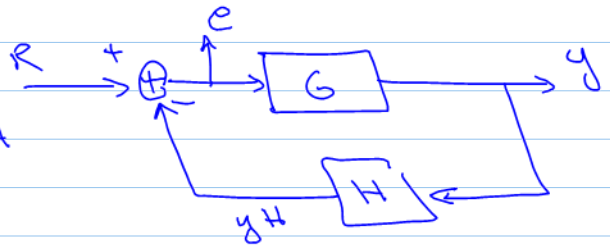


$\frac{y}{R} = ?$

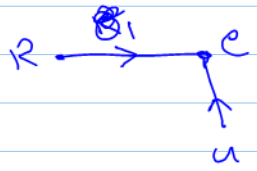
عالجين مسيو كذا بسيطة (signal flow graph) بـ SFG



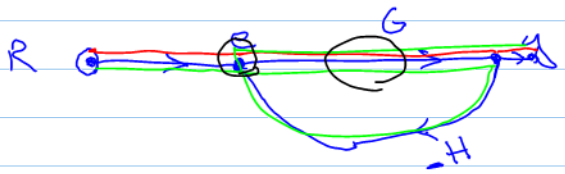




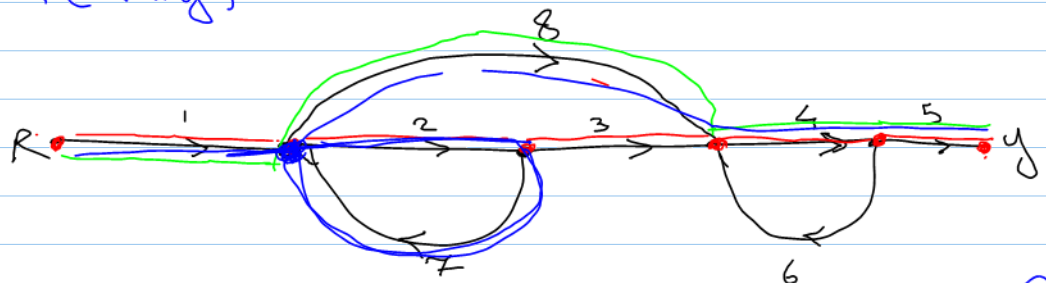
$e = R - y \times H$



$e = R + u$



$e = R + (-H \times y)$

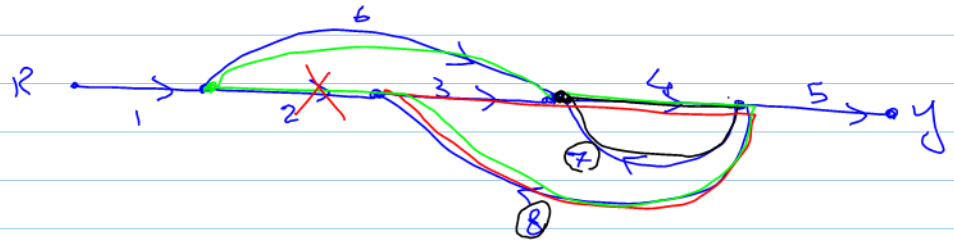


مسیر اول: ① ② ③ ④ ⑤ ✓

مسیر دوم: ① ⑧ ④ ⑤

✗ ① ② ⑦ ⑧ ④ ⑤

از گره دوم برگشت دارد



$R \to y$

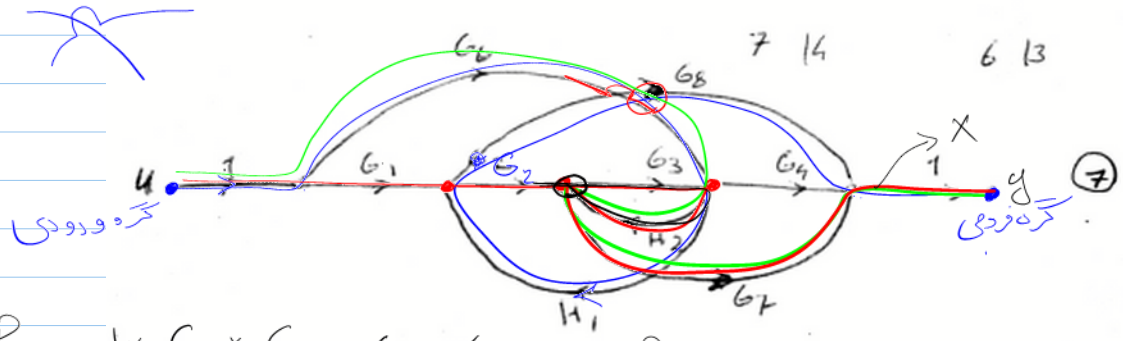
مسیر اول: ① ② ③ ④ ⑤ ✓

مسیر دوم: ① ⑥ ④ ⑤

حلقه‌ها: ④ ⑦ ، ③ ④ ⑧

جلسه هفتم

مثال: بهره حلقه‌های مستقیم از گره ورودی به گره خروجی کدام است؟



$P_1 = 1 \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4 \times 1$ $P_2 = 1 \times G_6 \times G_4 \times 1$

① $1\,G_1 G_2 G_3 G_4\,1$ ② $1\,G_6 G_4\,1$ ③ $1\,G_1 G_8\,1$

④ $1\,G_1 G_2 G_7\,1$ ⑤ $1\,G_6 H_1 G_8\,1$ ⑥ $1\,G_6 H_2 G_7\,1$

$P_6 = 1 \times G_6 \times H_2 \times G_7 \times 1$

حاصله میسون: استراج تابع تبدیل از ورودی به هر خروجی

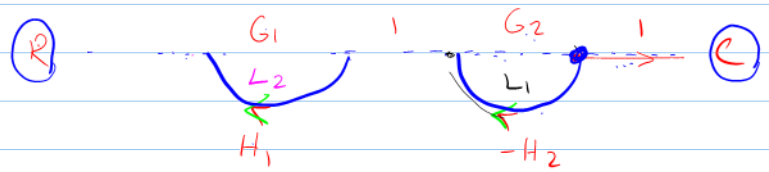
$$\frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

P_i: بهره مسیر امین از ورودی مدنظر به خروجی مدنظر

$\Delta = 1 -$ (مجموع حاصلضرب بهره حلقه‌ها) + (مجموع بهره کلیه حلقه‌ها دو به دو مستقل)

$-$ (مجموع حاصلضرب بهره حلقه‌ها سه به سه مستقل) $+ \cdots$

Δ_i = بخشی از Δ که مسیر P_i را لمس نکند (کلیه حلقه‌ها)



$\frac{C}{R} = ?$

$\begin{cases} L_2 = G_1 \times H_1 \\ L_1 = G_2 \times -H_2 \end{cases}$

R از C: $P_1 = 1 \times G_1 \times 1 \times G_2 \times 1$

$\Delta = ?$

حلقه‌ها را مشخص کنید.

* تنا خه ملی برگشتی را مشخص کنید.
* حلقه هایی که توان با تانه ملی برگشتی سافت را تشکیل میدهد.
* حلقه ملی مستقل را مشخص کنید.

L_1 ، L_2 → دو به دو مستقل

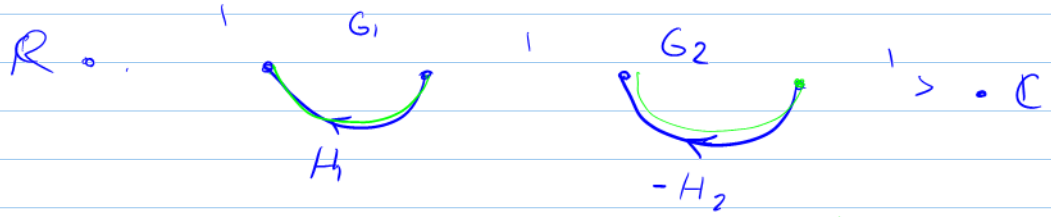
$$\Delta = 1 - (G_1H_1 + (-G_2H_2)) + ((-G_2H_2)\times(G_1H_1))$$

$$\Delta = 1 - G_1H_1 + G_2H_2 - G_1H_1G_2H_2$$

$$P_1 = 1 \times G_1 \times 1 \times G_2 \times 1 = G_1G_2$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2\times 1}{\Delta}$$

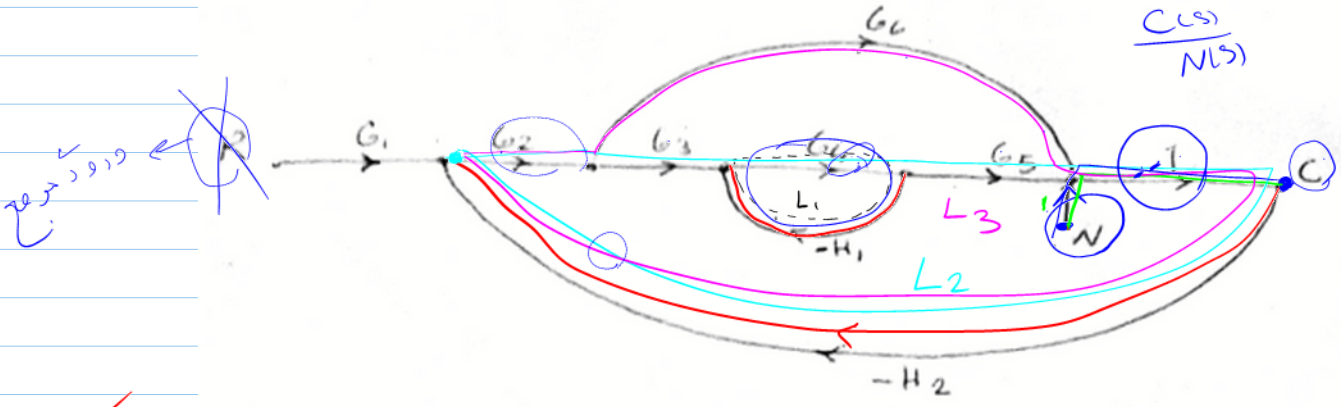


$\Delta = 1 - (\quad 0 \quad) + 0$ حلقه تداخل

$= 1$

تمرین: تابع انتقال سیستم بین ورودی و خروجی های خواسته شده را بدست آورید.

$$\frac{1+G_4H_1}{1+G_4H_1+G_2G_3G_4G_5H_2+G_2G_6H_2}$$



$P_1 = 1\times1 = 1$ $\quad L_1 = G_4 \times -H_1$ $\quad L_2 = G_2 \times G_3 \times G_4 \times G_5 \times 1^{-H_2}$

$\Delta = G_2G_6 \times 1 \times -H_2$ $\quad L_3, L_2$ وابسته

L_2, L_1

$\Delta = 1 - (-G_4H_1 - G_2G_3G_4G_5H_2 + -G_2G_6H_2)$ مستقل L_3, L_1

$$+(-G_4H_1 \times -G_2G_6H_2)$$

$$\Delta_1 = 1 - (-G_4H_1) + (0) \qquad L_1$$

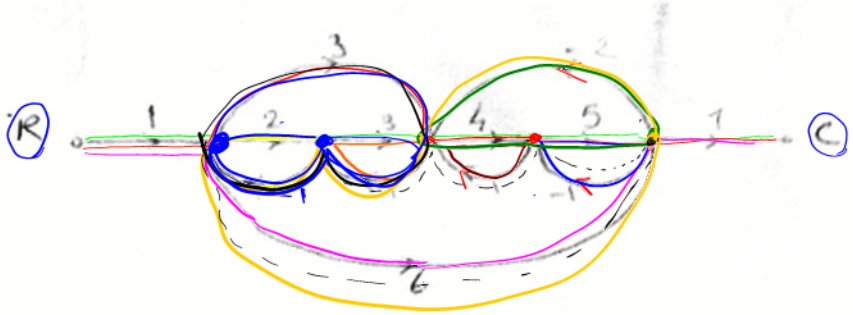
$$P_1 = 1 \qquad \Delta_1 = 1 + G_4H_1$$

$$\Delta = 1 + G_4H_1 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_2G_6H_2 + G_4H_1G_2G_6H_2$$

$$\frac{C}{N} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{1\times(1+G_4H_1)}{\Delta}$$

بوت V9 . جربتك SFG سابق جيت:

$\frac{229}{156}$ $\frac{133}{90}$ 7 $\frac{19}{13}$ ✓



$\frac{C}{R} = ?$

$P_1 = 1\times2\times3\times4\times5\times1 = 120$

$P_2 = 1\times3\times4\times5\times1 = 60$

$P_3 = 1\times6\times1 = 6$

$L_1 = 2\times-1 = -2$

$L_2 = 3\times-1$

$L_3 = 4\times-1$

$L_4 = 5\times-1$

$L_5 = -2\times4\times5 = -4$

$L_6 = -2\times-1\times-1\times6 = -12$

$L_7 = -1\times-1\times-1\times-1\times6 = 6$

$L_8 = 3\times-1\times-1$

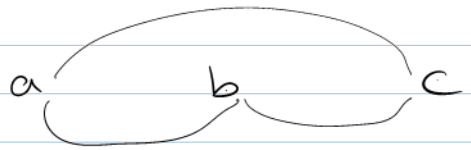
3 لمسة مستقل

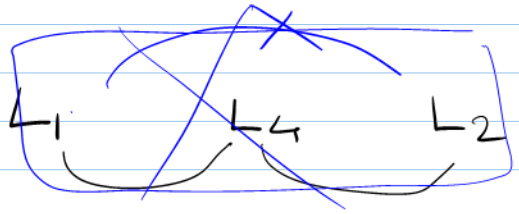
L_1, L_4

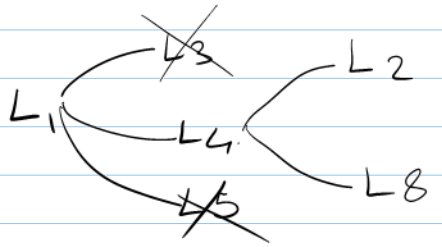
$L_4, \{L_2, L_8\}$

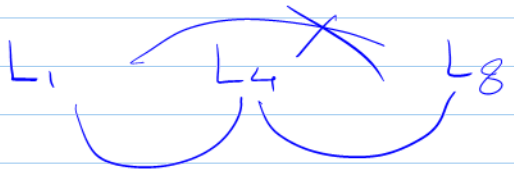
2 لمسة مستقل

L_4, L_2	L_3, L_1
L_4, L_8	L_4, L_1
	L_5, L_1









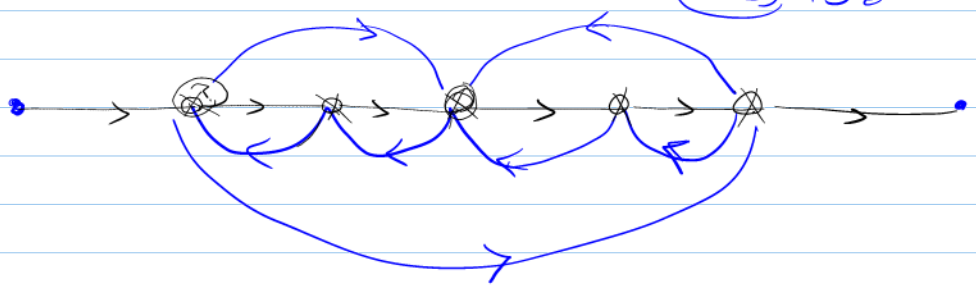
حلقة لمس مستقل عن ذاتها.

$L_1 + \dots + L_8$

$$\Delta = 1 - (-2-3-4-5-40+3+6-12)$$

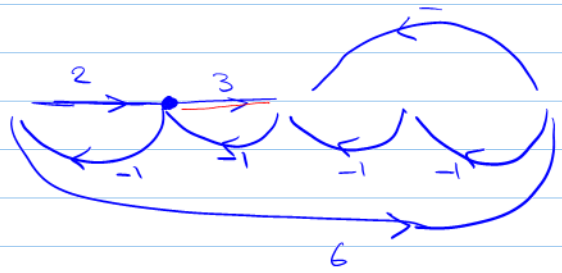
$$+ (L_1 \times L_3 + L_1 \times L_5 + L_1 \times L_4 + L_4 L_2 + L_4 \times L_8) - 0$$

$$= 156 \qquad \frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} \quad \Delta = 156$$

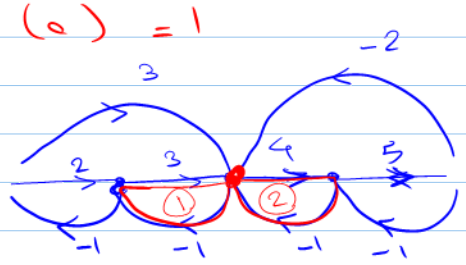


$$\Delta_1 = 1 - (0) = 1$$

R • C حلقة ذاتها



$$\Delta_2 = 1 - (0) = 1$$



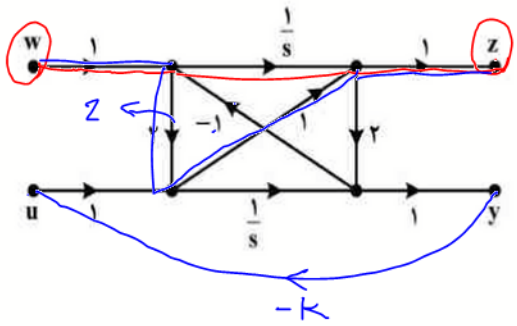
$L_1 = 3 \times -1$

$L_2 = 4 \times -1$

$$\Delta_3 = 1 - (-3-4) + (0) = 8$$

$$\frac{C}{R} = \frac{120 \times 1 + 60 \times 1 + 6 \times 8}{156} = \frac{19}{13}$$

۵۵- شکل زیر یک سیستم دو دهانه را نشان می‌دهد. اگر قانون کنترلی به شکل $u = -ky$ تعریف گردد، تابع تبدیل $\frac{z}{w}$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)



۱) $\frac{s+k}{s^2+(k+4)s}$

۲) $\frac{2s^2+s+k}{5s^2+ks}$

۳) $\frac{2s^2+s+k}{5s^2+(4+k)s}$

۴) $\frac{2s^2+s+k}{(5+2k)s^2+(4+k)s}$

حلقه



مسیرها

$P_1 = 1 \times \frac{1}{s} \times 1 = \frac{1}{s}$

$P_2 : 1 \times +2 \times 1 \times 1 = 2$

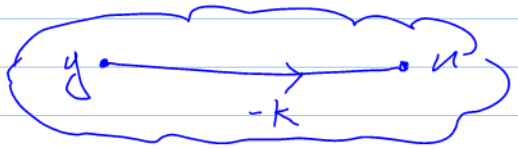


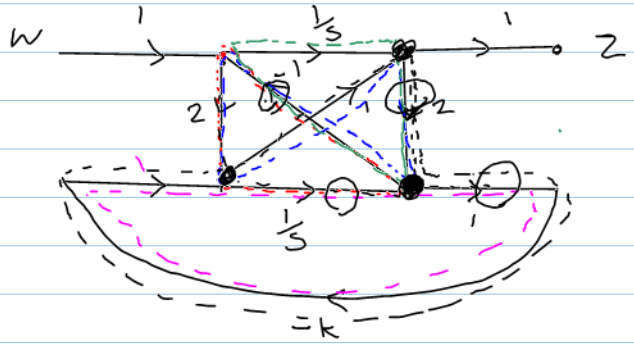
$y = G \times x$

ورودی × بهره = خروجی

$u = -k \times y$

$u = -ky$





$L_3 = 1 \times \frac{1}{s} \times 1 \times -k = -\frac{k}{s}$

$L_4 = \frac{1}{s} \times 2 \times -1 = -\frac{2}{s}$

$L_5 = 2 \times 1 \times -k \times 1 \times 1 = -2k$

$L_1 : 2 \times \frac{1}{s} \times -1 = -\frac{2}{s}$

$L_2 : 1 \times 2 \times -1 \times 2 = -4$

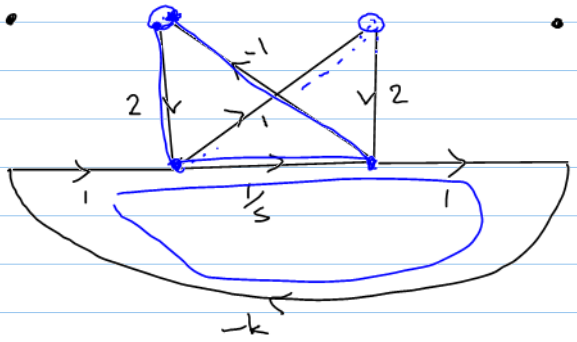
حلقه های 2 به 2 مستقل : ندارم

~ 3 به 3 ~ : ندارم

$\Delta = 1 - \left(-\frac{2}{s} - 4 - \frac{k}{s} - \frac{2}{s} - 2k\right) + (0) = 5 + 2k + \frac{4+k}{s}$

$P_1 = \frac{1}{s}$ $\quad P_2 = 2$

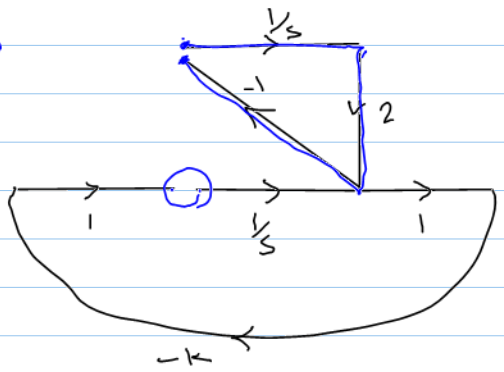
$\Delta_1 =$ $\quad \Delta_2$

W •  • Z

$L_1 = 1 \times \frac{1}{s} \times 1 \times -k = -\frac{k}{s}$

$\Delta_1 = 1 - \left(-\frac{k}{s}\right) + 0 =$

$= 1 + \frac{k}{s} = \frac{s+k}{s}$

W •  • Z

$\Delta_2 = 1 - (0) = 1$

$\frac{k+s}{s^2} + \frac{2s^2}{s^2}$

$\frac{Z}{W} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{1}{s} \times \frac{k+s}{s^2} + (2 \times 1)}{5+2k + \frac{k+4}{s}}$

$5+2k+\frac{k+4}{s}$

$= \frac{\frac{k+s+2s^2}{s^2}}{\frac{(5+2k)s}{s} + \frac{k+4}{s}}$

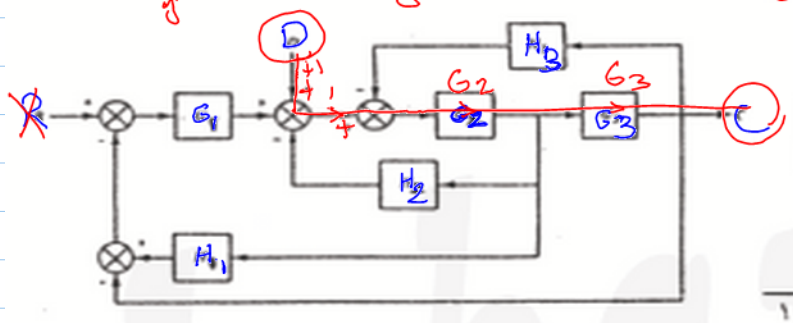
$= \frac{k+s+2s^2}{(5+2k)s^2 + (k+4)s}$

استفاده از مسیرهای در جهت یا در خلاف جهت ←





۵۹- دیاگرام بلوکی سیستمی مطابق شکل می‌باشد، تابع تبدیل $\frac{C}{D}$ کدام است؟



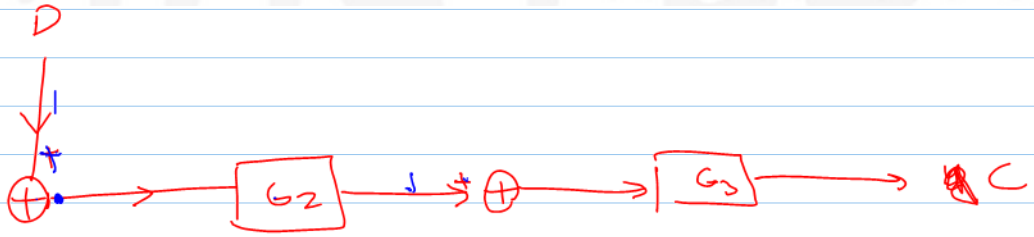
۱) $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1}$

۲) $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

۳) $\frac{G_2G_3}{1-G_2H_2-G_2G_3H_3-G_1G_2H_1-G_1G_2G_3}$

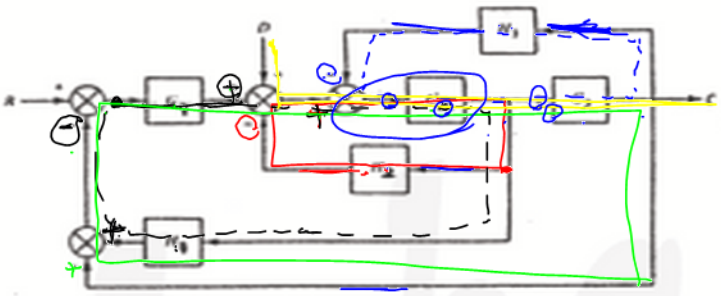
۴) $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

$P_1 = 1 \times G_2 \times G_3$





۵۹- دیاگرام بلوکی سیستمی مطابق شکل می‌باشد، تابع تبدیل $\frac{C}{D}$ کدام است؟



۱) $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1}$

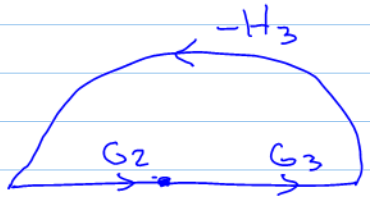
۲) $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

۳) $\frac{G_2G_3}{1-G_2H_2-G_2G_3H_3-G_1G_2H_1-G_1G_2G_3}$

۴) $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

$L_1 = G_2 \times G_3 \times -H_3$

$L_2 = G_2 \times -H_2$



$L_3 = G_1 \times +1 \times +1 \times G_2 \times H \times +1 \times -1$

$= -G_1G_2H_1$

$L_4 = G_1 \times G_2 \times G_3 \times -1$

$= -G_1G_2G_3$

حلقه ها پس از حذف میر P_1 ← مذاق

$P_1 = G_2 G_3$ تماس حلقه ها در G_2 مشترک اند.

$\Delta = 1 - (-G_2 G_3 H_3 - G_2 H_2 - G_2 H_1 G_1 - G_1 G_2 G_3)$

$+ 0$

$\Delta_1 = 1 - 0$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_2 G_3 \times 1}{1 + G_2 G_3 H_3 + G_2 H_2 + G_2 G_1 H_1 + G_1 G_2 G_3}$$

خروج تابع نیل

۱- معادله مشخصه سیستم حلقه بسته زیر در کدام گزینه صحیح است؟

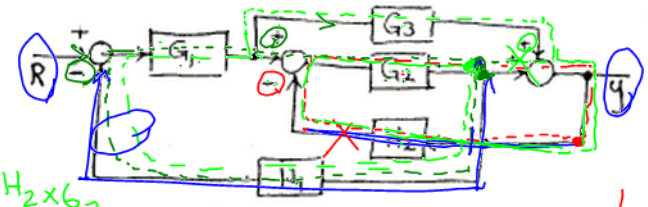
۱) $1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 - G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

۲) $1 + G_1 G_2 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

۳) $1 + G_2 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

۴) $1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 - G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

برق ۹۵



$L_1 = H_2 \times -1 \times G_2$

$L_2 = -H_1 G_1 G_2$

$L_3 = -H_1 G_1 G_3 - H_2 \times G_2$

$= G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

معادله مشخصه | معادله‌ای که رشته ها آن قطعاً بسته است.

یعنی خروج تابع تبدیل بسته

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta}$$

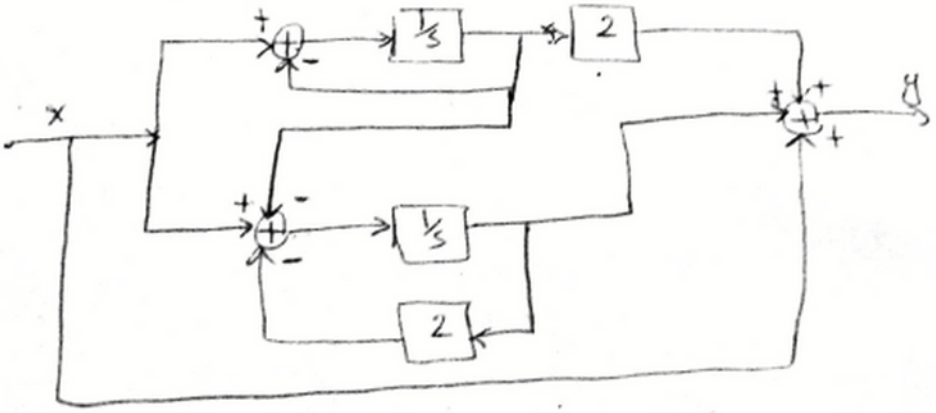
معادله مشخصه $= \Delta$

$\Delta = 1 - (-G_1 G_2 H_1 - G_2 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2) + 0$

$= 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1 H_2$

مشتاقی: معادله دیفرانسیل سیستم زیر کدام است؟ ق ۳۱ - متالرژی

تمرین



تمرین

ق ۸۹ برق ۴۵

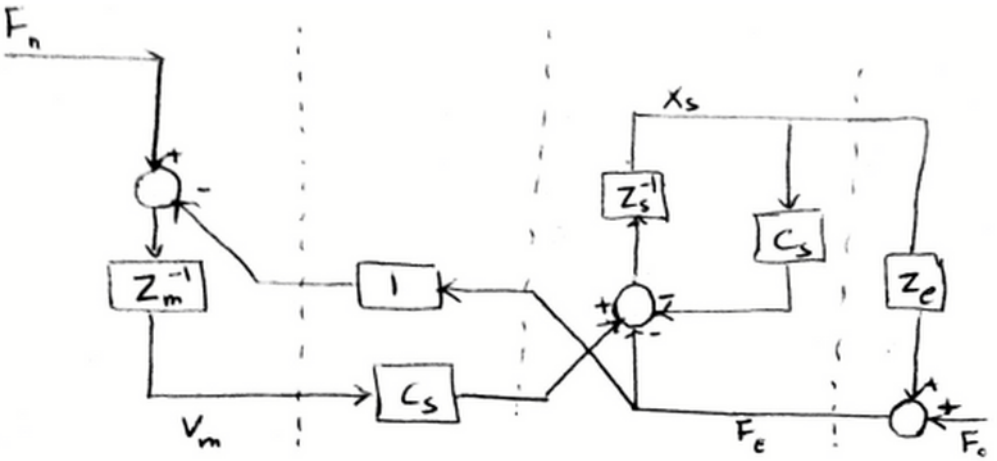
برق ۹۳ - ق ۴۱۶ - متالرژی. سیستم تله اپراتوری زیر را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $\frac{Y_m}{F_n}$ کدام است؟

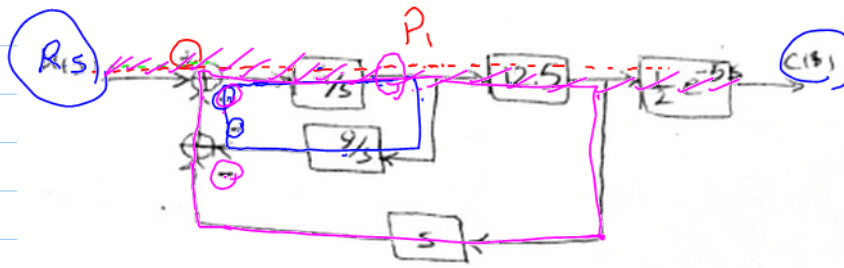
۱) $\frac{Z_s}{Z_m(Z_s+C_s+Z_e)+C_sZ_e}$

۲) $\frac{(Z_s+C_s)Z_e}{Z_m(Z_s+C_s+Z_e)+C_eZ_e}$

۳) $\frac{Z_s+C_s+Z_e}{Z_m(Z_s+C_s+Z_e)}$

۴) $\frac{Z_s+C_s+Z_e}{Z_m(Z_s+C_s+Z_e)+C_sZ_e}$





مثال ۲۱ برگ ۲۹ - ۳۱

پاسخ نوبه میتوندیزدام است؟

$r(t) = \delta(t) \rightarrow R(s) = 1$

$C(s) = ? \rightarrow c(t) = ?$

جدول زیر:

$$\frac{s}{s^2+a^2} \longrightarrow \cos(at)\,u(t)$$

$$X(s) \longrightarrow x(t)$$

$$e^{-bs}X(s) \longrightarrow x(t-b)$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)}$$

$$C(s) = \cancel{R(s)}\,G(s) = G(s)$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$c(t)$$

$$P_1 = x1 \times \frac{4}{s} \times 12.5 \times \frac{1}{2}e^{-5s}$$

$$L_1 = \frac{9}{s} \times -1 \times -1 \times \frac{4}{s} = \frac{36}{s^2}$$

$$L_2 = s \times -1 \times -1 \times \frac{4}{s} \times 12.5 = 50$$

پس از حذف P_1 ← حلقه‌ها:

$$P_1 = \frac{25\,e^{-5s}}{s}$$

$$\Delta = 1 - \left(\frac{36}{s^2} + 50\right) + (0)$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\left(\frac{25}{s}e^{-5s} \times 1\right)\times s^2}{\left(\frac{-36}{s^2} - 49\right)\times s^2} = \frac{25\,s\,e^{-5s}}{-36 - 49s^2}$$

$$R(s) = 1 \longrightarrow C(s) = 1 \times \frac{25\,s\,e^{-5s}}{-36 - 49s^2}$$

$$\frac{25\,s}{-36 - 49s^2}$$

$$\frac{s}{1s^2 + a^2}$$

$$25 \times \frac{s}{-49s^2 - 36} = \frac{25}{-49}\,\frac{s}{\left(s^2 + \frac{36}{49}\right)}$$

$$= \frac{25}{-49} \times \frac{s}{s^2 + \frac{36}{49}}$$

$$C(s) = \frac{-25}{49} \times \frac{s}{s^2+\frac{36}{49}} \times e^{-5s}$$

$$\frac{s}{s^2 + \frac{36}{49}} \longrightarrow \cos\left(\frac{6}{7}t\right)u(t)$$

$$\frac{-25}{49}\ \frac{s}{s^2+\frac{36}{49}} \longrightarrow \frac{-25}{49}\cos\left(\frac{6}{7}(t)\right)u(t)$$

$X(s)$ $\longrightarrow$ $x(t)$

$$e^{-5s}X(s) \longrightarrow x(t-5)$$

$$\frac{-25}{49}\ \frac{s}{s^2+\frac{36}{49}}\ e^{-5s} \longrightarrow \frac{-25}{49}\cos\left(\frac{6}{7}(t-5)\right)u(t-5) \checkmark$$

$C(s)$ $\qquad$ $C(t)$

تابع متناوب = تابع سینوسی در حالتی که دوره‌ی مثبت است.

جلسه سوم مکمل

عناوین سیته ← ① معادله دیفرانسیل

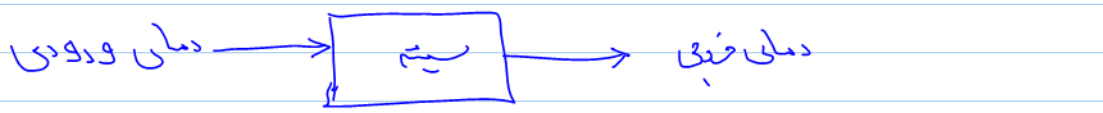
② تابع تبدیل

③ بلوک دیاگرام

④ SFG

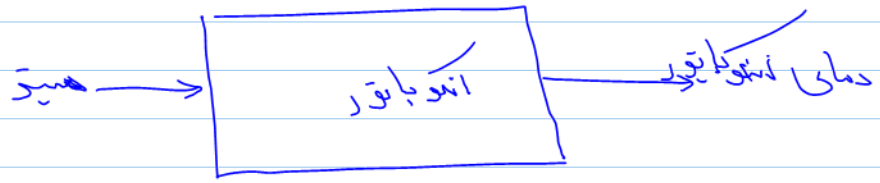
⑤ فضای حالت

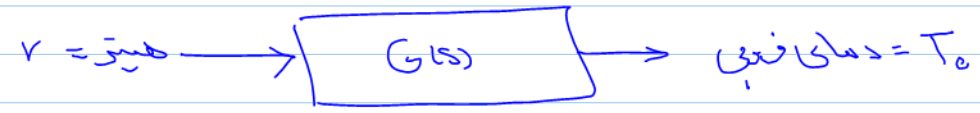
مثال: حدس: دمای خروجی یک اتاق را با کولر دوی ۱۴° تنظیم کنیم.



مثال عملی: اتوکلاو ← وسیله ای که تعدادی از نوزاد

دمای مطلوب برای نوزاد: 35.7° تا 37°

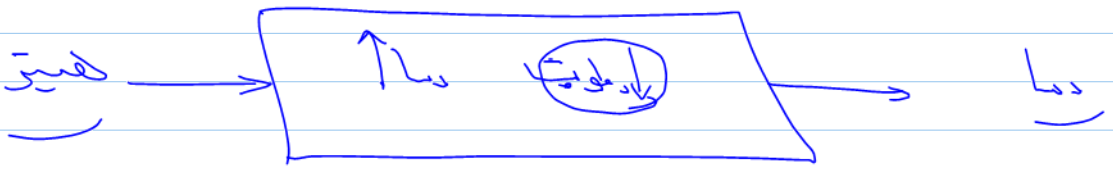




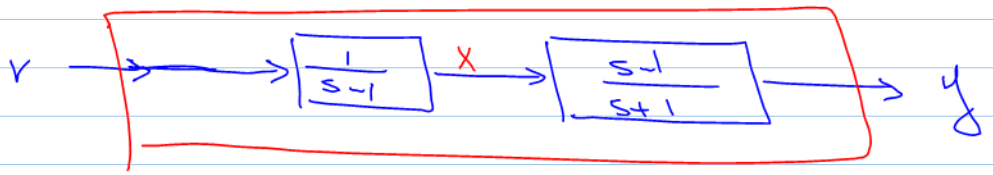
$$\frac{T_o}{V} = G_{(s)}$$

$V=10$ $T_o=?$ $T_o=35.9°$ ✓

مشکل ← با دوش سرد هیتر و لوله داخل اتوکلاو کاهش می یابد.



مثال:

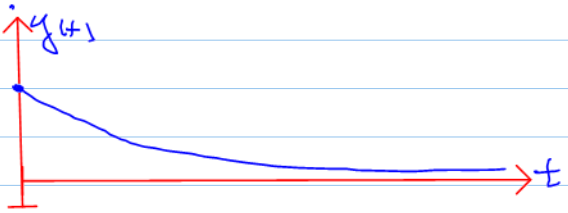


$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$ $\quad Y(s) = \frac{s-1}{s+1} X(s)$, $X(s) = R(s)\frac{1}{s-1}$

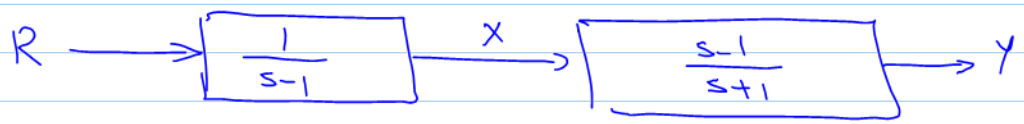
$Y(s) = \frac{s-1}{s+1} R(s) \frac{1}{s-1} \rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$

$R(s) = 1$ ورودی پله $\rightarrow$ $y = ?$

$Y(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow y(t) = e^{-t} u(t)$

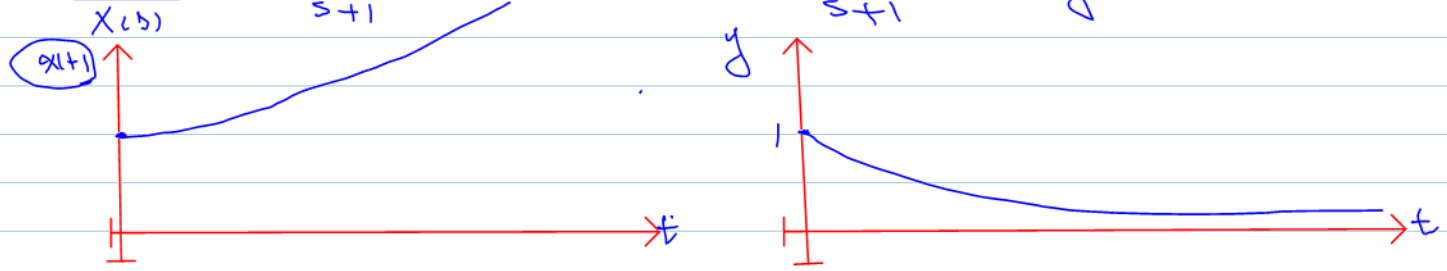


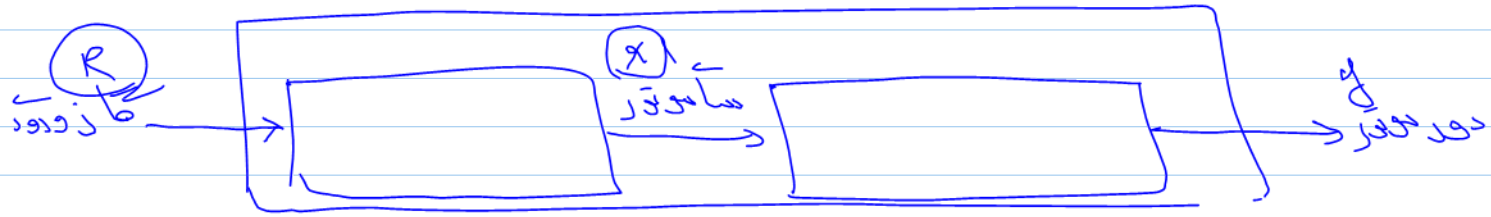
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$ $\quad R(s)=1 \rightarrow$ $\boxed{y(t) = e^{-t} u(t)}$



$X(s) = \frac{1}{s-1} \times 1 \rightarrow x(t) = e^{t} u(t)$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s-1}{s+1} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow y(t) = e^{-t} u(t)$



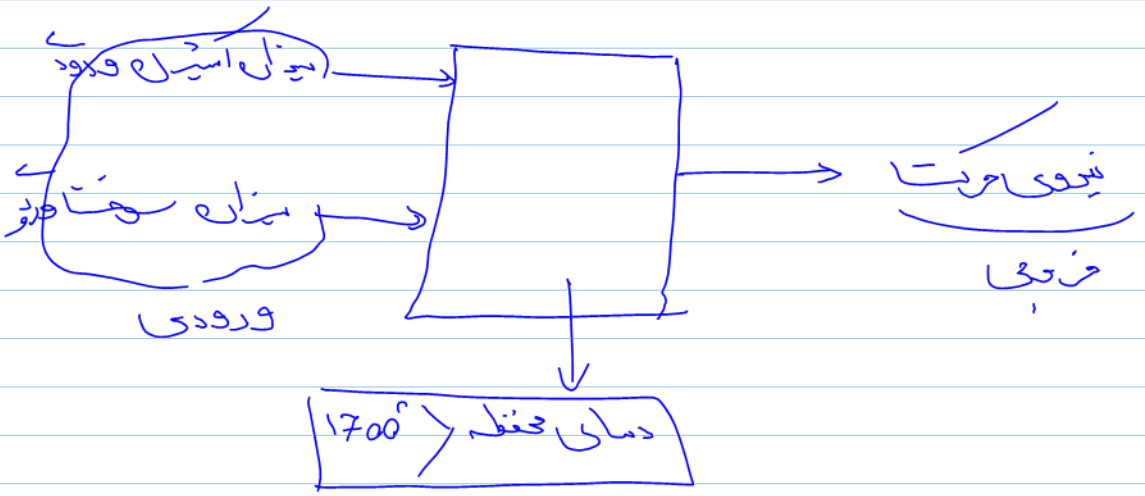


در اثر افزایش دما سوءَ از بین میرود.

غایتی که ستوهلی داخل سینه راحم غایتی دهد.

خروجی سیستم ← داخل سیستم ← R

حفظه امراق بوتو حبتا



خروجی = تابع تبدیل × ورودی

عالم اقامات داخل سیستم د معادله دیفرانسیل وجود دارد.

F_{out} u_1 u_2

$$\frac{dF_{out}}{dt} + \frac{d^3T}{dt^3} + 2\frac{dT}{dt} + F_{out} = u_1 + 3u_2$$

مانیتن معادله دیفرانسیل هم چیزرا نشان ی دهد.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx = F_{in}$$

حل سخت

حوزه مرکانیتن ← از داخل سیستم با صفر ماندن.

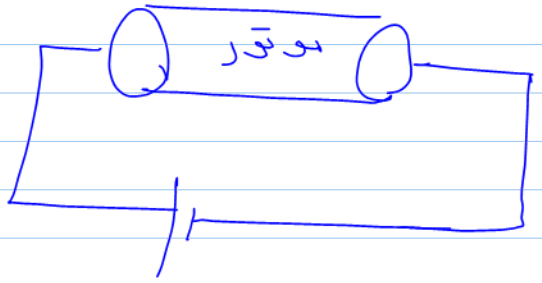
حل یک معادله درجه ۴ سخت‌تر است یا حل ۴ معادله درجه ۱؟!

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = u$$

غالبین متغای حالت

۳ معادله درجه ۱

مثال: موتور سرو:



ورتز ← دور موتور

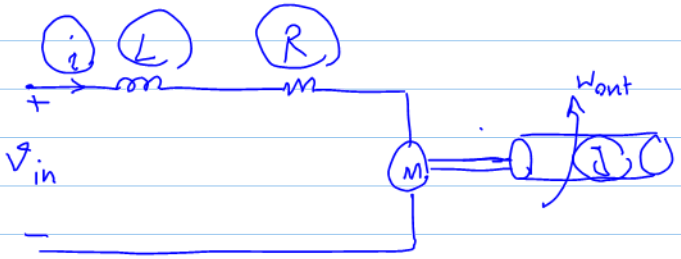
$12^V \rightarrow 3000$ rpm

$6^V \rightarrow 1200$ rpm

$$\frac{W_{out}}{V_{in}} = \frac{as+b}{cs^2+ds+e}$$

$V_{in} = 30V \rightarrow 4800$ rpm

~~$V_{in} = 100V \rightarrow 10000$ rpm~~





$V_{in} \rightarrow (i) \rightarrow T_e \rightarrow T_m \rightarrow W_{out}$

$i > 1A \rightarrow$ بحث برد الکترونیکی را خواهد داشت

$\frac{W_{out}}{V_{in}}$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = u \qquad y(t) = ?$$

$\rightarrow$ 2 معادله درجه ۱

فضای حالت ←

در عایق داشته باشیم ← رطوبت کنیم

← متغیرهای تأثیرگذار

که در اثر ورودی

تغییر می‌کند

$\frac{d}{dt}$

ایده اولیه ← هر متغیری که مشتق آن در معادله دینامیکی وجود دارد

باید در عایق، وجود داشته باشد.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t+1) = u$$

متغیرهایی که فرد می‌تواند آن‌ها را حالت‌ای نامند. ← متغیرهای حالت

دما ← انکوباتور ← دمای فرد

رطوبت ↑ دما ↑

رطوبت ↑ دما ↓

فاصله

سرعت

A

B

حرکت ← فاصله

سرعت

متغیرهای حالت ← متغیرهای مستقل که در اثر اعمال ورودی تغییر می‌کنند و

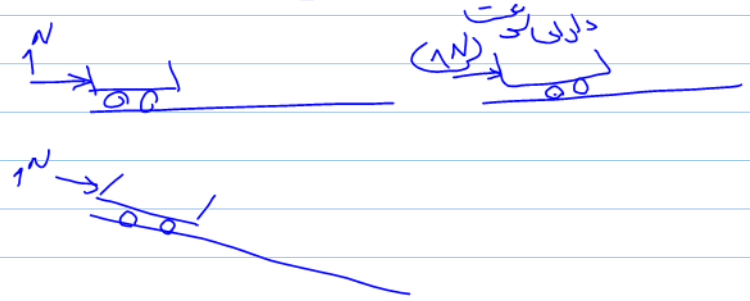
تغییر آن‌ها باعث تغییر فرد می‌شود.

تابعی از متغیرهای حالت ← $y(t+1)$

متغیرهای حالت ← خروجی

خروجی ← تغییر متغیرهای حالت ← ورودی

X: متغیرهای حالت u: ورودی y: خروجی



$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = f(u, X) \\ y = f(u, X) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + Bu \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}$$

فضای حالت

X: بردار متغیرهای حالت

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \end{cases} \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + u \\ 3x_2 + u \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_2 + u \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad u \qquad y = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$$

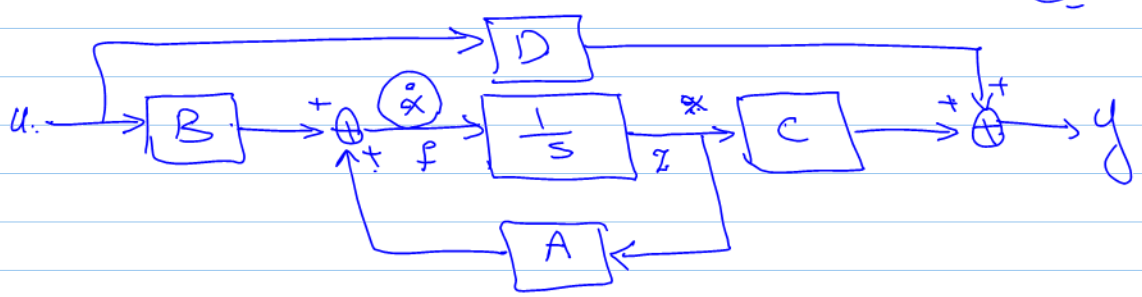
فضای حالت

X: بردار متغیرهای حالت

u: بردار ورودی ها

y: خروجی

A: ماتریس حالت



$$z(s) = \frac{1}{s} f(s) \qquad \dot{x} = Ax + Bu \checkmark$$

$$z(t) = \int f(t)\,dt \qquad y = Cx + Du \checkmark$$

A: تأثیر مقدار متغیرهای حالت روی تغییرات متغیرهای حالت

B: ~ ~ ورودی ~ ~ ~

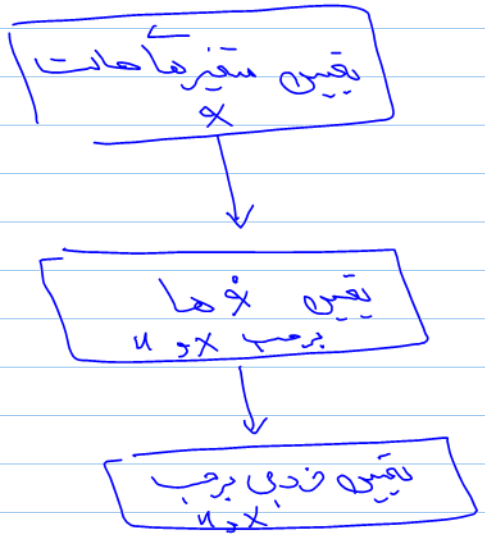
↓

ماتریس ورودی

C: ماتریس خروجی ← اثر x روی خروجی

D: ماتریس ورودی-خروجی ← ~ u ~

بدست آوردن نمایش فضای حالت:



معنای حالت از دیدگاه معادله دیفرانسیل

① انتخاب متغیرهای حالت

* عالم متغیرهایی که مشتق آنها در معادله دیفرانسیل وجود دارد.

اگر متغیر f دارای مشتق مرتبه m ام در معادله است، مشتق مرتبه ۰ تا m-1 ام آن به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته می شود.

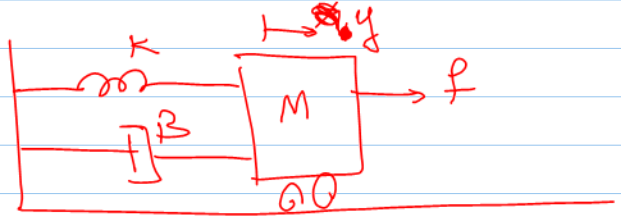
* استثناء: ورودی هرگز به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمی شود.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2 f(t) = u(t)$$

$$x_1 = f(t) \qquad x_2 = \frac{df}{dt}$$

$$\frac{d^3 z(t)}{dt^3} + 2\frac{dz}{dt} + z(t) + \frac{d^2 f}{dt} + \frac{df}{dt} = u$$

$$\begin{cases} x_1 = z(t) \\ x_2 = \frac{dz(t)}{dt} \\ x_3 = \frac{d^2 z}{dt^2} \\ x_4 = f(t) \\ x_5 = \frac{df}{dt} \end{cases}$$



$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky(t) = f(t)$$

$2 \rightarrow$ ② ①

$$x_1 = y(t) \qquad x_2 = \frac{dy}{dt}$$

معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} M_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + B\frac{dy_1}{dt} - B\frac{dy_2}{dt} + ky_1 - ky_2 = f \\ M_2\frac{d^2y_2}{dt^2} + B\frac{dy_2}{dt} - B\frac{dy_2}{dt} + ky_1 - ky_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 \rightarrow \begin{cases} y_1(t) = x_1 & 0 \\ \frac{dy_1}{dt} = x_2 & 1 \end{cases}$$

$$y_2 \rightarrow \begin{cases} y_2(t) = x_3 \\ \frac{dy_2}{dt} = x_4 \end{cases}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^4+1} \longrightarrow \text{معادله دیفرانسیل}$$

$$s^4Y(s) + Y(s) = sU(s) + U(s)$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} + y(t) = \frac{du}{dt} + u(t)$$

$$y \rightarrow \begin{cases} y(t) = x_1 \\ \frac{dy(t)}{dt} = x_2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x_3 \\ \frac{d^3y}{dt^3} = x_4 \end{cases}$$

فضای حالت؟

جلسه ۱۵ کنترل

فضای حالت

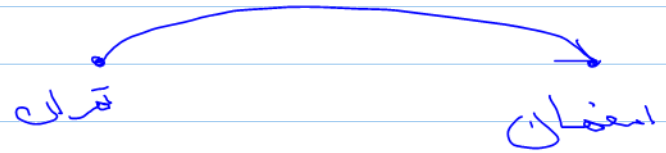
انتخاب متغیرهای حالت ← از معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} = u$$

متغیرهای حالت ← توصیف کننده سیستم

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases}$$

فاصله و سرعت



$$\begin{cases} \text{فاصله} \\ \text{سرعت} \end{cases} \rightarrow \text{برای توصیف حرکت کافی}$$

$$\text{شتاب} \times \text{سرعت} + \text{فاصله}$$

متغیرهای حالت ← حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف سیستم

نکته * متغیرهای حالت باید مستقل خطی باشند.

x_1, x_2, x_3

$x_3 = x_1 + x_2$ ← x_2, x_1 و x_3 مستقل خطی نیستند

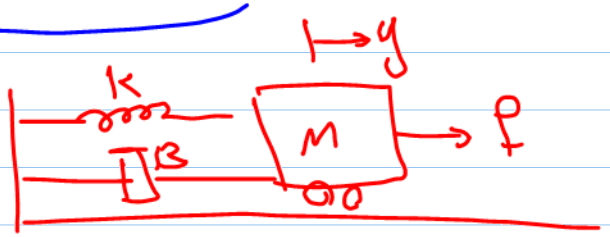
$x, y \rightarrow$ یعنی x را به صورت مزیجی از x و y نوشت

$\overbrace{x, y, z} \rightarrow$ $z \neq ax + by$ نمی‌توان

z را نمی‌توان بصورت مجموع مزیجی از x و y نوشت.

x_1, x_2, x_3 $\quad \dot{x}_3 = x_1 \rightarrow$ x_1 مستقل خطی است؟

$x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$ مستقل دلیل بر عدم استقلال خطی است



$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = f$$

مرتبه اول $\rightarrow$ $y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \end{cases}$

$x_1 = \square x_2 \times$ متغیرحالت x_1 و x_2 هستند.

$$\begin{cases} y = x_1 \checkmark \\ \dot{y} + y = x_2 \checkmark \end{cases}$$

$x_2 = 1 x_1 + \dot{y}$ ✓

$x_2 - x_1 = \dot{y}$

$\dot{y}$ ، y

از روی متغیرهای حالت بتوان $\dot{y}$ ، y را حساب کرد.

$$\begin{cases} x_1 \longrightarrow y \checkmark \\ x_2 - x_1 \longrightarrow \dot{y} \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + \dot{y} = x_1 \checkmark \\ y - \dot{y} = x_2 \checkmark \end{cases}$$

$x_1 \neq \square\, x_2$ ✓ مستقل خطی ✓

$y = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ✓ $\dot{y} = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$ ✓

به بیشتر از دو تا متغیر حالت انتخاب کرد.

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

متغیرهای حالت یکتا نیستند.

فرم کانونیکال ← فرم استاندارد ←

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = f$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

گام دوم ← مشتق متغیرهای حالت را بر اساس متغیرهای حالت و ورودی خارجی حساب کنید

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = f(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = u$$

($\frac{d^2y}{dt^2} = \dot{x}_2$, $\frac{dy}{dt} = x_2$, $y = x_1$)

$$M\dot{x}_2 + Bx_2 + kx_1 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = \frac{1}{M}u - \frac{B}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{B}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \end{cases}$$

خروجی = y

حالا اگر خروجی $= f(x_1, x_2, u) \Rightarrow$ معادله خروجی $\checkmark y = x_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{B}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

برق ۵۸. معادلات فضای حالت سیستم زیر (استاندارد) را بنویسید.

$$2\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = u$$

① انتخاب متغیرهای حالت

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \checkmark \dot{y} = x_2 \\ \checkmark \ddot{y} = x_3 \end{cases}$$

② مشتق متغیرهای حالت برحسب متغیرهای حالت و ورودی خارجی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -2x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$$2\dot{x}_3 + 3x_3 + 6x_2 + 4x_1 = u \quad \checkmark$$

صورت سؤال

$$2\dot{x}_3 + 3x_3 + 6x_2 + 4x_1 = u$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}u$$

$y = x_1$ معادله خروجی

فضای حالت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$$

* تعداد متغیرهای حالت برابر درجه سیستم است = n

تعداد ورودی ها = m = 1

" خروجی ها = k

A: ماتریس $n \times n$ است.

B: " $n \times m$ " "

C: $k \times n$

D: $k \times m$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u \\ y = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$n = 2 \qquad m = 1$

$k = 1$

$A : n \times n = 2 \times 2$: X

$B : n \times m = 2 \times 1$

$C : k \times n = 1 \times 2$

$D : k \times m = 1 \times 1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} u$$

قواعد ماتریس ها:

عدد ضرب در ماتریس ← ماتریس × عدد

$$2\times\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\quad\end{bmatrix}_{a\times b}\times\begin{bmatrix}\quad\end{bmatrix}_{c\times d}$$

a: سطر ، b: ستون

باید $b=c$ باشد

ماتریس $\boxed{a\times d}$

$$\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}_{2\times 1}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix}1\times 1+0\times 3=1\\ 1\times 1+2\times 3=7\end{bmatrix}$$

ستون ۱

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} u$$

2×2 $\quad 2\times 1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e u \\ f u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 + e u \\ c x_1 + d x_2 + f u \end{bmatrix}$$

2×1 $\quad 2\times 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overset{0}{a} x_1 + \overset{1}{b} x_2 + \overset{0}{e} u = x_2 \\ \dot{x}_2 = \overset{-1}{c} x_1 + \overset{1}{d} x_2 + \overset{1}{f} u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + c x_1$$

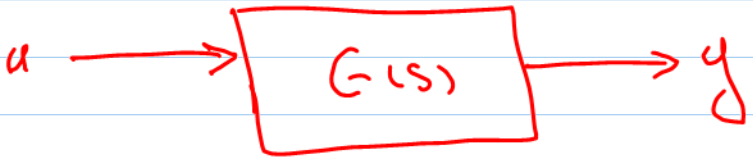
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u$$

$$y = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{D} u$$

مثال: تابع تبدیل سیستم زیر برابر $G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1}$ می‌باشد. نمایش فضای حالت استاندارد این سیستم را بدست آورید.



درجه سیستم = 3

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3+2s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \text{معادله دیفرانسیل}$$

$$s^3 Y(s) + 2s^2 Y(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2\frac{d^2 y}{dt^2} + y(t) = u(t) \longrightarrow y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases}$$

معادله فوق

$$y = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad \checkmark \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \quad \checkmark \\ \dot{x}_3 = \dfrac{d^3 y}{dt^3} = -x_1 - 2x_3 + u \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} \;(\dot{x}_3) + 2\ddot{y}\;(x_3) + y\;(x_1) = u \longrightarrow \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u \end{cases} \qquad y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{3\times3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3\times1} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{1\times1} u$$

سئوال: برای M در صورتی که در سیستم بر از متغیرهای حالت جدید $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ استفاده شود، ماتریس P که $Z = PX$ است، را بدست آورید.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{3\times 1}}_{} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_1$$

$$\rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_3 = f(x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$y = x_1 - x_2 + (-x_1 + x_3) - (-x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\dot{y} = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ y = x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{y} = x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \\ \dot{x}_2 = \\ \dot{x}_3 = \end{cases} \left\{ x_3, x_2, x_1 \longrightarrow \right\}$$

$$y = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

برق ۵۸. تحقق معنای معادلات $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}$ با مزمن تحقق استاندارد را به دست آورید.

$$s^3 Y(s) + 6s^2 Y(s) + 11s\, Y(s) + 6\, Y(s) = 2\, U(s)$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 6\frac{d^2 y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6\, y(t) = 2\, u(t)$$

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = \dot{x}_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{d^3 y}{dt^3} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

$$\dot{x}_3 + 6x_3 + 11x_2 + 6x_1 = u$$

$$y = x_1$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \\
y = x_1
\end{cases}
$$

$$
\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \times u
$$

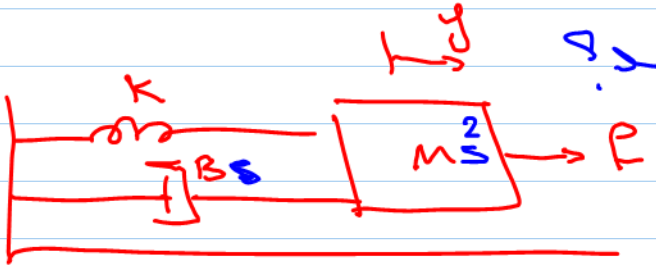
$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u
$$

جلسه ۱۱ کنترل خطی

معادله دیفرانسیل سه فضای حالت

انتخاب متغیرهای حالت

* سیستم را در نظر بگیرید و متغیرهای حالت را برای آن بنویسید؟



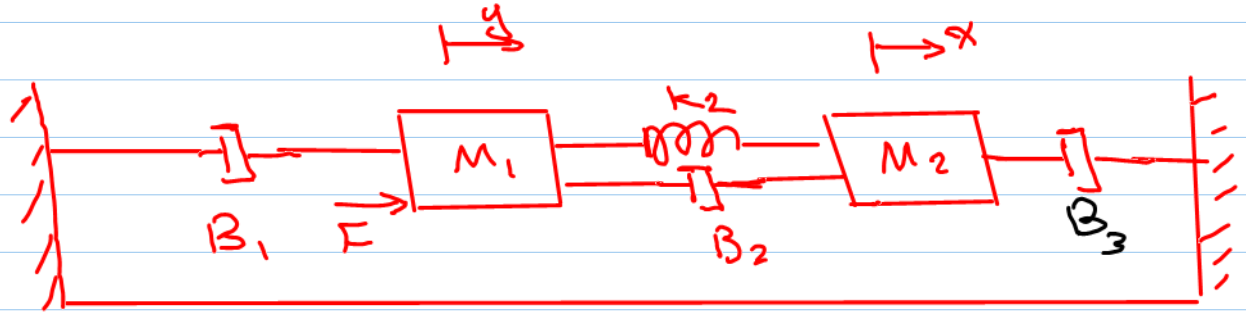
نکته: سیستم را به فضای لاپلاس ببرید.

سپس جدول زیر را کامل کنید.

اعلان	متغیر تأثیرپذیر	مرتبه مشتق	متغیر حالت کاندید	
جرم Ms^2	y	2	y و $\dot{y}$	2
دمپر Bs	y	1	~~$\dot{y}$~~	
فنر K	y	0	y	

از بین متغیرهای حالت کاندید عوامل ذخیره‌ای و وابسته را حذف می‌کنیم.

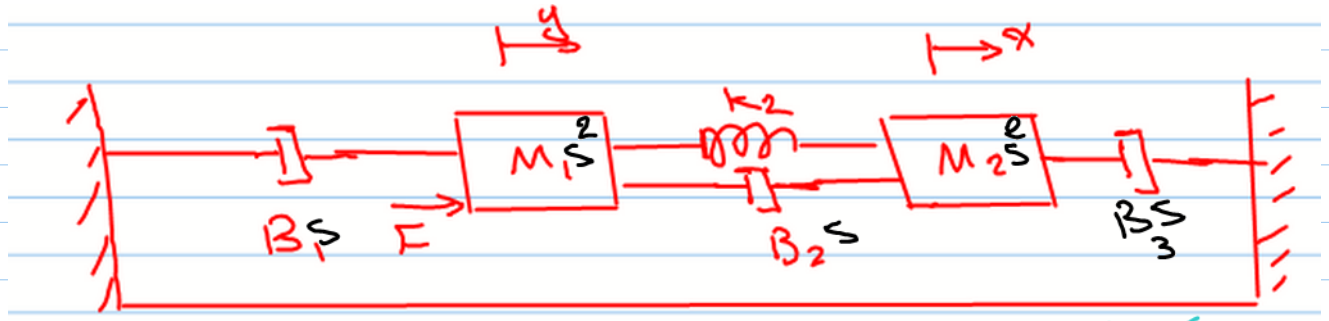
مثال: دو سیستم زیر تعداد متغیرهای حالت را بیابید.



2 (2 3 (1

1 (4 4 (3

حل حل دانشجو:



تعیین طول مثبت
سمتی حائز تردید
برای خود دیر
" " دیر

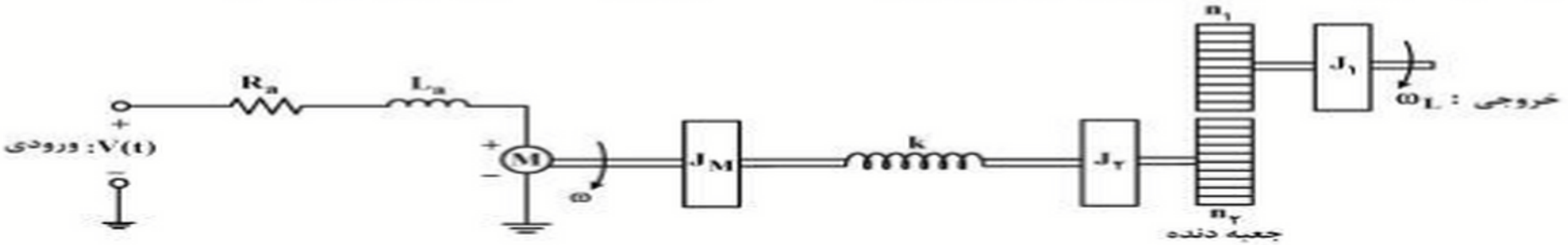
		درجه	مثبت صریح مابقی تکرار از دو بعضی سوادم	
$M_1 s^2$	y	2	y ① $\dot{y}$ ②	
$B_1 s$	y	1	y X	تکراری
K_2	$y - x$	0	X	
$B_2 s$	$y - x$	1	$y - x$ X	وابسته
$M_2 s^2$	x	2	x ③ $\dot{x}$ ④	
$B_3 s$	x	1	x X	تکراری

④

$y-x$ از x و y مستقل خواهد بود.

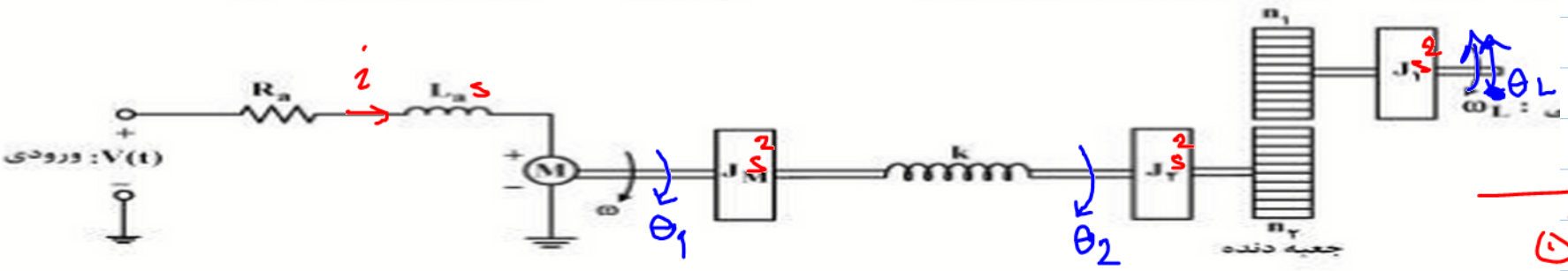
برق ۹۵

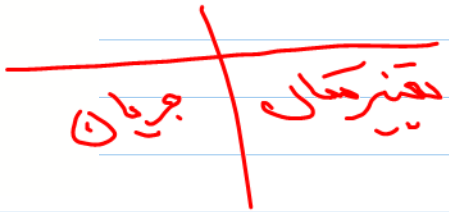
۵۷- سیستم الکترو ـ مکانیکی زیر را درنظر بگیرید. تعداد متغیرهای حالت این سیستم، کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

حل حل دانشجو



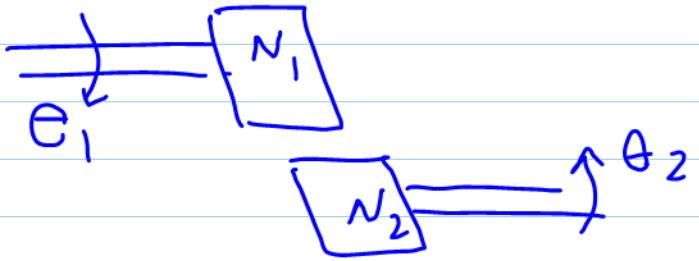


اعلان	متغیر	مرتبه	کاندید ؟
R_a	i	0	X
$L_a s$	$\dot{i}$	1	$\dot{i}$ ①
$J_M s^2$	θ_1	2	θ_1 ② $\dot{\theta}_1$ ③
$J_2 s^2$	θ_2	2	θ_2 ④ $\dot{\theta}_2$ ⑤
$J_1 s^2$	θ_L	2	θ_L X وابسته $\dot{\theta}_L$ X وابسته
K	$\theta_1 - \theta_2$	0	X
چرخ دنده/ندارد	θ_2, θ_L	0	X

5

متغیرهای وابسته

نکته: سرعت‌های دو سمت (جابجایی دورانی) اعضای انتقال دهنده نیرو مثل چرخ دنده‌ها هم وابسته هستند.



$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\theta_1 = \frac{N_2}{N_1}\theta_2$$

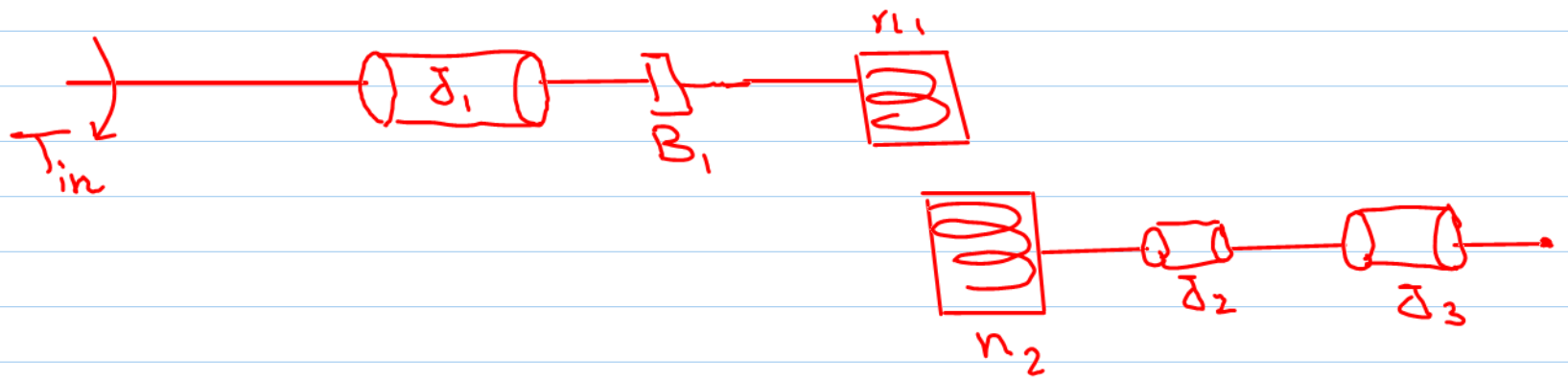
نسبت چرخ دنده

$$\theta_L = \text{نسبت} \times \theta_2$$

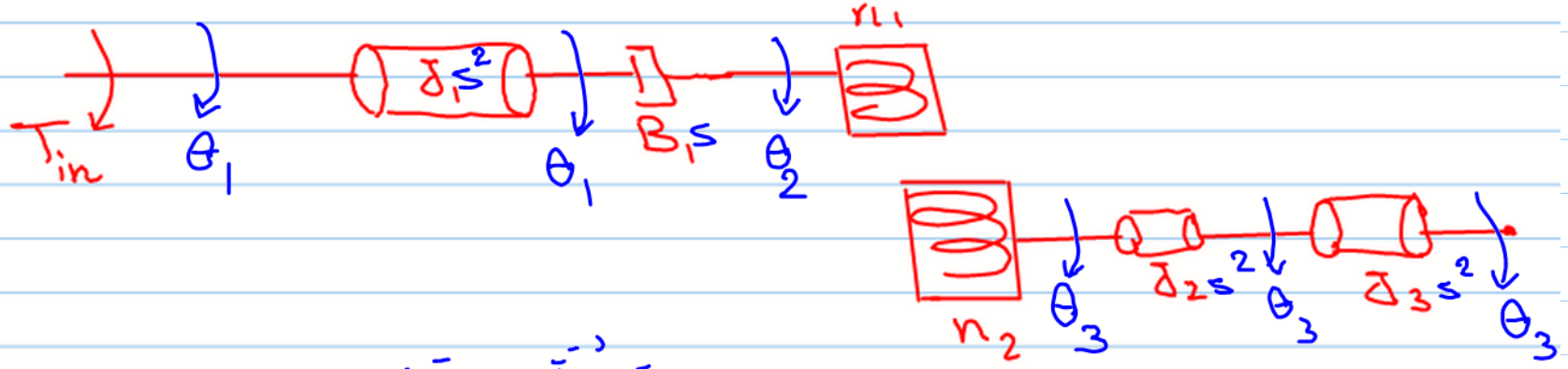
$$\theta_L = \alpha\,\theta_2$$

$$\dot{\theta}_L = \alpha\,\dot{\theta}_2$$

مثال: در سیستم زیر، کدامیک از گزینه‌ها مقدار متغیرهای حالت را به درستی نشان می‌دهد؟



5 (4 4 (3 3 (2 2 (1



	سفر	سرعت مشتق	حاذیذا
$J_1 s^2$	θ_1	2	θ_1 ✓ $\dot{\theta}_1$ ✓
$B_1 s$	$\theta_1 - \theta_2$	1	$\theta_1 - \theta_2$ ✓
$J_2 s^2$	θ_3	2	θ_3 ✗ وابسته $\dot{\theta}_3$ ✓
$J_3 s^2$	θ_3	2	θ_3 ✗ گرادی $\dot{\theta}_3$ ✗ گرادی
مرجع‌ها	θ_2, θ_3	0	✗

θ_2 ، θ_3 به هم وابسته است.

$$\theta_3 = a\,\theta_2$$

$$\theta_1 ,\ \dot{\theta}_1 ,\ \theta_1 - \theta_2$$

$$\theta_2 = \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2)$$

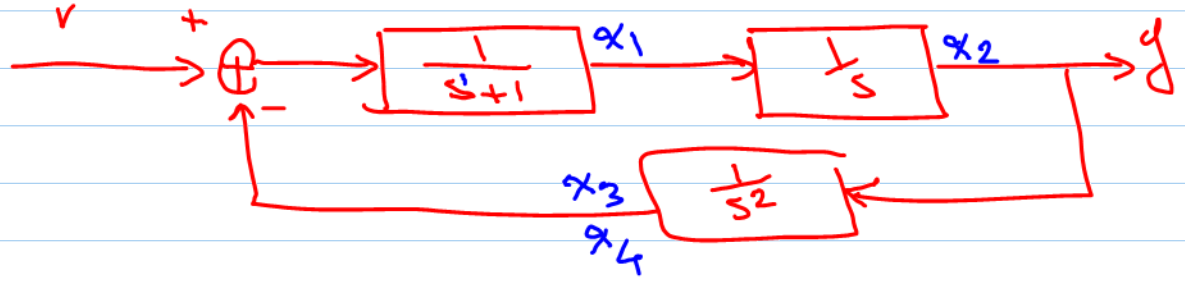
$$\theta_3 = a\beta\,\theta_1 - a(\theta_1 - \theta_2)$$

آیا θ_3 را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $\theta_1 , \dot{\theta}_1 , \theta_1 - \theta_2$ نوشت؟

$$\theta_3 = a\,\theta_1 - a(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\dot{\theta}_3 = a\dot{\theta}_1 - a(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

چگونه فضای حالت را از روی بلوک دیاگرام به دست آوریم؟



① عامل بلوکهای دارای s ، متغیر حالتند.

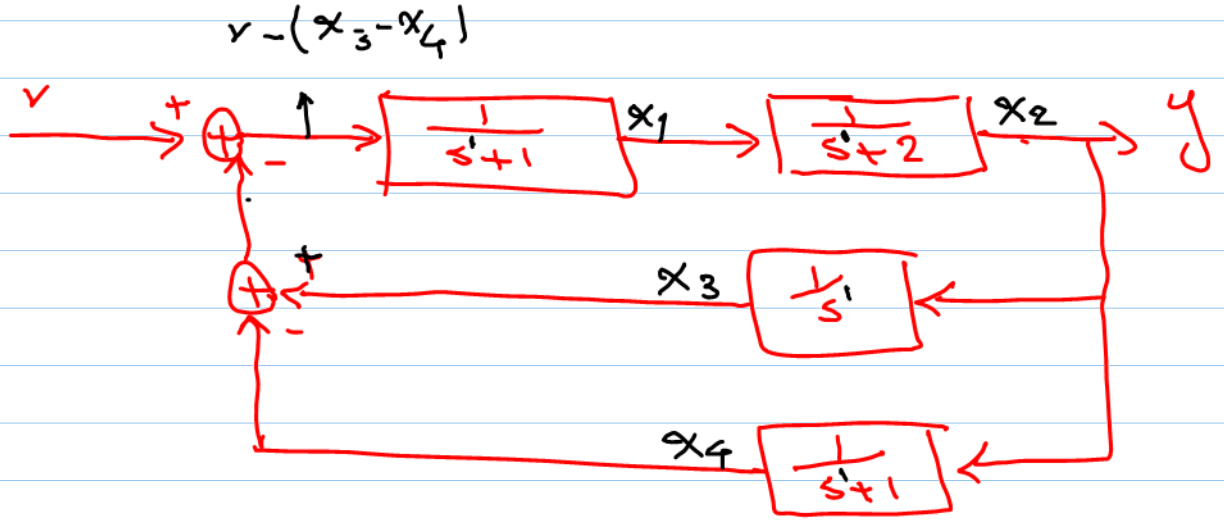
اگر خروج بلوکی دارای s با توان k (درجه مخرج از صورت بیشتر باشد) خروجی بلوک به تعداد درجه s ، متغیر حالت انتخاب می‌شود.

اگر درجه صورت بلوک از مخرج بیشتر باشد ورودی بلوک به تعداد درجه s متغیر حالت در نظر می‌گیریم.



② رابطه ورودی و خروجی هر بلوک را می‌نویسیم.

③ رابطه بلوک به حوزه زمان بردن و $\dot{x}$ ها را بدست می‌آوریم.



① $\dot{x}_1 = \frac{1}{s+1} \times (r - x_3 + x_4)$

② $\dot{x}_2 = \frac{1}{s+2} \dot{x}_1$

③ $\dot{x}_3 = \frac{1}{s} \dot{x}_2$

④ $\dot{x}_4 = \frac{1}{s+1} \dot{x}_2$

① $sx_1 + x_1 = r - x_3 + x_4 \longrightarrow \dot{x}_1(t) + x_1(t) = r(t) - x_3(t) + x_4(t)$

معادله اول $\dot{x}_1 = r(t) - x_1(t) - x_3(t) + x_4(t)$

② $sx_2 + 2x_2 = x_1 \longrightarrow \dot{x}_2 + 2x_2 = x_1$

معادله دوم $\dot{x}_2(t) = x_1 - 2x_2$

③ $x_3 = \frac{1}{s} x_2 \longrightarrow sx_3 = x_2$

معادله سوم $\dot{x}_3(t) = x_2$

④ $x_4 = \frac{1}{s+2} x_2 \longrightarrow sx_4 + 2x_4 = x_2$

معادله چهارم $\dot{x}_4 = x_2 - 2x_4$

معادله خروجی $\longrightarrow y = x_2$

$$\dot{x}_1 = r - x_1 - x_3 + x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$\dot{x}_4 = x_2 - 2x_4$$

$$y = x_2$$

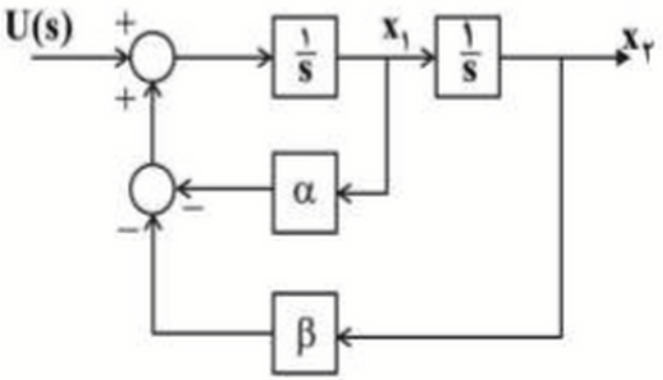
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{4\times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times 1} r$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times 4} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{1\times 1} r$$

مکاتیک ۹۷

۱۰۷- اگر نمودار سیگنال در شکل زیر، به صورت $\dot{X} = AX + BU$ نوشته شود و $X = [x_1\ x_2]^T$ باشد، ماتریس A کدام است؟

فضا حالت



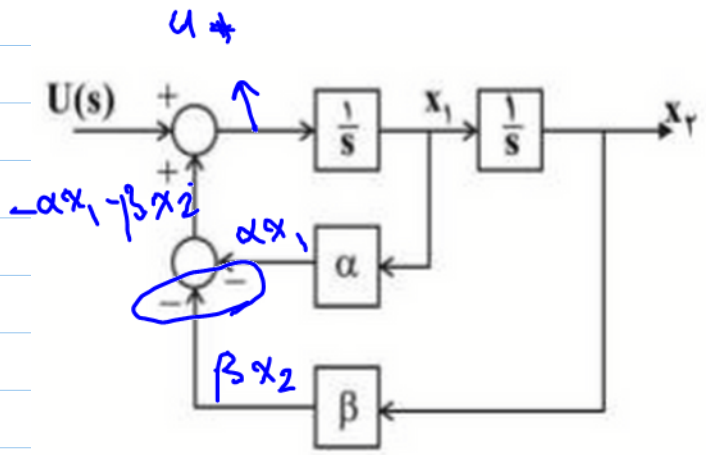
۱) $\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$

حل حل دانشجو



① $x_2 = \frac{1}{s} \times x_1$

② $x_1 = \frac{1}{s} \times (u - \alpha x_1 - \beta x_2)$

① $s x_2 = x_1 \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = x_1}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

② $s x_1 = u - \alpha x_1 - \beta x_2$

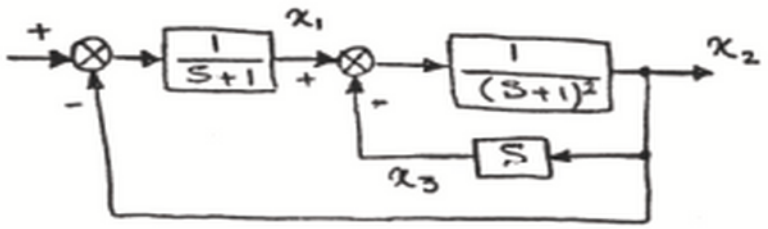
$\rightarrow \dot{x}_1 = u - \alpha x_1 - \beta x_2$

برق ۸۲

۵۹- معادلات حالت سیستم مقابل کدام است؟

معادله حالت $\dot{X} = AX + BU$

خروجی $y = CX + DU$



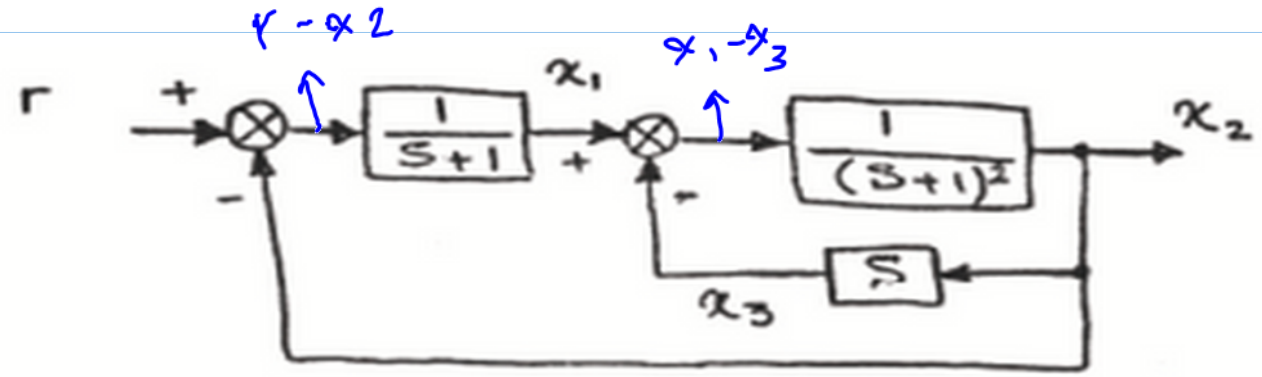
۱) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

۲) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

۳) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

۴) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

حل دانشجو



① $x_3 = s x_2 \rightarrow \dot{x}_2 = x_3 \rightarrow$ حذف 2 و 3

② $x_1 = \frac{1}{s+1}(r - x_2)$

$s x_1 + x_1 = r - x_2 \rightarrow \dot{x}_1 + x_1 = r - x_2$

سطر اول $\rightarrow \dot{x}_1 = r - x_1 - x_2$

سطر آخر $\dot{x}_3$ ؟

③ $x_2 = \frac{1}{(s+1)^2}(x_1 - x_3)$

$$(s^2+2s+1)x_2 = x_1 - x_3$$

$$s^2 x_2 + 2s x_2 + x_2 = x_1 - x_3$$

$$\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_3$$

حذف $\dot{x}_3$ بر حسب x_1, x_2, x_3 (مرحله ۲).

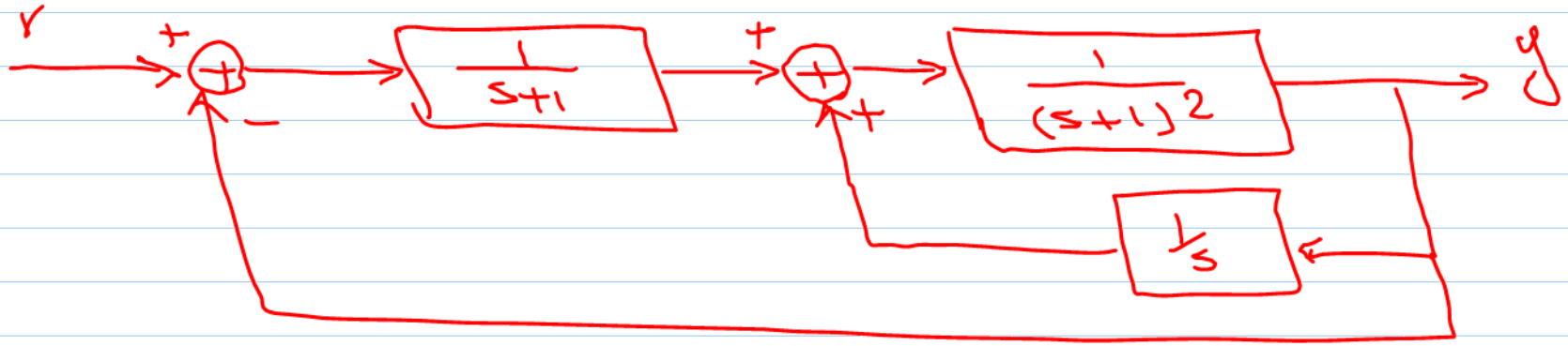
$\dot{x}_2 = x_3$ معادله اول $\quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_3$

$$\dot{x}_3 + 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_3$$

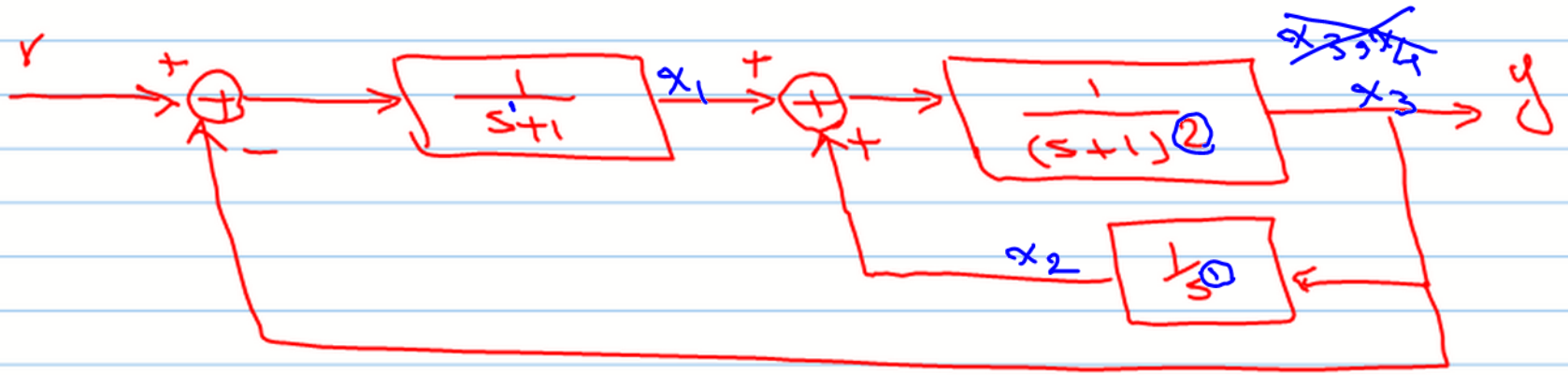
$$\dot{x}_3 + 2x_3 + x_2 = x_1 - x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - 3x_3$$ (مرحله ۳)

مثال، معادلات فضای حالت بلوک دیاگرام زیر را بنویسید.

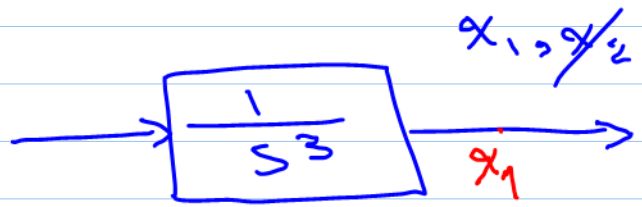


حل دانشجو

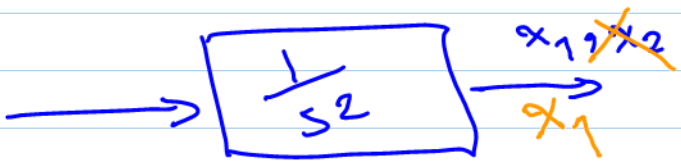


نکته. اگر در مرحله‌ی بعدی بیش از یک متغیر حالت داشتیم باید یکی را به عنوان مرحله‌ی بعدی در نظر بگیریم و دومی را به عنوان مشتق مرحله‌ی بعدی در نظر بگیریم.

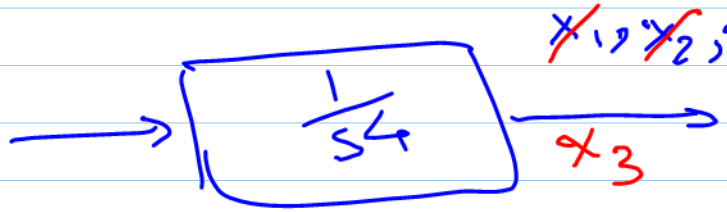
$\dot{x}_3 = x_4$



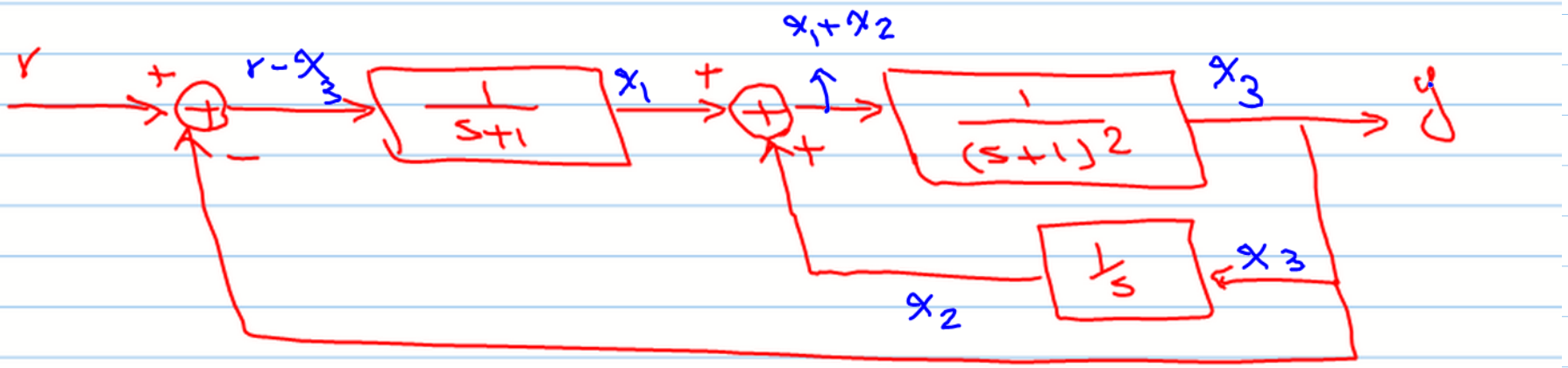
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x}_1 = x_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_3 \\ x_2 = \ddot{x}_3 \\ x_4 = \dddot{x}_3 \end{cases}$$



$$\boxed{\dot{x}_4 = \dot{x}_3} \qquad \dot{x}_4 = ?$$

① $x_2 = \frac{1}{s} x_3 \longrightarrow sx_2 = x_3 \longrightarrow \boxed{\dot{x}_2 = x_3}$

② $x_1 = \frac{1}{s+1}(r - x_3) \longrightarrow sx_1 + x_1 = r - x_3$

$$\boxed{\dot{x}_1 = r - x_1 - x_3}$$

③ $x_3 = \frac{1}{(s+1)^2}(x_1 + x_2)$

$$(s^2+2s+1)X_3 = X_1 + X_2$$

$\dot{x}_4 = ?$

$$\ddot{x}_3 + 2\dot{x}_3 + x_3 = x_1 + x_2$$

رابطه اول $\longrightarrow$ $x_4 = \dot{x}_3 \longrightarrow \dot{x}_4 = \ddot{x}_3$

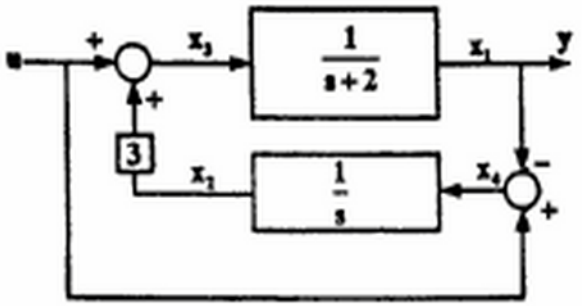
$$\dot{x}_4 + 2x_4 + x_3 = x_1 + x_2 \longrightarrow$$

$$\boxed{\dot{x}_4 = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r - x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$y = x_3$

۶- معادلات حالت و معادله خروجی سیستم کنترل شکل مقابل کدام است؟

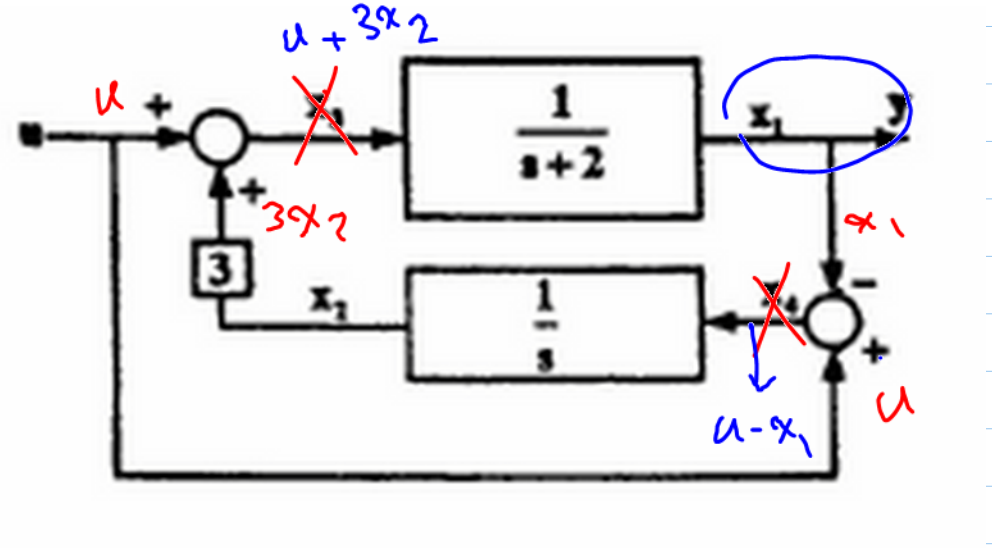


۱) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

۲) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

۳) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

۴) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



مدل ← ~~تابع~~ تبدیلات

$$\dot{x} = \underset{4\times4}{A}\,x + \underset{4\times1}{B}\,u$$

$$y = \underset{1\times4}{C}\,x + \underset{1\times1}{D}\,u$$

$$\begin{cases} x_4 = u - x_1 \\ x_3 = 3x_2 + u \end{cases}$$

ورودی معلوم

x_4 از x_1، x_2 و ورودی مستقل می‌شود.

$$x_2 = \frac{1}{s}(u - x_1) \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = u - x_1}$$

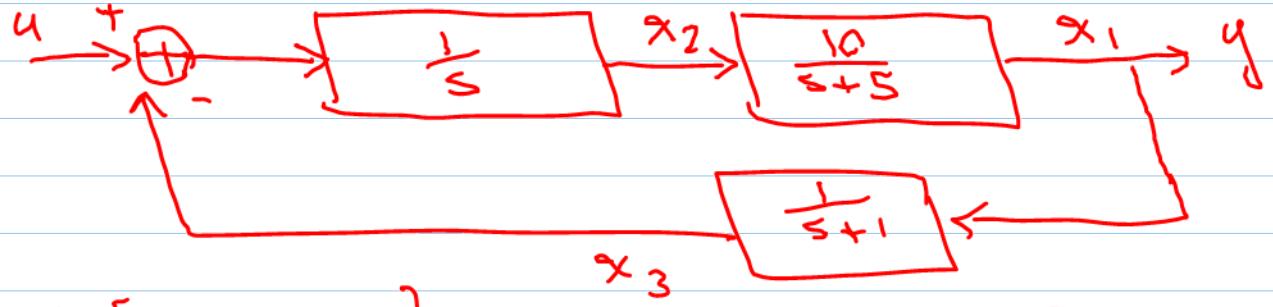
$$x_1 = \frac{1}{s+2}(u + 3x_2) \qquad \dot{x}_1 = u - 2x_1 + 3x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

گزینه ④

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad y = x_1$$

مکانیک ۸۵. سیستم زیر، اگر x_1، x_2 و x_3 به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شوند، ماتریس حالت کدام است؟



(1 $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

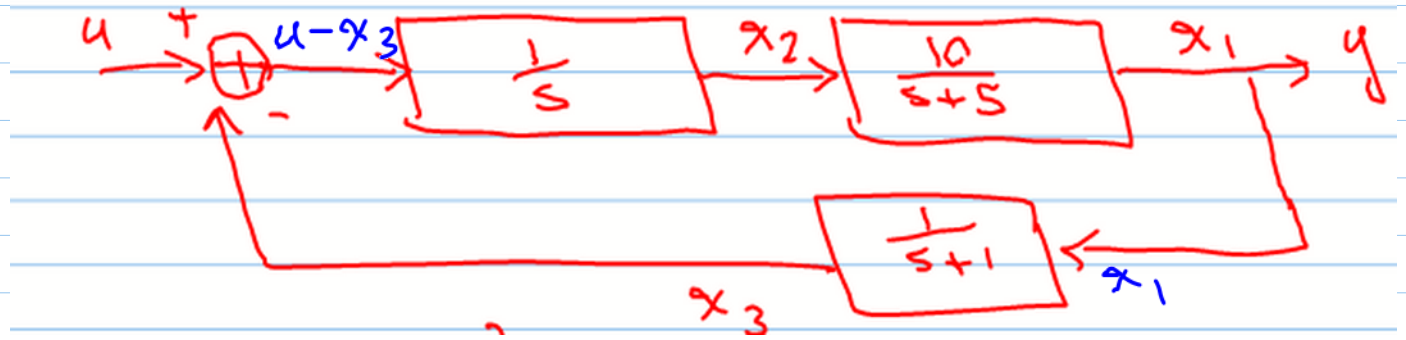
(2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3 $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4

حل دانشجو



① $x_1 = \frac{10}{s+5} x_2 \rightarrow sx_1 + 5x_1 = 10x_2$

$$\boxed{\dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2} \quad ①$$

② $x_2 = \frac{1}{s}(u - x_3) \rightarrow sx_2 = u - x_3$

$$\boxed{\dot{x}_2 = -x_3 + u}$$

③ $x_3 = \frac{1}{s+1} x_1 \rightarrow sx_3 + x_3 = x_1$

$$\boxed{\dot{x}_3 = x_1 - x_3}$$

④ $y = x_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

ماتریس حالت = A

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u \end{cases}$$

جلسه ۱۲ کنترل خطی

فضای حالت ← معادله دیفرانسیل
← بلوک دیاگرام
← تابع تبدیل *

① اگر مورد متغیرهای حالت محبتی نکرده باشد:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

فرم کانونیکال استاندارد.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

استخراج فضای حالت از روی تابع تبدیل به فرم زیر:

$$G(s) = \frac{b}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

گام اول: تابع تبدیل را به فرم زیر بنویسید:

$$G(s) = \frac{b}{1s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

$$G(s) = \frac{2}{3s^2 + 2s + 1} = \frac{2/3}{s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}} = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$b = 2/3 \qquad a_1 = 2/3 \qquad a_2 = 1/3$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1\ b}{s^2 + \underset{a_1}{5}s + \underset{a_2}{6}}$$

$$G(s) = \frac{10}{2s^3 + 2s + 3} = \frac{5}{s^3 + s + 3} = \frac{5\ b}{s^3 + \underset{a_1}{0}\times s^2 + \underset{a_2}{1}s + \underset{a_3}{3}}$$

گام دوم:

$$G(s) = \frac{b}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}_{n\times 1} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n}}\, x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}\, u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{2s^3 + 4s^2 + 0\times s + 2}$$

معنای حالت؟

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{5}{2}\,b}{s^3 + 2s^2 + 0\times s + 1}$$

($n=3$; $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

فضای حالت سیستم با تابع تبدیل $G(s)$

و انتخاب متغیرهای حالت استاندارد کدام است؟

$$G(s) = \frac{2b}{1s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

حالت دوم: تابع تبدیل در صورت که داشته باشد:

$$G(s) = \frac{s+2}{1s^3 + 3s + 4}$$

گام اول: استاندارد سازی ← یعنی ضریب بزرگترین توان s در مخرج را یک می‌کنیم.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{4s^3 + 3s + 1} = \frac{\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}}{s^3 + 0s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}}$$

تابع تبدیل را به فرم زیر بازنویسی کنید:

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}}{s^3 + 0s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}} = \frac{0\times s^3 + \frac{1}{4}s^2 + 0\times s + \frac{1}{2}}{s^3 + 0\times s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}}$$

(b_0, b_1, b_2, b_3; n; a_1, a_2, a_3)

قدم دوم: محاسبه β ها:

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 & \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 & \beta_1 = \frac{1}{4} - 0\times 0 = \frac{1}{4} \\ \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 & \beta_2 = 0 - 0\times\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\times 0 = 0 \\ \vdots & \\ \beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \cdots - a_n\beta_0 & \beta_3 = \frac{1}{2} - 0\times 0 - \frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = -3/16 \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\times 0$

گام سوم : انتخاب متغیرهای حالت :

$$
\begin{cases}
x_1 = y - \beta_0 u \\
x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\
x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\
\vdots \\
x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-1} u
\end{cases}
$$

$$
\beta_0 = 0 \qquad \beta_1 = \tfrac{1}{4} \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = -\tfrac{3}{16}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = y - 0 \times u = y \\
x_2 = \dot{y} - 0 \times \dot{u} - \tfrac{1}{4} u = \dot{y} - \tfrac{1}{4} u \\
x_3 = \ddot{y} - 0 \times \ddot{u} - \tfrac{1}{4} \dot{u} - 0\, u = \ddot{y} - \tfrac{1}{4} \dot{u}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

مثال: معادلات فضای حالت استاندارد تابع تبدیل زیر را بیابید.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^3+3s+1}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{s+1}{s^3+3s+1} \rightarrow s^3 Y + 3sY + Y = sU + U$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$$

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases} \qquad u \rightarrow X$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -3x_2 - x_1 + u + \dfrac{du}{dt} \end{cases}$$

u ، x_3 ، x_2 ، x_1 ...

$$\underbrace{\frac{d^3y}{dt^3}}_{\dot{x}_3} + 3\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{x_2} + \underbrace{y}_{x_1} = \frac{du}{dt} + u \qquad \dot{x}_3 + 3x_2 + x_1 = \frac{du}{dt} + u$$

$$G(s) = \frac{s+1}{1s^3 + 3s + 1}$$

$$G(s) = \frac{\overset{b_0}{0}s^3 + \overset{b_1}{0}s^2 + \overset{b_2}{1}s + \overset{b_3}{1}}{1s^3 + \underset{a_1}{0}s^2 + \underset{a_2}{3}s + \underset{a_3}{1}}$$

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 0 - 0 \times 0 = 0 \\ \beta_2 = 1 - 0 \times 0 - 3 \times 0 = 1 \\ \beta_3 = 1 - 0 \times 1 - 3 \times 0 - 1 \times 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y - 0 \times u = y \\ x_2 = \dot{y} - 0\dot{u} - 0u = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} - 0\ddot{u} - 0\dot{u} - 1u = \ddot{y} - u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} - u \end{cases}$$

$$\ddot{y} = x_3 + u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

β_1 β_2 β_3

بصورت تشریحی:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} - \dot{u} = -x_1 - 3x_2 + u \end{cases}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{x_2} + \underbrace{y}_{x_1} = \dot{u} + u$$

$$\dddot{y} = \dot{x}_3 + \dot{u}$$

$$\dot{x}_3 + \dot{u} + 3x_2 + x_1 = \dot{u} + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 + u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

(2) فرم متغیرهای حالت در صورت سوال تقریب زده باشد.

(الف) متغیرهای حالت $y = x_1$ و $\dot{x}_1 = \dots$ و $\dot{x}_2 = \dots$ ← از روی انتقال به صورت زیر

(ب) تجزیه به کسر های جزئی مخرج ← طبیعه تابع

$$\frac{y}{u} = G(s) = \frac{\text{صورت کسر}}{(s+a)(s+b)\dots(s+f)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s+a} + \frac{b_1}{s+b} + \cdots + \frac{b_m}{s+f}$$

$$Y(s) = b_0 \underbrace{\frac{U(s)}{s+a}}_{x_1} + b_1 \underbrace{\frac{U(s)}{s+b}}_{x_2} + \cdots + b_m \underbrace{\frac{U}{s+f}}_{x_n}$$

$$x_1 = \frac{U}{s+a} \rightarrow sx_1 + ax_1 = U \rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = -ax_1 + U}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{U}{s+f} \rightarrow sx_n + fx_n = U \rightarrow \boxed{\dot{x}_n = -fx_n + U}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+24}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

فضای حالت با جزئیات کسرهای جزئی ساده

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_0}{s+1} + \frac{b_1}{s+2} + \frac{b_2}{s+3}$$

$$b_0 = \lim_{s \to -1} \frac{Y(s)}{U(s)} \times (s+1) \qquad b_2 = \lim_{s \to -3} \frac{Y}{U} \times (s+3)$$

$$b_1 = \lim_{s \to -2} \frac{Y}{U} \times (s+2)$$

$$b_0 = \lim_{s \to -1} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} \times (s+1) = \frac{-1+4}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{3}{1 \times 2} = 3/2$$

$$b_1 = \lim_{s \to -2} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+2) = \frac{2}{-1 \times 1} = -2$$

$$b_2 = \lim_{s \to -3} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+3) = \frac{1}{-2 \times -1} = 1/2$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3/2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{s+1} = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{u}{s+1}}_{x_1} - 2\underbrace{\frac{u}{s+2}}_{x_2} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{u}{s+3}}_{x_3}$$

$$x_1 = \frac{u}{s+1} \rightarrow sx_1 + x_1 = u \rightarrow \dot{x}_1 + x_1 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = -x_1 + u} \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{u}{s+2} \rightarrow sx_2 + 2x_2 = u \rightarrow \dot{x}_2 + 2x_2 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = -2x_2 + u} \quad (2)$$

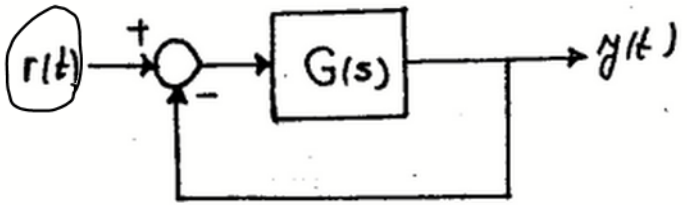
$$x_3 = \frac{u}{s+3} \rightarrow sx_3 + 3x_3 = u \rightarrow \dot{x}_3 + 3x_3 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_3 = -3x_3 + u} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + u \\ y = \frac{3}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

ا تجزیه تابع تبدیل $G(s)$ به کسرهای ساده، یک مدل فضای حالت برای سیستم کنترل زیر عبارتست از :

$$G(s) = \frac{۶s^۲ + ۲۲s + ۱۸}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$$



$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

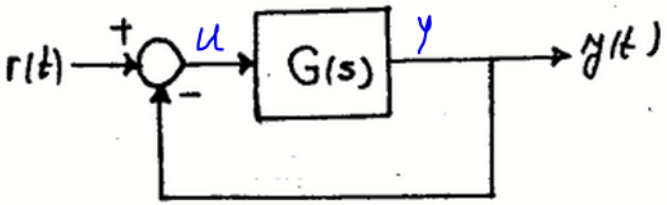
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۲ & -۲ & -۳ \\ -۱ & -۴ & -۳ \\ -۱ & -۲ & -۶ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۲ & -۲ & -۳ \\ -۱ & -۴ & -۳ \\ -۱ & -۲ & -۶ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۵ \\ ۴ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

گروه آموزشی مهندس فضلی
تدریس خصوصی دروس دانشگاهی
کنکور ارشد- کنکور کاردانی به کارشناسی
۰۹۱۲-۳۵۷۱۲۰۴
www.pasokh.org

$$G(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_0}{s+1} + \frac{b_1}{s+2} + \frac{b_2}{s+3}$$

$$b_0 = \lim_{s \to -1} \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$b_1 = \lim_{s \to -2} \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+2) = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$b_2 = \lim_{s \to -3} \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+3) = \frac{+6}{-2 \times -1} = 3$$

$$Y(s) = 1 \underbrace{\frac{U}{s+1}}_{x_1} + 2 \underbrace{\frac{U}{s+2}}_{x_2} + 3 \underbrace{\frac{U}{s+3}}_{x_3}$$

$$x_1 = \frac{U}{s+1} \rightarrow sx_1 + x_1 = U \rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + U$$

$$x_2 = \frac{U}{s+2} \rightarrow \dot{x}_2 = -2x_2 + U$$

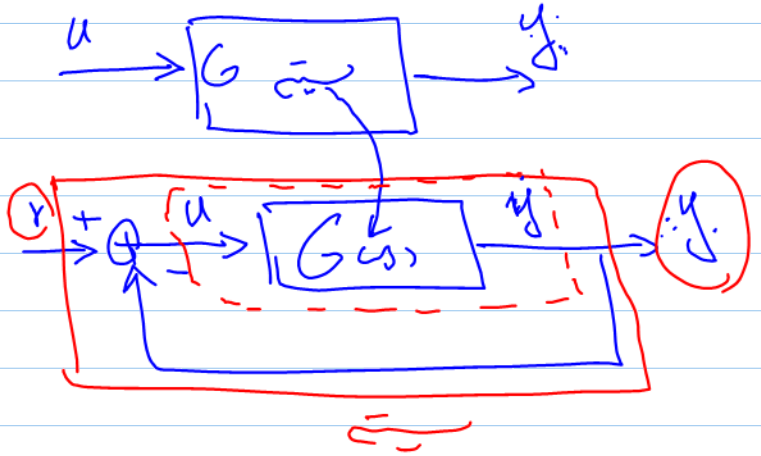
$$x_3 = \frac{U}{s+3} \rightarrow \dot{x}_3 = -3x_3 + U$$

$$y = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

حلقه باز

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X + 0 \times u$$



$$\boxed{u = r - y}$$

$$u = r - (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + r - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + r \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + r - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + r \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + r - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -x_1 - 2x_2 - 6x_3 + r \\ y = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

فضای حالت حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} r \end{cases}$$

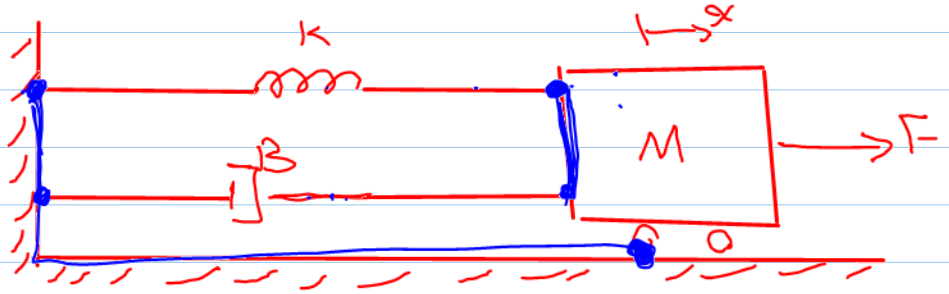
جواب

تبدیل عناصر مکانیکی به الکتریکی

معادل الکتریکی سیستم مکانیکی؟

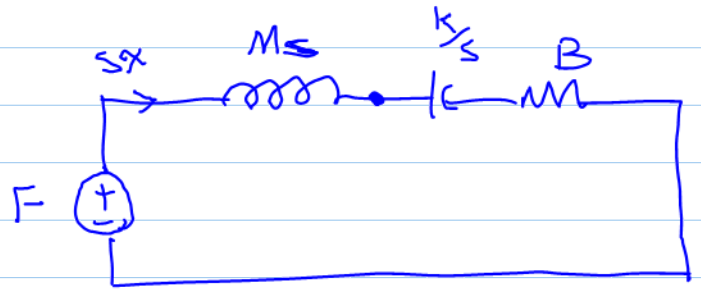


الکتریکی	مکانیکی
جرم یا اینرسی L یا M_2	جرم M یا اینرسی J
خازن $\frac{K}{S}$	فنر K
مقاومت B	دمپر B
منبع ولتاژ با فرمان V_2 یا I_2	نیروی F یا گشتاور T
جریان I_x	سرعت $\dot{x}$
موازی	انتقال سری
سری	موازی

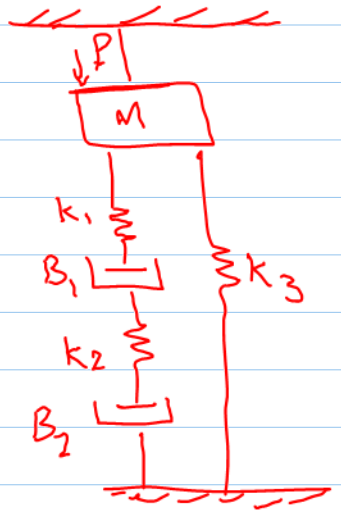


جرم و فنر ← سوالی

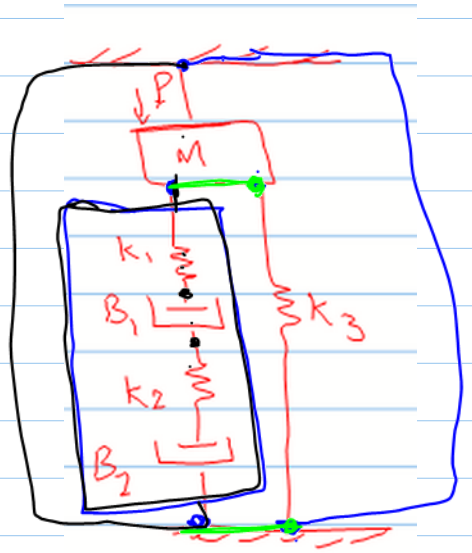
سیستم { سیستم دینامیکی / سوالی
سیستم دینامیکی

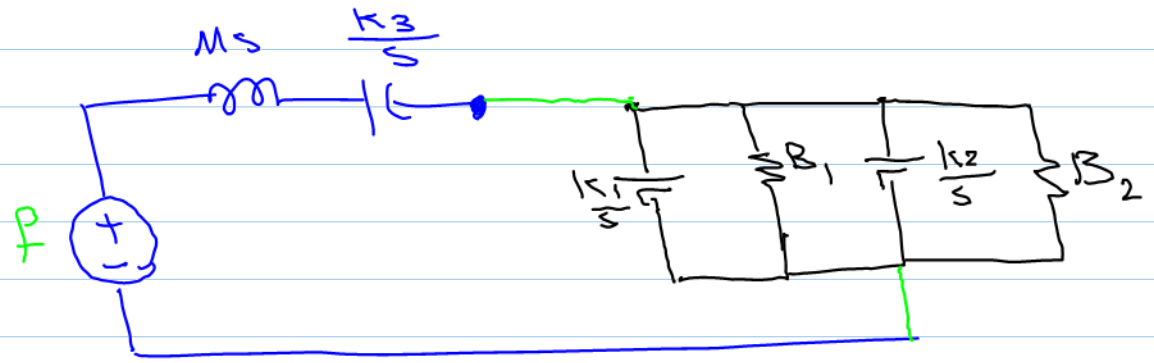


مکانیک ۳۳ . معادل الکتریکی سیستم زیر را بیابید .



حل دانشجو





آغاز فصل اول کنترل خطا

شتاب‌های فصل اول

اولین جلسه آنلاین ← هفته ← شتاب‌های ثابت

شتاب‌های درخواستی ← نظارت‌شایت

پاسخ‌گویی به اشکالات درسی

بدون محدودیت

بسمه تعالی

آزمون فصل اول درس کنترل خطی

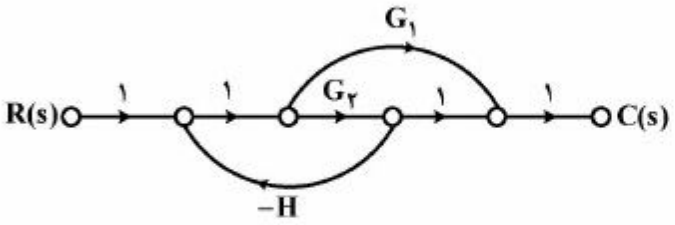
مدرس: سعید دهقانی

توضیحات:

- هر زمان که به این نتیجه رسیدید که مطالعه فصل اول را به اتمام رسانده‌اید، به این آزمون پاسخ دهید.
- پس از آزمون، با توجه به پاسخ‌ها، برای هر شخص به صورت اختصاصی راهکارهایی برای تغییر روش مطالعه(در صورت نیاز) و برطرف نمودن ضعف‌ها ارسال خواهد شد.
- نتیجه این آزمون از نظر آموزشی و شناخت سطح علمی دانشجویان کلاس بسیار مهم می‌باشد،با پاسخ به این سوالات نقاط ضعف و قوت شما شناسایی شده و در کلاس سعی خواهد شد که نقاط ضعف برطرف شوند. لذا کسانی که در این آزمون شرکت نکنند، این فرصت را از دست می‌دهند که نقاط ضعف آنها شناسایی و در کلاس برطرف شود.
- پاسخ سوالات را به صورت خوانا نوشته و به صورت عکس هایی که در یک فایل پی دی اف ذخیره شده است، در قسمت رفع اشکال سایت آپلود نمایید.
- لطفاً در پاسخگویی به سوالات کاملاً صادقانه عمل کنید و در صورتی که برای حل سوال هیچ ایده‌ای هم ندارید، هرچیزی که در مورد سوال بلد هستید را بنویسید.
- اگر در هنگام حل سوال، مسائل ریاضی را بلد نیستید، لطفاً در پاسخ هر سوال اشاره کنید که چه بخشی را بلد نبودید.
- اگر در هنگام حل سوال مطلب مربوطه را مسلط هستید ولی صرفا به دلیل فراموشی نکته مربوطه قادر به پاسخ نیستید، به این موضوع اشاره کرده و سپس با مرور نکته مربوطه سوال را حل کنید.

سوال ۱-

نمودار عبور سیگنال (Signal flow graph) یک سیستم کنترل به صورت زیر است. کدام گزینه بیان کنندهٔ تابع تبدیل سیستم است؟



۱) $\frac{G_1+G_2}{1-G_2H+G_1G_2}$

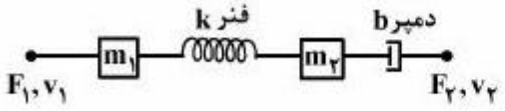
۲) $\frac{G_1+G_2}{1+G_2H-G_1G_2}$

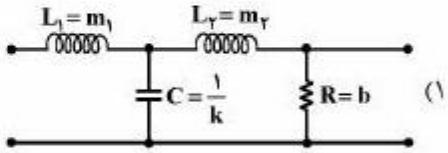
۳) $\frac{G_1+G_2}{1-G_2H}$

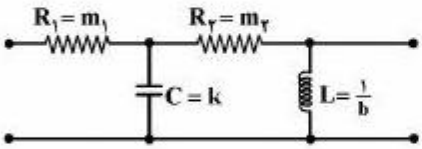
۴) $\frac{G_1+G_2}{1+G_2H}$

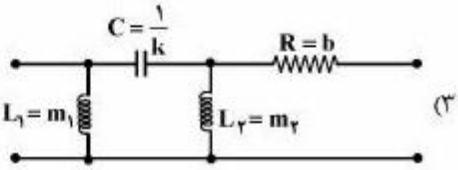
سوال ۲-

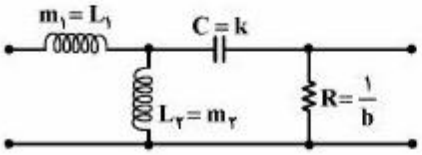
سیستم الکتریکی معادل سیستم مکانیکی زیر با فرض «نیرو معادل پتانسیل»، برابر کدام است؟ (F نیرو و v سرعت است)



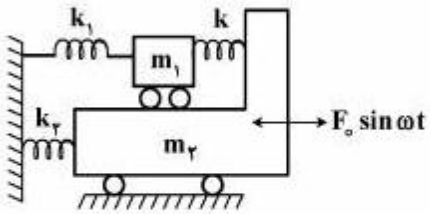
۱)


۲)


۳)


۴)


سوال ۳-



معادلهٔ حرکت سیستم روبه‌رو، کدام است؟

۱) $$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+(k_1+k)x_1-kx_2=0\\ &m_2\ddot{x}_2-kx_1+(k_2+k)x_2=F_0\sin(\omega t)\end{aligned}$$

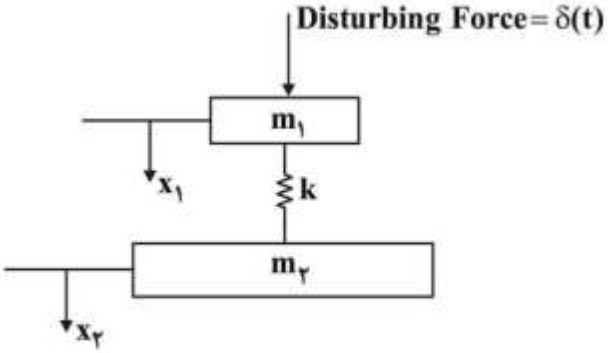
۲) $$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+(k_1-k)x_1+kx_2=0\\ &m_2\ddot{x}_2+kx_1+(k_2-k)x_2=F_0\sin\omega t\end{aligned}$$

۳) $$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+k_1x_1+k_2x_2=0\\ &m_2\ddot{x}_2+k_2x_1+(k_2+k_1)x_2=F_0\sin\omega t\end{aligned}$$

۴) $$\begin{aligned} &(m_1+m_2)\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-kx_2=0\\ &(m_1-m_2)\ddot{x}_2+(k)x_1-(k_1+k)x_2=F_0\sin\omega t\end{aligned}$$

سوال ۴-

فرکانس نوسان ساختار شکل زیر، کدام است؟



۱) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{k(m_۱ m_۲)}{m_۱ + m_۲}$

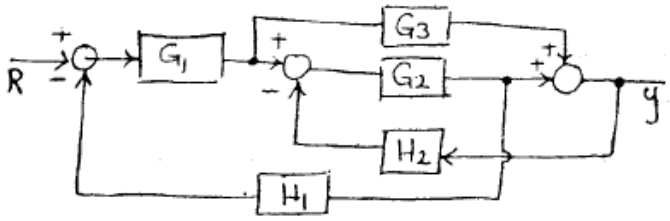
۲) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{m_۱ m_۲}{k(m_۱ + m_۲)}$

۳) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{k(m_۱ + m_۲)}{m_۱ m_۲}$

۴) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{m_۱ + m_۲}{k(m_۱ m_۲)}$

سوال ۵-

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته زیر در کدام گزینه صحیح است؟



۱) $1+G_2H_1+G_1G_2H_1-G_1G_2G_3H_1H_2$

۲) $1+G_1G_2H_2-G_1G_2G_3H_1H_2$

۳) $1+G_2H_2-G_1G_2G_3H_1H_2$

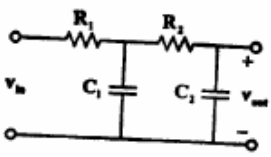
۴) $1+G_2H_2+G_1G_2H_1-G_1G_2G_3H_1H_2$

Description: F:\2011-04-05\OCR0106

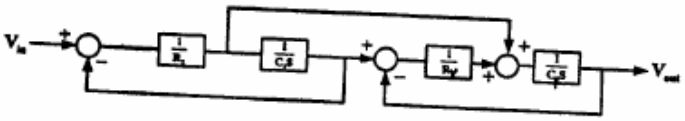
سوال ۶-

۴) به ازای $k = ۲$ خطای $e(t)$ حاوی یک سیگنال سینوسی است که فرکانس زاویه‌ای آن $\sqrt{۲}$ رادیان بر ثانیه است.

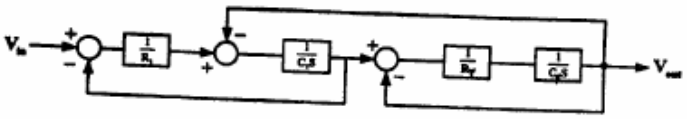
کدام یک از دیاگرام‌های بلوکی زیر ارتباط ورودی و خروجی مدار شکل مقابل را نشان می‌دهد؟



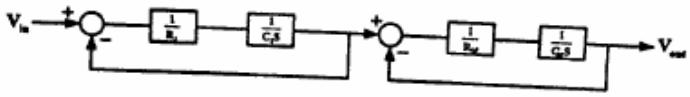
۱)



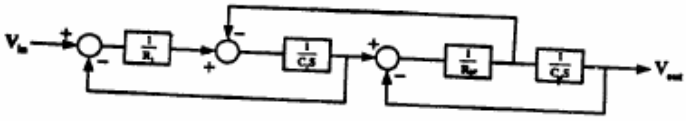
۲)



۳)

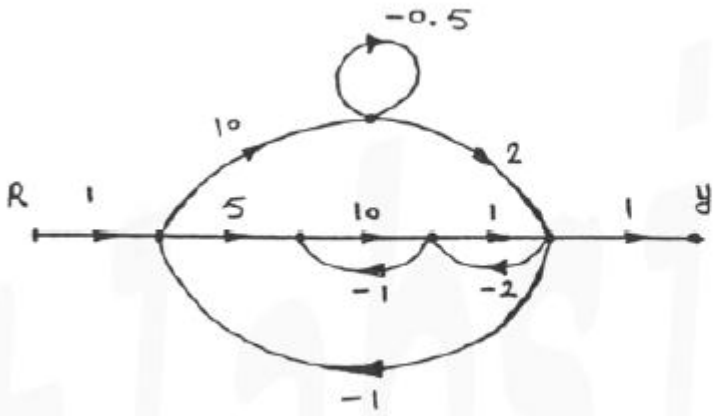


۴)



سوال ۷-

تابع تبدیل $\frac{Y}{R}$ در گراف جریان حالت (Signal Flow Graph) شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{۵۴۰}{۶۲۹}$

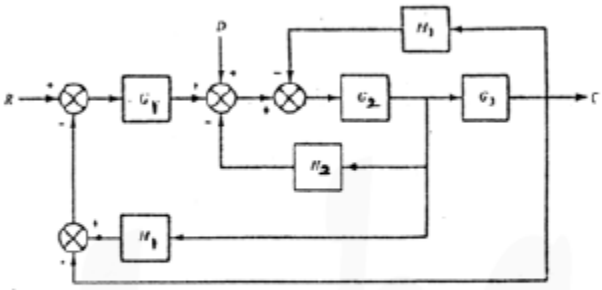
۲) $\frac{۵۹۰}{۵۷۹}$

۳) $\frac{۵۹۰}{۶۲۹}$

۴) $\frac{۵۴۰}{۵۷۹}$

سوال ۸-

دیاگرام بلوکی سیستمی مطابق شکل می‌باشد، تابع تبدیل $\frac{C}{D}$ کدام است؟



۱) $\frac{G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2H_1}$

۲) $\frac{G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}$

۳) $\frac{G_2G_3}{1 - G_2H_2 - G_2G_3H_3 - G_1G_2H_1 - G_1G_2G_3}$

۴) $\frac{G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3}$

سوال ۹-

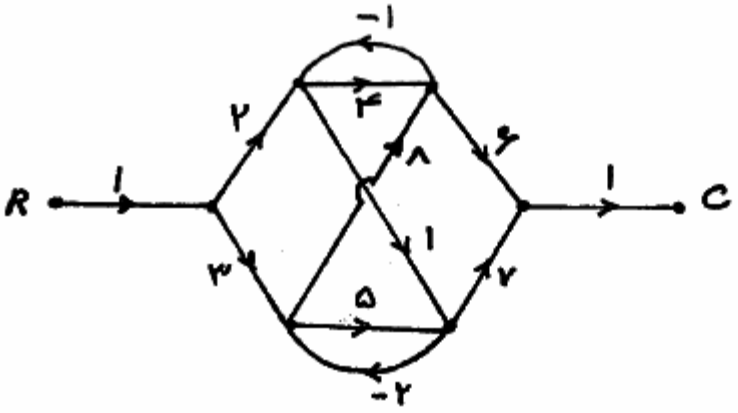
سیگنال فلوگراف یک سیستم در شکل زیر نشان داده شده است. تابع انتقال $\frac{C}{R}$ عبارتست از:

۱) $\frac{۸۵۱}{۳۹}$

۲) $\frac{۱۰۴۳}{۳۹}$

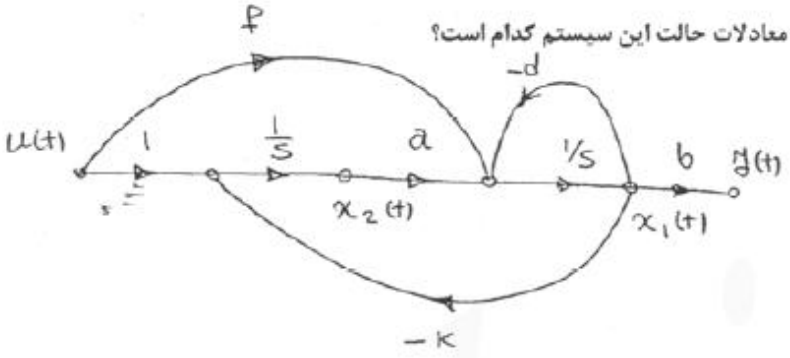
۳) $\frac{۱۰۴۳}{۵۵}$

۴) $\frac{۸۵۱}{۵۵}$



سوال ۱۰-

سیستمی با دیاگرام زیر نشان داده شده است. معادلات حالت این سیستم کدام است؟



۱) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d & a\\ k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f\\ 1\end{pmatrix}u$

۲) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d & a\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f\\ 1\end{pmatrix}u$

۳) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d & a\\ -k & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$

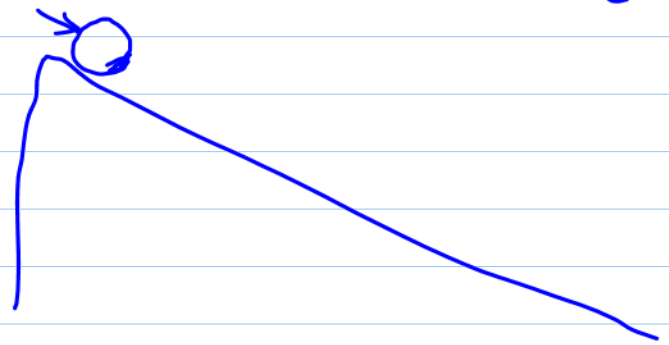
۴) $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d & a\\ k & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u$

کنترل جلسه ۱۴

فصل دوم

پایداری

مفهوم پایداری: یعنی انرژی سیستم همواره افزایش نیابد.



سرعت همواره در حال افزایش

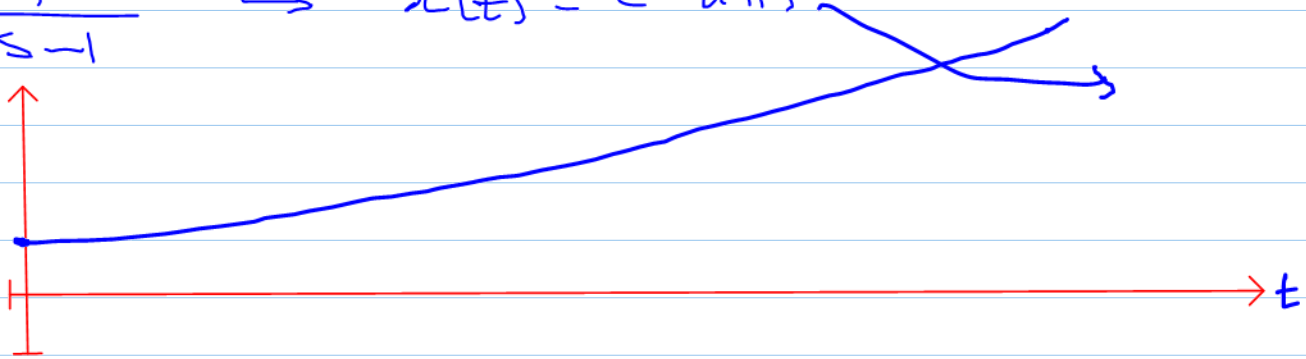
↑ انرژی جنبشی ⇒ ↑ سرعت

یک سیستم را پایدار گوئیم اگر انرژی آن بجز نقاطی که به حداقل می‌رسد، (اگر وجود دارند) انرژی از روی سیگنال زمانی بیش می‌شود. (سیگنال در حوزه زمان)

اگر دامنه سیگنالی با گذر زمان به سمت صفر برود یعنی انرژی آن صفر است.

برای بررسی این موضوع:

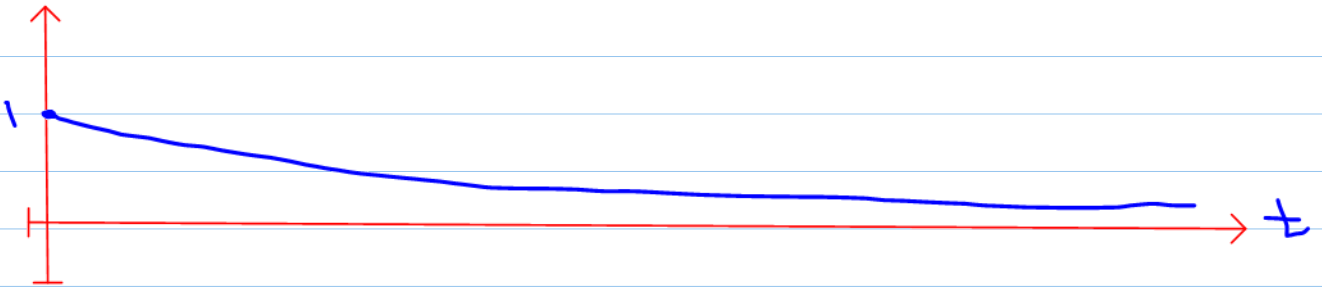
$$X(s) = \frac{1}{s-1} \rightarrow x(t) = e^{1t}u(t)$$



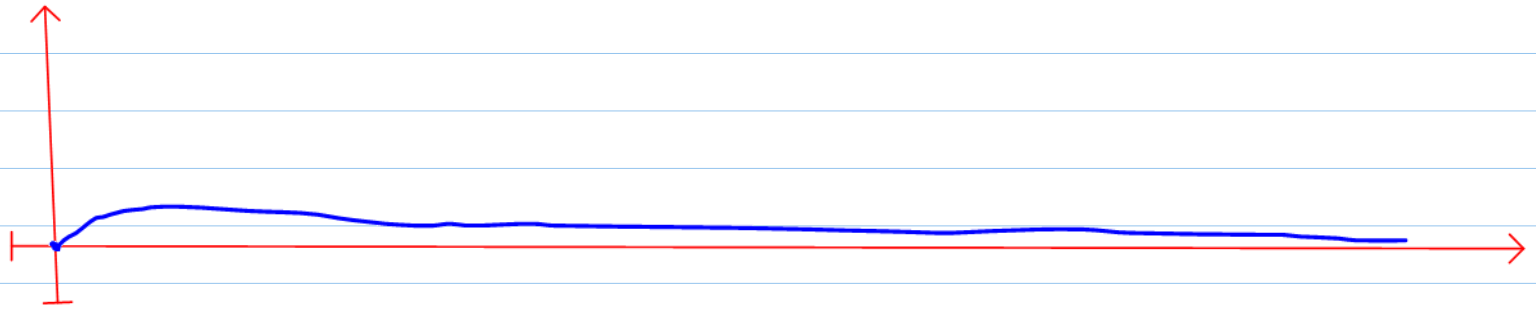
ارزی = ∞

اگر خروجی سیستم یک سیگنال با انرژی ∞ باشد، سیستم ناپایدار است.

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow y(t) = e^{-1t}u(t)$$

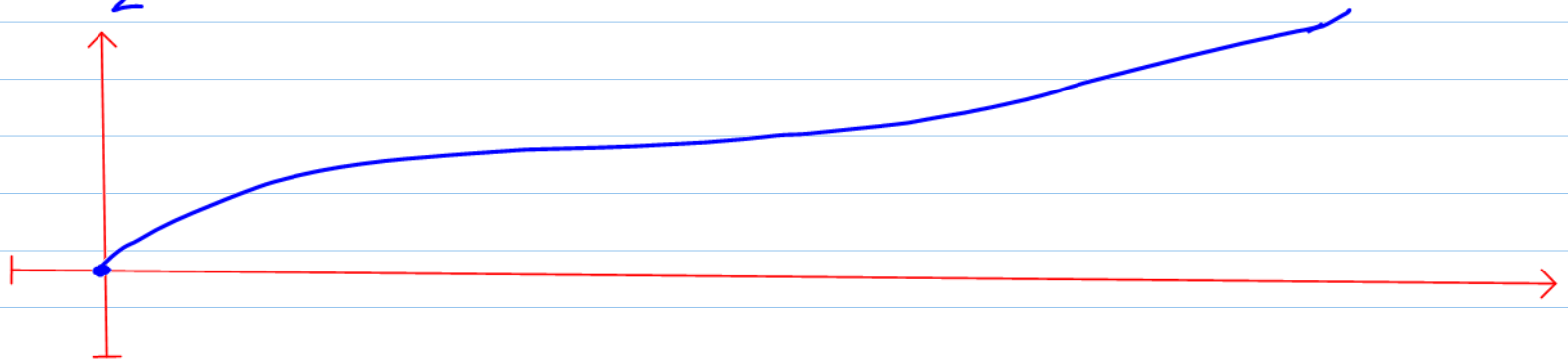


$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \rightarrow f(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$



$$F_2(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} e^{t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$$

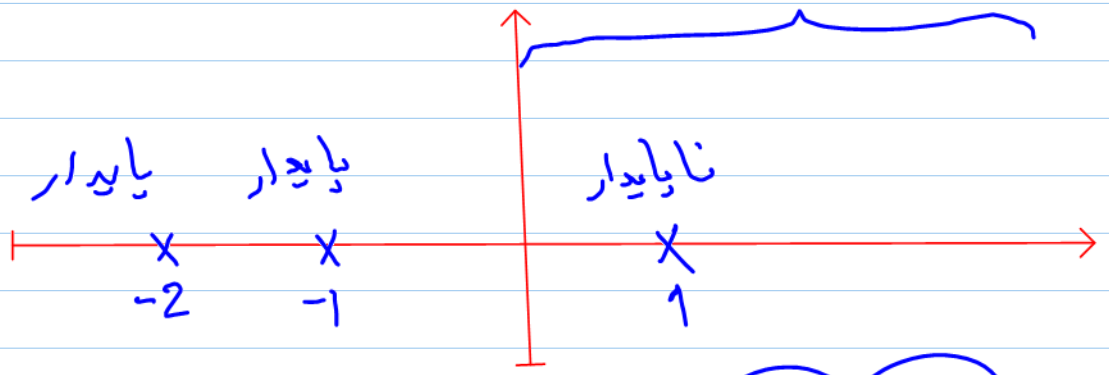


$\frac{1}{s-1}$ X

$\frac{1}{s+1}$ ✓

$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ✓

$\frac{1}{(s-1)(s+2)}$ X



درست

$t \geq 0$

$X(s) = \frac{1}{s+a} \rightarrow x(t) = e^{-at}$

$a = Re\{a\} + j\,Im(a)$ $\qquad a = 1 + j2$

$x(t) = e^{-(Re(a) + j\,Im(a))t}$

$= e^{-Re\{a\}t} \; e^{-j\,Im(a)\,t}$

$-1 \leq e^{j\,\omega t} \leq 1$

حدی بین ۱- و ۱

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$e^{j(-\mathrm{Im}(a))t} = \cos(-\mathrm{Im}(a)t) + j\sin(-\mathrm{Im}(a)t)$$

$$x(t) = e^{-\mathrm{Re}(a)t} \times \text{سینوسی با دامنه ۱}$$

$$e^{2t} \quad t=\infty \rightarrow e^{2\times\infty} = \infty$$

$$e^{-2t} \quad t=\infty \rightarrow e^{-2\times\infty} = e^{-\infty} = 0$$

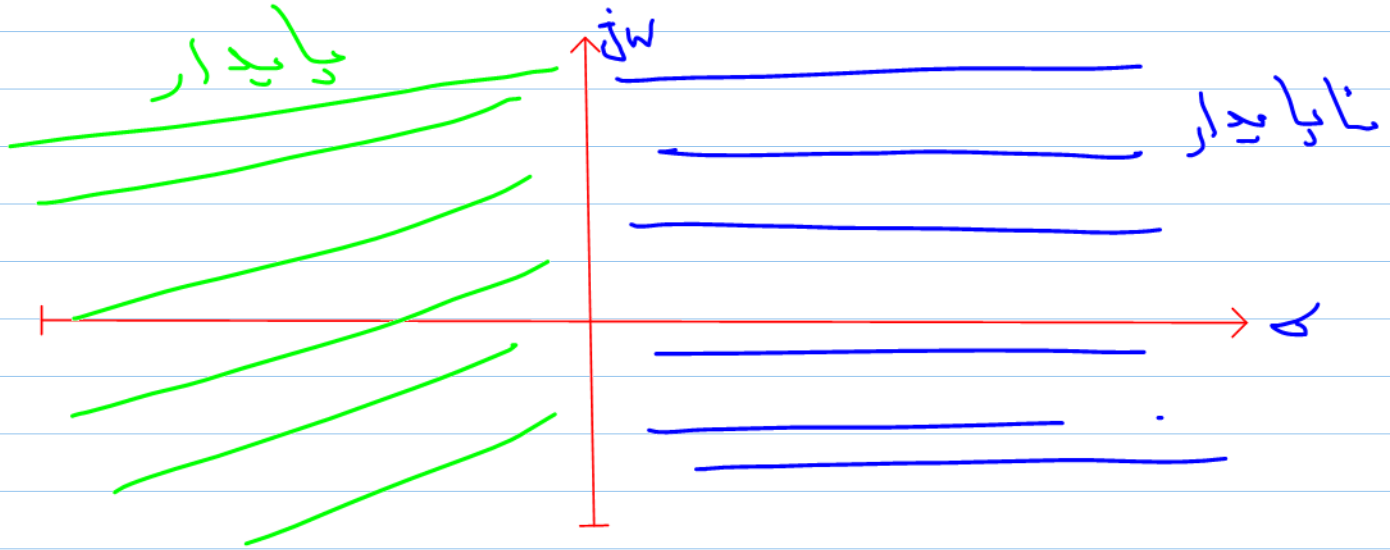
$$\begin{cases} -\mathrm{Re}(a) > 0 \rightarrow & x(\infty) = \infty \\ -\mathrm{Re}(a) < 0 \rightarrow & x(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(a) < 0 \rightarrow & \text{ناپایدار} \\ \mathrm{Re}(a) > 0 \rightarrow & \text{پایدار} \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \longrightarrow \begin{cases} -Re(a) > 0 & \text{ناپایدار} \\ -Re(a) < 0 & \text{پایدار} \end{cases}$$

$-a =$ قطب

$$\begin{cases} Re(-a) > 0 \longrightarrow Re(\text{قطب}) > 0 & \text{ناپایدار} \\ Re(-a) < 0 \quad Re(\text{قطب}) < 0 & \text{پایدار} \end{cases}$$

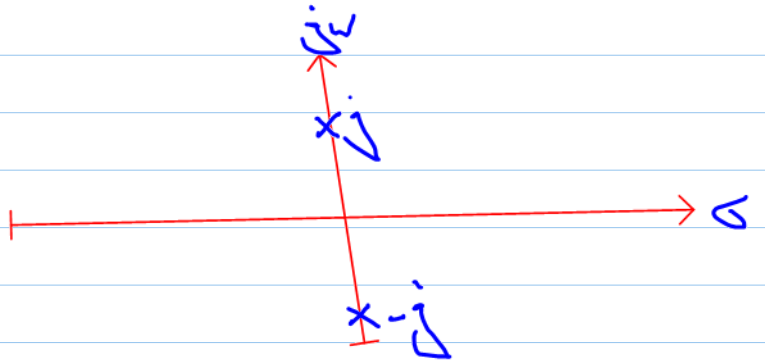


اگر قطب سیستم روی ... باشد قطب ناپایدار

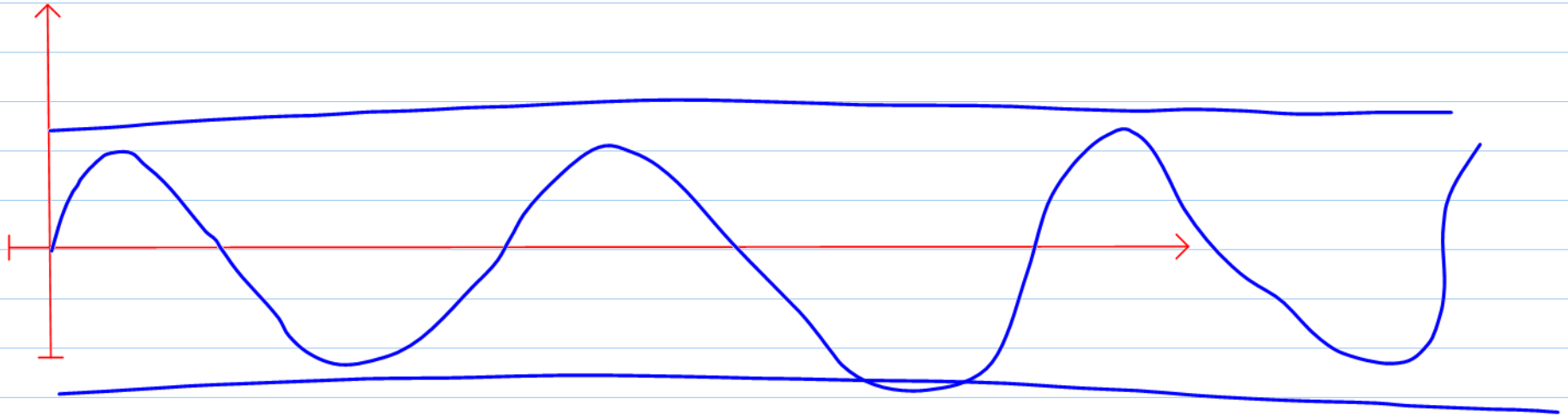
" " چپ " " " " پایدار

" " روی محور ... باشد قطب نوسانی است.

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1}$$



$$x(t) = \sin(1t)$$



بنابراین حالت ← نوسانی = مرز پایداری

اگر داشته خروجی سیگنال نوسانی باشد (نه صفر نه ∞) سیستم ناپایدار گوییم.

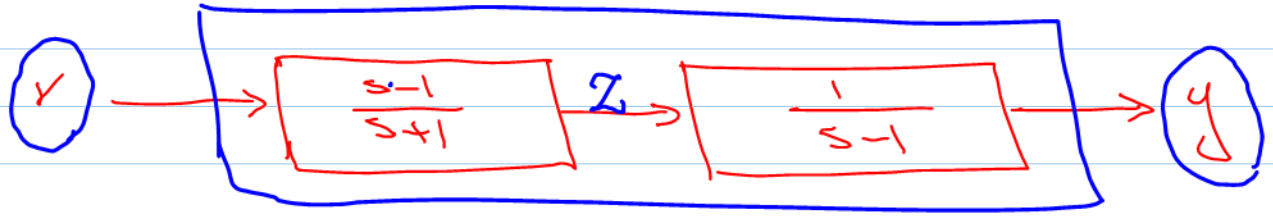
سوال: مزمن کنید سیستم ناپایدار داریم. یعنی دور موقر نه ∞ و نه ۰؟

∞ در عمل یعنی از کار افتادن سیستم (نابود شدن)

تعریف پایداری:
① پایداری داخلی

② پایداری BIBO

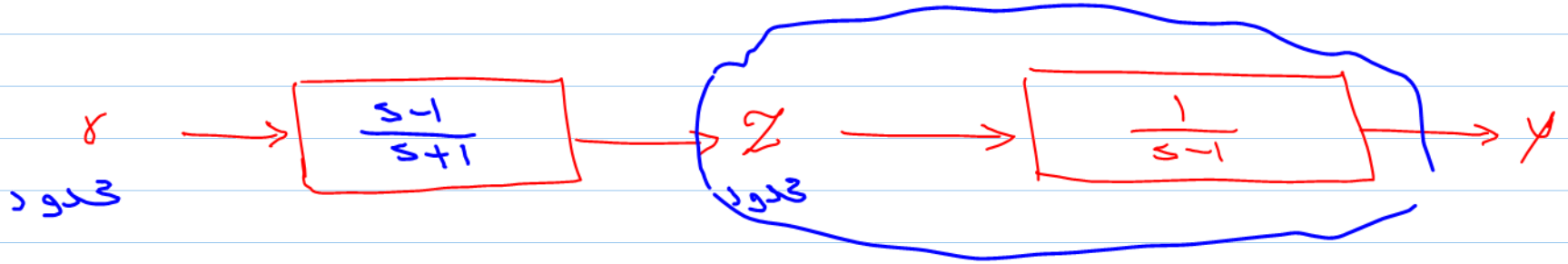
تعریف پایداری BIBO: اگر به ازای هر ورودی محدود، خروجی سیستم محدود باشد پایدار BIBO است ← این نوع پایداری به داخل سیستم کاری ندارد و فقط به تابع تبدیل سیستم نگاه می‌کند.



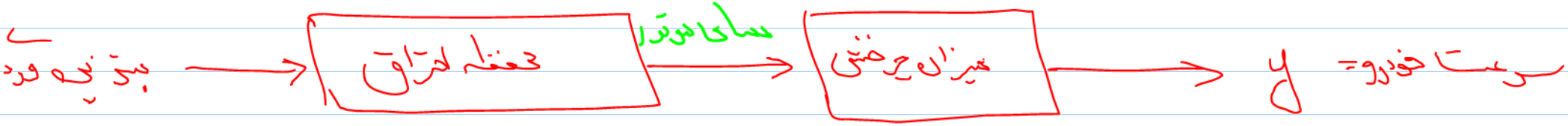
$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$ $\quad s=-1$ قطب پایدار

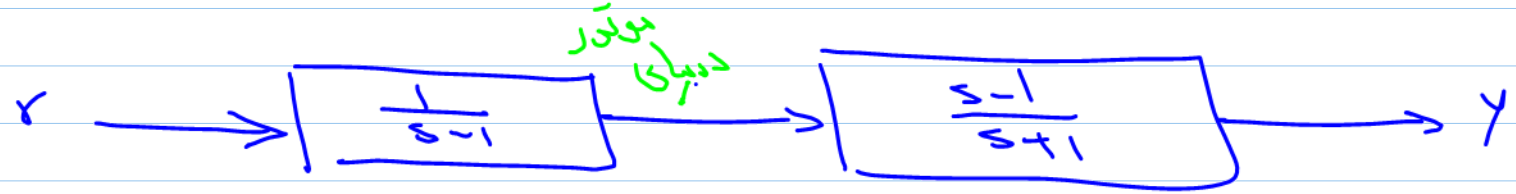
از نظر BIBO ← پایدار

$R(s)=1 \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} \quad y(t) = e^{-t}u(t)$ ✓



$\frac{y}{z} = \frac{1}{s-1}$ $\quad z=1 \rightarrow y(t) = e^{t}u(t)$ ناپایدار





سرعت محدود ⟵ $\lim_{s \to \infty}$ ⟵ $r = 1$ ⟶ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$

در اثر ورود بنزین سایی موتور افزایش می‌یابد و بعد از مدتی باعث ناپایداری موتوری شود.

پایداری BIBO پایداری کاملی است چون از داخل سیستم اطلاعی ندارد.

پایداری داخلی: تمام متغیرهای مستقل داخل سیستم محدود باشند.

↓

متغیر حالت

↳ تمام متغیرهای حالت محدود باشند.

پایداری داخلی شامل پایداری BIBO هم می‌شود.

پایدار داخلی ⟵ پایدار BIBO

* پایدار داخلی یعنی عاری قطبها (قبل از حذف صفرها) سمت چپ محور $j\omega$

$$\frac{Y}{R} = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

ماتریس حالت

↑

$\det(sI - A) = 0$ ← ریشه‌های این معادله عاری قطبها (مثال قطبهای ساده شده) را نشان می‌دهد.

$\det(sI - A) = 0$ ⟶ { قطبهای تابع تبدیل
قطبهای ساده شده با هم‌صفرها }

$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{s+1} \times \frac{s+2}{s+2} = \frac{1}{s+1}$$

*

نکته: پایداری BIBO در صورتی که صفرو قطب سیستم هذف شوند دیگر پایداری داخلی هم هست.

* حذف صفرو قطب سیستم باعث ناپایداری می شود.

* از این به بعد پایداری BIBO منظور است مگر اینکه صفرو قطب حذف نمی شوند داشته باشیم.

شرایط پایداری:

پایداری فقط با توجه به قطبها بیان می شود. ← معادله مشخصه (مخرج تابع تبدیل)،

Δ ، $\det(sI-A)$

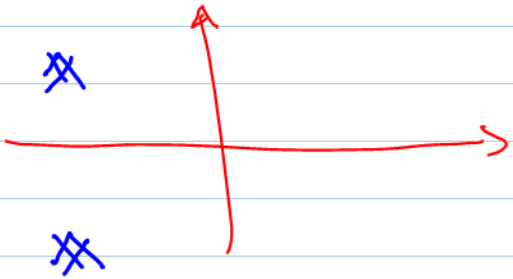
انواع قطبها:

① قطبهای پایدار: قطبهای سمت چپ محور اس، یعنی حقیقی قطب منفی باشد.

② قطبهای توابع: قطبهای روی خود s (موهومی محض) نه تکراری نباشند.

③ ناپایدار: قطبهای سمت راست محور s یا قطبهای تکراری روی محور s

$$s = \begin{cases} 2 & ③ \\ -2 & ④ \\ -2+j & \\ -2-j & \end{cases} \quad ①$$



$$s = \begin{cases} 2 \pm j & ③ \\ -2 & ① \\ +j\sqrt{5}, -j\sqrt{5} & ③ \\ -j\sqrt{5}, -j\sqrt{5} & ③ \end{cases}$$



انواع پایداری:

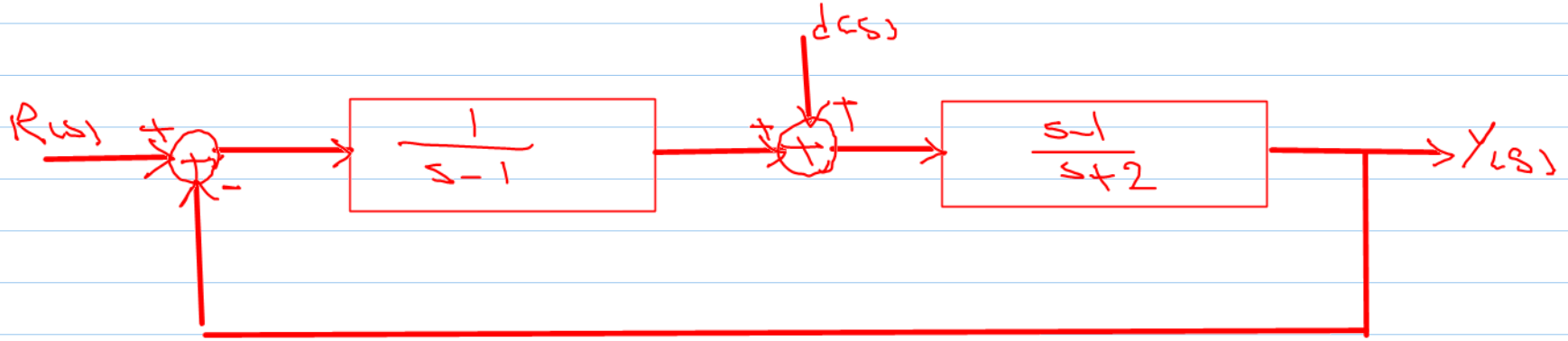
① پایدار مجانبی: اگر تمام قطبها از نوع پایدار باشند.

② پایدار مرزی: تمام قطبها از نوع پایدار یا نوسانی باشند.

③ ناپایدار: حداقل یک قطب از نوع ناپایدار داشته باشد.

مسئله ۷۱: سیستم حلقه بسته زیر چه نوع سیستمی است؟

۱) پایدار ۲) ناپایدار ۳) پایدارمرزی ۴) بستگی به ورودی $d(s)$ دارد.



نکته: پایداری سیستم یک مشخصه ذاتی است و ربطی به ورودی و خروجی سیستم ندارد.

Δ دیجیتال به ورودی او فزونی ندارد.

$\Delta_{cl}(s) = ?$

$$\Delta_{cl}(s) = 1 - \left(\frac{1}{s+1} \times \frac{s-1}{s+2} \times -1 \right)$$

سیستم ناپایدار $\longrightarrow$ ناپایداری $\longrightarrow$ حذف صفر و قطب سمت راست

$$\Delta_{cl}(s) = 1 + \frac{1}{s+2} = 0 \longrightarrow \frac{s+2+1}{s+2} = 0 \longrightarrow \boxed{s = -3}$$

قطب سیستم

قطب از نوع پایدار ستها حذف صفر و قطب سمت راست باعث ناپایداری می شود.

در عمل $\Delta(s)$ با معادله مشخصه دارای درجه بالاتر از 2 است.

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$\text{قطب}_1 = -1.5 \qquad \text{قطب}_2 = -\frac{1}{1.5}$$

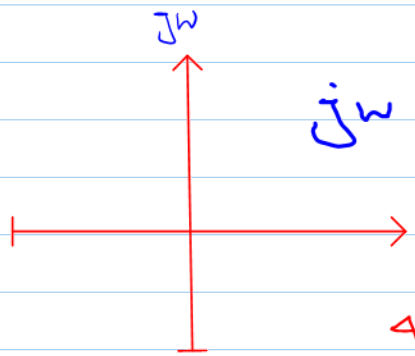
برای پایداری نیاز داریم فقط بدانیم که ریشه‌های $\Delta(s)$ سمت چپ

یا راست یا روی محور $j\omega$ هستند یا نه؟

حل حدودی ریشه‌های $\Delta(s)$ نسبت به محور $j\omega$

جدول روث - هورویتز RH

جدول R-H



هدف: تعیین محل سنبی ریشه‌های هر معادله نسبت به محور jw

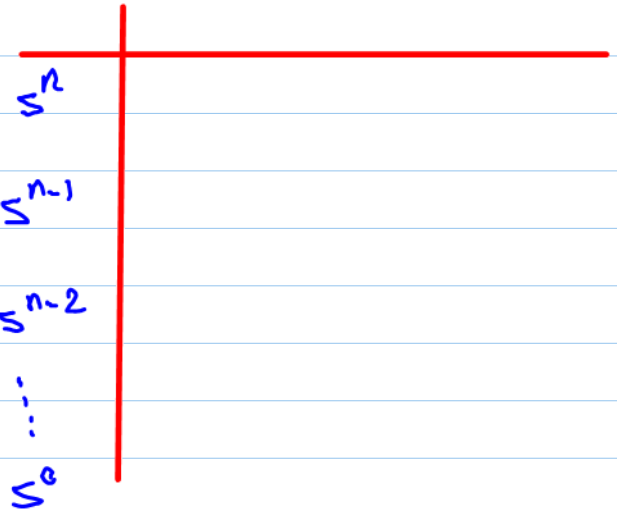
برای بحث پایداری معادله مشخصه

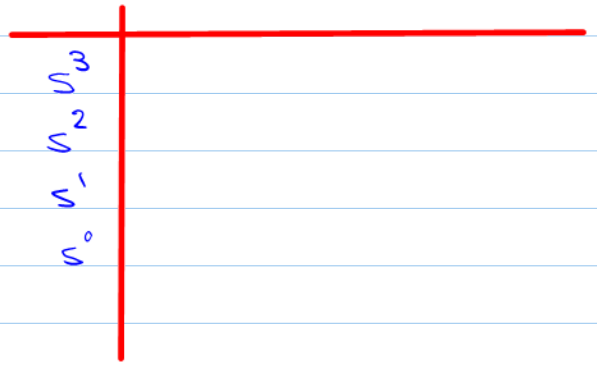
قطعا

نحوه تشکیل جدول R-H

① از بزرگترین توان s شروع کرده و در سطر اول تا توان صفر را بنویسید.

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 1 = 0$$





(2) دو سطر اول را با قاعده زیر از روی $\Delta(s)$ بنویسید.

در هر سطر، اگر توان s در آن سطر فرد است ضریب توان فرد s در معادله $\Delta(s)$ را به ترتیب در آن سطر بنویسید.

توج

توج

$$\Delta(s) = 1s^3 + 3s^2 - 2s^1 + 1s^0 = 0$$

s^3	1	-2
s^2	3	1
s^1		
s^0		

* اگر توانی در معادله وجود ندارد به جای آن 0 می‌گذاریم.

$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + s = 0$ $\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 0s^2 + 1s^1 + 0s^0 = 0$

s^4	1	0	0
s^3	2	1	0
s^2	-		
s^1			
s^0			

③ از سطر سوم به بعد درایه‌ها را با قانون زیر تکمیل کنید.

یک ماتریس 2x2 به صورت زیر تشکیل دهید.

$RH = \begin{bmatrix} \text{یک ستون بعد دو سطر بالا} & \vdots & \text{ستون اول دو سطر بالا} \end{bmatrix}$

درایه جدید $= -\dfrac{\det(RH)}{\text{درایه اول سطر بالا}}$

$\Delta(s) = 2s^3 + 3s^2 + s + 1s^0 = 0$

s^3	2	1	0
s^2	3	1	0
s^1	$+\frac{1}{3}$	0	
s^0	1		

$$RH = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$\det(RH) = 2\times 1 - 3\times 1 = -1$

$-\dfrac{(-1)}{3}$

$$RH = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

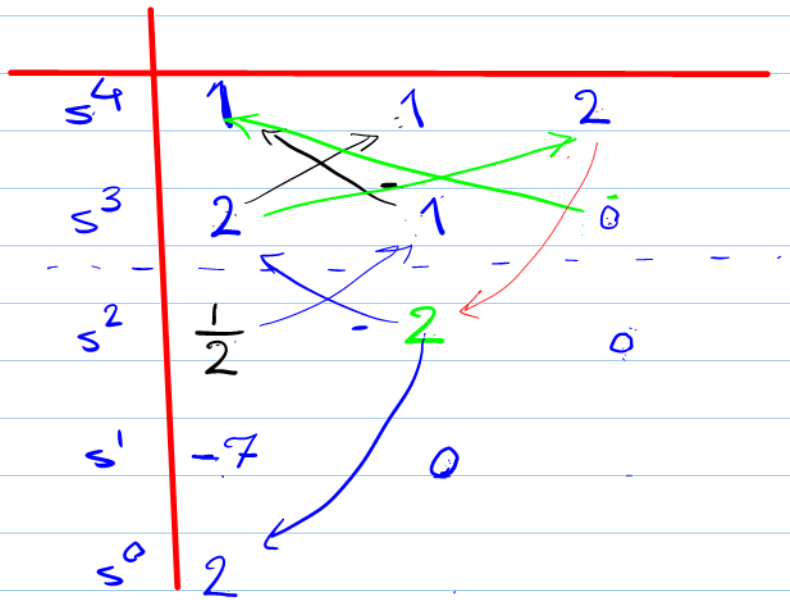
$\det(RH) = -\frac{1}{3}$

$-\dfrac{(-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}} = 1$

$$RH = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(RH) = 0$ $\quad -\dfrac{0}{3} = 0$

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + s + 2 = 0$$



① $RH = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(RH) = -1$

$$-\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

② $RH = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(RH) = -4$

$$-\frac{(-4)}{2} = 2$$

③ $RH = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 3.5 = \det(RH)$

$$-\frac{3.5}{\frac{1}{2}} = -7$$

④ $RH = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(RH) = +14$$

$$-\frac{14}{-7} = 2$$

شرایط پایداری R-H (شرط اینکه عادیت‌های $\Delta(s)$ سمت چپ محور نباشند)

① از بزرگترین توان s تا توان s^0 باید علامت‌ها مخالف صفر باشند وگرنه قطعاً $\Delta(s)$ دسته سمت راست یا روی محور نباشد.

② علامت‌ها در $\Delta(s)$ هم علامت باشند. (نه لزوماً مثبت) وگرنه قطعاً $\Delta(s)$ دسته سمت راست یا روی محور نباشد.

③ به تعداد تغییر علامت در ستون اول جدول R-H، $\Delta(s)$ ریشه سمت راست دارد.

مثال:

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + s = 0$$

$$1s^3 + 3s^2 + 1s^1 + 0s^0$$

$\Rightarrow$ قطعاً $\Delta(s)$ حداقل یک ریشه روی محور یا سمت راست محور نباشد دارد.

مثال: $\Delta(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + 1 = 0$ ✓① ×②

نکته: در تشکیل جدول R-H اگر بتوان با ضرب یک عدد مثبت در کل سطر، ساده سازی انجام داد، حتماً ساده کنید.

$\Delta(s) = 3s^3 + 6s^2 + 9s + 2 = 0$ ① ✓ ③ ✓

$6 \times 9 > 3 \times 2 \rightarrow$ ناپایدار ② ✓

	s^3	1	3
	s^2	3	1
	s^1	$\frac{7}{3}$	0
	s^0	1	

$\frac{1}{3}\times$	s^3	~~3~~ 1	~~9~~ 3
$\frac{1}{2}\times$	s^2	~~6~~ 3	~~2~~ 1
	s^1		
	s^0		

چون یکبار علامت تغییر یافته دو ریشه سمت راست دارد. هر ریشه یک تغییر

نکته: شرط پایداری معادله درجه 2، هم‌علامت بودن، عاکم مزایب است.

$\Delta(s) = as^2 + bs + c$ → a, b, c هم علامت وجود

نکته: شرط پایداری معادله درجه 3، در صورت موجود و هم علامت بودن، عاکم مزایب

$\Delta(s) = as^3 + bs^2 + cs + d = 0$

پایدار → $bc > ad$

ناپایدار → $bc < ad$

توسانی → $bc = ad$

مثال ۱۰: در صورتی که معادله مشخصه یک سیستم به صورت زیر باشد، سیستم کاملاً پایدار است اگر:

$\Delta(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2ks + 4 = 0$

1) $k < 8$ 2) $k > 2$ 3) $3 < k < 9$ 4) $2 < k < 8$

حل دانشجو:

قطبها = ریشه های $\Delta(s)$ $\rightarrow$ $\Delta(s) = 1s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2ks + 4 = 0$

پایدار $\leftarrow$ قطبها عاماً سمت چپ محور $j\omega$ $\leftarrow$

① ✓

② $2k > 0$ ✓

③ $\leftarrow$ درستون اول نبیند علامت نداشته باشیم ✓

$k > 0$

برای پایداری حتماً باید $k > 0$ باشد.

s^4	$1+$	5	4
s^3	$4+$	$2k$	0
s^2	$\frac{20-2k}{4} = \frac{10-k}{2}$	4	0
s^1	$\frac{10k-k^2-16}{\frac{10-k}{2}}$	0	
s^0	$4+$		

برای برآورده شدن شرط سوم

باید $\frac{10-k}{2} > 0$ و

$\frac{10k-k^2-16}{\frac{10-k}{2}} > 0$ باشد.

$\frac{10-k}{2} > 0 \rightarrow$ **$k < 10$**

$2 < k < 8$

شرط‌های پایداری

$k > 0$

$k < 10$

$2 < k < 8$

اشتراک شرط‌ها

$2 < k < 8$

$\frac{10k-k^2-16}{\text{عدد مثبت}} > 0 \rightarrow$ $-k^2+10k-16 > 0$ $-(k-2)(k-8) > 0$

$(k-2)(k-8) < 0$

	2		8	
$k-2$	$-$	0	$+$	$+$
$k-8$	$-$	$\|$	$-$	0 $+$
$(k-2)(k-8)$	$+$	$\|$	$-$	$+$

برق ۸۱.

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی عبارت است از:

$$G(s) = \frac{k(T_1 s+1)}{s^2(T_2 s+1)}$$

مربوط به پایداری سیستم حلقه بسته کدام عبارت درست است؟

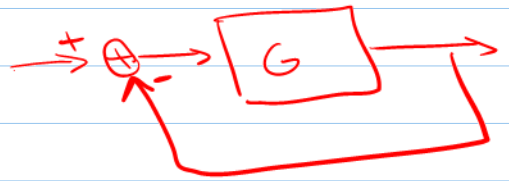
1) تنها شرط پایداری $0 < T_2 < T_1$ است.

2) ~ ~ ~ ~ ~ و $k>0$ است.

3) برای $k>0$ پایدار است.

4) تنها شرط پایداری سیستم $T_2 > 0$ ، $kT_1 > 0$ و $k>0$ است.

$$G(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)}$$



$$\Delta(s) = 1 - (-G(s)) = 1 + G(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(T_1 s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)} = 0 \rightarrow \frac{s^2(T_2 s + 1) + k(T_1 s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)} = 0$$

$$\Delta(s) = T_2 s^3 + 1 s^2 + k T_1 s + k = 0$$

① $T_2, T_1, k \neq 0$ ② $T_2 > 0$ $kT_1 > 0$ $k > 0$

③ $1 \times kT_1 > T_2 \times k \rightarrow$

$T_2 > 0, \; k > 0 \quad T_1 > 0 \quad T_1 > T_2$

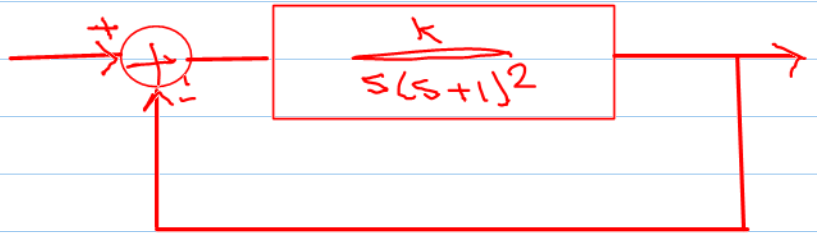
مکانیک ۸۱. در سیستم زیر یکی از قطبهای حلقه بسته در -4 قرار دارد. کدام عبارت در مورد پایداری این سیستم صحیح است؟

۱) سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

۲) سیستم حلقه بسته پایدار است.

۳) سیستم حلقه بسته در مرز پایداری است.

۴) چون مقدار k داده نشده، نمی‌توان اظهار نظر کرد.



قطب‌های حلقه بسته ← ریشه‌های $\Delta(s)$:

$s=-4$ قطب حلقه بسته ← $s=-4$ ریشه $\Delta(s)$ ← $\Delta(-4)=0$

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{s(s+1)^2}=0 \rightarrow \Delta(s)=\frac{s(s+1)^2+k}{s(s+1)^2}=0$$

$$\Delta(s)=s(s+1)^2+k=0 \qquad \Delta(-4)=-4(-4+1)^2+k=0 \rightarrow k=36$$

$$\Delta(s)=s(s+1)^2+36=0 \rightarrow \Delta(s)=s^3+2s^2+s+36=0$$

① ✓ ② ✓ ③ $2\times1 < 36\times1 \rightarrow$ ناپایدار

↓

گزینه ۱

برای ۸۴ . شرط پایداری سیستم کنترلی که با نمودار گذر سیگنال زیر معرفی شده، کدام گزینه است؟

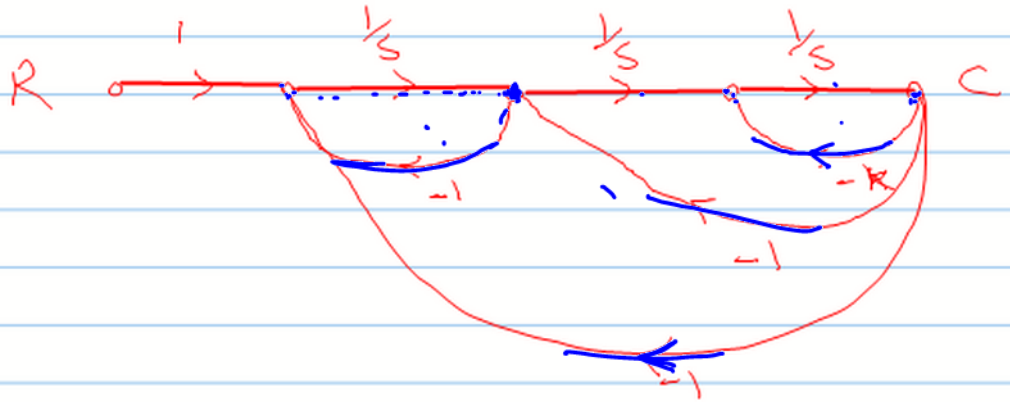


1) $K>0$

2) $K<-1$

3) $|K|>-1$

4) $0<K<1$



پایداری حلقه بسته ← دیتر های $\Delta(s)$

سمت چپ خود لاز باشد.

$\Delta = 1 - (\text{جمع حلقه‌ها}) + \sum$ جمع حلقه‌های دو مستقل $- \sum$ جمع حلقه‌های سه مستقل

$L_1 = -1 \times \frac{1}{s}$ $\quad L_2 = -k \times \frac{1}{s}$ $\quad L_3 = -1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}$

$L_4 = -1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}$ $\quad$ L_1 و L_2 مستقل

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{1}{s} - \frac{k}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right) + \left(-\frac{1}{s} \times -\frac{k}{s}\right)$$

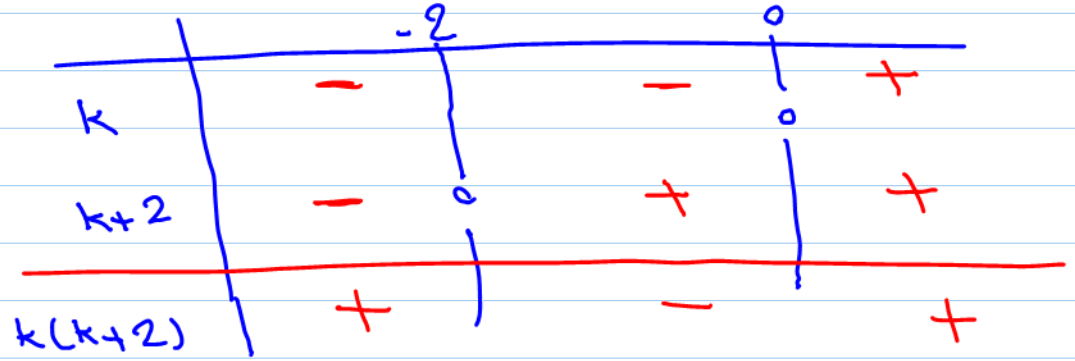
$$\Delta(s) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{k}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{k}{s^2} = 0$$

$$\Delta(s) = 1s^3 + (k+1)s^2 + (k+1)s + 1 = 0$$

① $k+1 \neq 0$ ② $k+1 > 0$ } ⟶ ①,② ⟶ $\boxed{k > -1}$

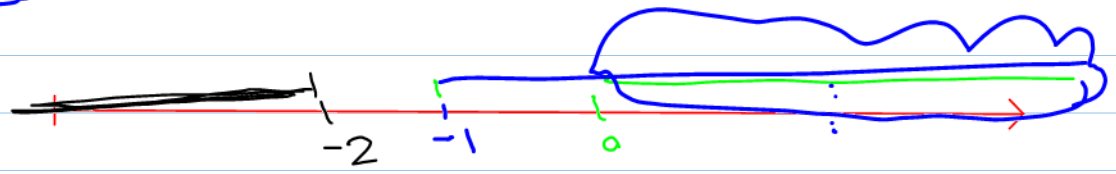
③ $(k+1)(k+1) > 1 \times 1 \rightarrow k^2 + 2k + 1 > 1 \rightarrow k^2 + 2k > 0$

$k(k+2) > 0$



$k < -2$ ∪ $k > 0$ ⟶ ③ ✓

- $k > -1$ ⟶ ①,② ✓
- $k > 0$ ③ ✓ ① ② ✓ ⟶ $\boxed{k > 0}$ ✓ ⟵ واخذ مثلي
- $k < -2$ ③ ✓ ① ✗ ② ✗ ⟶ ثانيا يدار



مکانیک ۸۴

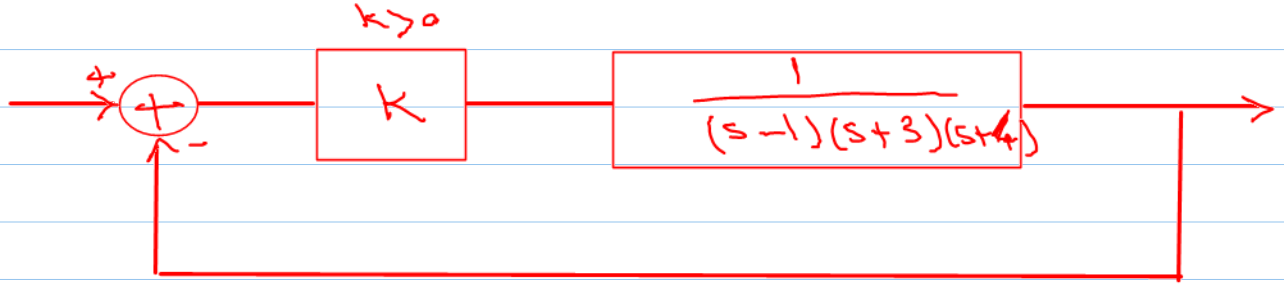
در سیستم زیر، سیستم حلقه باز یک قطب ناپایدار دارد. در مورد پایداری سیستم حلقه بسته کدام گزینه درست است؟

1) $12 < k < 42$ پایدار

2) به ازای $k < 30$ سیستم حلقه بسته همواره پایدار است.

3) چون سیستم مدار باز ناپایدار است، سیستم مدار بسته به ازای هیچ مقادیر $k > 0$ ناپایدار است.

4) اگرچه سیستم مدار باز ناپایدار است، ولی سیستم مدار بسته به ازای همه مقادیر $k > 0$ پایدار است.



* هدف از حلقه کنترلی ← پایدارسازی سیستم حلقه بسته
پایداری حلقه باز و حلقه بسته مستقل از یکدیگر هستند.

$$\Delta(s) = 1 - \left(-1 \times K \times \frac{1}{(s-1)(s+3)(s+4)} \right) = 0$$

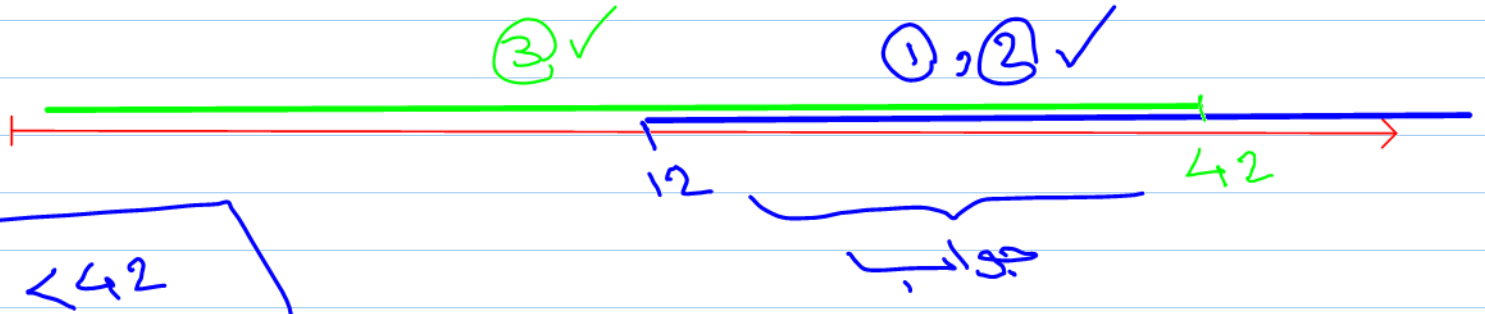
$$\Delta(s) = 1 + \frac{K}{(s-1)(s+3)(s+4)} = 0 \rightarrow \Delta(s) = (s-1)(s+3)(s+4) + K = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 5s - 12 + K = 0$$

$$\Delta(s) = 1s^3 + 6s^2 + 5s + (K-12)s^0 = 0$$

① $K \neq 12$ ② $K > 12$ ③ $6 \times 5 > 1 \times (K-12) \rightarrow K < 42$

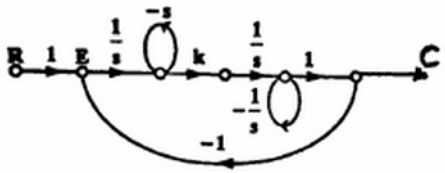
$K > 12$



$12 < K < 42$

برق ۹۵

۱- در سیستمی با نمودار گذر سیگنال زیر (SFG) و با توجه به تابع انتقال $\frac{E(s)}{R(s)}$ کدام گزینه صحیح است؟

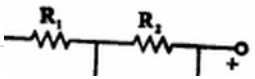


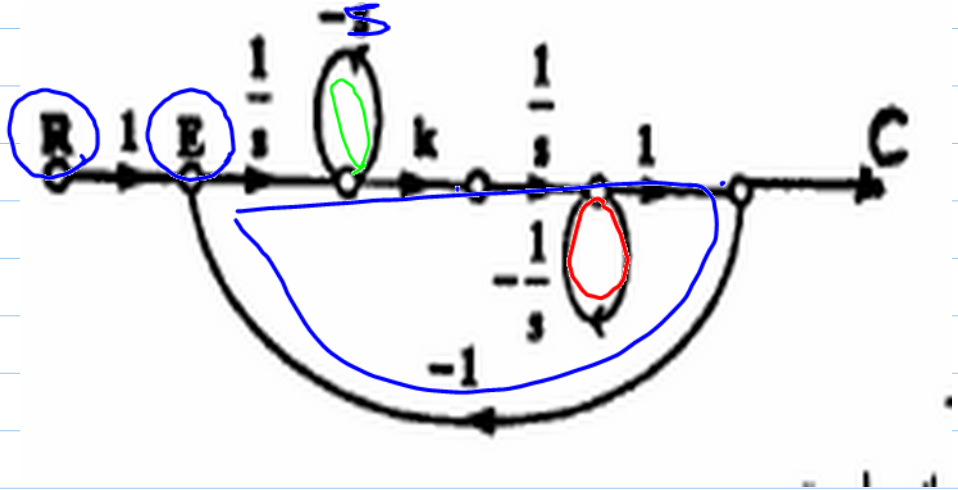
۱) به ازای $0 < k < 2$ خطای $e(t)$ کراندار است.

۲) سیستم قطع نظر از اینکه خروجی آن کجا باشد، همواره ناپایدار است.

۳) به علت آنکه تابع انتقال صفری روی محور موهومی دارد، خروجی نوسانی است.

۴) به ازای $k = 2$ خطای $e(t)$ حاوی یک سیگنال سینوسی است که فرکانس زاویه‌ای آن $\sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه است.





۱) $0 < k < 2$ ← قطعاً $\frac{E}{R}$ پایدار

۲) سیستم ناپایدار ← $\Delta(s)$ ناپایدار

۳) ~~$\frac{E}{R}$ ← صفر دوم ← خروجی نوسانی~~

۴) $k=2$ ← $\frac{E}{R}$ نوسانی ← یک جفت قطب دوم محور $j\omega$ (غیر تکراری) و بقیه قطعاً سمت چپ محور $j\omega$

$\Delta(s)$ ← دنباله دوری و خروجی ندارد.

$$\frac{E}{R} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta(s)}$$

$L_1 = -5$ $\quad L_2 = -\frac{1}{5}$

$L_3 = \frac{1}{5} \times k \times \frac{1}{5} \times 1 \times -1$

$L_1 = -5$ $\quad L_2 = \frac{1}{5}$ $\quad L_3 = -\frac{k}{5^2}$ $\quad L_1, L_2$ مستقل

$\Delta(s) = 1 - \left(-5 - \frac{1}{5} - \frac{k}{5^2}\right) + (-1)\left(-\frac{1}{5}\right)$

$$\Delta(s) = 1 + s + \frac{1}{s} + \frac{k}{s^2} + \frac{1}{s} = 1 + s + \frac{2}{s} + \frac{k}{s^2} = 0$$

$$\Delta(s) = 1s^3 + 1s^2 + 2s + k = 0$$

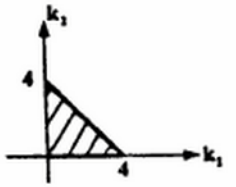
① $k \neq 0$ ② $k > 0$ ③ $1 \times 2 > 1 \times k \rightarrow k < 2$

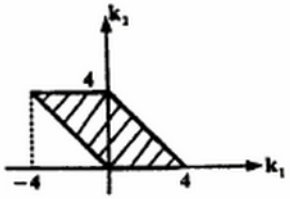
$0 < k < 2 \rightarrow$ $\Delta(s)$ پایدار

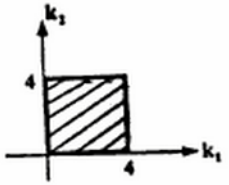
$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta(s)} \rightarrow$ پایدار $\rightarrow$ $e(t)$ کراندار

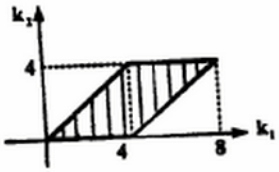
برق ۸۵

۷- در یک سیستم با پس‌خور منفی واحد با $G(s)=\frac{k_1}{s^3+2s^2+2s+k_2}$ ناحیه‌ای که هم سیستم حلقه باز و هم سیستم حلقه بسته پایدار هستند کدام است؟

۱)


۲) ✓


۳)


۴)




مقادیری از k_1 و k_2 که حلقه $G(s)$ و خروج $G(s)$ حلقه بسته پایدار است؟

$s^3+2s^2+2s+k_2=0$ معادله مشخصه

۱) شرط پایداری $G(s)$ ← دیتیل های

① $k_2\neq 0$ ② $k_2>0$ ③ $2\times 2>1\times k_2 \rightarrow k_2<4$

$0<k_2<4$

بازای $0<k_2<4$ سیستم حلقه باز $G(s)$ پایدار است.

2) شرط پایداری حلقه بسته ← دیتیل های $\Delta(s)$ ← معادله

$\Delta(s)=1-(-G(s))=0 \rightarrow \Delta(s)=1+\frac{k_1}{s^3+2s^2+2s+k_2}=0$

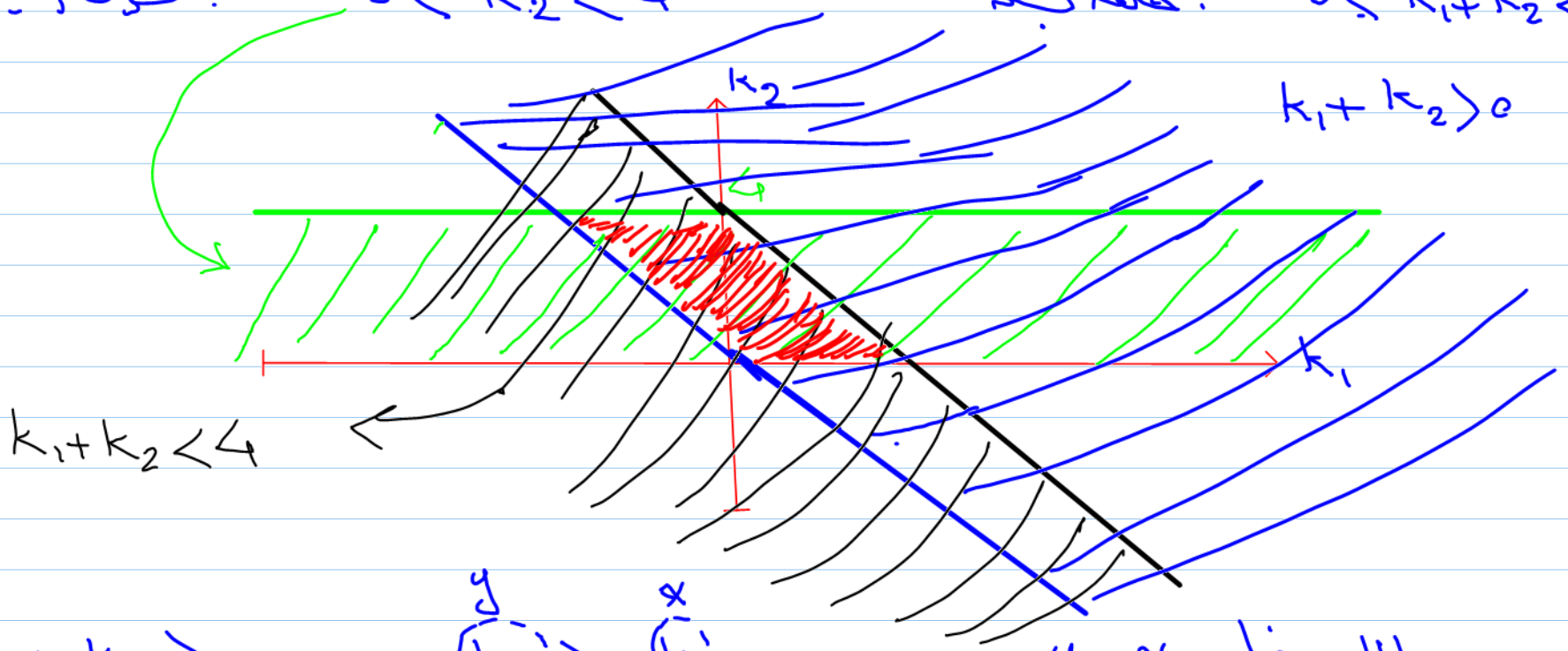
$\Delta(s)=s^3+2s^2+2s+(k_2+k_1)=0$

① $k_2+k_1\neq 0$ ② $k_2+k_1>0$ ③ $2\times 2>1\times(k_1+k_2)$

$$0 < k_1 + k_2 < 4$$

ناحیه بی: $0 < k_1 + k_2 < 4$

شرط پایداری ناحیه بالا: $0 < k_2 < 4$



$k_1 + k_2 > 0 \rightarrow (k_2 > -k_1) \rightarrow y = -x$ خط بالای

$k_1 + k_2 < 4 \quad (k_2 < 4 - k_1) \quad y = -x + 4$ خط پایین

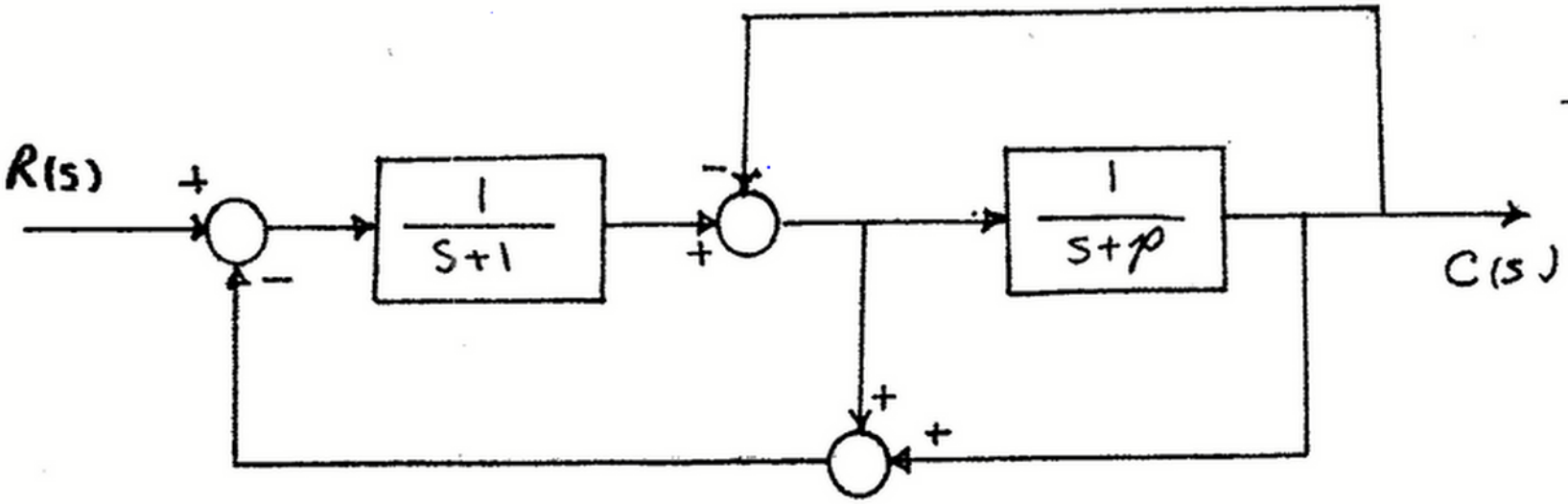
در سیستم شکل مقابل حدود p متناظر یک سیستم پایدار برابر است با:

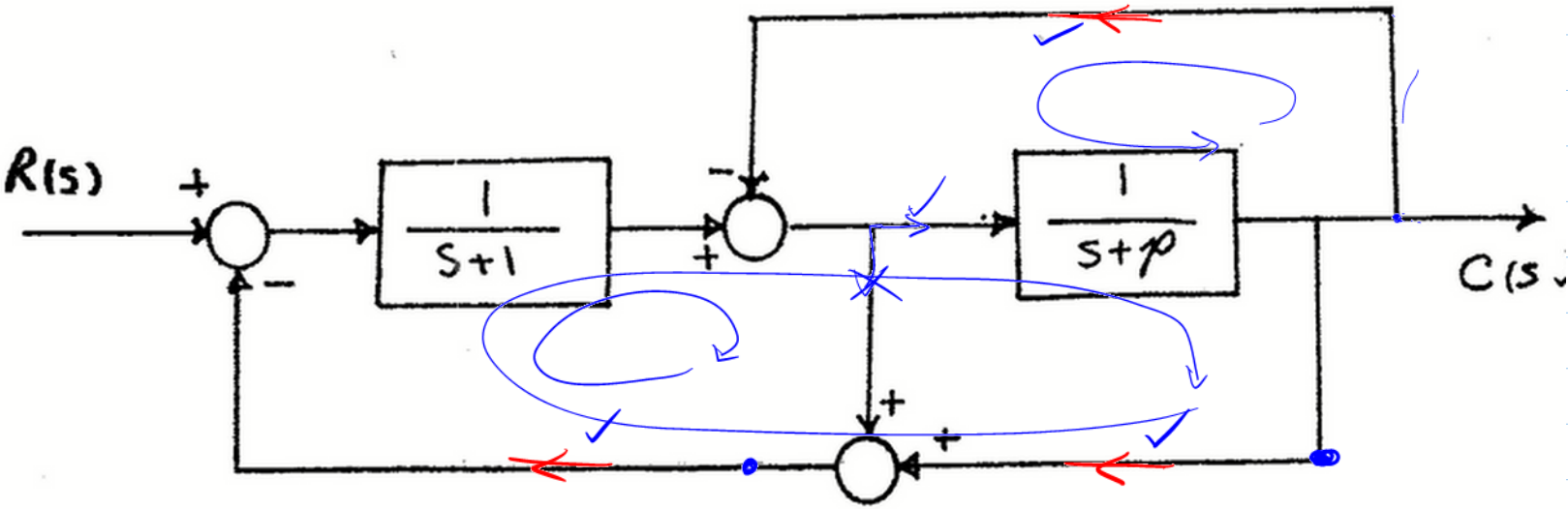
۱) $p > 0$

۲) $p > -1$

۳) $-3 < p < -1$

۴) $-3 < p < 1$





پایداری ← تعیین سیستم حلقه بسته ← ریشه های Δ

$$L_1 = -1 \times \frac{1}{s+p} \qquad L_2 = -\frac{1}{s+1} \qquad L_3 = -\frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s+p}$$

$$\Delta = 1 - \left(\frac{-1}{s+1} - \frac{1}{s+p} - \frac{1}{(s+1)(s+p)} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+p} + \frac{1}{(s+1)(s+p)} = 0$$

$$\frac{(s+1)(s+p) + s+p + s+1 + 1}{(s+1)(s+p)} = 0$$

$\Delta = 0 \rightarrow (s+1)(s+p) + s+p+s+1+1 = 0 \times (s+1)(s+p) = 0$

$$s^2 + (p+1)s + p + 2s + p + 2 = 0$$

$$\Delta \rightarrow 1s^2 + (p+3)s + 2p + 2 = 0$$

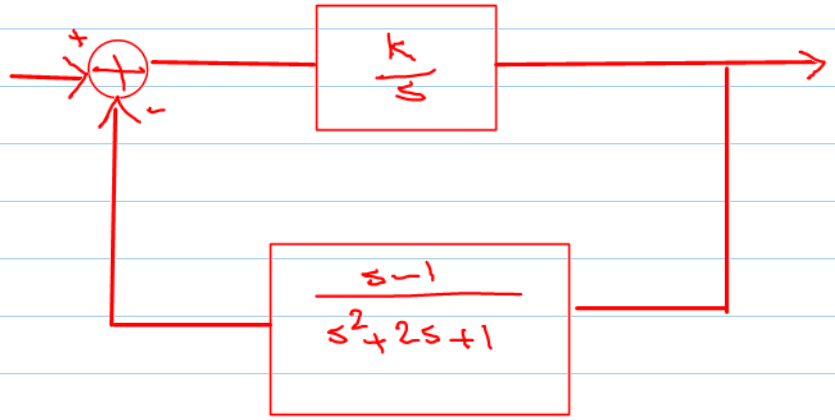
① ✓ ② $\begin{cases} p+3 > 0 \checkmark \rightarrow p > -3 \\ 2p+2 > 0 \rightarrow p > -1 \end{cases}$ ✓

$\rightarrow p > -1 > -3$

$p > -1 \rightarrow$ پایدار

سوال ۹۳.

به ازای کدام مقادیر k ، سیستم زیر پایدار است؟

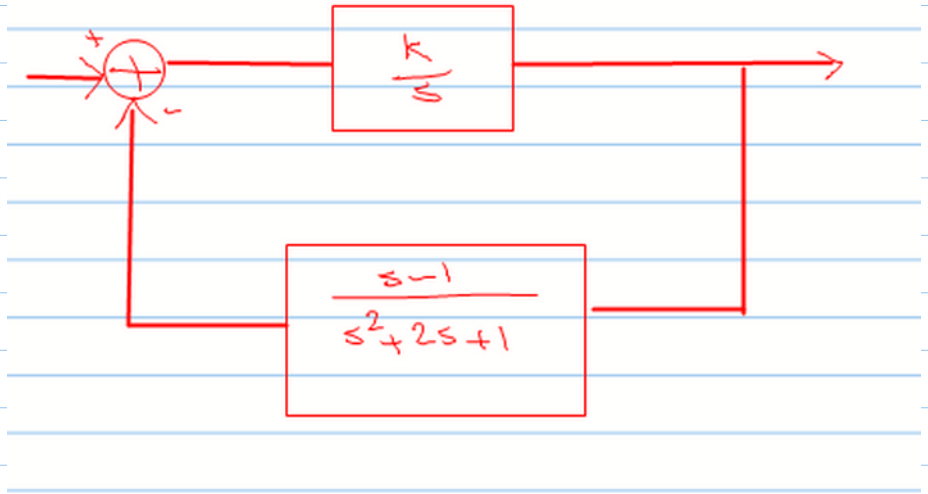


1) $-\frac{4}{3} < k < 0$

2) $-\frac{1}{3} < k < 0$

3) $-\frac{5}{3} < k < 0$

4) $-\frac{2}{3} < k < 0$



$\Delta(s) \rightarrow$ ریشه های $\Delta(s)=0$ ستاب

قوار ناپ

$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{K}{S} \frac{S-1}{S^2+2S+1} \times -1 \right) = 0$$

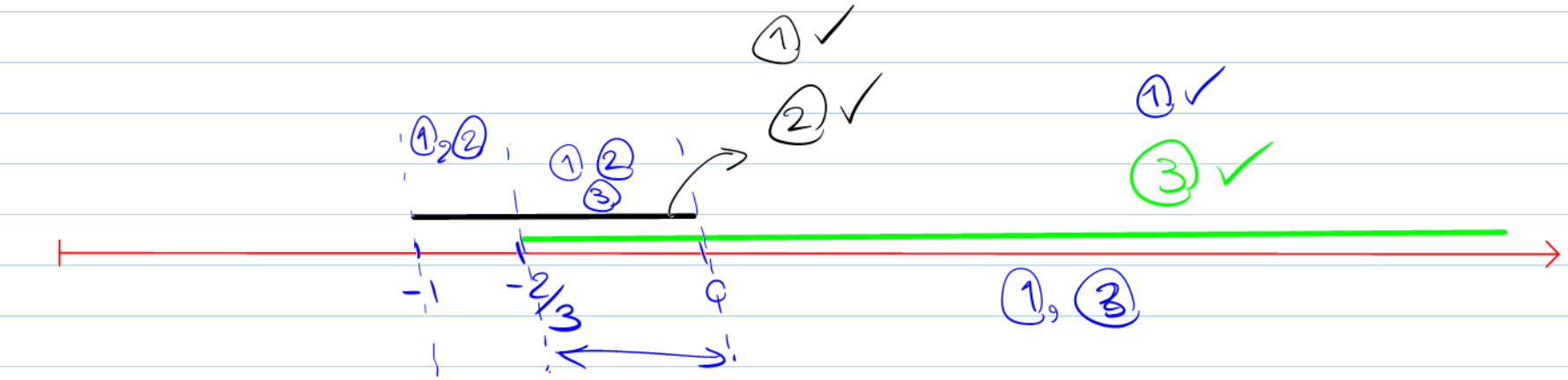
$$= 1 + \frac{K(S-1)}{S(S+1)^2} = 0 \rightarrow \frac{S(S+1)^2 + K(S-1)}{S(S+1)^2} = 0$$

$$\Delta(s) = S(S+1)^2 + K(S-1) = 0 \times S(S+1)^2 = 0$$

$$\Delta(s) = 1S^3 + 2S^2 + (1+K)S - K = 0$$

① ✓ ② $\begin{cases} 1+K>0 \\ -K>0 \end{cases}$ ③ $2(1+K) > 1 \times (-K)$

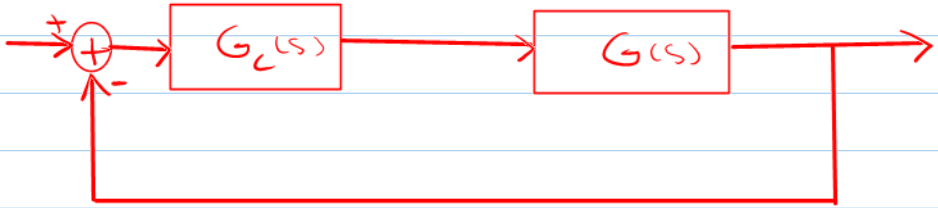
② $\rightarrow \begin{cases} K>-1 \\ K<0 \end{cases} \rightarrow -1<K<0$ ✓ ③ $3K>-2 \rightarrow K>-2/3$



$-\frac{2}{3} < k < 0$ → هر سه شرط درست → پایدار

مکانیک ۹۳. سیستم حلقه بسته زیر در چه صورت پایدار است؟

$$G(s) = \frac{1}{(s-a)(s+b)} \qquad G_c(s) = k(s+c) \qquad a,b,c,k>0$$



1) $k > \max\{a-b, \frac{ab}{c}\}$ ✓

2) $k > \min\{a-b, \frac{ab}{c}\}$

3) $k < \min\{a-b, \frac{ab}{c}\}$

4) $k < \max\{a-b, \frac{ab}{c}\}$

$G(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s+b)}$ $\quad G_c(s) = k(s+c)$ $\quad a,b,c,k>0$



$\Delta(s) = 0 \rightarrow$ پایدار

$$\Delta(s) = 1 - (G_c(s)\,G(s)_{\times -1}) = 0$$

$$= 1 + \frac{k(s+c)}{(s-a)(s+b)} = 0 \rightarrow \Delta(s) = (s-a)(s+b) + k(s+c) = 0$$

$$\Delta(s) = 1s^2 + (b-a+k)s^1 + kc - ba = 0$$

$$\begin{cases} b-a+k>0 \rightarrow k > a-b \\ kc-ba>0 \rightarrow k > \dfrac{ba}{c} \end{cases} \rightarrow k > \max\left\{a-b, \frac{bc}{a}\right\} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} k > 2 \checkmark \\ \\ k > 3 \checkmark \end{cases} \longrightarrow \boxed{k > 3}$$

جلسه ۱۴ کنترل خطی

پایداری

حالتهای خاص در هنگام تشکیل جدول R-H

① در ابتدا اول یک سطر صفر شود ولی کل سطر صفر نباشد.

② کل سطر صفر شود.

حالت ① ←

$$\Delta(s) = s^4 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

s^4	1	1	1
s^3	0	2	0
s^2	$\frac{-2}{0}$		
s^1			
s^0			

$\frac{-2}{0}$ علامت

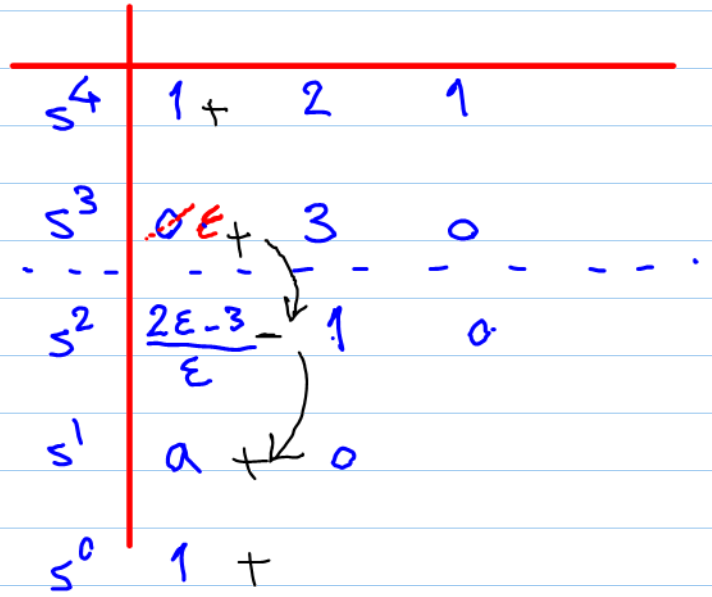
روش حل حالت خاص ①

① روش ع ② روش $\frac{1}{s}$

روش ع ← وقتی در ابتدا اول یک سطر غیرصفر، صفر شد به جای ه، ع گذاشته و جدول را کامل کنید. پس از تکمیل جدول، به جای ع، e^{+} گذاشته و ستون اول را بین علامت کنید.

روش $\frac{1}{s}$ ه در $\frac{1}{s}$ ضرب شد به جای $\frac{1}{s}$ گذاشته و جدول را با $\delta(\frac{1}{s})$ بنویسید.

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^2 + 3s + 1 = 0$$



$$a = \frac{3 \times \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} - 1 \times \varepsilon}{\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}}$$

دستون اول 2 تغییر علامت = 2 ریشه ناپایدار

$\varepsilon = 0^+$

$$\frac{2 \times 0^+ - 3}{0^+} = \frac{-3}{0^+} < 0$$

$$a = \frac{6\varepsilon - 9 - \varepsilon^2}{2\varepsilon - 3}$$

$$a = \frac{6 \times 0^+ - 9 - 0^{+2}}{2 \times 0^+ - 3} \simeq \frac{-9}{-3} > 0$$

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^2 + 3s + 1 = 0$$

$$\Delta\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{s}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{s}\right) + 1 = 0 \rightarrow \Delta\left(\frac{1}{s}\right) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 1 = 0$$

s^4	1	2	1
s^3	0	3	0
s^2			
s^1			
s^0			

s^4	1 +	2	1
s^3	3+	0	0
s^2	2+	1	0
s^1	$-3/2^-$	0	
s^0	1+		

2 تا تغییر علامت ← 2 ناریشه مثبت داریم $\Delta(s)$

$s = -2$ $\qquad \frac{1}{s} = \frac{-1}{2}$

$s > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{s} > 0$

$s < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{s} < 0$

از نظر ثبات یا ناپایداری هر دو $\Delta(s)$ و $\Delta\left(\frac{1}{s}\right)$ فرقی ندارند.

کی از روش ع استفاده کنیم و کی از $\frac{1}{s}$ ؟

هرگاه در دو سطر اول جدول R-H به صفر اول ه رسیدید، بهتر است از $\frac{1}{s}$ استفاده کنید ولی اگر در غیر از دو سطر اول بود از ع استفاده کنیم سریعتر است.

مثال: آزاد ۸۷.

$$s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 5s + 4 = 0$$

تعداد قطبهای حلقه بسته سمت چپ محور jw کدام است؟

1) 2 2) 4 3) 3 4) 5

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 5s + 4 = 0$$

s^5	1 +	2	5
s^4	~~2~~ 1 +	~~4~~ 2	~~4~~ 2
s^3	0ε +	3	0
s^2	$\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$ −	2	
s^1	a +	0	
s^0	2 +		

$\frac{1}{2}\times$

$$a = \frac{3\times\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} - 2\varepsilon}{\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}}$$

$\varepsilon = 0^+$

$\Delta(s)$ 2 تا ریشه سمت راست دارد. کلاً 5 تا ریشه دارد ←

3 تا ریشه در سمت چپ محور $j\omega$

حالت خاص دوم: وجود یک سطر کاملاً صفر

در این حالت، از سطر بالایی معادله کمکی را تشکیل می‌دهیم و مشتق معادله کمکی را به جای سطر صفر می‌نویسیم.

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$$

s^4	1	3	2
$\frac{1}{3} \times s^3$	3	3	0
$\frac{1}{2} \times s^2$	2	2	0
s^1	0	0	
s^0	1		

معادله کمکی: $1s^2 + 1s^0 = 0$

$2s = 0$

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0$$

s^3	1	2
s^2	3	6
s^1	0	0
s^0	6	

المعادلة المساعدة: $3s^2 + 6s^0 = 0$

مشتق $6s = 0$

$$\Delta(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 2 = 0$$

s^5	1	2	2
s^4	1	2	2
s^3	0	0	0
s^2	1	2	0
s^1	-1	0	
s^0	2		

$\frac{1}{4} \times$

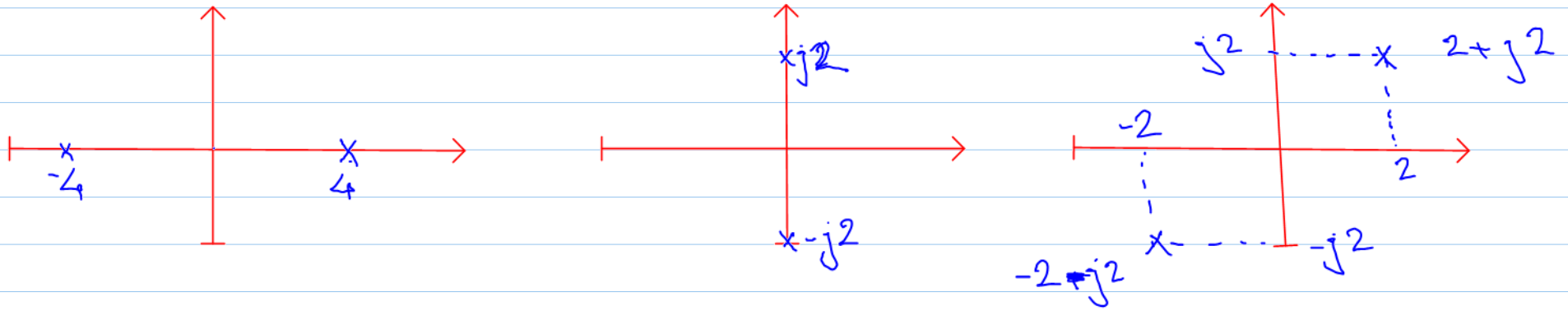
المعادلة المساعدة: $1s^4 + 2s^2 + 2s^0 = 0$

مشتق $4s^3 + 4s = 0$

کنترل جلسه ۱۷

تحلیل جدول R-H در حالت خاص دوم (وجود سطر تماماً صفر)

یادآوری: ریشه‌های متقارن نسبت به مبدأ



ریشه‌های متقارن

هردو روی محور σ

یکی سمت چپ و یکی سمت راست محور σ

نکات مهم:

1. وجود سطر کاملاً صفر به معنی وجود ریشه‌های مختلط در این ریشه‌های $\Delta(s)$ است.

2. توان s در سطر کاملاً صفر + 1 = تعداد ریشه‌های مختلط

3. ریشه‌های مختلط $\Delta(s)$ همان ریشه‌های معادله کمکی (فاکتور زوج) است.

ریشه‌های $\Delta(s)$ ← مختلط ← معادله کمکی $A(s^2)$

ناپایدار ← $Q(s)$

$$\Delta(s) = A(s^2) \times Q(s)$$

4. تعداد ریشه‌های مختلط زوج است.

سطر کاملاً صفر فقط در سطرهایی با توان فرد s می‌تواند اتفاق افتد.

$$\Delta(s) = 2s^3 + 2s^2 + 3s + 3 = 0$$

s^3	2	3
s^2	2	3
s^1	ε	0
s^0	3	

$$A(s^2) = 2s^2 + 3s^0$$
$$A(s^2) = 2s^2 + 3$$
$$\frac{dA}{ds} = 4s$$

$2s^2 + 3 = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{3}{2}$

$s = \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\Delta(s)$ دارای دو ریشه‌ی موهومی است.

$\Delta(s)$ دارای 2 ناریشه متقارن است.

ریشه‌های متقارن $\pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$ هستند.

$$\Delta(s) = 2s^3 + 2s^2 + 3s + 3 = 0$$

$$\Delta(s) = (2s^2+3)(\ Q(s)\ ) = 2s^3+2s^2+3s+3$$

$Q(s)$: درجه ۱ $\qquad Q(s) = s+a = s+1$

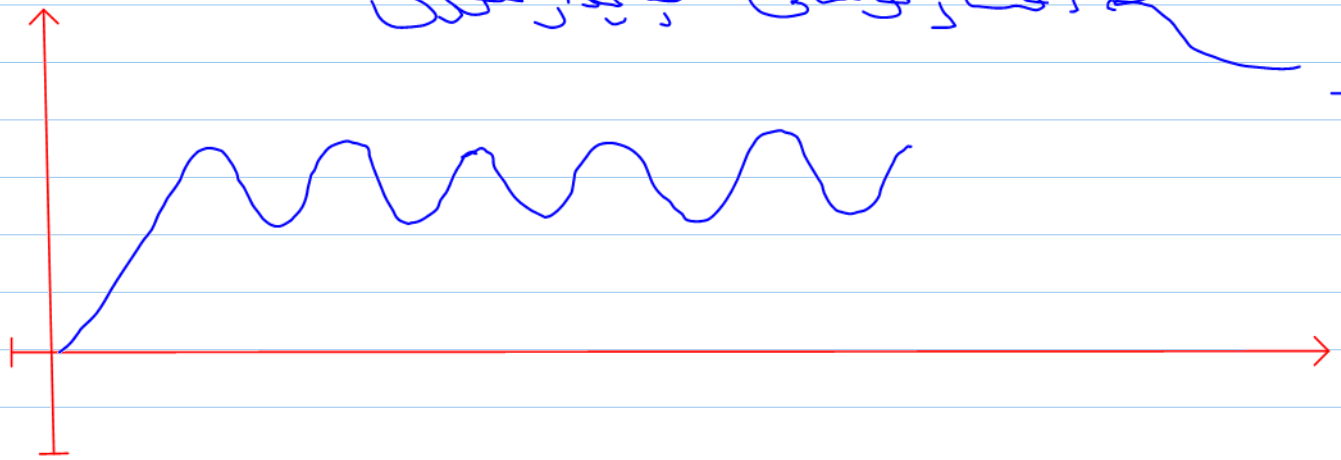
$$2s^3 + 2as^2 + 3s + 3a = 2s^3 + 2s^2 + 3s + 3$$

$2 \rightarrow a = 1$

$\Delta(s)$:
- $\pm j\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow$ نوسانی
- $-1 \rightarrow$ پایدار

ریشه‌ها: نوسانی، پایدار

مقدار نوسانی = پایدار سنگ



⑤ اگر سطر کاملاً صفر داشته باشیم سیستم قطعاً ناپایدار است.

برای ۷۸. معادله $s^8+3s^7+5s^6+9s^5+9s^4+9s^3+7s^2+3s+2=0$ چند جفت ریشه

روی محور موهومی دارد؟ 1 2 3 هیچ ریشه

$$\Delta(s) = s^8 + 3s^7 + 5s^6 + 9s^5 + 9s^4 + 9s^3 + 7s^2 + 3s + 2 = 0$$

	s^8	1	5	9	7	2
$\frac{1}{3}\times$	s^7	3	9	9	3	0
		10	3	3	1	
$\frac{1}{2}\times$	s^6	2	6	6	2	
		1	3	3	1	
	s^5	0	0	0		
	s^4					
	s^3					
	s^2					
	s^1					
	s^0					

$$A(s^2) = s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1 = 0$$

$$A(s^2) = (s^2+1)^3 = 0$$

→ ۶ تا ریشه مشترکن

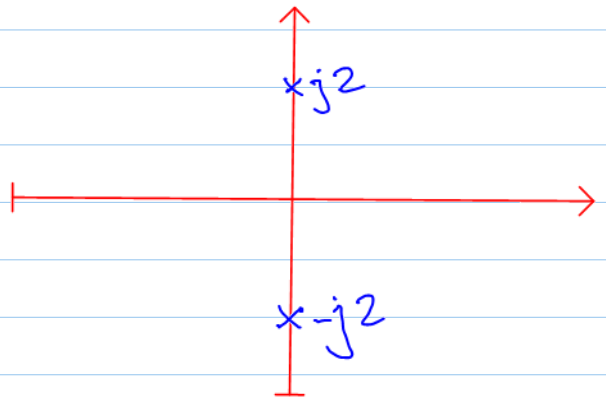
تعداد ریشه‌های روی محور $j\omega$ ← حقاً جزء ریشه‌های مشترکن است.

↓

ریشه‌های مشترک را پیدا کنیم

ریشه های روی محور jω حتماً متقارن هستند.

$$s^2 + a^2 = 0 \rightarrow s = \pm j\sqrt{a^2}$$



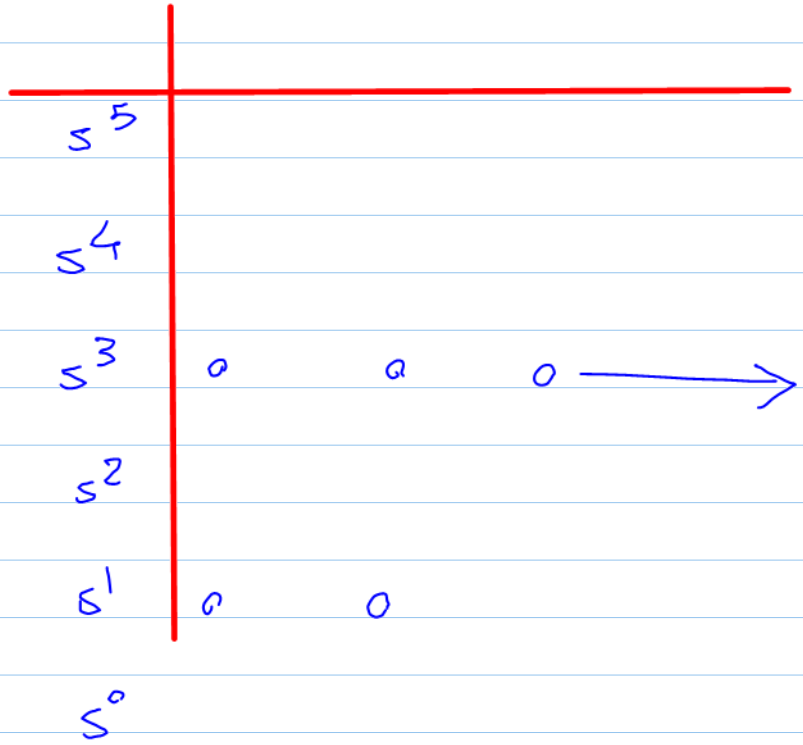
ولی ریشه های متقارن حتماً روی محور jω نیستند (می توانند بصورت

$D(s)$ ، کوادرانت متقارن دارد.

هر کوادرانت روی محور jω هستند.

$$(s^2+1)^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} s = j, j, j \\ s = -j, -j, -j \end{cases}$$

⑥ ریشه های مخرج به تعداد سرهای تماماً صفر تکراری شود.

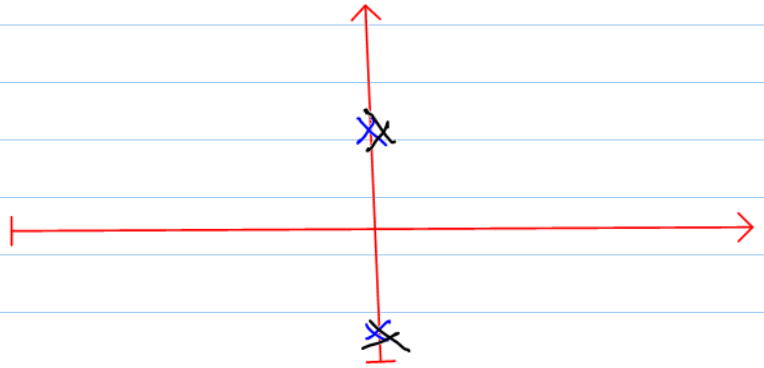


سطر تماماً صفر دوم، دو ریشه مخرج جدید اضافه می‌کند.

۴ ریشه مخرج

سطر تماماً صفر بعدی باعث تکراری شدن ریشه های مخرج می‌شود.

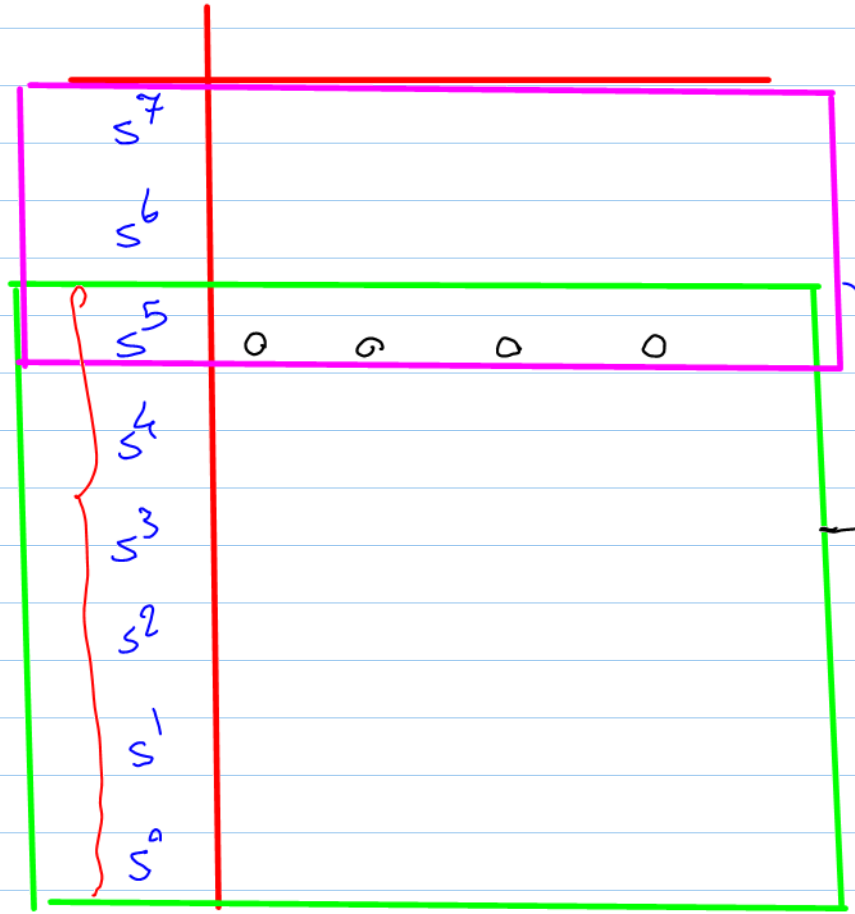
2 جفت ریشه مخرج تکراری داریم.



⑥ اگر سطر عاماً صفر بیشتر از یکی باشد سیستم قطعاً ناپایدار است.

⑦ تعداد ریشه های سمت راست محور jω

جدول به دو بخش متقارن و نامتقارن تقسیم می شود.



تعداد ریشه های متقارن سمت راست یا بر با تعداد تغییر علامت بعد از سطر عاماً صفر

جدول R-H بخش نامتقارن

جدول R-H بخش متقارن

مقدار ریشه معادله $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ به روش تقریب علامت در ستون اول جدول کنید مقادیر

" نامقادیر

(8) اگر سیستم نرمافزار باشد و کاستن نرمافزار برابر با ریشه‌های معادله کلی است

کدوی هوا ساخت جاستند.

تست ۷۵. تابع تبدیل حلقه‌باز سیستمی با فیدبک واحد به صورت $G(s) = \frac{as+6}{s^2(s^2+3s+3)}$ است. کدام گزینه درست است؟

1) سیستم حلقه‌بسته به‌ازای $6 < a < 9$ پایدار و برای $a = 6$ ناپایدار است.

2) ~ ~ ~ $a < 6$ ~ و ~ ~ ~

3) ~ ~ ~ ~ $6 < a < 9$ پایدار و برای $a = 3$ ~ ~

4) ~ ~ ~ $a > 6$ و $a < 3$ پایدار و برای $a = 3$ یا $a = 6$ ناپایدار است.

$$\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$$

$$= 1 + \frac{as+6}{s^2(s^2+3s+3)} = 0 \longrightarrow \frac{s^2(s^2+3s+3)+as+6}{s^2(s^2+3s+3)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + as + 6 = 0$$

s^4	$1+$	3	6
s^3	$3+$	a	0
s^2	$\frac{9-a}{3}$	6	0
s^1	B	0	
s^0	6		

$$B = \frac{\frac{9-a}{3} \times a - 18}{\frac{9-a}{3}}$$

$$B = \frac{-a^2 + 9a - 54}{9-a}$$

شرط پایداری: قطب سیستم باید روی محور $j\omega$ قرار نداشته باشد.

تعیین علامت در سطر اول یا سطر قبل را صفر نداشته باشیم.

$\frac{9-a}{3} > 0$ و $B > 0$

$a < 9$

$9 - a > 0$

$\frac{-a^2+9a-54}{9-a} > 0 \rightarrow -a^2+9a-54 > 0$

$a^2 - 9a + 54 < 0$

$(a-4.5)^2 + 33.75 < 0$ ✗

به ازای هر مقدار a، B مثبت می‌شود. شرط پایداری هرگز برقرار نیست.

شرط نوسانی ← قطبها مختلط هم علامت (غیرتکراری)

تعیین علامت صورت

سطر قبل را صفر (غیرتکراری) داشته باشیم.

شرط نوسانی شدن در سیستم اول بقیه علامت نداشته باشیم و صرفاً صفر فقط یک بار اتفاق بیفتد.

$$B = -(a-4.5)^2 - 33.75$$

به ازای هیچ مقدار a، سیستم نوسانی نمی شود

برو آ ۸۱.

معادله مشخصه سیستمی بصورت زیر داده شده است به ازای چه مقداری از a و k سیستم پایدار است؟

$$F(s) = s^6 + (a+k)\,s^5 + (3 + ak)s^4 + 3(a+k)\,s^3 + (2/25 + 3ak)s^2 + 2/25(a+k)s + 2/25ak$$

۱) به ازای تمامی a و kها سیستم ناپایدار است.

۲) به ازای $ak < 0$ و $a + k < 0$ سیستم پایدار است.

۳) به ازای $a > 0$ و $k > 0$ سیستم پایدار است.

۴) به ازای $a < 0$ و $k < 0$ سیستم پایدار است.

$$F(s) = s^6 + (a+k)\,s^5 + (3 + ak)s^4 + 3(a+k)\,s^3 + (2/25 + 3ak)s^2 + 2/25(a+k)s + 2/25ak$$

شرط پایداری ← مقادیر سمت چپ صفر نباشد.

↓

یعنی علامت در ستون اول نباید تغییر کند و حتماً مثبت باشد.

	s^6	1	$3+ak$	$2.25+3ak$	$2.25ak$
$\frac{1}{a+k}\times$	s^5	$a+k$ 1	$3(a+k)$ 3	$2.25(a+k)$ 2.25	0
$\frac{a+k}{ak}$	s^4	$\frac{ak}{a+k}$ 1	$\frac{3ak}{a+k}$ 3	$2.25ak$ 2.25	
	s^3	4	6	0	
	s^2	$\frac{3}{2}$	2.25		
	s^1	3	0		
	s^0	2.25			

$$A(s^2) = s^4 + 3s^2 + 2.25 = 0$$

سیستم ناپایدار می‌شود.

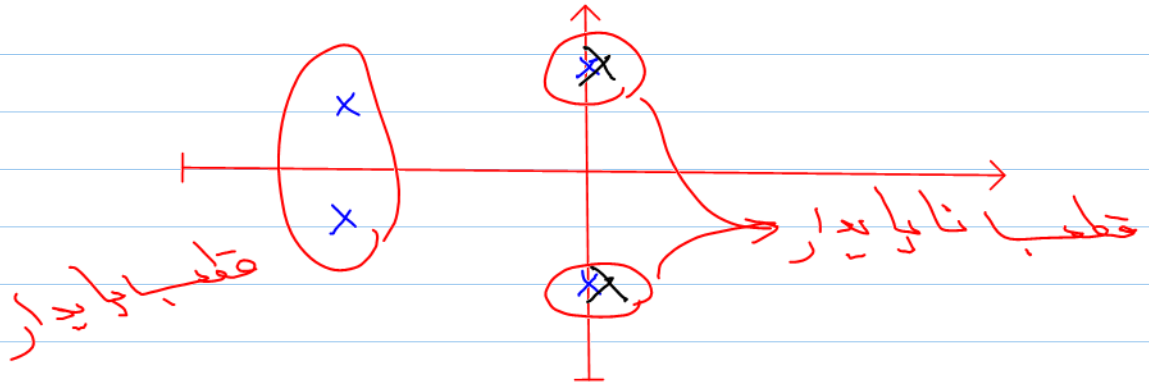
$\frac{3}{2}s^2 + 2.25 = 0$ ← شرط

$$A(s^2) = (s^2 + 1.5)^2 = 0$$

$$\frac{dA}{ds} = 4s^3 + 6s = 0$$

4 تا ریشه مقادیر دارد. ← $\pm j\sqrt{1.5}$ و $\pm j\sqrt{1.5}$ ← سیستم ناپایدار می‌شود.

2 تا ریشه مقادیر تکراری = 2 تا ریشه کاملاً روی



در بخش مقادیر ۰ بقیه علامت دارم ← ریشه مقابل محاسبات ندارم.

↓

۲ تا دور هم میرن

در بخش با مقادیر ۰ بقیه علامت دارم ← ریشه نامقابل محاسبات ندارد.

هر ۲ ریشه نامقابل محاسب

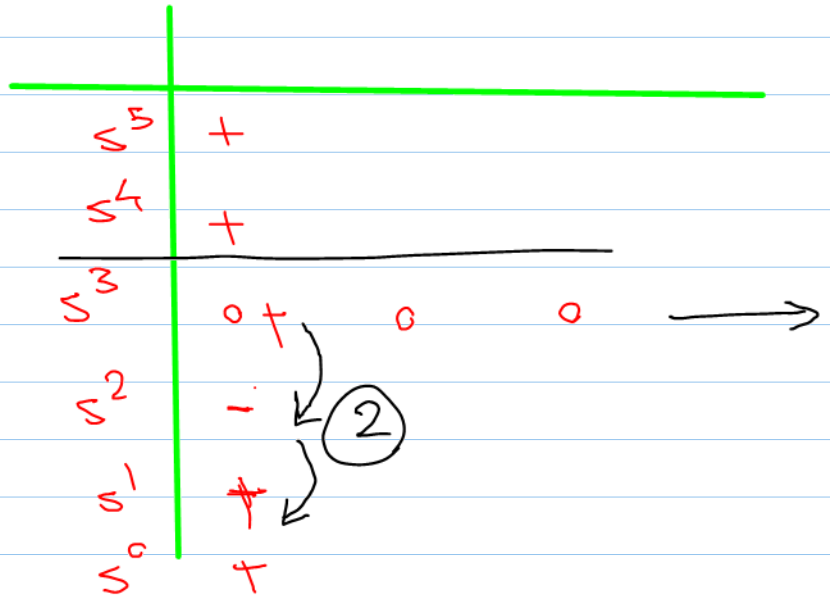
نکته: اگر در جدول R-H سطر عاماً صفر بین از بین باشد، قطعاً سیستم ناپایدار است.

اگر فقط یک سطر صفر داشته باشیم آنگاه:

۱) در ستون اول جدول R-H اگر تغییر علامت نداشته باشیم سیستم نوسانی است.

2) " " " " " داشته باشیم سیستم ناپایدار است.

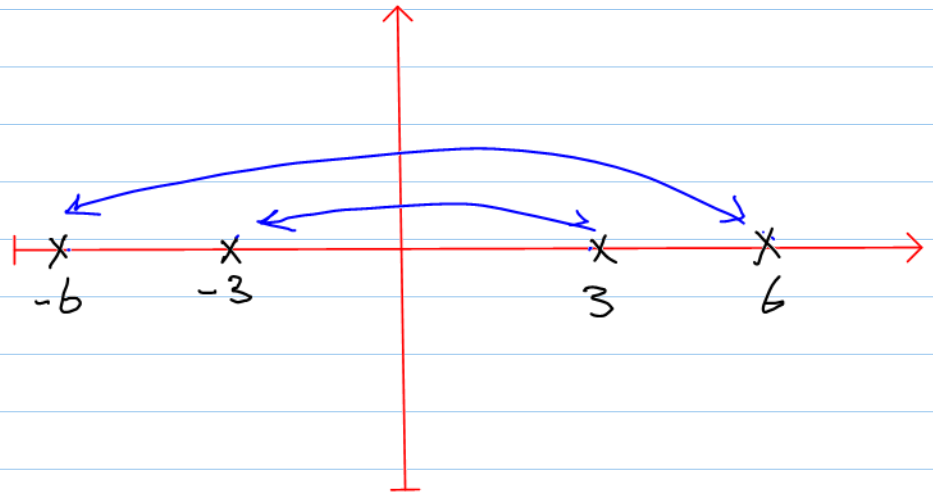
نکته: تعداد ریشه‌های سمتِ راستی روی محور برابر است با تعداد کل ریشه‌های سمتِ راستی منهای 2 برابر تعداد بقیه علامت در ستون اول جدول بعد سمتِ راستی.



4 تا سمتِ راست

2 تا ریشه سمتِ راست است.

تعداد روی محور = $4 - 2 \times 2 = 0$



۶۳- چند جمله‌ای مشخصه یک سیستم حلقه بسته به صورت $\Delta(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$ می‌باشد. این سیستم ... است.

۱) پایدار ۲) ناپایدار ۳) پایدار مرزی ۴) ناپایدار با دو ریشه سمت راست

$$\Delta(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

s^5	1 +	2	1
s^4	1 +	2	1
s^3	~~0~~ 1 +	~~0~~ 1	0
s^2	1 +	1	
s^1	~~0~~ 2 +	0	
s^0	1 +		

$\frac{1}{4} \times$

$$(s^2+1)^2 = 0 \rightarrow s = \pm j, \pm j$$

$$A(s^2) = s^4 + 2s^2 + 1 = 0$$

$$\frac{dA}{ds} = 4s^3 + 4s = 0$$

$$A_2(s^2) = 1s^2 + 1 = 0$$

$$\frac{dA_2}{ds} = 2s = 0$$

سطر s^3 کاملا صفر ← 4 تا ریشه مختلط داریم.

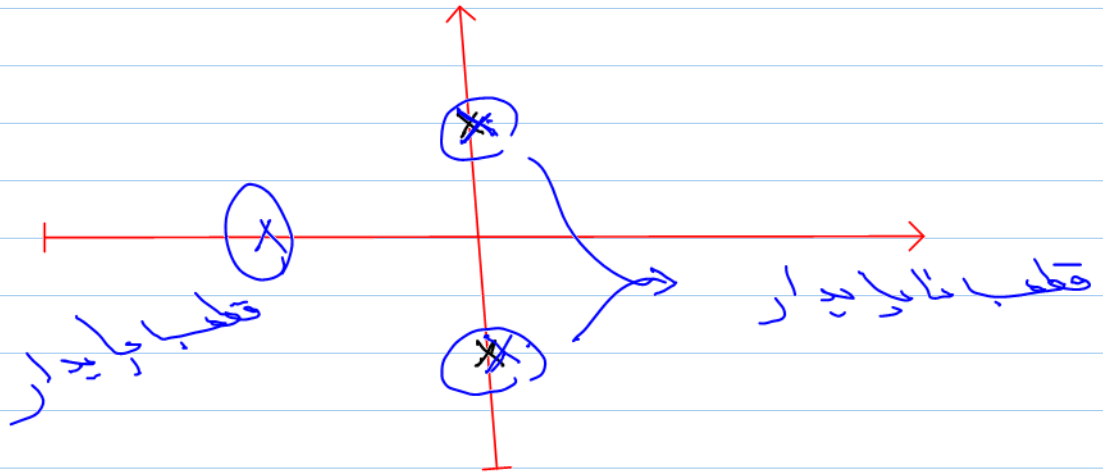
سطر s^1 هم صفر ← 2 تا از ریشه های مختلط روی هم می افتند.

در کل مختلط بیشتر نداریم ← ریشه مختلط گذرا نداریم.

تعداد ریشه های روی محور $j\omega$ ← $4 - 2 \times 0 = 4$

در بخش فاصله‌گذاری تقویت‌کننده بازخورد ← دیتای نامتعادل سمت راست بازخورد.

دیتای نامتعادل سمت چپ بازخورد.



قطبهای متعادل ← $A(s^2) = (s^2+1)^2 = 0 \rightarrow s = \pm j, \pm j$

$\Delta(s) = (s+a)(s^4+2s^2+1) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$

$\Delta(s) = Q(s)\, A(s^2)$

$a = 1 \rightarrow Q(s) = s+1 \rightarrow s = -1$ دیتای نامتعادل

۱ ـ اگر سیستمی دارای تابع تبدیل $H(s) = \frac{۲۴(s-۲)}{s^۶ + ۴s^۵ + ۱۱s^۴ + ۳۲s^۳ + ۴۰s^۲ + ۶۴s + ۴۸}$ باشد، آنگاه این سیستم همواره.....است.

۱) پایدار ۲) پایدار مجانبی ۳) پایدار مرزی ۴) ناپایدار

توجه: کی سیستم حلقه باز و کی حلقه بسته؟

شاخه‌های حلقه باز بودن ← هندبک حلقه باز: حلقه

پایداری سیستم ← قطبهای حلقه بسته ← ریشه های معادله مشخصه ← فرع تابع تبدیل حلقه بسته :

$$\Delta(s) = s^6 + 4s^5 + 11s^4 + 32s^3 + 40s^2 + 64s + 48 = 0$$

	s^6	1	11	40	48
$\frac{1}{4}\times$	s^5	4	32	64	0
$\frac{1}{3}\times$	s^4	3	24	48	16
	s^3	0	0	0	
	s^2				
	s^1	0	0		
	s^0				

$\rightarrow A(s^2) = 1s^4 + 8s^2 + 16 = 0$

$= (s^2 + 4)^2 = 0$

$s = \pm j2, \pm j2$ ← ناپایدار

سطر کاملا صفر ← قطعا ناپایدار هست.

* هر وقت به سطر کاملا صفر رسیدیم اگر داخل ابتدا ریشه های معادله کلی را بدست آورید.

اگر ریشه سمت راست یا ریشه روی محور موهومی داشتیم سیستم ناپایدار است در غیر اینصورت جدول را کامل کنید.

ناپایداری	s^6	1 +	11	40	48
	s^5	~~4~~1 +	~~3~~18	~~6~~4 16	0
	s^4	~~3~~1 +	~~2~~4 8	~~4~~8 16	
$\frac{1}{4}\times$	s^3	~~0~~~~4~~1 ++	~~0~~ ~~16~~4	0	
$\frac{1}{4}\times$	s^2	~~4~~1 +	~~16~~4		
	s^1	~~0~~2 +	0		
	s^0	4 +			

$$A(s^2) = s^4 + 8s^2 + 16 = 0$$

$$\frac{dA}{ds} = 4s^3 + 16s$$

$$\longrightarrow \quad A_2(s) = s^2 + 4 = 0$$

$$\frac{dA_2}{ds} = 2s$$

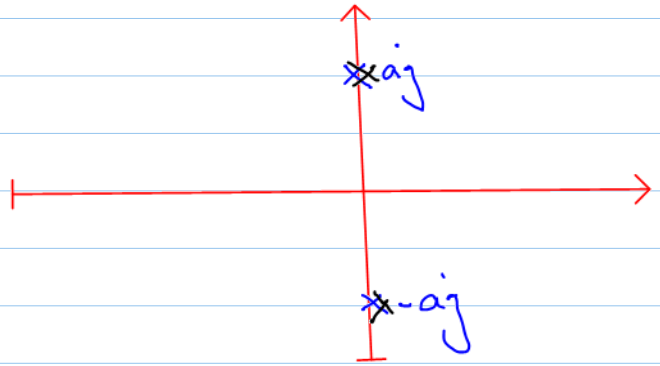
سطر s^3 صفر شده ← 4 تا ریشه متقارن

~~4 تا ریشه متقارن~~ ←

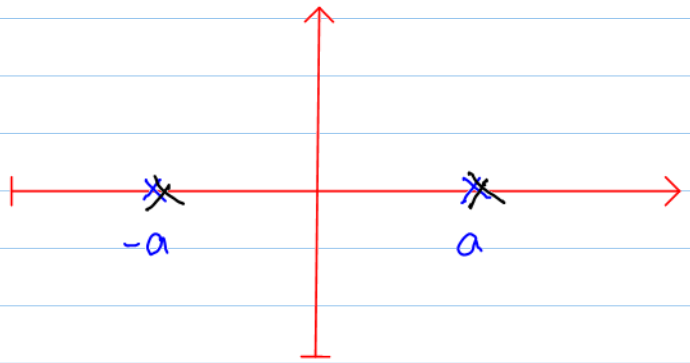
سطر s^1 ~ ~~~~ ← ~~2~~ تا ~

← چون دوبین سطر صفرات ریشه متقارن اضافه می‌کند بلکه باعث می‌شود 2 تا از ریشه‌های متقارن روی 2 تای دیگر از ریشه‌های متقارن بیفتد.

* 4 تا ریشه متقارن داریم که 2 تا از آن‌ها تکراری هستند.



ناپایدار ✓



ناپایدار

دیده می‌شود از حل معادله کمکی اول بدست می‌آید.

$$s^4 + 8s^2 + 16 = 0$$

$$s = \pm j2, \pm j2$$

دیده می‌شود ناپایدار ؟ در بحث ناپایداری تغییر علامت نداریم به همین دلیل صحیح است

۸۶ برق

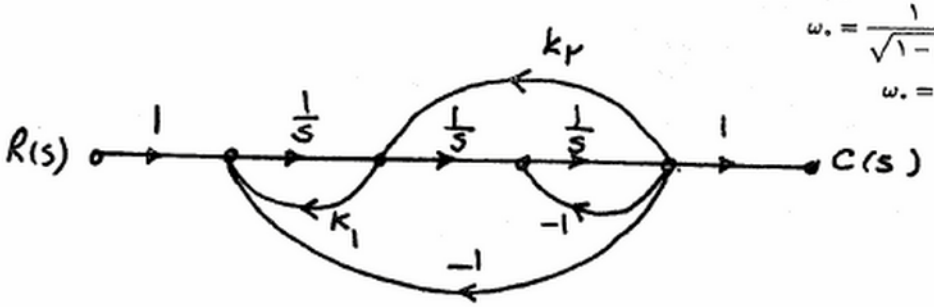
۸ ـ سیستم شکل زیر به ازاً چه مقادیری از k_1 و k_2 نوسانی می‌گردد و در این حالت فرکانس نوسانات چقدر است؟

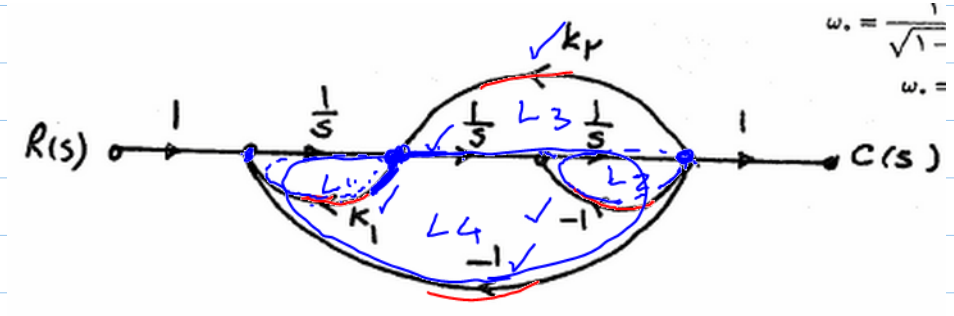
۱) $k_1 = \frac{1+k_2}{k_2}$ و $\omega_0 = \sqrt{k_2}$

۲) $k_2 = -k_1 = -1$ و $\omega_0 = 1$

۳) $k_1 + k_2 = -\frac{1}{1-k_1}$ و $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1-k_1}}$

۴) $k_1 + k_2 = 0$ و $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1-k_1}}$





$\Delta(s) = ?$

$L_1 = \frac{k_1}{s}$ $L_2 = -\frac{1}{s}$ $L_3 = k_2 \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}$ $L_4 = -1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}$

L_1, L_2 مستقل

$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{k_1}{s} + \frac{-1}{s} + \frac{k_3}{s^2} - \frac{1}{s^3} \right) + \left(\frac{k_2}{s} \times \frac{-1}{s} \right) = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + (1 - k_1) s^2 - (k_1 + k_2) s + 1 = 0$$

شرط پایداری بودن ← ضریب s^0 برابر ضریب s^3 = ضریب s^1 × ضریب s^2

$$(1 - k_1)(-(k_1 + k_2)) = 1 \times 1 \rightarrow (k_1 - 1)(k_1 + k_2) = 1$$

1) $k_1 = \frac{1 + k_2}{k_2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{k_2} \times \frac{k_2 + 1 + k_2^2}{k_2} = 1$?

2) $k_2 = -1$, $k_1 = 1$ $\rightarrow$ $0 \times 0 \neq 1$ X

3) $k_1 + k_2 = \frac{-1}{1 - k_1}$ $\rightarrow$ $(k_1 - 1)\left(\frac{-1}{1 - k_1}\right) = 1$ ✓

4) $k_1 + k_2 = 0$ $\rightarrow$ $(k_1 - 1) \times 0 \neq 1$ X

$k_1 + k_2 = \frac{-1}{1-k_1}$ با فرض درستی عبارت روبرو (فرضی شده) فرکانس نوسانات؟

* فرکانس نوسانات ریشه های موهومی همین معادله کلی

$$\Delta(s) = s^3 + (1-k_1)s^2 - (k_1+k_2)s + 1 = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + (1-k_1)s^2 + \frac{1}{1-k_1}s + 1 = 0$$

s^3	1	$+\left(\frac{1}{1-k_1}\right)$	0
s^2	$1-k_1$	1	0
s^1	0	0	
s^0			

$A(s) = (1-k_1)s^2 + 1 = 0$

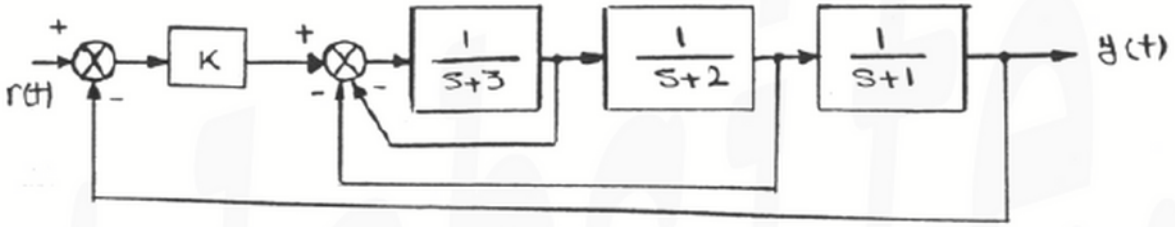
$s = \pm j\sqrt{\frac{1}{1-k_1}}$ فرکانس نوسانات

ω_0

ریشه‌های موهومی همین معادله هستند $\leftarrow$ معادله درجه 3 فرکانس نوسانات برابر با

$\frac{\text{ضریب } s^0}{\text{ضریب } s^2}$ است.

۶۳. در سیستم داده شده مقدار k را طوری پیدا کنید تا خروجی دارای نوسانات پایدار باشد. فرکانس نوسانات در صورت وجود چه خواهد بود؟



۱) $w = ۲, \quad k = -۹۴/۴$

۲) $w = \sqrt{۲۰}, \quad k = ۱۴۶/۴$

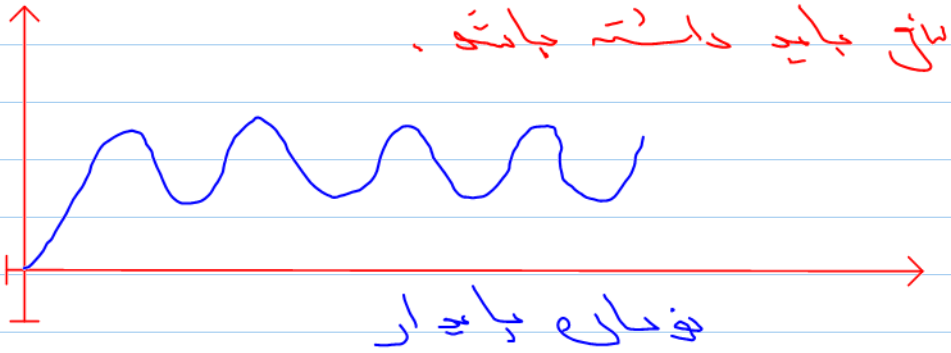
۳) $w = ۲۰, \quad k = ۱۴۶/۴$

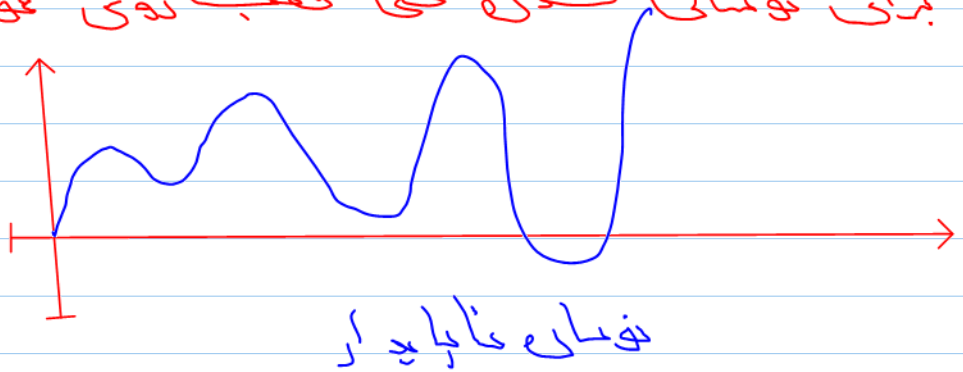
۴) این سیستم نمی‌تواند پاسخ نوسانی پایدار داشته باشد.

نوسانات پایدار ← قطبهای دهانه سمت چپ محور Re یا روی محور Re و غیرتکراری

" ناپایدار ← " " " خارج از نیمه صفحه چپ محور و یا روی محور و حتی تکرار

برای نوسانی شدن حتماً قطب روی محور Re باید داشته باشد.

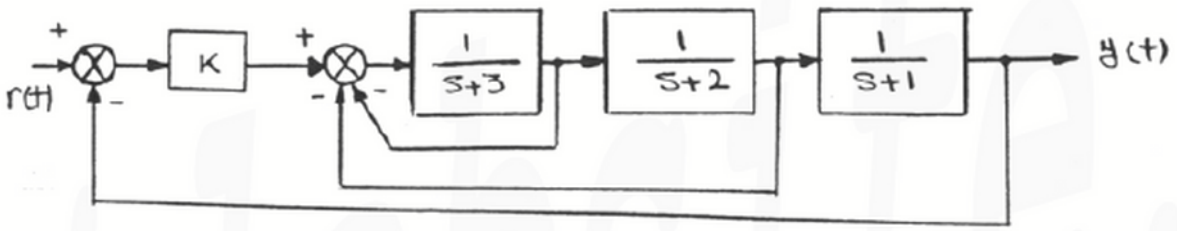




شرط نوسانی شدن ← حتماً قطب روی محور Re داشته باشد.

نوسان پایدار ← قطبهای روی محور Re تکراری نباشد ← سراسر فقط یک بار اتفاق بیفتد و نقیض علامت نداشته باشد.

نوسان ناپایدار ← " " " " " " ، سراسر بیش از یک بار اتفاق افتد.



$$\Delta(s) = 1 - \left(-\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+3} \times \frac{1}{s+2} - k \frac{1}{s+3} \times \frac{1}{s+2} \times \frac{1}{s+1} \right) = 0$$

$$= (s+3)(s+2)(s+1) + (s+2)(s+1) + s+1 + k = 0$$

$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + s^2 + 3s + 2 + s + 1 + k = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 15s + 9 + k = 0$$

نوسان پایدار ←

s^3	1	15
s^2	7	~~$9+k$~~ 105
s^1	~~$\frac{96-7k}{7}$~~ 0	0
s^0	$9+k$	

→

$$7s^2 + 105 = 0$$

$$k = 96 \quad \text{و} \quad \cancel{k = -9}$$

$k=96 \rightarrow$ نوسانی

$$s = \pm j\sqrt{15}$$

فرکانس نوسانات

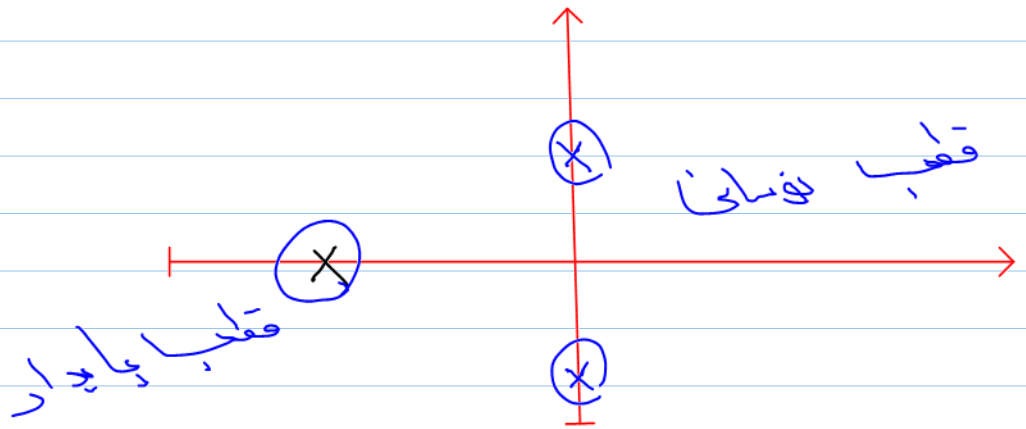
s^3	$1+$	15
s^2	$7+$	105
s^1	0	$14+$ 0
s^0	$105+$	

$7s^2 + 105 = 0 \xrightarrow{d/ds} 14s = 0$

سطر s^1 صفر ← 2 ریشه متقارن

ریشه متقارن مساوات فرعی ← از ریشه نامتقارن مساوات اصلی

تعداد ریشه‌های راست‌گرد محور jw ← $2 - 2(0) = 2$



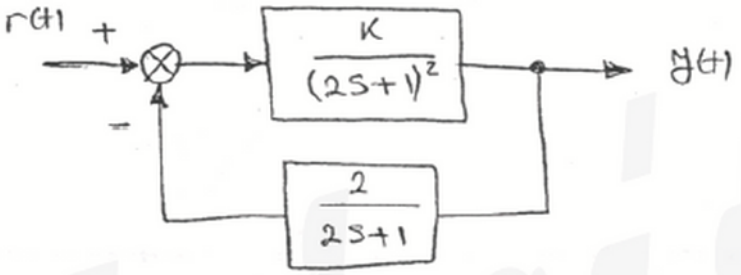
سیستم ناپایدار ← قطبها از جنس ناپایدار یا ناپایدارند.

$$\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 15s + 9 + k = 0$$

شرط پایداری روث → $7 \times 15 = 1 \times (9+k) \rightarrow k = 96$

فرکانس نوسانات = $\left| \sqrt{\frac{9+96}{7}} \right| = \sqrt{15}$

۶- اگر بتوان k را چنان انتخاب کرد که سیستم داده شده در شکل نوسانی باشد فرکانس نوسانات آن کدام خواهد بود؟



۱) ۱

۲) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) ۴

$$\Delta(s) = 1 - \left(-1 \frac{2}{2s+1} \times \frac{k}{(2s+1)^2}\right) = 0$$

$$\Delta(s) = (2s+1)^3 + 2k = 0$$

$$\Delta(s) = 8s^3 + 12s^2 + 6s + 2k + 1 = 0$$

نوع پایداری $\rightarrow$ $12 \times 6 = 8 \times (2k+1) \rightarrow k = 4$

فرکانس $= \left| \sqrt{\frac{2 \times 4 + 1}{12}} \right| = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۷- آرایه‌ی روث (Routh) زیر را در نظر بگیرید:

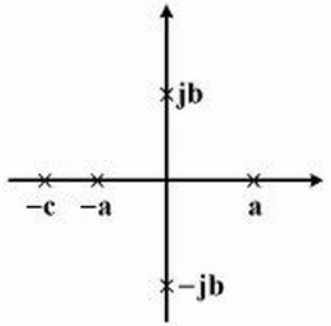
s^7	a	b	c	d
s^6	e	f	g	h
s^5	i	x	x	x
s^4	l	x	x	
s^3	~~0~~n	0	0	
s^2	p	x		
s^1	~~0~~q	0		
s^0	h			

دقت کنید که ضرائب سطر s^3 و s^1 در ابتدا همگی صفر بوده‌اند. در مورد پایداری سیستم کدام عبارت صحیح است؟ (همه‌ی پارامترهای جدول مثبت می‌باشند.)

۱) ناپایدار
۲) پایدار
۳) پایدار مرزی
۴) بدون دانستن مقادیر عددی نمی‌توان اظهارنظر کرد.

* اگر بیش از یک سطر متن داشته باشیم ← قطعاً نیاز دارد

۹۷- مشخصهٔ قطب‌های حلقه بستهٔ سیستمی با تابع $G(s)$ در شکل زیر داده شده است. جدول راث ـ هورویتز برای معادلهٔ مشخصهٔ این سیستم به‌صورت زیر به دست آمده است. در این مورد گزینهٔ صحیح کدام است؟



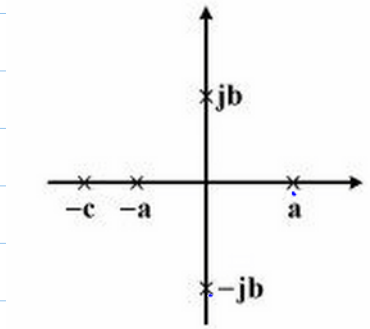
s^5	x_1	×	×
s^4	x_2	×	×
s^3	x_3	×	×
s^2	x_4	×	×
s^1	x_5	×	×
s^0	x_6	×	×

۱) $x_6 > 0$

۲) $x_2 < 0$

۳) $x_3 x_2 < 0$

۴) $x_4 x_5 x_6 < 0$



s^5	x_1	×	×
s^4	x_2	×	×
s^3	x_3	×	×
s^2	x_4	×	×
s^1	x_5	×	×
s^0	x_6	×	×

۱) $x_6 > 0$ ✓

۲) $x_2 < 0$ ✓

۳) $x_3 x_4 < 0$ ~~×~~

۴) $x_4 x_5 x_6 < 0$

۲ ریشه سمت چپ

۱ ریشه سمت راست ← در ستون اول یک تغییر علامت داریم

۲ ریشه روی محور $j\omega$

۴ ریشه مقادیر ← سطر s^3 کاملا صفر بوده

۱ ریشه مقادیر سمت راست داریم ← در بخش مقادیر یک تغییر علامت داریم

۲ ریشه نامقادیر سمت راست ~ ~ ~ نامقادیر یک تغییر علامت داریم.

۱) $x_6 > 0$

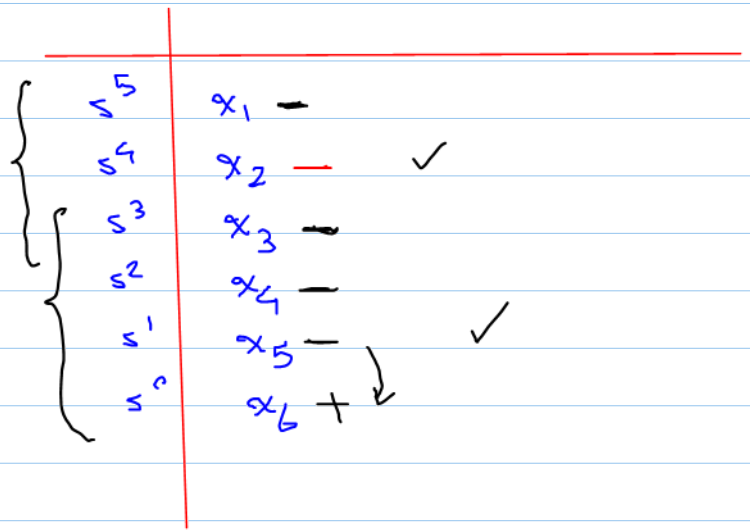
s^5	x_1	−
s^4	x_2	−
s^3	x_3	−
s^2	x_4	−
s^1	x_5	−
s^0	x_6	+

$x_3 = 4x_2$

$A(s^2) = x_2 s^4 + \dots$

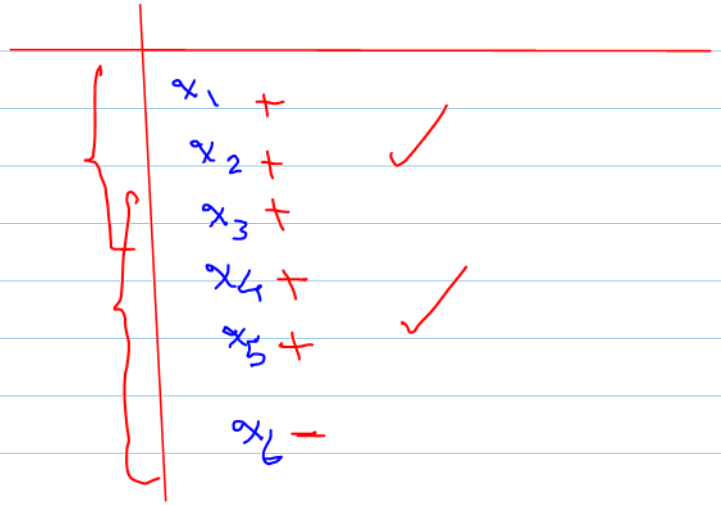
$\frac{dA}{ds} = 4x_2 s^3 + \dots$

2) $x_2 < 0$ ✓



$x_2 < 0 \longrightarrow x_3 < 0$

✓4) $x_4 x_5 x_6 < 0$



دکتری ۹۶

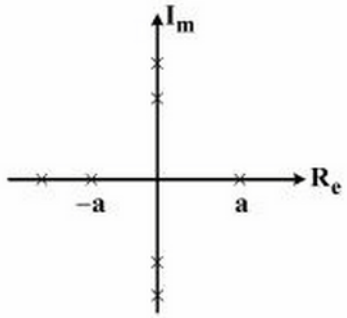
۳۸- **چه اتفاقی در آرایهٔ راث، روی داده است؟**

۱) فاکتور زوج معادلهٔ مشخصه، از مرتبهٔ ۴ است.

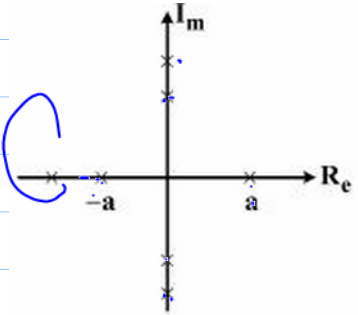
۲) تعداد تغییر علامت‌های بعد از سطر صفر یک می‌باشد.

۳) تعداد تغییر علامت‌های قبل از سطر صفر یک می‌باشد.

۴) دارای دو سطر صفر می‌باشد.



قطبهای دوی محور نیز حتماً متقارن هستند.



۳۸- چه اتفاقی در آرایهٔ راث، روی داده است؟

۱) فاکتور زوج معادلهٔ مشخصه، از مرتبهٔ ۴ است.

۲) تعداد تغییر علامت‌های بعد از سطر صفر یک می‌باشد.

۳) تعداد تغییر علامت‌های قبل از سطر صفر یک می‌باشد.

۴) دارای دو سطر صفر می‌باشد.

۱) معادله درجه ۶. ② ۶ تا ریشه متقارن ← سطر s^5 صفر شده ← معادله کمکی از درجه ۶ است

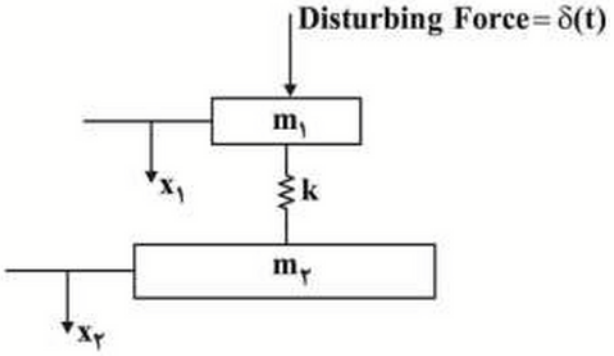
③ ۱ ریشه متقارن کنار است ← تقارن تغییر علامت بعد از سطر صفر ۱ است.

④ ۵ ~ نامتقارن ~ ~ ~ ~ قبل ~ ~ ~ ۵ است.

⑤ قطبهای متقارن تکراری نداریم ← یک سطر صفر داریم.

برق ۹۷

۹۱- فرکانس نوسان ساختار شکل زیر، کدام است؟

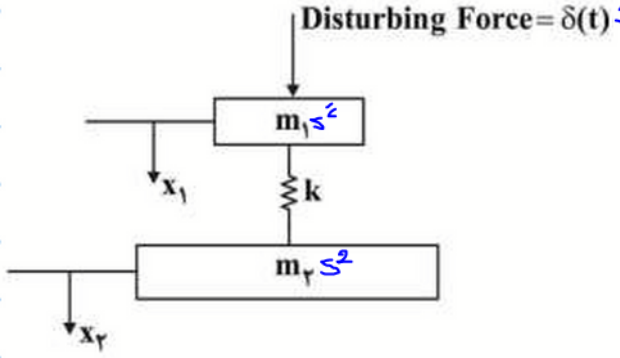


۱) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{k(m_۱ m_۲)}{m_۱ + m_۲}$

۲) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{m_۱ m_۲}{k(m_۱ + m_۲)}$

۳) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{k(m_۱ + m_۲)}{m_۱ m_۲}$

۴) $\omega_{\circ}^{۲} = \frac{m_۱ + m_۲}{k(m_۱ m_۲)}$



$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + k & -(k) \\ -k & m_2 s^2 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = \det(A)$$

$$= (m_1 s^2 + k)(m_2 s^2 + k) - (-k)(-k)$$

$$\Delta(s) = m_1 m_2 s^4 + k(m_1 + m_2) s^2 = 0$$

$$= s^2 \left(m_1 m_2 s^2 + k(m_1 + m_2) \right) = 0 \rightarrow \begin{cases} s = 0, 0 \\ s = \pm j \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}} \end{cases}$$

$$s^2 = -\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$$

$s^2 =$ عدد منفی $\rightarrow$ $s = \pm j \sqrt{|\text{عدد منفی}|}$

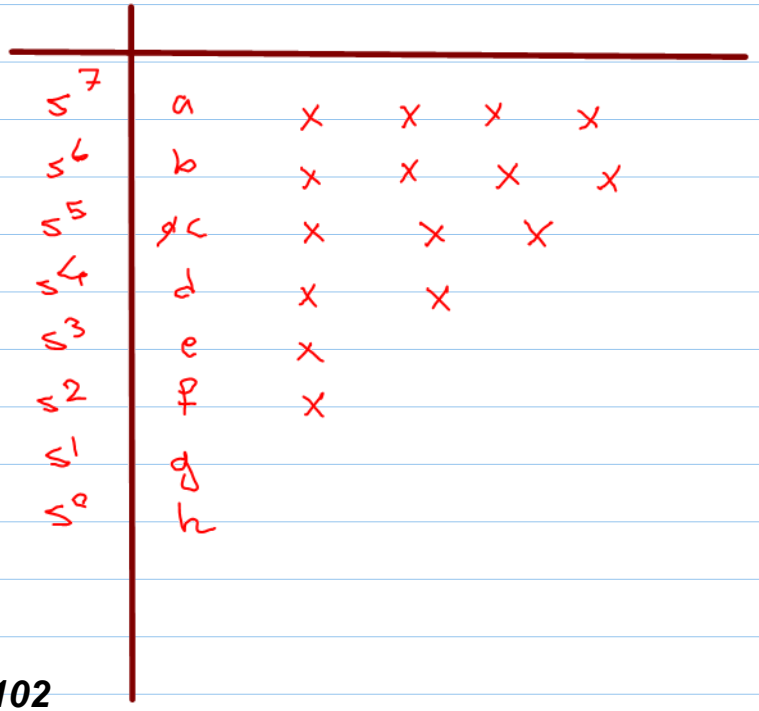
سؤال 91. جدول روث مناظر با معادله مشخصه سیستمی به شکل زیر است که a و b و c مثبت و بقیه ضرایب ستون اول صفر هستند. هیچ وقت کسی که ضرایب سطر s^5 ابتدا همگی صفر بوده و برای تکمیل جدول جایگزین شده است. کدام گزینه درست است؟

1) 2 ریشه سمت راست، 3 ریشه سمت چپ، 2 ریشه روی محور موهومی

2) ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

3) ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

4) ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

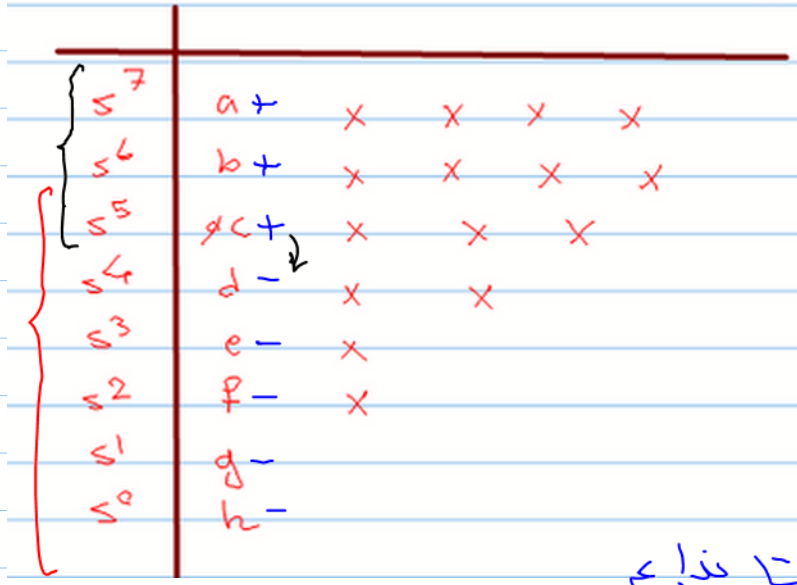


1) 2 ریشه سمت راست، 3 ریشه سمت چپ، ~~4~~ هیچ ریشه روی محور موهومی

2) 1 ~ ~ ~ ، 1 ~ ~ ~ ، 4 ~ ~

3) 1 ~ ~ ~ ، 1 ~ ~ ~ ، 4 ~ ~

4) ✓ 1 ~ ~ ~ ، 2 ~ ~ ~ ، 4 ~ ~



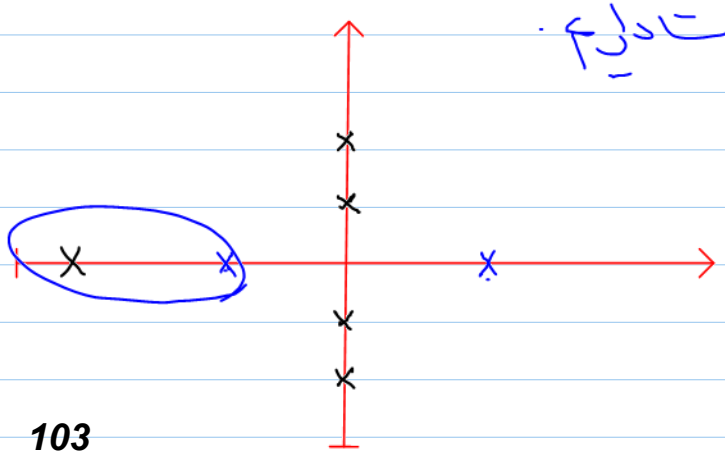
سطر s^5 تماماً صفر ← 6 ریشه متقارن

1 ریشه نامتقارن ← سمت چپ

2 تغییر علامت قبل از سطر صفر ← ریشه نامتقارن سمت راست دارد.

1 تغییر علامت بعد از سطر صفر ← 1 ریشه متقارن سمت راست دارد.

تعداد ریشه های روی محور موهومی $6 - 2(1) = 4$

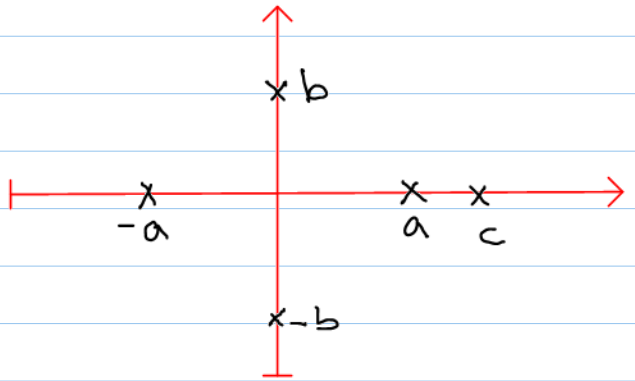


دکتری ۹۵ .

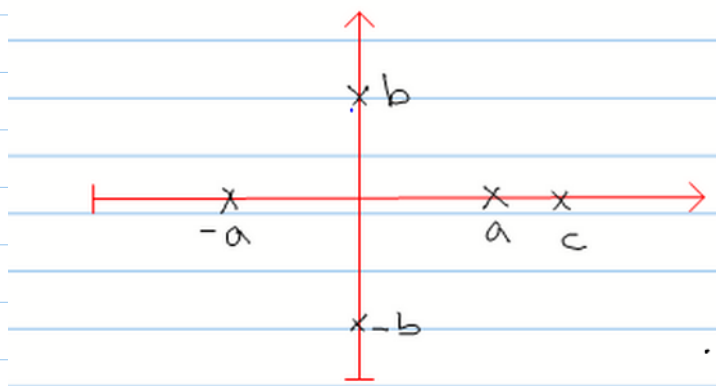
مشخصه قطبهای حلقه بسته سیستم با تابع تبدیل زیر داده شده است. جدول RH متناظر برای این سیستم تکمیل شده است. آنگاه x_1 برابر با:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

1) $x_5 < 0$ 2) $x_2 < 0$ 3) $x_5 x_6 < 0$ 4) $x_1 < 0$



s^5	x_1	x	x
s^4	x_2		
s^3	$x_3 > 0$		
s^2	$x_4 > 0$		
s^1	x_5		
s^0	x_6		



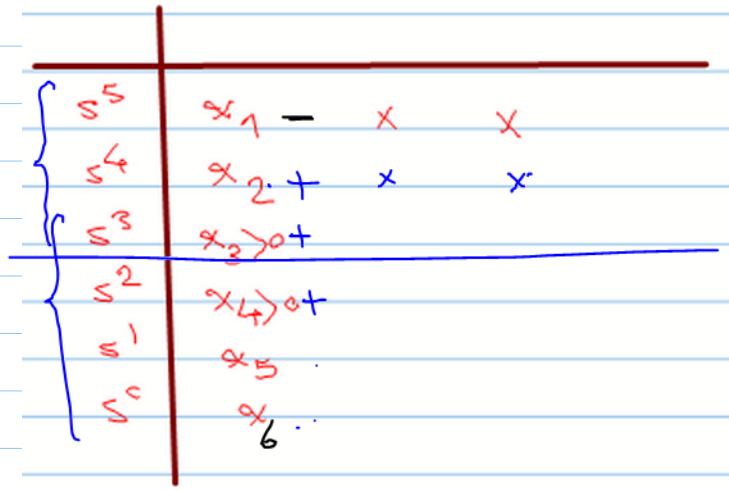
① 4 تا ریشه سمت چپ s^3 کاملاً صفر است

② 1 ریشه سمت راست ← بعد از s^3 را یکی علامت داریم.

③ 1 ریشه ناسمت راست ← قبل از s^3 را یکی علامت داریم.

2 تا از ریشه ها روی محور موهومی ← اگر شرط ② اتفاق بیفتد ریشه است.

$4 - 2(1) = 2$ ✓

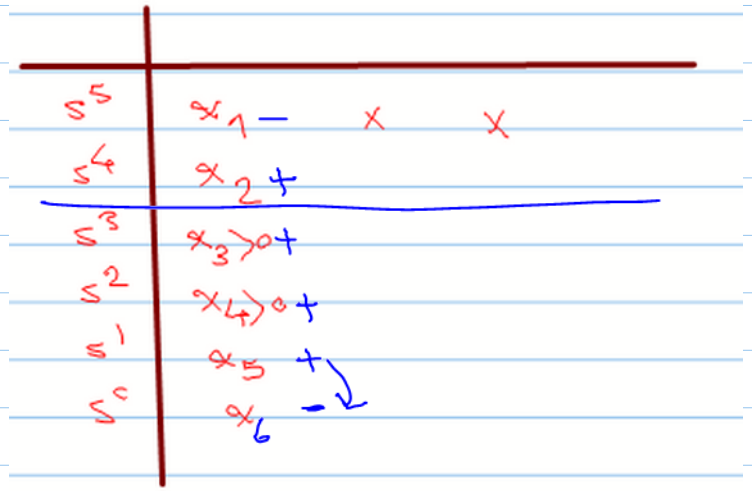


① → $A(s^2) = x_2 s^4 + \dots$

$\frac{dA}{ds^2} = 4x_2 s^3 + \dots$

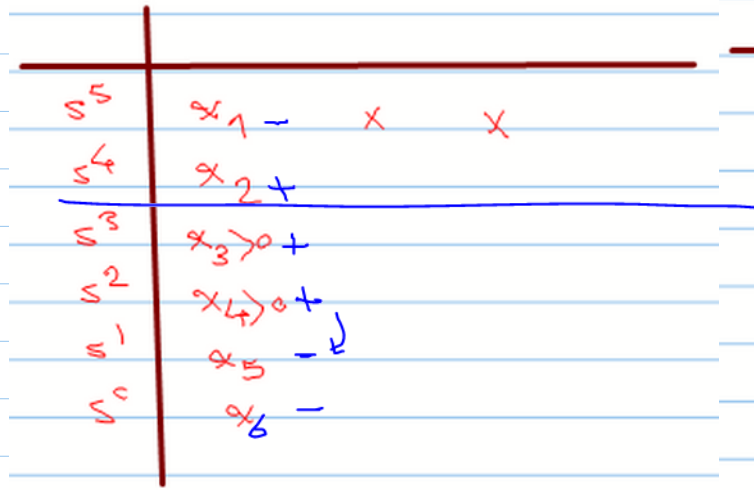
$4x_2 = x_3$ → $x_3 > 0 \Rightarrow x_2 > 0$ → حذف گزینه 2

③ → $x_1 < 0$ شرط لازم



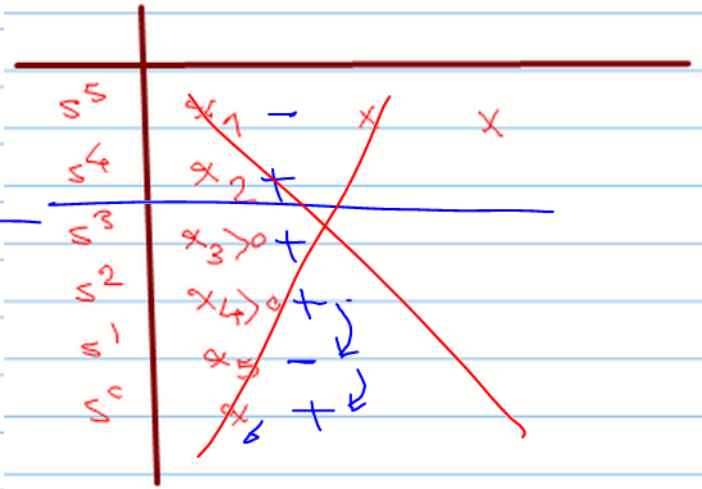
حالت 1

$x_5 x_6 < 0$



حالت 2

$x_5 x_6 > 0$



برای اینکه هر دو شرط با هم سازگار باشند داریم:

(1) حتماً باید $x_1 < 0$ باشد ← ناپایدار

(2) x_2 قطعاً مثبت است.

(3) $x_5 x_6$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

(4) x_5 می‌تواند ~ ~ ~ ~ ~

خواهشا بچه.

دهتار سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{k}{(s-1)(s+3)(s+5)}$ به ازای چه مقدار k توسای

ی ستو د؟

64 34 15 -15

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{(s-1)(s+3)(s+5)} = 0$$

$$= (s-1)(s+3)(s+5) + k = 0$$

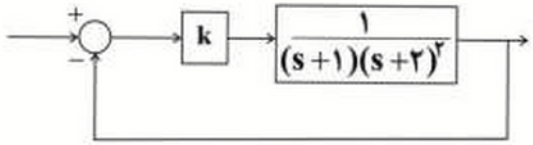
$$= (s-1)(s^2+8s+15) + k = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 7s + k - 15 = 0$$

شرط نوسانی $\rightarrow$ $7 \times 7 = 1 \times (k-15) \rightarrow k = 64$

مکانیک ۹۷

۱۱۰- پریود نوسانات سیستم مدار بستهٔ زیر به ازای بهرهٔ کنترلر در مرز پایداری، تقریباً چند ثانیه است؟



۱) ۱۱/۲ ۲) ۶/۵ ۳) ۲/۲ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{-k}{(s+1)(s+2)^2}\right) = 0$$

$$= (s+1)(s+2)^2 + k = 0$$

$$= (s+1)(s^2+4s+4) + k = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4 + k = 0$$

شرط پایداری : $5 \times 8 = 1(4+k) \rightarrow k = 36$

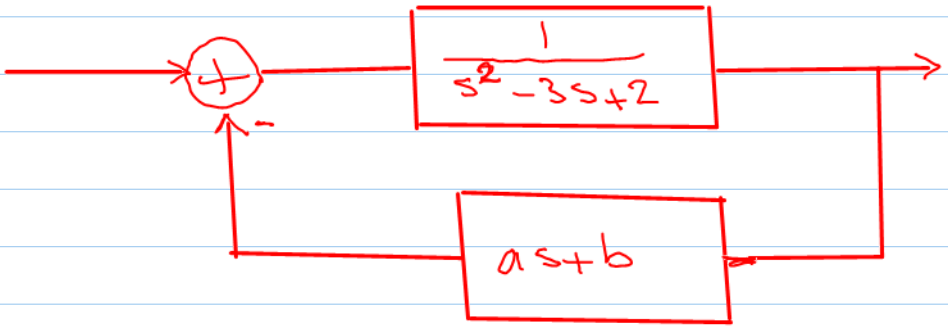
فرکانس نوسان $\omega_0 = \sqrt{\frac{4+36}{5}} = 2\sqrt{2}$

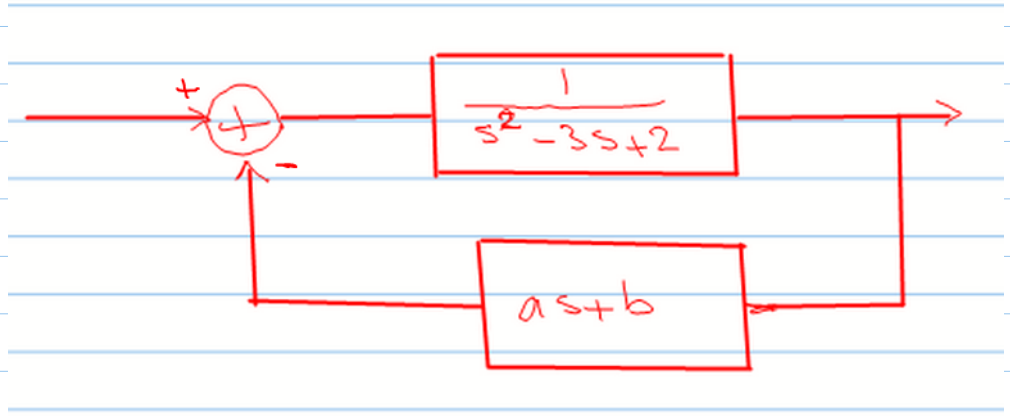
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\sqrt{2} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3.14}{1.7} < 3.14$$

جلسه ۱۹

تمرین ۹۸. به ازای چه مقدار a و b سیستم زیر نوسانی است؟

۱) $a=1$ ، $b=2$ ۲) $a=5$ ، $b=6$ ۳) $a=3$ ، $b>-2$ ۴) $a=3$ ، $b>0$





$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{1}{s^2-3s+2} \times (as+b) \times -1 \right) = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + (a-3)s + b + 2 = 0$$

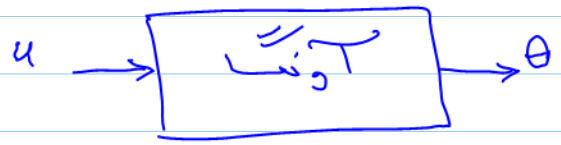
پایداری ← قطب‌های روی محور $j\omega$

$$s^2 + \text{عددثابت} = 0 \rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{\text{عددثابت}}$$

$$a = 3 \quad , \quad b+2 > 0 \quad b > -2$$

برق ۷۱. معادله حاکم شده آونگ $\ddot{\theta}(t)+w_0^2\theta(t)=u(t)$ می‌باشد. از کنترلر $\frac{s+\alpha}{s+\beta}$ در مسیر فیدبک منفی استفاده شده است. سیستم حلقه بسته به ازای چه مقدار از α و β پایدار است؟

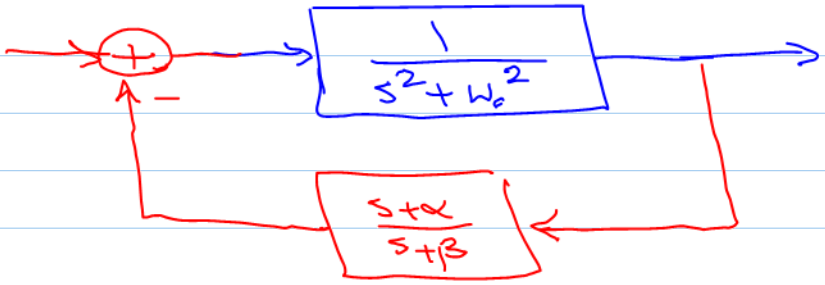
۱) $0<\alpha<\beta$ ۲) $\alpha, \beta>0$ ۳) $-w_0^2\beta<\alpha<\beta$ ۴) $-\beta w_0^2<\alpha<\beta$ $\beta>0$



$$\ddot{\theta}(t) + \omega_o^2\,\theta(t) = u(t)$$

$$s^2\theta(s) + \omega_o^2\,\theta(s) = u(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2+\omega_o^2}$$



$$\Delta(s) = 1 - \left(-1 \times \frac{1}{s^2+\omega_o^2} \times \frac{s+\alpha}{s+\beta} \right) = 0$$

① ✓

$$\Delta(s) = s^3 + \beta s^2 + (\omega_c^2+1)s^1 + (\alpha+\beta\omega_c^2)s^0 = 0$$

② $\beta > 0$, $\alpha + \beta\omega_c^2 > 0$

③ $\beta(\omega_c^2+1) > 1\,(\alpha+\beta\omega_c^2)$

$\beta > 0$, $\alpha > -\beta\omega_c^2$ $\beta > \alpha$

$\beta > \alpha > -\beta\omega_o^2$, $\beta > 0$

충분 ✓

مرتبط با سوال ۹۵: معادله مشخصه $Q(s) = s^5 + 3s^3 + s^2 + 2s + 2$ را در نظر بگیرید. تعداد ریشه های $Q(s)$ در LHP، RHP و روی محور موهومی به ترتیب کدام است؟

۱) ۳، ۰، ۲ ۲) ۱، ۱، ۲ ۳) ۱، ۲، ۲ ۴) ۳، ۲، ۰

$Q(s) = s^5 + 3s^3 + s^2 + 2s + 2 = 0$

LHP ← سمت چپ محور $j\omega$

RHP ← ~ راست ~

s^5	1	3	2
s^4	0	1	2
s^3			
s^2			
s^1			
s^0			

حالت خاص اول

$$Q\left(\frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{s}\right)^5 + 3\left(\frac{1}{s}\right)^3 + \left(\frac{1}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{s}\right) + 2 = 0$$

$$Q\left(\frac{1}{s}\right) = 2s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 1 = 0$$

s^5	2+	1	0
s^4	2+	3	1
s^3	-2-	-1	0
s^2	2+	1	0
s^1	~~0~~ 4+	0	
s^0	1		

$A(s^2) = 2s^2 + 1 = 0 \rightarrow s = \pm j\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\frac{dA}{ds} = 4s$

سوء کاملاً ← 2 ریشه متقارن $\pm j\sqrt{\frac{1}{2}}$

قبل از سوء در 2 تا بقیه علامت داریم ← 2 تا ریشه ناسقارن سمتارات

بعد ~ ~ ~

برق ۹۳. در هنگام تشکیل جدول R-H برای یک معادله مشخصه سیستم مرتبه m، سطر s^{2k} را s^{2k-1} کاملاً صفر شده است. اگر تعداد تغییرعلامتهای ستون اول قبل از سطر با y و پس از آن را با x نشان دهیم، شرط وجود قطب روی فرموسوی کدام است؟

۱) $x<k$ ۲) $y<k$ ۳) $x<m-k$ ۴) $y<m-k$

حداکثر m ← کلاً m تا رشته

$2k$ تا رشته سقار ← 2^{2k} حداکثر

تعداد بقیه علامت بعد از سطر 2^k ← x

~ ~ ~ قبل ~ ← y

تعداد رشته‌های روی هر سطر $= 2k - 2(x) > 0$ ← $k > x$

فضای حالت و پایداری

فضای حالت سیستم حلقه بسته ←

$$\Delta(s) = \det(sI - A)$$

~ ~ ~ حلقه باز ←

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

سوال ۷۶. معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارتند از:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k+1 \\ -k-2 & -2k-3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

به ازای چه مقدار k، پایدار است؟

۱) $k > -2$ ۲) $-2 < k < -1$

۳) $k > -1$ ۴) سیستم هواپایدار است.

$$\Delta(s) = \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & k+1 \\ -k-2 & -2k-3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & k+1 \\ -k-2 & -2k-3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s & -k-1 \\ k+2 & s+2k+3 \end{bmatrix} \right) = s^2 + (2k+3)s - (k+2)(-k-1)$$

$$\Delta(s) = s^2 + (2k+3)s + (k+2)(k+1) = 0$$

$2k+3 > 0$

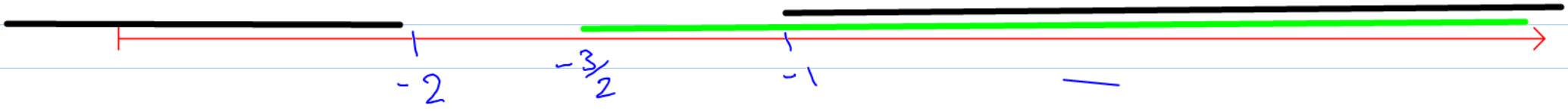
$k > -\frac{3}{2}$

$(k+1)(k+2) > 0$

$k > -1 \;\cup\; k < -2$

	-2		-1	
$k+1$	$-$	$-$	0	$+$
$k+2$	$-$	0	$+$	$+$
$(k+1)(k+2)$	$+$	0	$-$	0 $+$

$k > -1 \rightarrow$ j ?



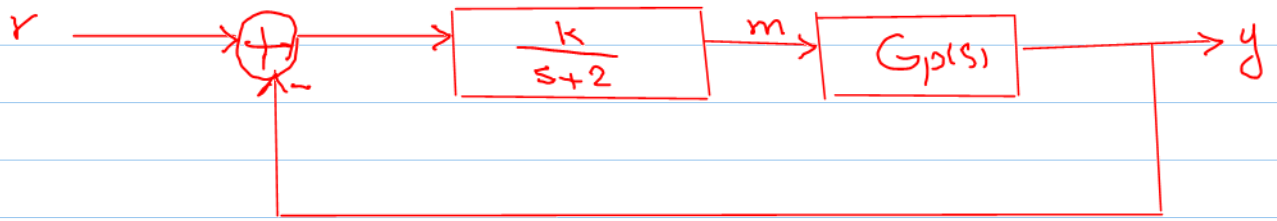
مثال ۷۴. سیستم زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید معادلات حالت $G_p(s)$ به صورت زیر باشد.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} m(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

مقدار k که به ازای آن دو تا از ریشه های معادله مشخصه حلقه بسته روی محور $j\omega$ قرار گیرند برابر است با:

۱) -30 ۲) 20 ۳) 30 ۴) 40



فضای حالت حلقه باز ← $G_p(s)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

→ فضای حالت استاندارد

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 0 \times s^0} = \frac{1}{s^2+3s}$$

تشریح:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$G_p(s) = C\,(sI - A)^{-1} B + 0$$

$$(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+3)} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+3)} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{s^2+3s}$$

$$\Delta(s) = 1 - \left(-1 \times \frac{k}{s+2} \times \frac{1}{s^2+3s} \right) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s^3+5s^2+6s} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + k = 0$$

: جواب دوم روی دوم مرز ناپایداری

↓

$$5 \times 6 = 1 \times k$$

← نوسانی

برق ۸۵ . برای سیستم با معادلات توصیف زیر، مقدار a و b برای پایداری کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + x_1(t) - 2u(t) + a x_2(t) = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} - b x_1(t) + 4u(t) = 0 \end{cases}$$

1) $ab > 0$

2) $a > 0, b < 0$

3) $a > 0, b = 0$

4) $a < 0, b < 0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - ax_2 + 2u \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_1 - 4u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} u$$

$$\Delta(s) = \det(sI - A)$$

$$= \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & a \\ -b & s \end{bmatrix} \right)$$

$$\Delta(s) = s^2 + s + ab = 0 \rightarrow \quad ab > 0 \quad \text{شرط پایداری}$$

پایداری نسبی:

معیار هورویتز

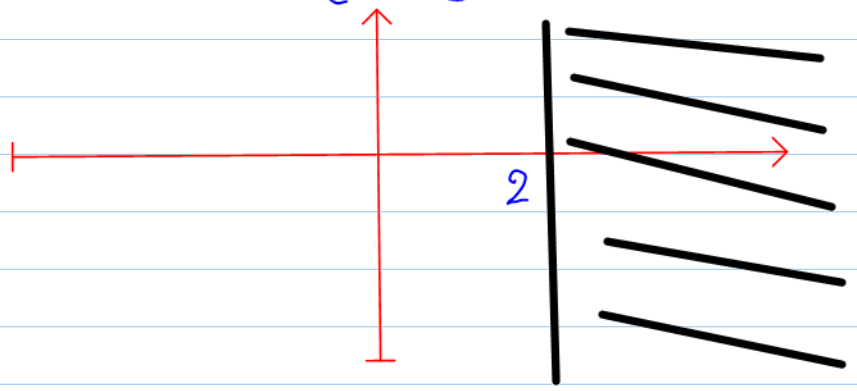
* برای بدست آوردن تعداد قطبهای سمت چپ هورویتز دو تا راه حل داریم:

۱- تعداد قطبهای سمت راست وارد هورویتز راحت کنیم و از تعداد کل قطبها کم کنیم.

2- به جای s، s- می‌گذاریم و جدول RH را برای $\Delta(-s)$ تکمیل می‌کنیم، تعداد تغییر علامت در ستون اول جدول حاصل برابر تعداد قطبهای سمت چپ هورویتز است (فقط وقتی که در سوال نمی‌خواهد تعداد قطبهای سمت چپ هورویتز را بخواهد)

برای بدست آوردن تعداد قطبهای سمت چپ یا راست و یا روی خط $Re(s)=a$ یا $s=a$

در $\Delta(s)$ به جای s ها $s+a$ می‌گذاریم و جدول را برای $\Delta(s+a)$ تکمیل می‌کنیم. آنگاه در آخر تعداد تغییر علامت جدول روی $s=a$ به جای محور موهومی، خط $s=a$ قرار می‌گیرد.



جدول ← $\Delta(s+2)$ ←

برخی ۱۸۷. در سیستم با معادله مشخصه

$s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 5s + 4 = 0$ مقدار

قطبهای سیستم چیپ فور سی کدام است؟

1) 2 2) 4 3) 3 4) 5

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 5s + 4 = 0$$

چون فقط تعداد قطبهای سمت چپ را خواسته ← $s \to -s$

$$\Delta(-s) = (-s)^5 + 2(-s)^4 + 2(-s)^3 + 4(-s)^2 + 5(-s) + 4 = 0$$

$$\Delta(-s) = -s^5 + 2s^4 - 2s^3 + 4s^2 - 5s + 4 = 0$$

	s^5	-1	-2	-5
$\frac{1}{2}\times$	s^4	2	4	4
	s^3	ε	-3	0
	s^2	$\frac{2\varepsilon+3}{\varepsilon}$	2	0
	s^1	B	0	
	s^0	2		

حالت خاص ۱

$$B = \frac{\frac{2\varepsilon+3}{\varepsilon}\times -3 - 2\varepsilon}{\frac{2\varepsilon+3}{\varepsilon}}$$

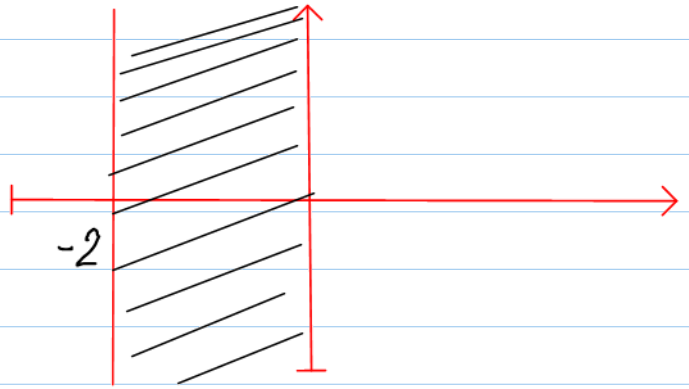
$$= \frac{\frac{-6\varepsilon - 9 - 2\varepsilon^2}{\varepsilon}}{\frac{2\varepsilon+3}{\varepsilon}} = \frac{-2\varepsilon^2 - 6\varepsilon - 9}{2\varepsilon+3}$$

$\varepsilon = 0^+$

$$B \approx \frac{-9}{3} < 0$$

۲ تا تغییر علامت در ستون اول $\Delta(-s)$ ← ۲ قطب سمت چپ هستند پس

برق ۷۸. $s^3+5s^2+11s+15=0$ ، این معادله در ناحیه هاشور خوردن چند ریشه دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

تعداد قطبهای $\Delta(s)$ که سمت چپ خط $Re(s) = -2$ هستند؟

مرحله اول

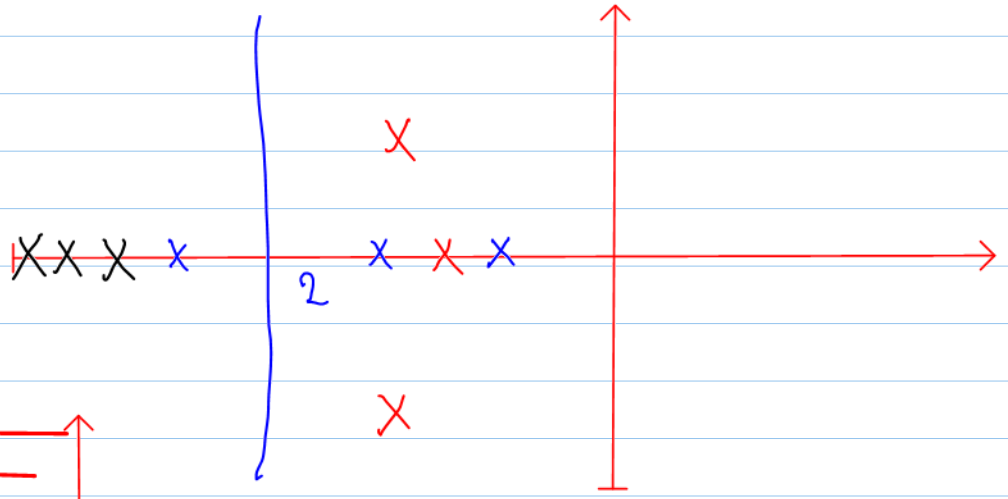
① تعداد قطبهای سمت چپ محور $j\omega$

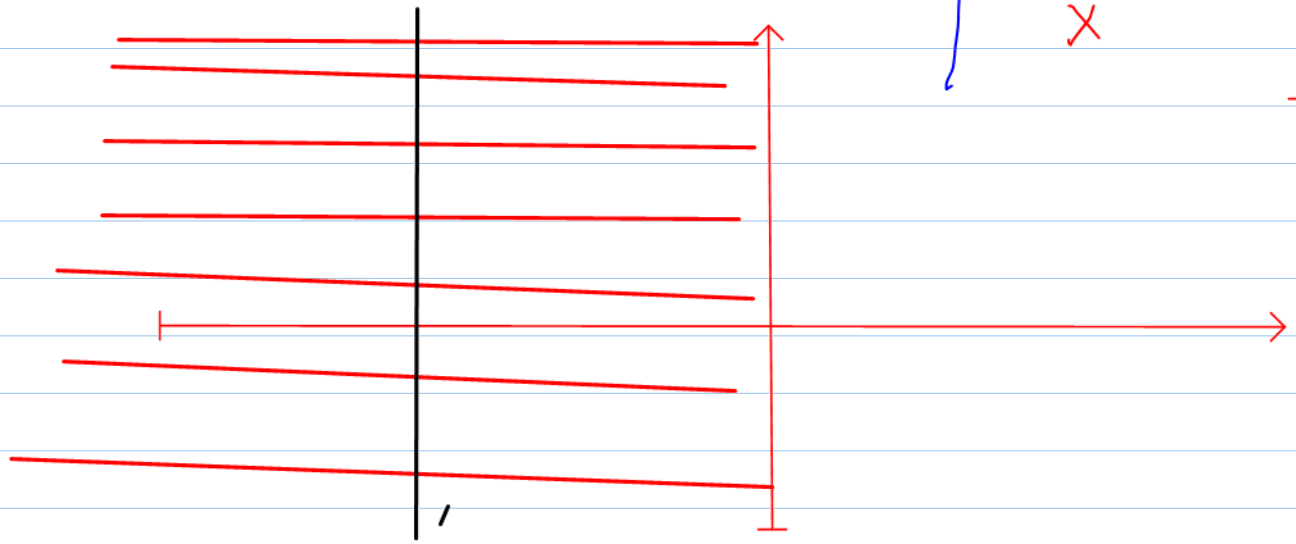
$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15 = 0$$

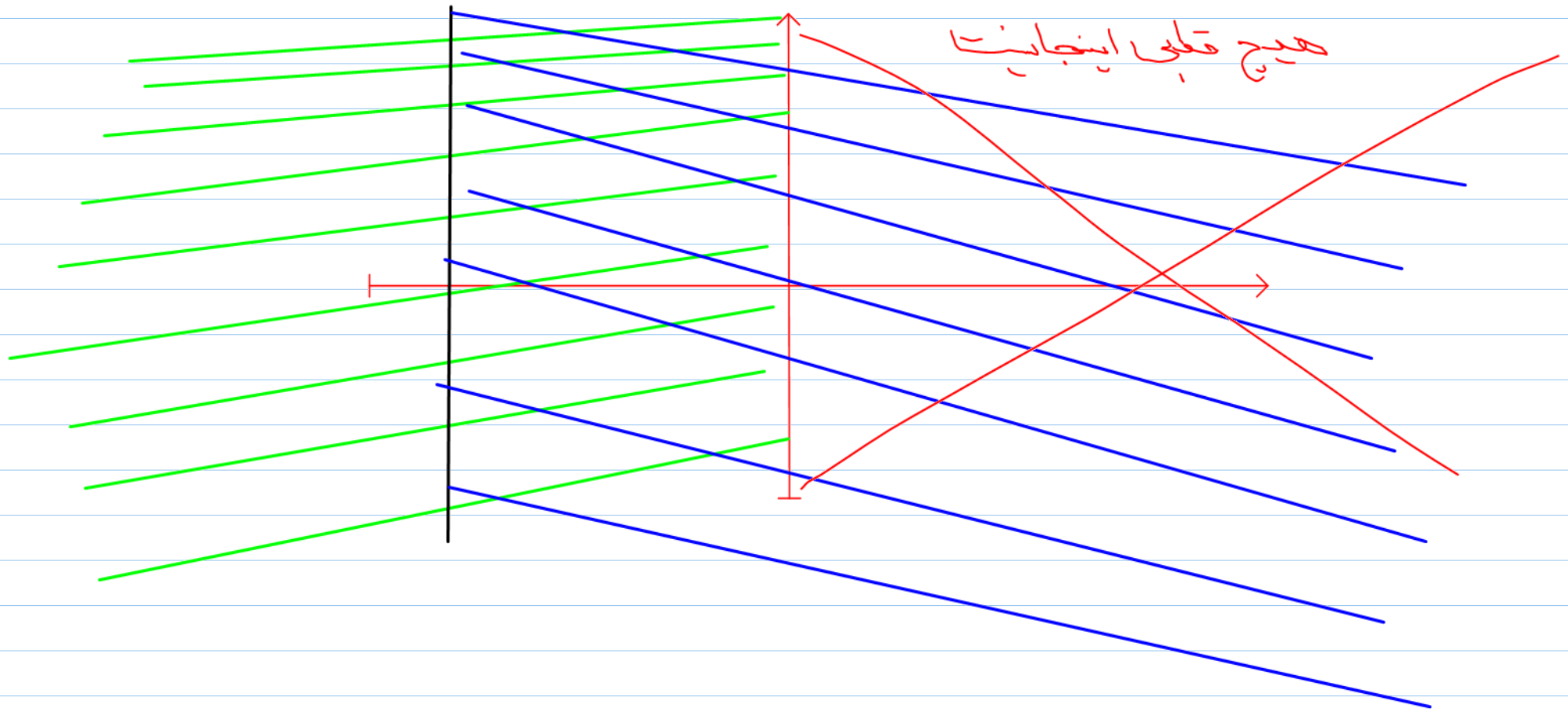
حرف قطبها سمت چپ محور $j\omega$ → برابر ۰

$5 \times 11 > 1 \times 15$ →

s^3	1	11
$\frac{1}{5} \times s^2$	~~5~~ 1	~~15~~ 3
s^1	8	0
s^0	3	







مرحله دوم:

تعداد قطبهای سمت راست خط $Re(s)=-2$ ؟

$$\Delta(s-2) = (s-2)^3 + 5(s-2)^2 + 11(s-2) + 15 = 0$$

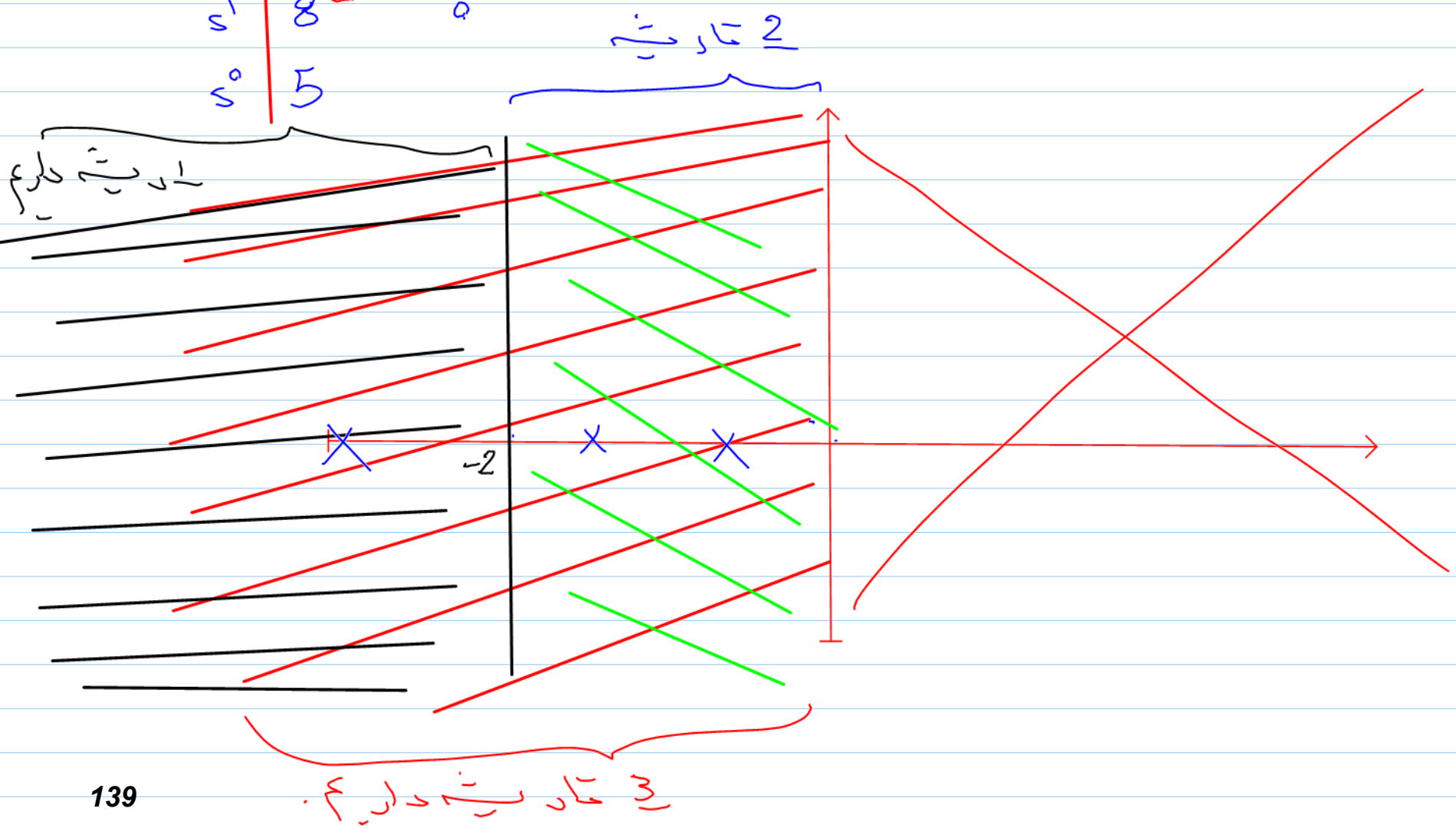
$$= s^3 + 6s^2 + 12s - 8 + 5s^2 - 20s + 20 + 11s - 22 + 15 = 0$$

$\Delta(s-2) = s^3 - s^2 + 3s + 5 = 0$

2 تا ریشه سمت راست خط $Re(s)=-2$ است.

1 ~ ~ ~ ~ چپ ~ ~ ~ ~

s^3	1	3
s^2	-1	5
s^1	8	0
s^0	5	



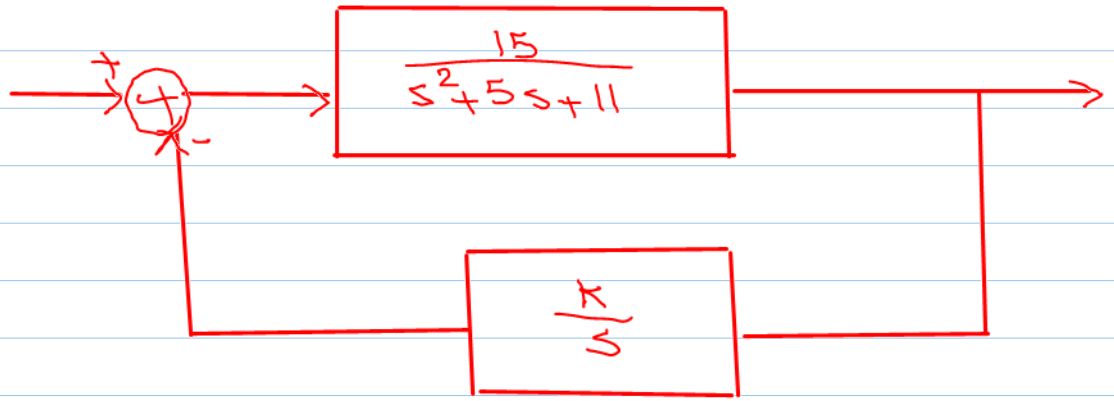
برق ۹۴. سیستم زیر به ازای چه مقدار k، فقط دو قطب حلقه بسته در ناحیه $-2 < Re(s) < 0$ دارد؟

۱) $\frac{1}{5} < k < \frac{11}{5}$

۲) $\frac{2}{3} < k < \frac{11}{3}$

۳) $\frac{7}{15} < k < \frac{11}{3}$

۴) غیر ممکن است.

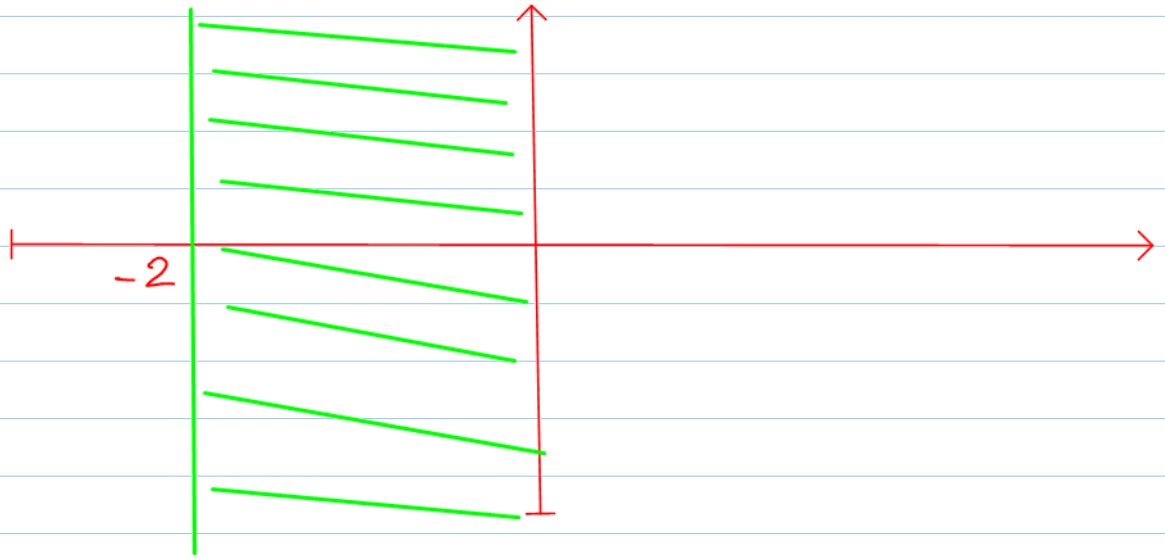


$$\Delta(s) = 1 - \left(-\frac{k}{5} \quad \frac{15}{s^2+5s+11} \right) = 0$$

بازای چه مقدار k سیستم دارای قطب

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15k = 0$$

2 قطب در نامیه حاشور خواهد داشت؟



① بازای مقادیر مختلف k، مقادیر ریشه‌ها را نسبت به محور $j\omega$ مشخص می‌کنیم.

② ~ ~ $Re(s) = -2$ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

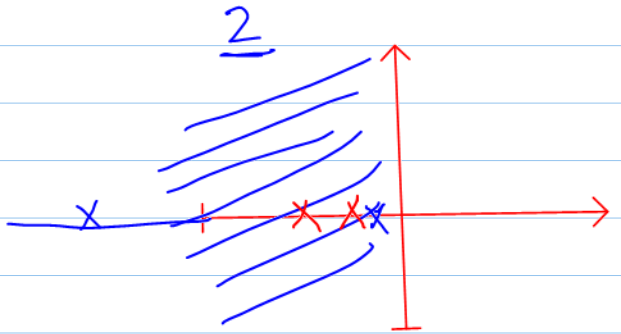
$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15k = 0$$

	s^3	$1 \quad +\quad +\quad 11$
$\frac{1}{5} \times$	s^2	$5 \quad 1 \quad +\quad +\quad 15k \quad 3k$
	s^1	$11-3k \quad +\quad +\quad -\quad 0$
	s^0	$3k \quad -\quad +\quad +$

① $k<0$ ✓ ←

۱ قطب سمت راست خود سیز و

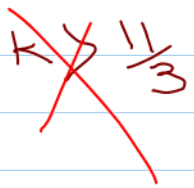
~ ~ حیب ~ ~ 2



② $0<k<\frac{11}{3}$ ✓

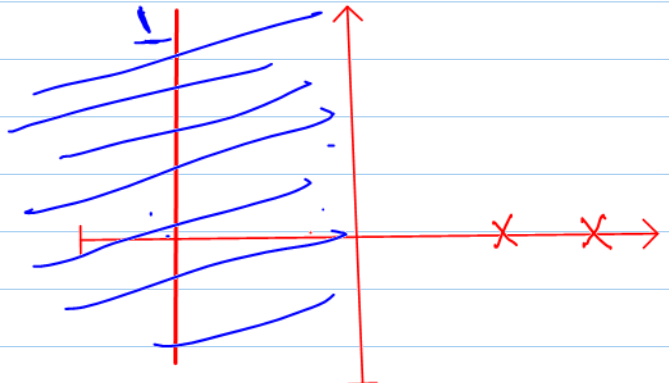
۲ قطب سمت راست خود سیز

~ ~ حیب ~ ~ 3

③ 

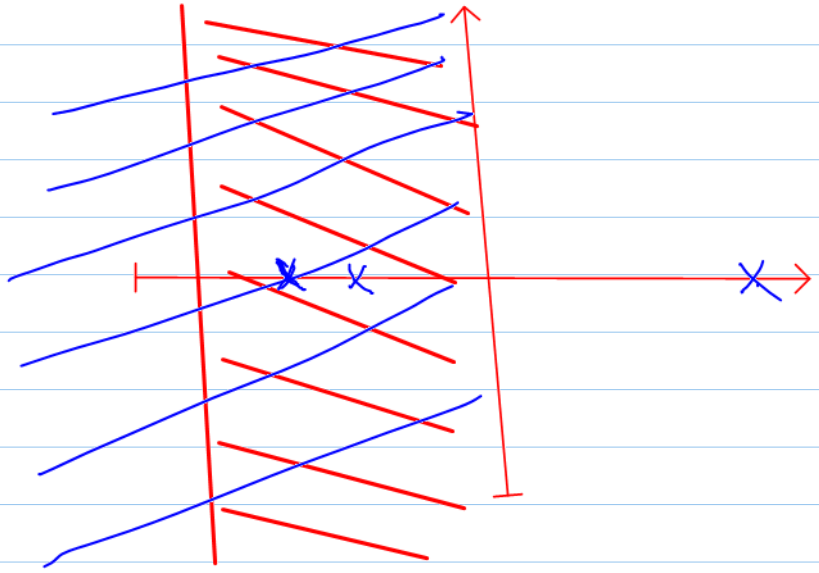
۲ قطب سمت راست خود سیز

۱ قطب سمت حیب خود سیز



حالت اول: $k<5$ مجموعاً 2 قطب سمت چپ خود لازم هستند.

سوالی برای k که این دو قطب سمت راست خود $Re(s)=-2$ باشند.



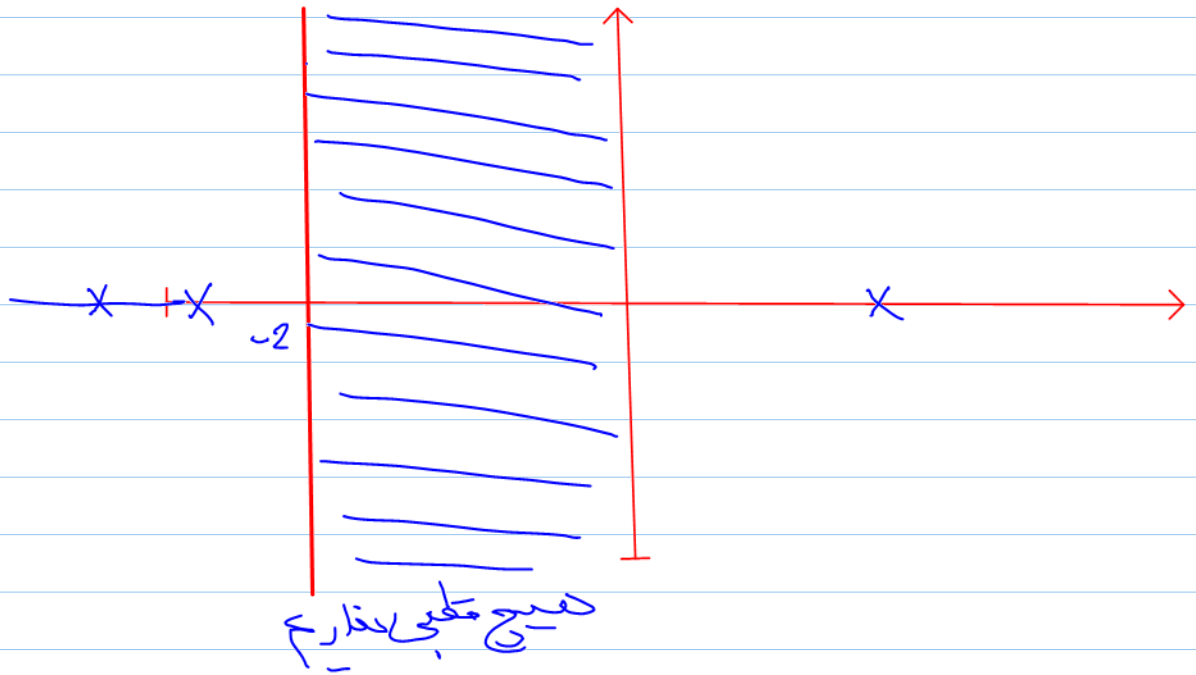
سئوال: مقادیری از k که $\Delta(s-2)$ دارای 3 قطب سمت راست باشد؟

$$\Delta(s-2) = s^3 - s^2 + 3s + 15k - 10 = 0$$

s^3	1	+	3
s^2	-1	-	$15k-10$
s^1	$15k-7$	-	0
s^0	$15k-10$	-	

داریم $k<5$

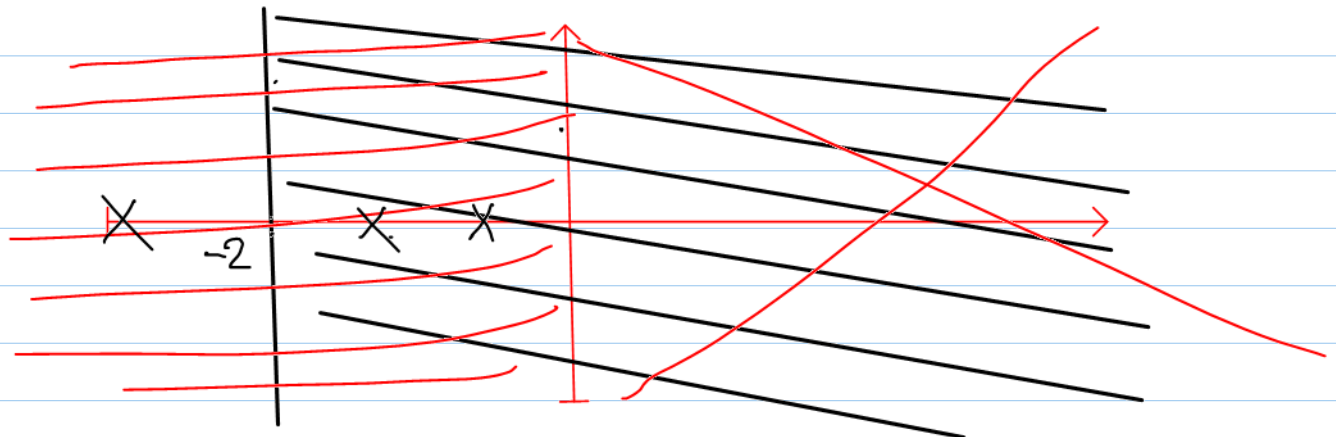
پس اگر $k>0$ باشد فقط یک قطب $\Delta(s)$ سمت راست خط $Re(s)=-2$ است.



صحیح مطلبی بفرمایید

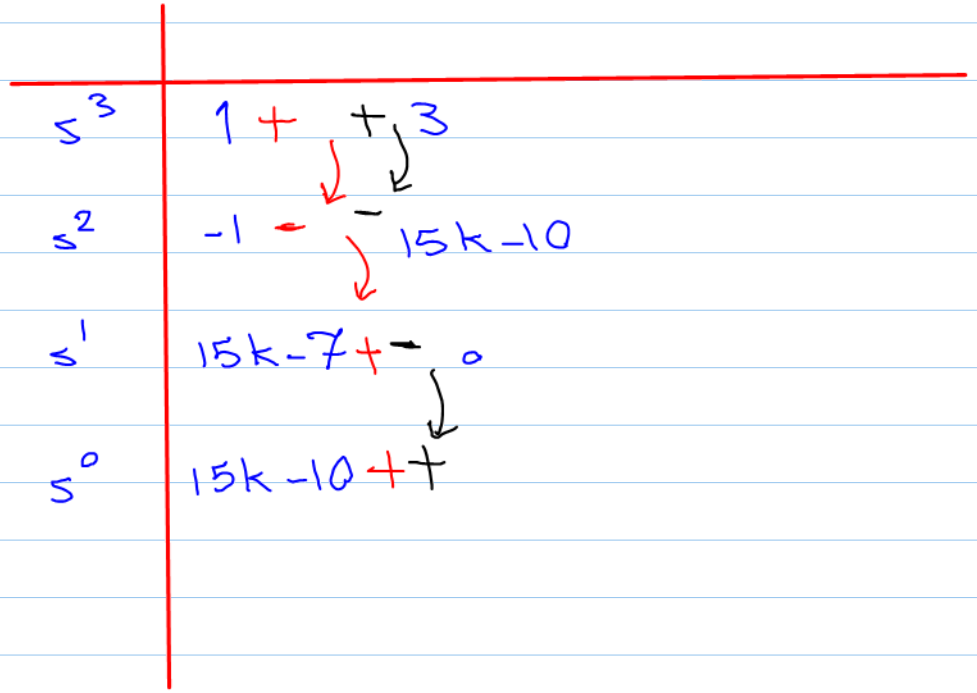
$k>0$ قابل قبول نیست.

حالت دوم: $0<k<\frac{11}{3}$ ← هر سه قطب $\Delta(s)$ سمت چپ محور ساز است.



هدف: محاسبه‌ی k که $\Delta(s)$ دارای 2 قطب مساوی $Re(s)=-2$

$\Delta(s-2)$



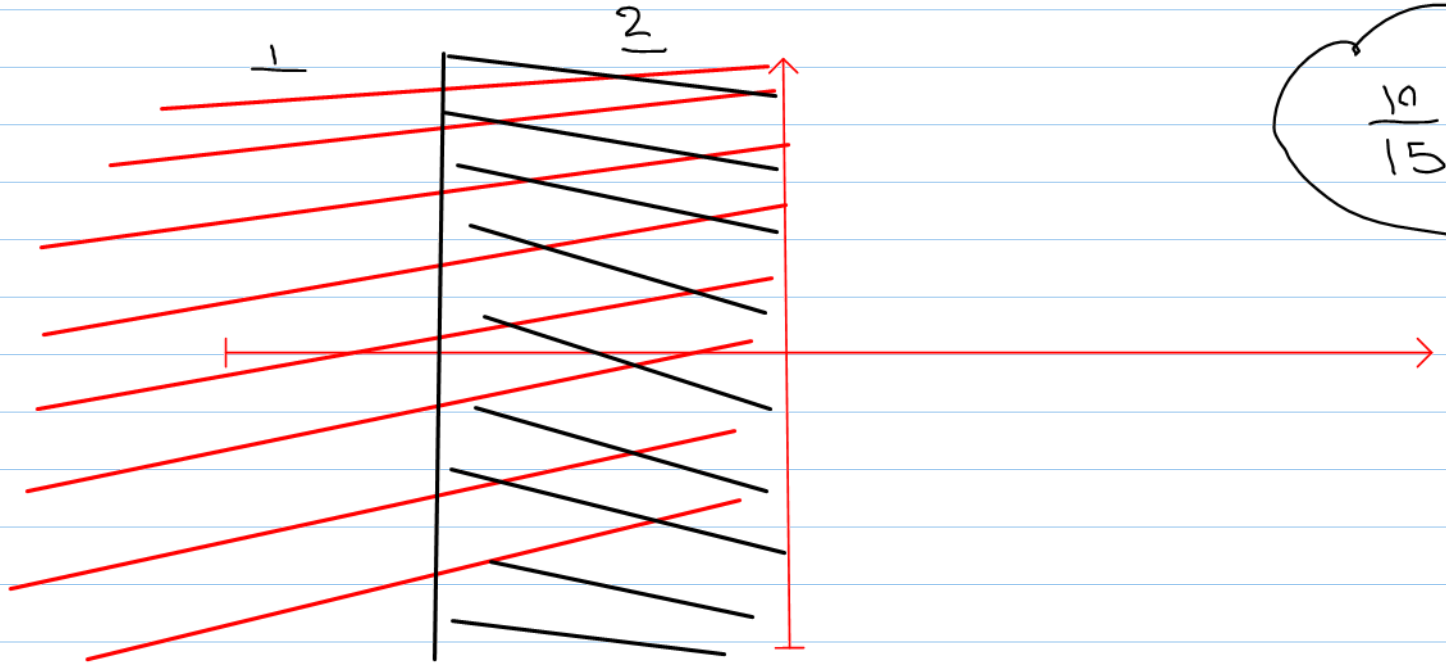
① حالت → $k > 7/15$ ، $k > \frac{10}{15}$ → $k > \frac{10}{15}$

② ~ $k < 7/15$ ، $k > \frac{10}{15}$ → استوکاستیک پذیر نیست

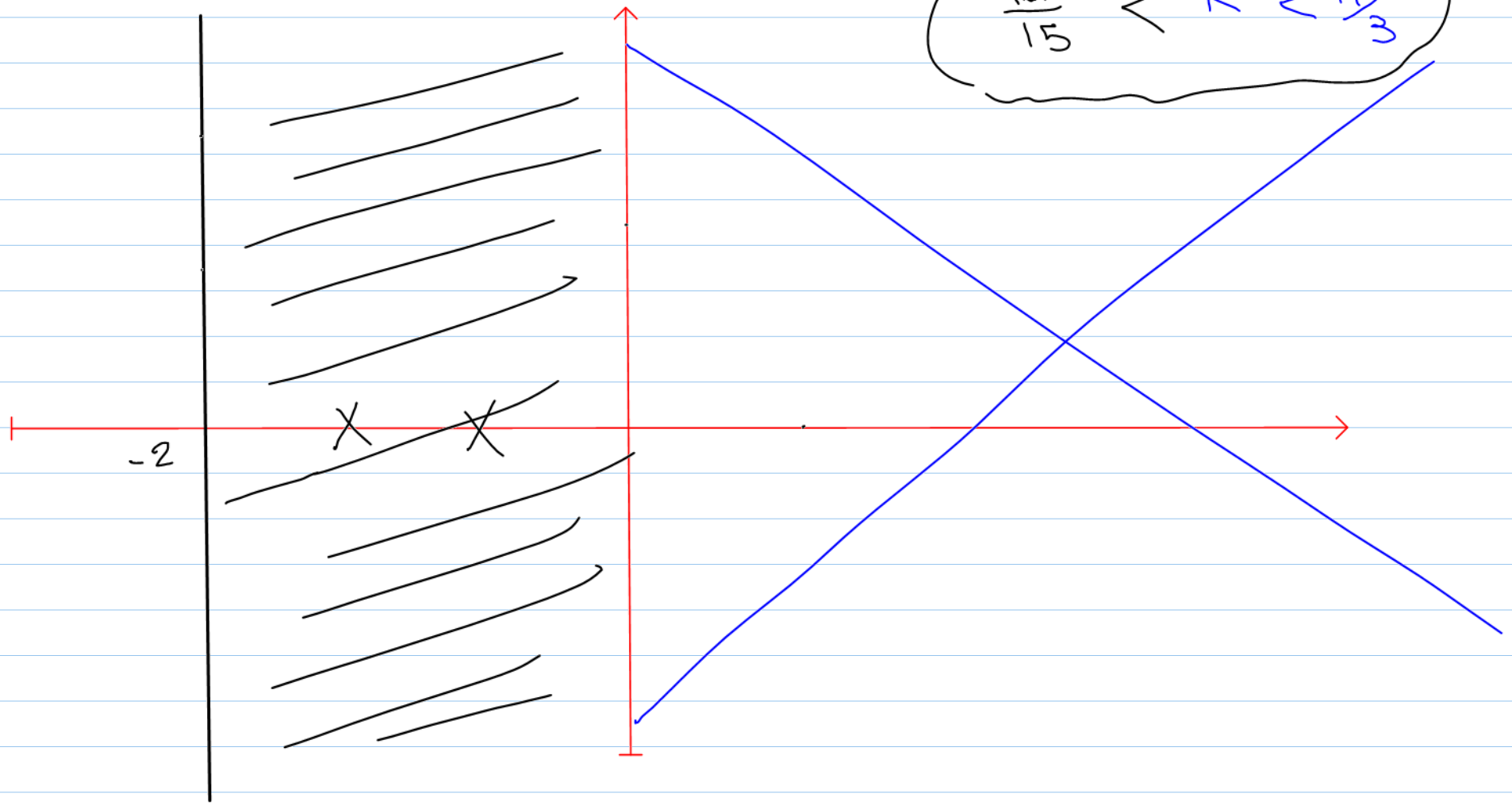
پس این حالت ② امکان پذیر است.

$K > \frac{10}{15}$ ، $\Delta(s)$ دارای دو قطب سمت راست خط $Re(s) = -2$ است.

$0 < K < \frac{11}{3}$ ، $\Delta(s)$ ~ 3 ~ جبر فوق ~ راست.



$$\frac{10}{15} < K < \frac{11}{3}$$


$\frac{12}{15} < k < \frac{11}{3}$
-2

درمورد پایداری سیستم با معادلات فضای حالت زیر، کدام گزینه صحیح است؟

۱) پایدار است ۲) پایدار مرزی است ۳) به دلیل حذف صفر و قطب ناپایدار است

۴) به دلیل حذف صفر و قطب ~~غ~~ نمی توان درمورد پایداری اظهار نظر کرد.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{0}_{D} \times u \end{cases}$$

$$\Delta(s) = \det(sI - A) \Rightarrow sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+6 & 11 & 6 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (-1)^{1+1}(s+6) \times s^2 + (-1)^{1+2} \times -1 \times (11s + 6)$$

$$\det(sI - A) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6^{0} = 0$$

$6 \times 11 > 1 \times 6$ ✓ $\rightarrow$ این $\Delta(s)$ پایدار است.

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s-1)\,\Delta(s)} = \frac{1}{\Delta(s)}$$

اگر در تابع تبدیل صفر سمت راست با یک قطب سمت راست حذف شود ناپایدار

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)\,\Delta(s)} = \frac{1}{\Delta(s)}$$

ریشه های این معادله مقادیر ویژه $\det(sI - A) = 0 \longrightarrow$

مقادیر ویژه $\subseteq$ قطبهای تابع تبدیل

مقادیر ویژه تمام قطبهای سیستم را نشان می دهد ←

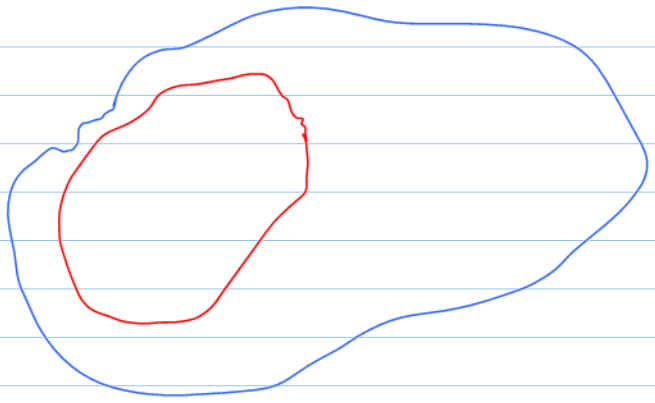
$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \longrightarrow \Delta(s) = (s+2)(s+3)$$

$$p_{1,2} = -2, -3$$

$$\lambda_i = \{-2, -3, -1$$

$\Delta(s)$ ← مخرج تابع تبدیل

$\det(sI - A) = 0$

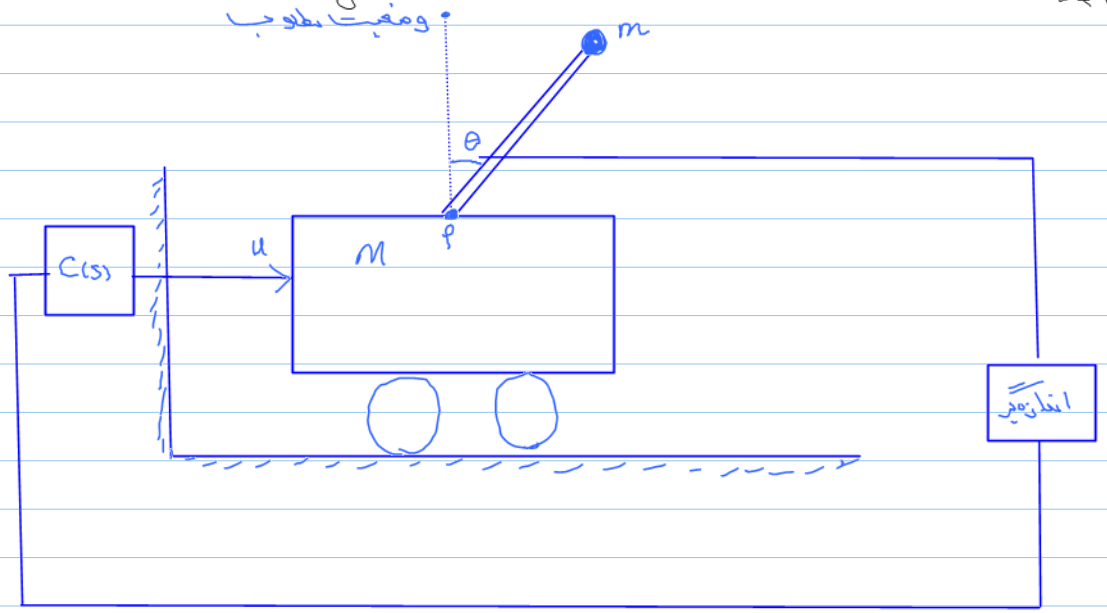


$$\frac{y}{u} = \frac{s+1}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \quad p = -2, -3$$

$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0 \longrightarrow \lambda = -1, -2, -3$

سیستم آونگ وارون زیر را در نظر بگیرید. با استفاده از کدام کنترلر $C(s)$ می‌توان آونگ را در وضعیت پایدار قرار داد؟

1) $C(s)=k_p$
2) $C(s)=k_p+k_d s$ با $k_p>(M+m)g$
3) $C(s)=\frac{s-1}{s+1}$
4) $C(s)=k_p+k_d s$ با $k_d>(M+m)g$



تابع تبدیل حلقه باز سیستم به صورت $G(s) = \frac{k(0.25s+1)}{(s+0.5)^2(0.5s+1)}$ است. به ازای چه مقدار k، حاشیه فاز برابر 45 درجه است؟

1) 12.5 2) 10 3) 6.25 4) به ازای هیچ مقدار k

$$\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$$

$$= 1 + \frac{k(0.25s+1)}{(s+0.5)^2(0.5s+1)} = 0$$

$$= (s^2+s+0.25)(0.5s+1) + k(0.25s+1) = 0$$

$$\Delta(s) = 0.5s^3 + 1.5s^2 + \left(\frac{9}{8} + \frac{k}{4}\right)s + \frac{1}{4} + k = 0$$

شرط نوسانی $\rightarrow$ $\frac{3}{2} \times \left(\frac{9}{8} + \frac{k}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k$

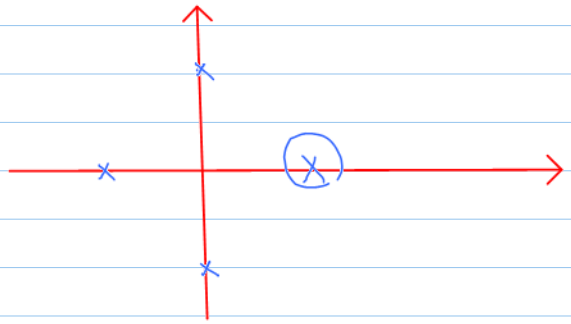
$$\left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8}\right)k = \frac{27}{16} \rightarrow \boxed{k = -\frac{27}{5}}$$

معادله مشخصه سیستم $\Delta(s) = s^4 - s^3 - 7s^2 + s + 6 = 0$ است. این

سیستم چند قطب ناپایدار دارد؟

3 2 1 0

$$\Delta(s) = s^4 - s^3 - 7s^2 + s + 6 = 0$$



قطبها → مثبت، منفی، روی محور jω

حل ← (تعداد قطبهای ناپایدار) = (تعداد تغییر علامت در ستون اول) ← راه حل

$\Delta(-s)$ ← راه حل ← تعداد تغییر علامت در ستون اول

$$\Delta(-s) = (-s)^4 - (-s)^3 - 7(-s)^2 + (-s) + 6 = 0$$

$$\Delta(-s) = s^4 + s^3 - 7s^2 - s + 6 = 0$$

s^4	1+	-7	6
s^3	1+	-1	0
s^2	~~-6~~ -1	~~6~~ 1	
s^1	~~0~~ -2	0	
s^0	1+		

$\frac{1}{6}$

$A(s^2) = -s^2 + 1$

$\frac{dA}{ds} = -2$

2 تا تغییر علامت دارد ← $\Delta(s)$ دو تا قطب ناپایدار

$$\Delta(s) = s^4 - s^3 - 7s^2 + s + 6 = 0$$

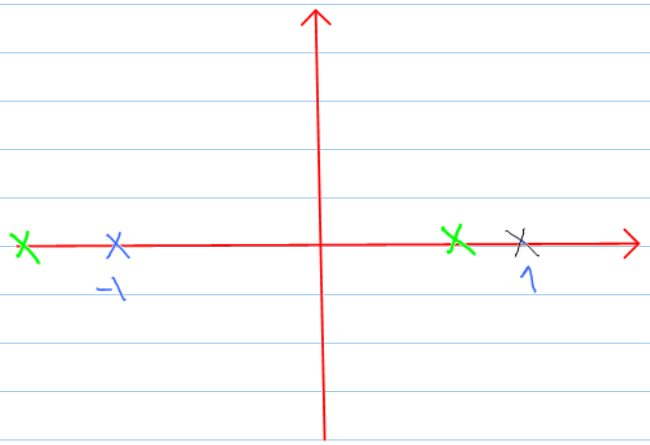
s^4	1	-7	6
s^3	-1	1	0
s^2	~~-6~~ -1	~~6~~ 1	
s^1	~~0~~ -2	0	
s^0	1		

قطبها ناستقارن

ستقارن

$\rightarrow A(s^2) = -1s^2 + 1 = 0 \rightarrow s = \pm 1$

$\frac{dA}{ds} = -2s$

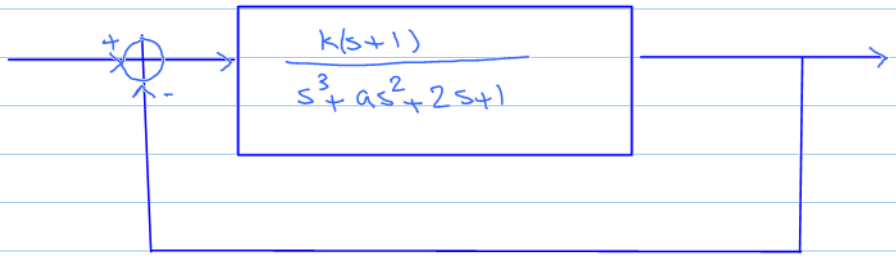


سیستم کاملاً میرا است ←
- 2 تا قطب ستقارن
- 1 قطب ناستقارن محتاراست
- 1 ~ ستقارن محتاراست

$\Delta(s) \rightarrow s^4 \rightarrow$ از درجه $\rightarrow$ 4 تا قطب
- 2 تا ناستقارن
  - 1 محتارات
  - 1 محتجیب
- 2 تا ستقارن
  - 1 محتارات

دستگاه زیر به ازای چه مقدار از a سیستم در فرکانس $2\ \frac{rad}{sec}$ نوسان میکند؟

1) 0 2) 0.75 ✓ 3) 1.25 4) 1/7



فرکانس نوسانات ← ریشه های موهومی ← مرز پایداری

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s^3+as^2+2s+1} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + as^2 + (2+k)s + 1 + k = 0 \qquad \omega = 2\ rad/sec$$

به ازای چه مقدار از k و a سیستم در مرز پایداری ← $\omega = 2\ rad/sec$

شرط نوسانی → $a(2+k) = 1\times(1+k)$ → $k+1-ak-2a=0$

$$a = \frac{1+k}{2+k}$$

فرکانس نوسانی → $as^2 + 1 + k = 0$

$$\frac{1+k}{2+k}s^2 + (1+k) = 0 \rightarrow s = \pm j\sqrt{2+k}$$

$$\omega = 2 = \left|\pm j\sqrt{2+k}\right| = \sqrt{k+2} \rightarrow \sqrt{k+2} = 2$$

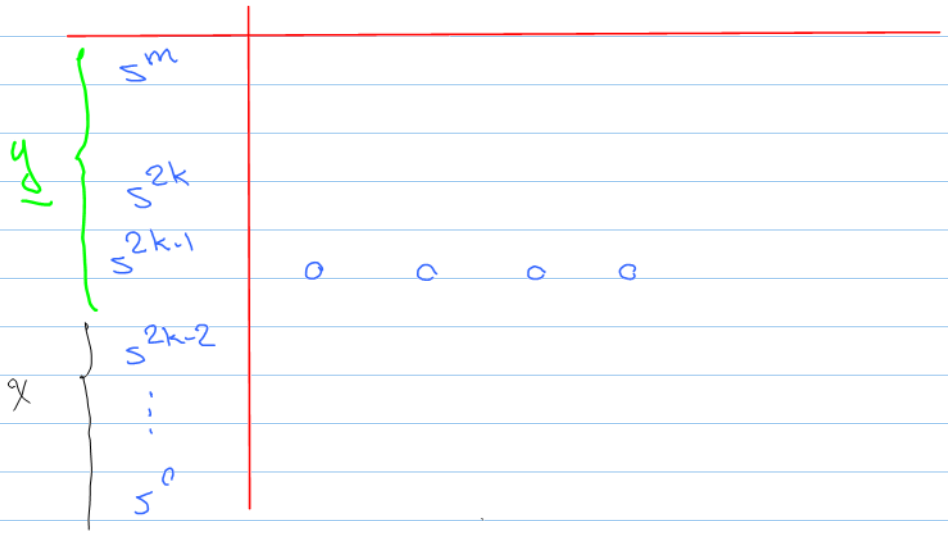
$$\boxed{k=2} \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Delta(s) \rightarrow \left.\begin{matrix}\Delta(j2)=0\\ \Delta(-j2)=0\end{matrix}\right\} \rightarrow$$

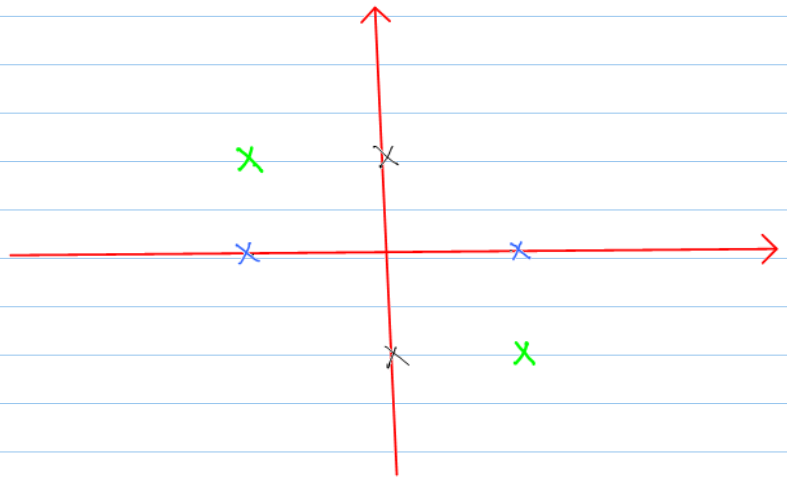
برق ۹۳. در تشکیل جدول R-H برای یک معادله مشخصه سیستم مرتبه m، سطر s^{2k-1} کاملاً صفر شده است. اگر تعداد تغییر علامتهای ستون اول قبل از سطر s^{2k} را با y و بعد از آن را با x نشان دهیم، شرط وجود قطب روی محور موهومی کدام است؟

۱) $x<k$ ۲) $y<k$ ۳) $x<m-k$ ۴) $y<m-k$

$$\Delta(s) = s^m + \dots$$



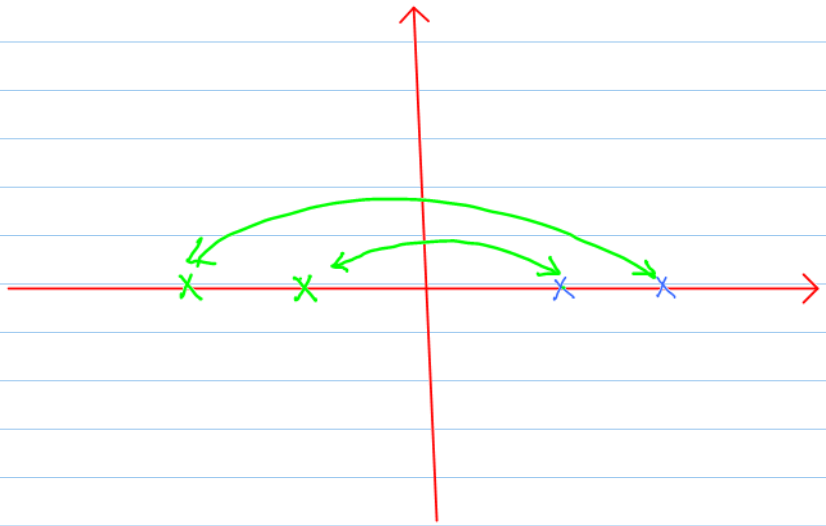
اطلاعات:
* m تا قطب
* 2k تا قطب مستقارن
* y تا قطب نامستقارن ناپایدار
* x تا قطب نامستقارن پایدار



روی محور موهومی = قطبهای مستقارن + سمت چپ و راست

تعداد ستاره‌ها = تعداد ستاره‌های سمت راست + تعداد ستاره‌های روی قوس

$2k = 2x$ (تعداد ستاره‌های سمت راست) + تعداد ستاره‌های روی قوس



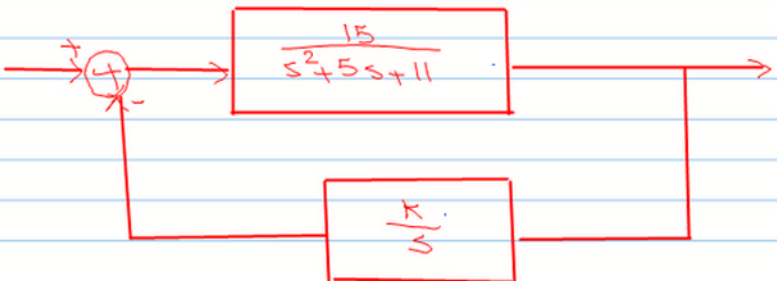
تعداد مقابله‌های روی قوس باز $= 2k - 2x > 0 \rightarrow \boxed{k > x}$

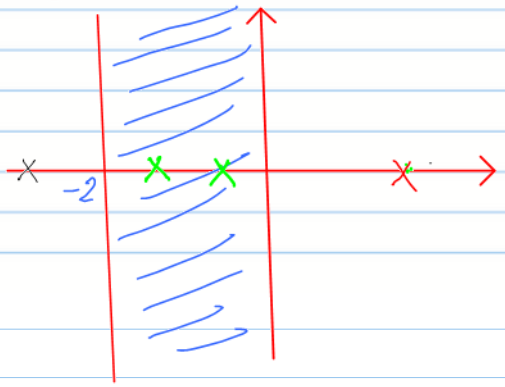
$\leftarrow$ تعداد مقابله‌های روی قوس باز عددی مثبت است.

برق ۹۴. سیستم زیر به ازای چه مقدار k، فقط دو قطب حلقه بسته در ناحیه $-2 < Re(s) < 0$ دارد؟

۱) $\frac{1}{5} < k < \frac{11}{5}$ ۲) $\frac{2}{3} < k < \frac{11}{3}$

۳) $\frac{7}{15} < k < \frac{11}{3}$ ۴) غیر ممکن است.





$$\Delta(s) = 1 + \frac{15k}{s^3+5s^2+11s} = 0$$

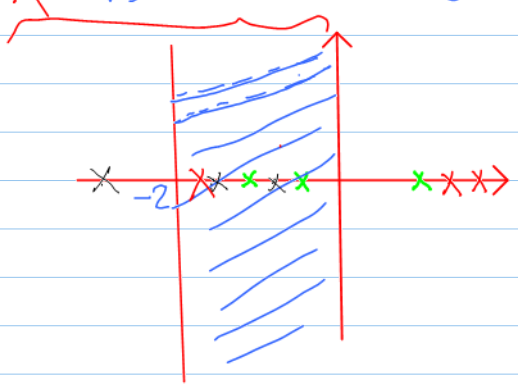
$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 11s + 15k = 0 \rightarrow$$ حداکثر 3 ناقطب

s^3	$1 \quad + \quad + \quad 11$
s^2	$5 \quad 1 \quad + \quad + \quad 15k \quad 3k$
s^1	$11-3k \quad + \quad + \quad - \quad 0$
s^0	$3k \quad - \quad + \quad +$

حالت اول: $k < 0$ ← 1 قطب ست راست و 2 قطب ست چپ ✓

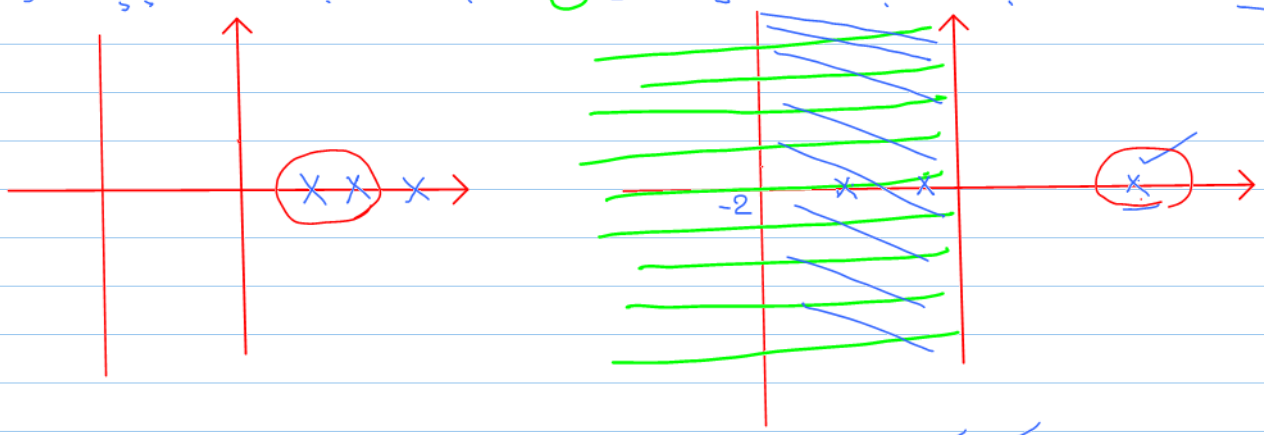
حالت دوم: $0 < k < \frac{11}{3}$ ← 3 قطب ست چپ ✓

حالت سوم: $k > \frac{11}{3}$ ← 2 ناقطب ست راست و یک قطب ست چپ ✗



$-2 < Re(s) < 0$

حالت $k<0$ ← 1 قطب حلقه بسته سمت راست و 2 قطب حلقه بسته سمت چپ محور $j\omega$



$k<0$

حدس ← k را طوری تعیین کنید که 3 قطب حلقه بسته سمت راست $Re(s)=-2$ باشند.

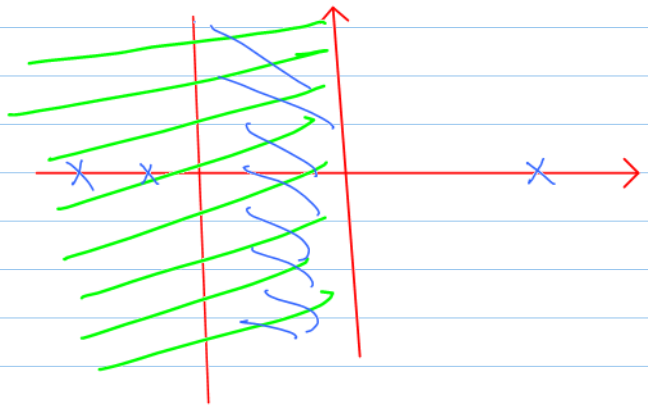
$$\Delta(s-2) = (s-2)^3 + 5(s-2)^2 + 11(s-2) + 15k = 0$$

$$\Delta(s-2) = s^3 + 12s - 6s^2 + 5s^2 - 20s + 20 + 11s - 22 + 15k - 8 = 0$$

$$\Delta(s-2) = s^3 - s^2 + 3s + 15k - 10 = 0$$

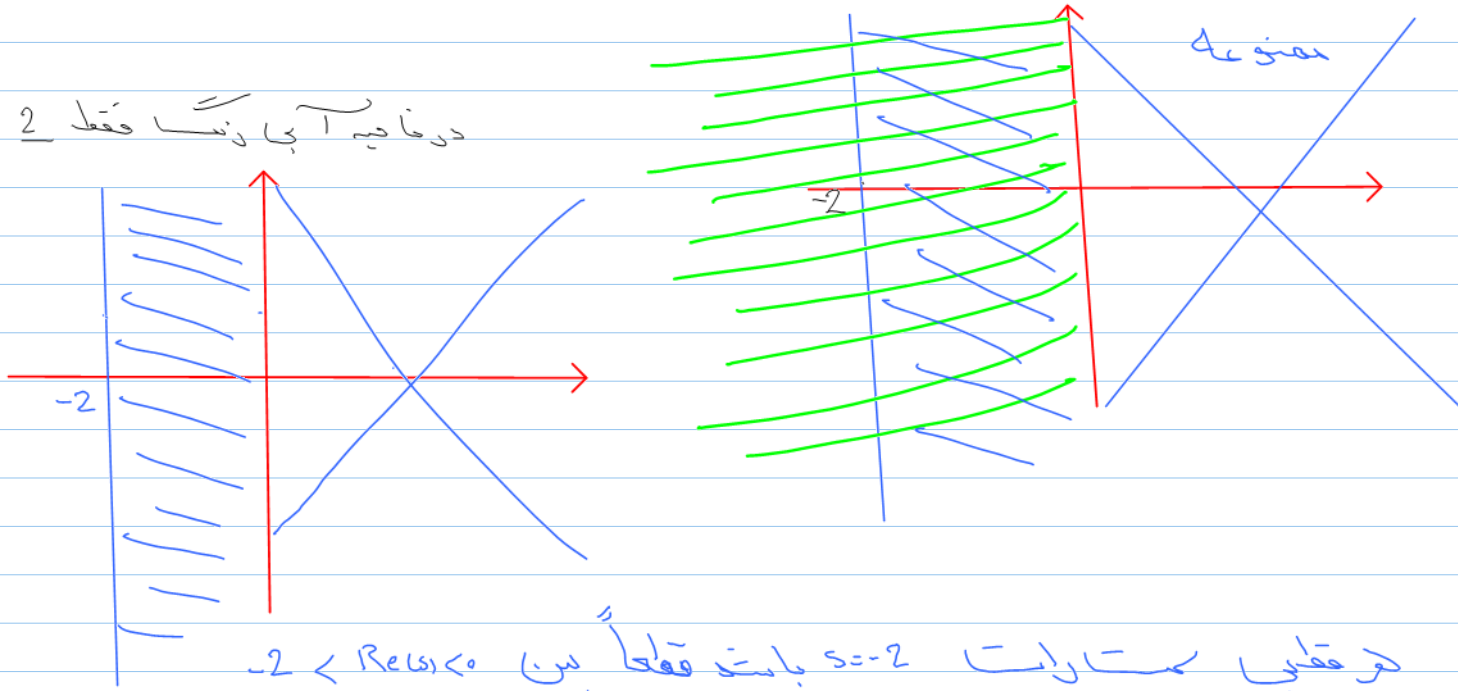
$k<0$

s^3	1	3
s^2	-1	$15k-10$
s^1	$15k-7$	0
s^0	$15k-10$	



1 قطب سمت راست $s=-2$ دارم.

حالت دوم: $0 < k < \frac{11}{3}$ ← 3 قطب سمت چپ محور $j\omega$



$-2 < Re(s) < 0$ باشد قطعاً بین $s=-2$ و قطب‌های سمت راست

$\Delta(s-2)$

$$0 < k < \frac{11}{3}$$

$\Delta(s-2)$ دو قطب سمت راست

s^3	1	3	
s^2	-1	$15k-10$	
s^1	$+15k-7-$	$+$	0
s^0	$-15k-10$	$+$	$+$

$\rightarrow \quad k < \frac{7}{15}$

$\rightarrow \quad \frac{2}{3} < k$

(1) $\quad k < 7/15$ ، $k > \frac{10}{15}$ ✗

جواب ✓ $k > \frac{10}{15}$ $\leftarrow$ $\begin{cases} k > \frac{7}{15} \\ k > \frac{10}{15} \end{cases}$ $\leftarrow 15k-10 > 0$ ، $15k-7 > 0$

فقط 2 تا قطب در $-2 < Re(s) < 0$ $\rightarrow$ $k > \frac{2}{3}$ ، $0 < k < \frac{11}{3}$

$$\frac{2}{3} < k < \frac{11}{3}$$

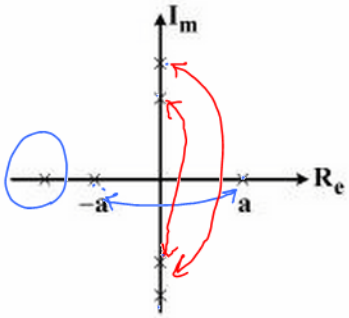
۳۸- چه اتفاقی در آرایهٔ راث، روی داده است؟

۱) فاکتور زوج معادلهٔ مشخصه، از مرتبهٔ ۴ است.

۲) تعداد تغییر علامت‌های بعد از سطر صفر یک می‌باشد.

۳) تعداد تغییر علامت‌های قبل از سطر صفر یک می‌باشد.

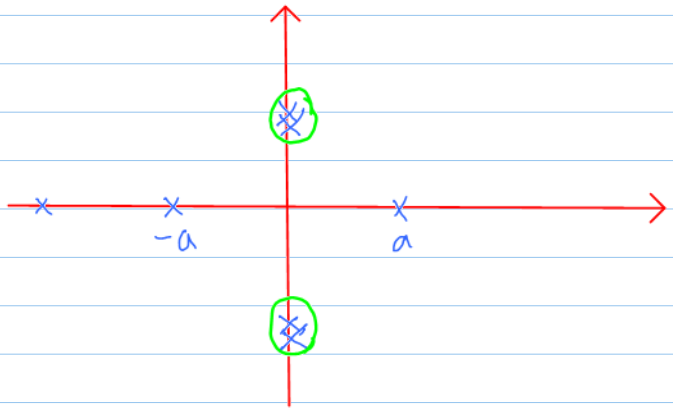
۴) دارای دو سطر صفر می‌باشد.



۱) ۴ تا ریشه متقارن دارد. $A(s^2) = s^4 + \cdots \rightarrow$

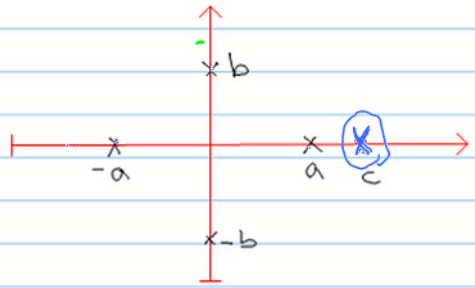
۲) تعداد بی‌نهایت علامت بعد از سطر صفر = تعداد ریشه‌های متقارن محاسباتی

۳) اگر دو سطر صفر داشته باشیم ← ۴ تا ریشه‌های متقارن روی ۴ تای دیگری‌اند.



مشخصه حلقه بسته سیستم با تابع تبدیل $G(s)$ در شکل زیر داده شده است. جدول RH متناظر برای این سیستم تکمیل شده است. آنگاه x_1 چه می‌تواند باشد؟

1) $x_1 < 0$ ✗ (2) $x_2 < 0$ ✗ (3) $x_3 < 0$ ✗ (4) $x_5 x_6 < 0$ ✗ (5) $x_1 < 0$ ✓



s^5	x_1	×	×
s^4	x_2		
s^3	$x_3 > 0$		
s^2	$x_4 > 0$		
s^1	x_5		
s^0	x_6		

① 4 تا قطب سمت راست ← سطر s^3 کاملاً صفر بوده

② 1 قطب ناسمت راست داریم ← قبل از سطر s^3 یک تغییر علامت داریم.

③ 1 ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ بعد ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

s^5	x_1		
s^4	x_2		
s^3	x_3	$4x_2$	0
s^2	x_4		
s^1	x_5		
s^0	x_6		

$\rightarrow$ $A(s^2) = x_2 s^4 + \cdots$

$\frac{dA}{ds} = 4x_2 s^3 + \cdots$

$x_3 = 4x_2 > 0$

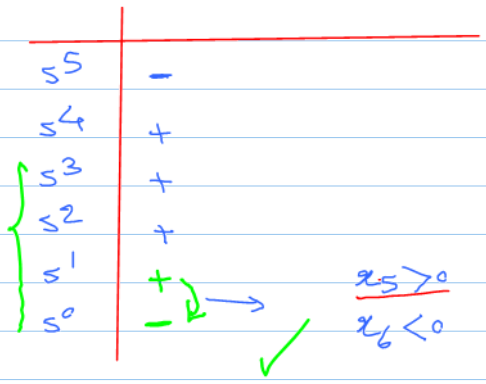
$x_3 > 0$

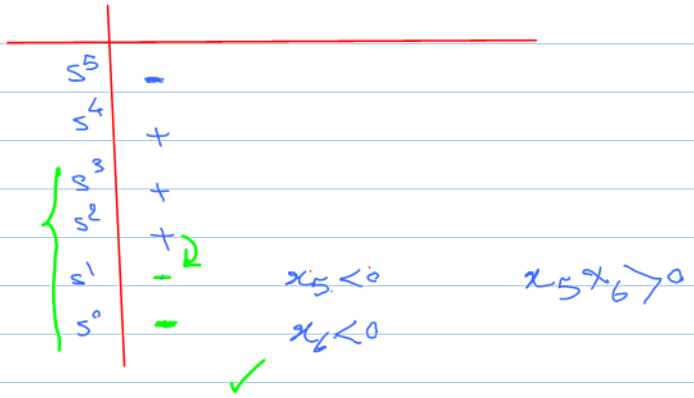
$x_4 > 0$

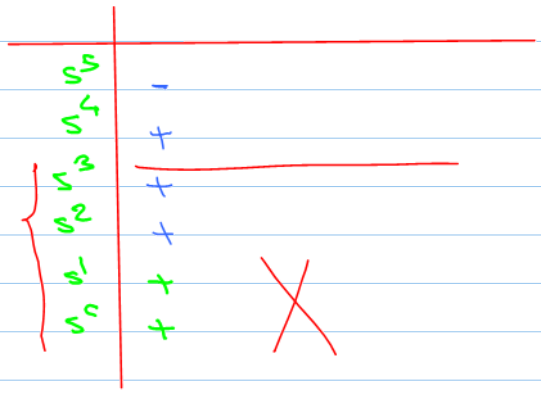
$x_2 > 0$

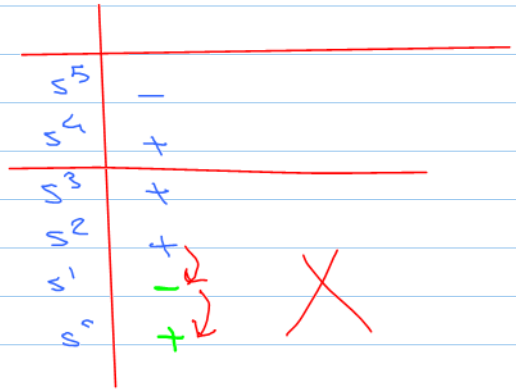
s^5	x_1 + −
s^4	+
s^3	+
s^2	+
s^1	x_5
s^0	x_6

قطعاً $x_1 < 0$ است.

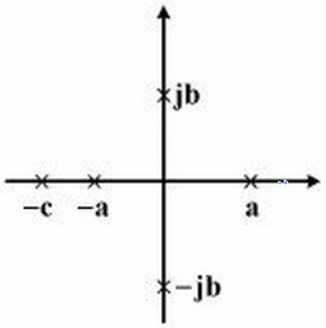

s^5 −
s^4 +
s^3 +
s^2 +
s^1 +
s^0 −
$x_5 > 0$
$x_6 < 0$


s^5 −
s^4 +
s^3 +
s^2 +
s^1 −
s^0 −
$x_5 < 0$
$x_6 < 0$
$x_5 x_6 > 0$


s^5 −
s^4 +
s^3 +
s^2 +
s^1 +
s^0 +


s^5 −
s^4 +
s^3 +
s^2 +
s^1 −
s^0 +

مشخصهٔ قطب‌های حلقه بستهٔ سیستمی با تابع $G(s)$ در شکل زیر داده شده است. جدول راث ـ هورویتز برای معادلهٔ مشخصهٔ این سیستم به‌صورت زیر به دست آمده است. در این مورد گزینهٔ صحیح کدام است؟



s^5	x_1	×	×
s^4	x_2	×	×
s^3	x_3	×	×
s^2	x_4	×	×
s^1	x_5	×	×
s^0	x_6	×	×

۱) $x_6 > 0$

۲) $x_2 < 0$

۳) $x_3 x_2 < 0$

۴) $x_4 x_5 x_6 < 0$

کنترل خطا

فصل سوم: پاسخ حالت گذرا



پاسخ سیستم ←
- حالت گذرا ← کیفیت رسیدن به جواب مطلوب — فصل سوم
- حالت ماندگار ← مقدار نهایی پاسخ سیستم — فصل چهارم

دسته‌بندی سیستم‌ها: 1- مرتبه اول 2- مرتبه دوم 3- مرتبه بالاتر از 2

سیستم مرتبه اول ←

$$G(s) = \frac{a}{s+b}$$

توجه: در شکل های مقابل فرض می کنیم تابع تبدیل صفر ندارد. در انتهای فصل اثر اضافه شدن صفر را خواهیم گفت.

تابع تبدیل استاندارد:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \quad \text{یا} \quad G(s) = \frac{k}{s + a}$$

* تحلیل پاسخ زمانی ← $y(t)$ ؟

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

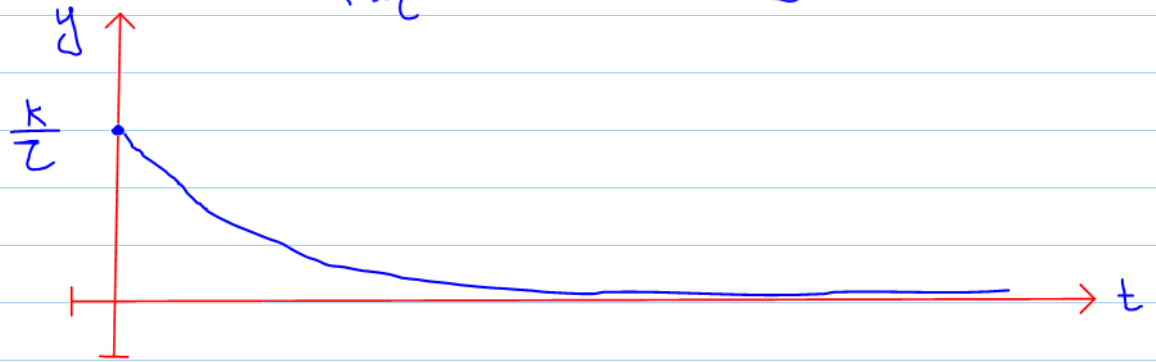
۱- پاسخ ضربه $r(t) = \delta(t)$

$$R(s) = 1 \rightarrow \frac{Y(s)}{1} = \frac{k}{\tau s + 1} \rightarrow Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$y(t) = ?$

$e^{-at} \rightarrow \frac{1}{s+a}$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau}\ \frac{1}{s+1/\tau} \rightarrow y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau}$$



$$y(0) = \frac{k}{\tau}$$

$$y(\infty) = 0$$

پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول

2- پاسخ پله $r(t) = u(t)$

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad \frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{k}{\tau s+1}$$

$$Y(s) = \frac{k}{s(\tau s+1)} \rightarrow Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s+1}$$

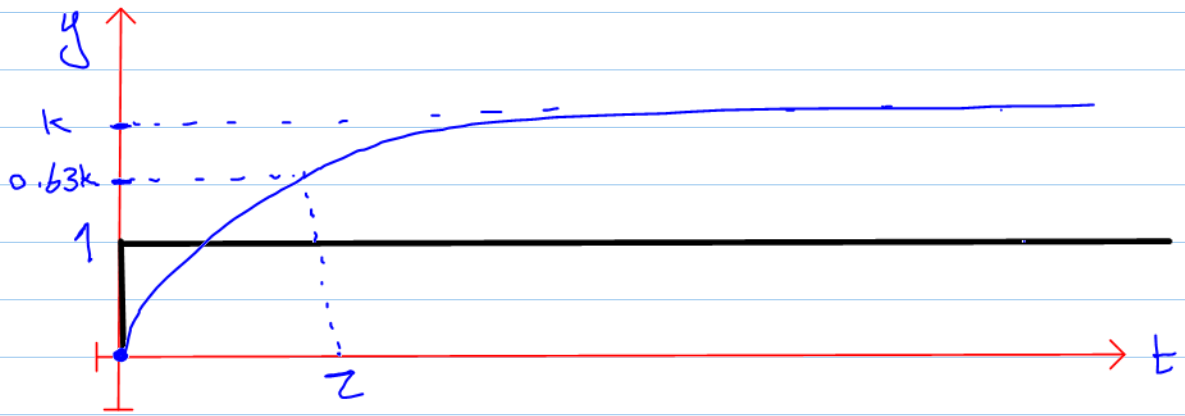
$$A = \lim_{s\to 0} \frac{k}{s(\tau s+1)} \times s = k \qquad B = \lim_{s\to -\frac{1}{\tau}} \frac{k}{s(\tau s+1)} \times (\tau s+1) = -k\tau$$

$$Y(s) = \frac{k}{s} - \frac{k\tau}{\tau s+1} = k\,\frac{1}{s} - \frac{k\tau}{\tau}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right)$$

$$y(t) = k\,u(t) - k e^{-t/\tau} u(t)$$

$$y(0) = k - k = 0$$

$$y(\infty) = k - 0 = k$$



ورودی

پاسخ پله سیستم مرتبه اول

مشخصه های سیستم مرتبه اول $G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$

۱- بهره dc (بهره ماندگار) k% یعنی خروجی سیستم در حالت ماندگار چند برابر ورودی می شود.

$$\text{بهره dc} = \frac{\text{مقدار نهایی خروجی}}{\text{مقدار نهایی ورودی}} = \frac{y(\infty)}{r(\infty)} = G(0) = k$$

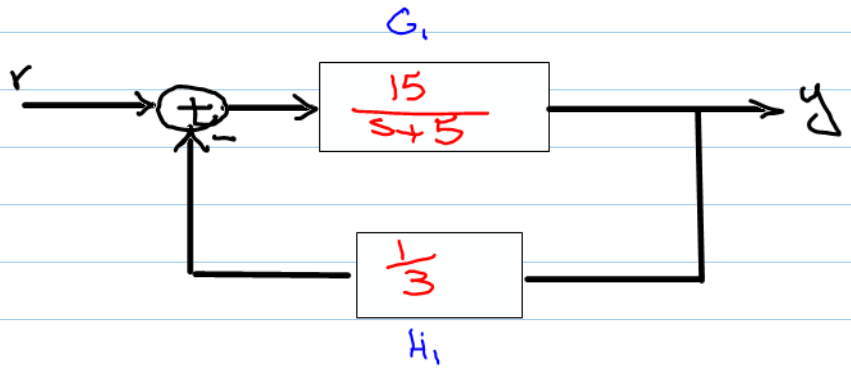
2- ثابت زمانی: τ: یعنی لحظه‌ای که $y(t)$ به $0.63\,y(\infty)$ می‌رسد.

سرعت رسیدن به مقدار نهایی را بیان می‌کند.

هر چه ζ کمتر ← پاسخ سریعتر

" ζ بیشتر ← " کندتر

مثال: ثابت زمانی سیستم مقابل را پیدا کنید.

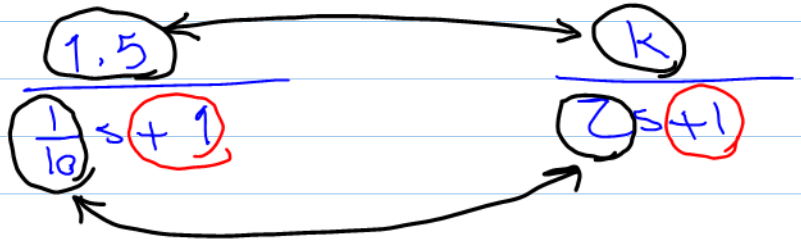


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)H_1(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{15}{s+5}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{15}{s+5}} = \frac{15}{s+5+5} = \frac{15}{s+10}$$

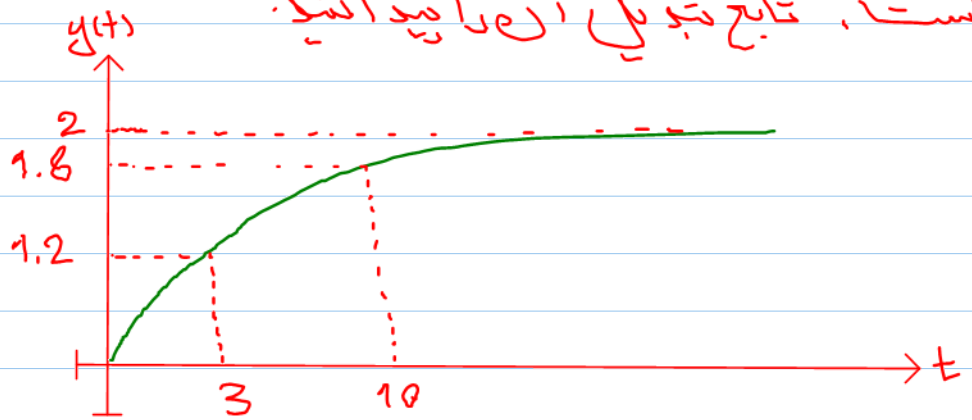
برای پیدا کردن پارامترها، تابع تبدیل استاندارد را با مورد سؤال تطبیق دهید.

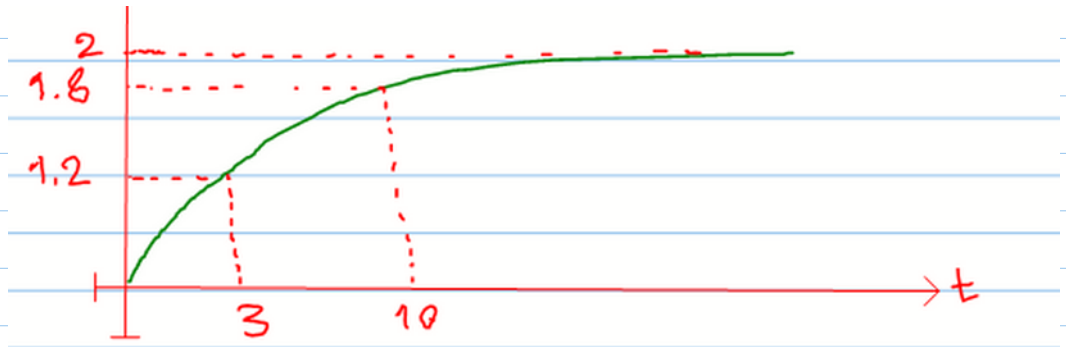
$$\frac{15/10}{\frac{s+10}{10}} \qquad \frac{k}{\tau s+1}$$



$\rightarrow \begin{cases} k = 1.5 \\ \tau = \frac{1}{10} \quad \text{ثانیه} \end{cases}$

آزاد ۸۶. نمودار پاسخ پله سیستم به شکل مقابل است، تابع تبدیل آن را بیابید. (واحد)





پاسخ پله سیستم مرتبه اول

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$$k = \text{بهره dc} = \frac{y(\infty)}{r(\infty)} = \frac{2}{1} = 2$$

τ: ثابت زمانی

↓

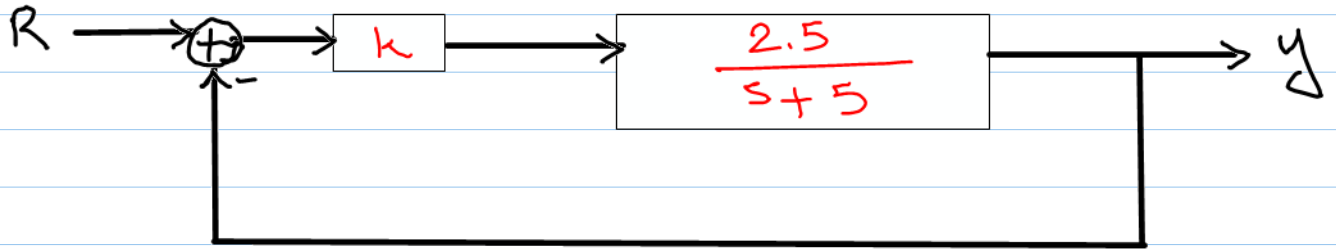
$\tau = 3$ ← برسد $0.63 \times 2 \simeq 1.26$ زمانی که $y(t)$ به

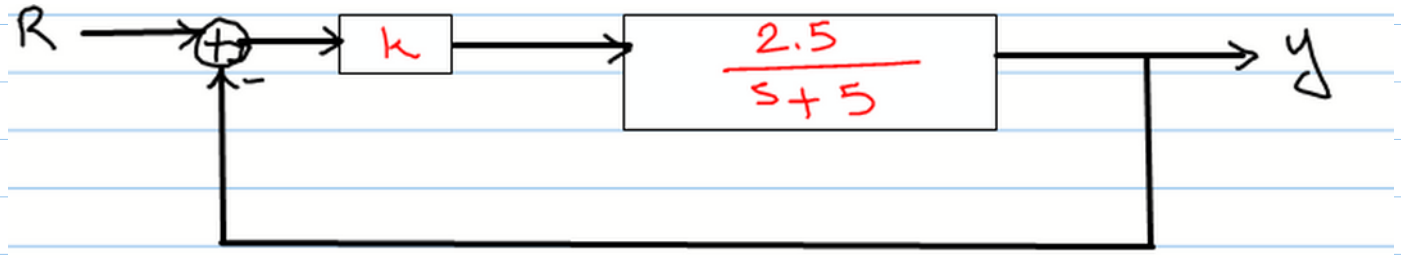
$$G(s) = \frac{2}{3s + 1}$$

مثال، هفتاد و ۷۸.

تابع تبدیل یک موتور G به صورت $\frac{2.5}{s+5}$ می‌باشد. با توجه به کنترل پاسخ این موتور، حلقه کنترلی به شکل زیر برای آن در نظر گرفته شده است. اگر بخواهیم پاسخ را 5 برابر سریعتر کنیم مقدار k کدام است؟

۱) 2 ۲) 12 ۳) 4 ۴) 8 ۵) 14 ۶) 12





هدف: پاسخ پله حلقه بسته 5 برابر سریعتر از وقتی $G(s)=\frac{2.5}{s+5}$ شود.

$\frac{2.5}{s+5}$ $\quad$ $\frac{k}{\tau s+1}$ $\quad$ سرعت پاسخ ← ثابت زمانی

$\frac{1}{5}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}s+1}$ $\quad$ $\frac{k}{\tau s+1}$ $\quad$ $\tau=\frac{1}{5}\,sec=0.2$

هدف: ثابت زمانی حلقه بسته برابر $\frac{\frac{1}{5}}{5}$ شود.

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2.5k}{s+5+2.5k} \qquad \frac{k}{\tau s+1}$$

$$\frac{\frac{2.5k}{5+2.5k}}{\frac{1}{5+2.5k}s+1}$$

τ

$$\frac{1}{5+2.5k} = \frac{1}{25} \rightarrow 5+2.5k = 25 \rightarrow k = 8$$

فرم استاندارد $G(s) = \frac{k'}{s+a}$

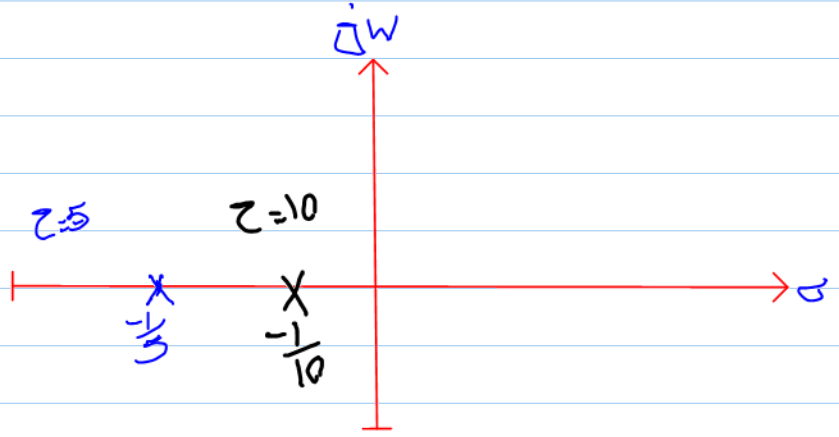
$$G(s) = \frac{k}{\tau s+1}$$

$\frac{-1}{\tau}$ = قطب سیستم

هرچقدر τ کمتر ← پاسخ سریعتر

هرچقدر قطب از محور موهومی دورتر ← پاسخ کندتر

" " " " " " دورتر ← سریعتر



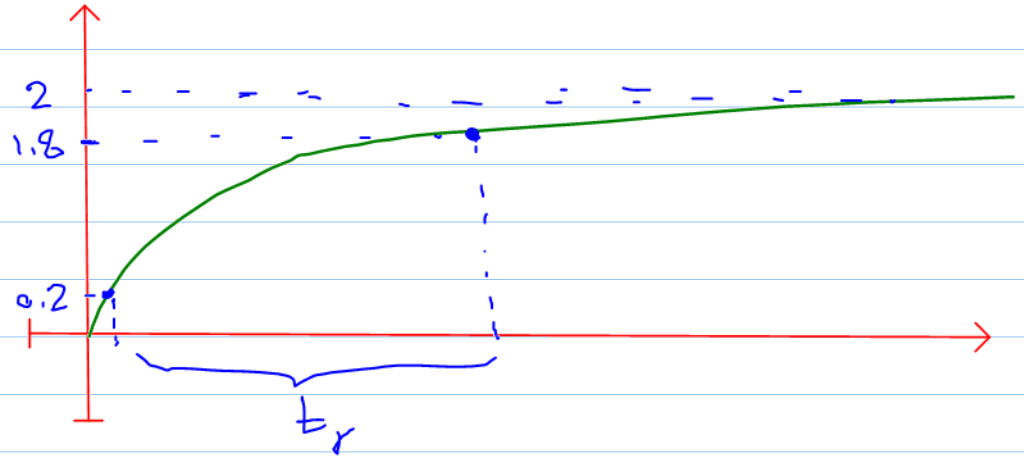
هرچه τ بزرگتر ← قطب به محور $j\omega$ نزدیکتر ← پاسخ کندتر

" کوچکتر ← " از " " دورتر ← " سریعتر

$$\tau = \frac{1}{\text{قطب سیستم مرتبه اول}}$$

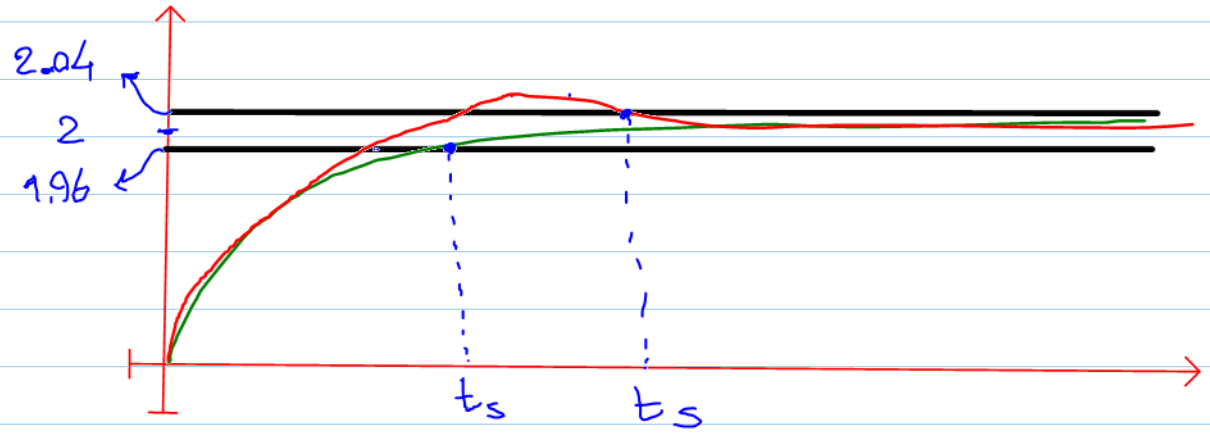
3- زمان صعود: زمانی که طول کشیدن تا پاسخ سیستم از ۱۰٪ به ۹۰٪ مقدار نهایی برسد.

$$t_r = 2.2\,\tau$$



4- زمان نشست: یعنی زمانی که طول کشیدن تا پاسخ سیستم با خطای مجاز 2٪ یا 5٪ به مقدار نهایی برسد.

$t_s = 4\tau$; $\tau = 1.2$ sec $t_s = 3\tau$; $\tau = 1.5$ sec



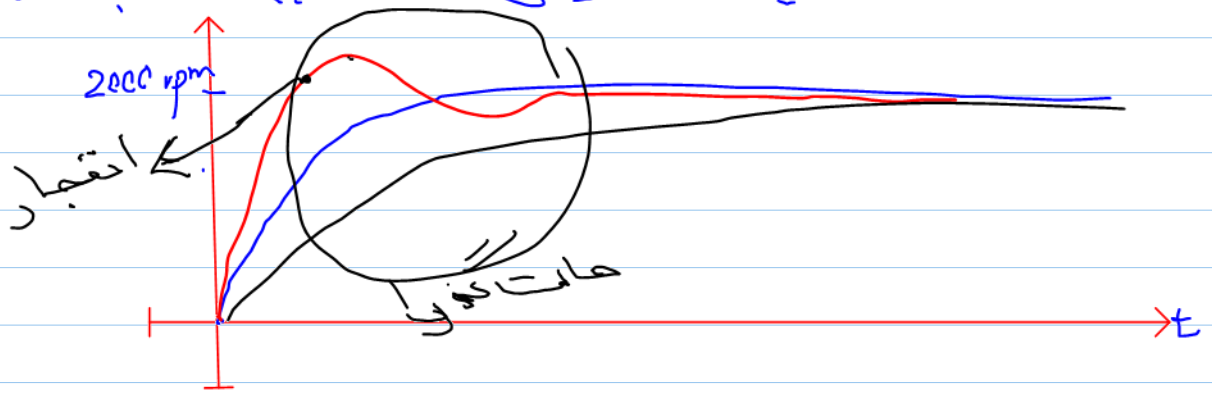
کنترل خطی

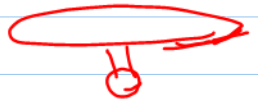
تحلیل حالت گذراه

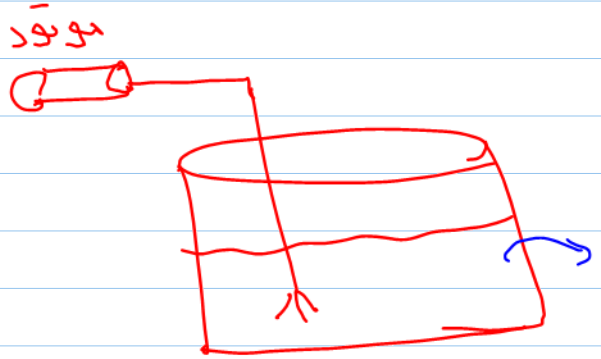
ورودی → [موتور سرو] → خروجی

اگر ورودی را یک سیگنال پله بدهیم خروجی چه خواهد بود؟









محدودیت طراحی باید باشد

بیشتر از 2000rpm نچرخد.

موتور سرو = $G(s) = \frac{b}{s^2+2as+b} = \frac{2}{s^2+4s+20} = \frac{Y(s)}{U(s)}$

تحلیل حالت گذرا ← رسم $y(t)$ ← $y(s)$ ← $U(s) = \frac{12}{s}$

تحلیل حالت گذرای یک $G(s)$

در حوزه زمان

سیستم مرتبه دو ← هر تابع تبدیل که دارای دو قطب باشد

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 1} \qquad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

نوع و مقدار حالت گذرا توسط قطبها تعیین می‌شود و صفرها فقط نوع و مقدار را تشدید می‌کنند.

تحلیل را براساس سیستم مرتبه دو که بسیار و پراستعمال هستند انجام می‌دهیم و صفرها را بیان خواهیم کرد.

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \quad ; \quad a, b \text{ اعداد حقیقی}$$

$$s^2 + as + b = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-\frac{a}{2} \mp \sqrt{a^2 - 4b}\ \Delta}{2}$$

$$\Delta > 0 \rightarrow a^2 > 4b \rightarrow \frac{a}{2\sqrt{b}} > 1$$

(1)

دو قطب حقیقی میراو غیرتکراری

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \qquad \Delta = 25 - 24 > 0$$

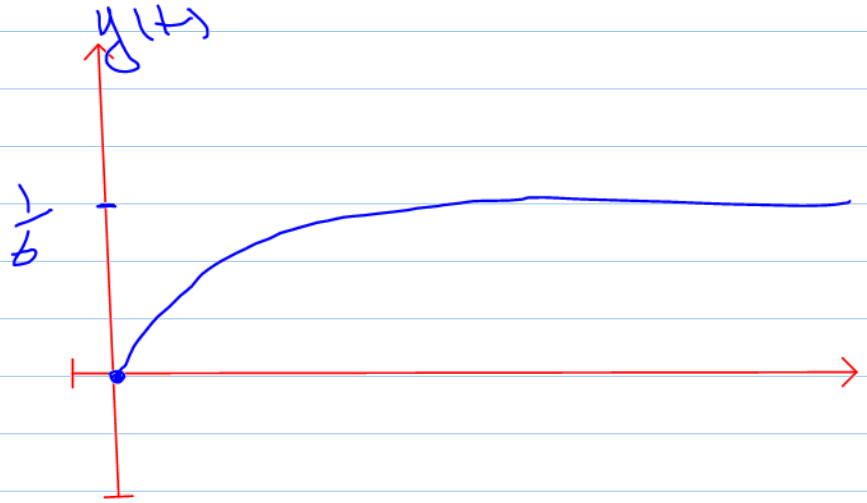
قطب‌ها $= -2, -3$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{s+3}$$

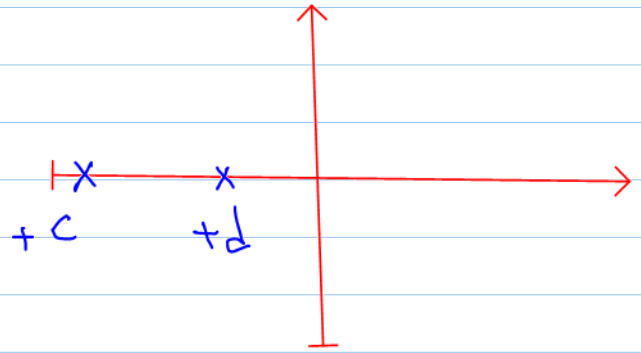
$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-3t}$$

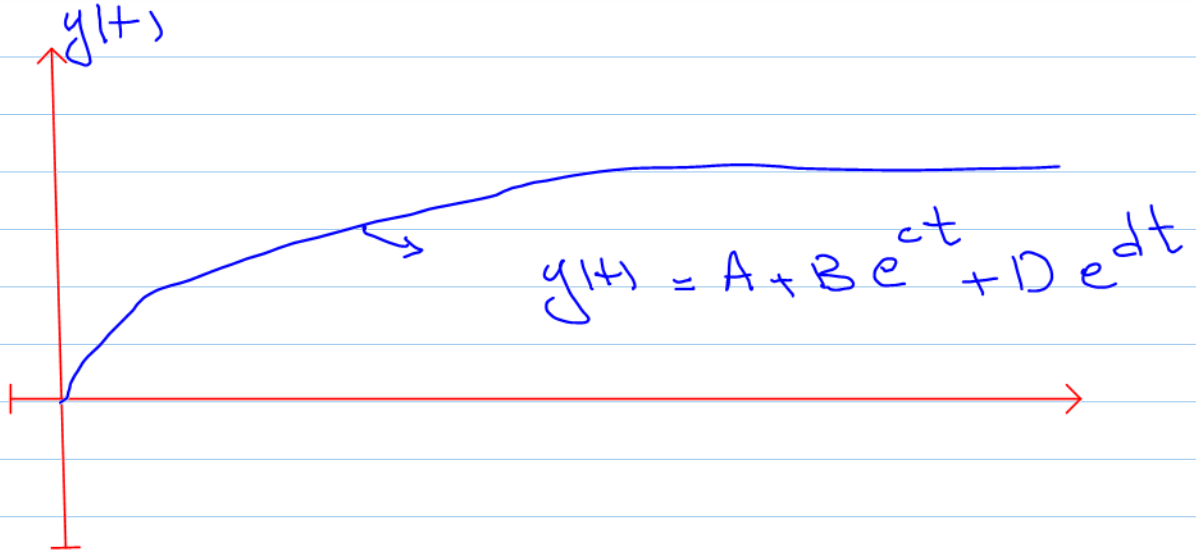




قاعده: اگر قطبها حقیقی منفی و غیرتکراری باشند ($a^2 > 4b$) پاسخ به پله به شکل زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{b}{s^2+as+b}$$





$\Delta = 0 \rightarrow a^2 = 4b$

حالت حدی میرا و تکراری ②

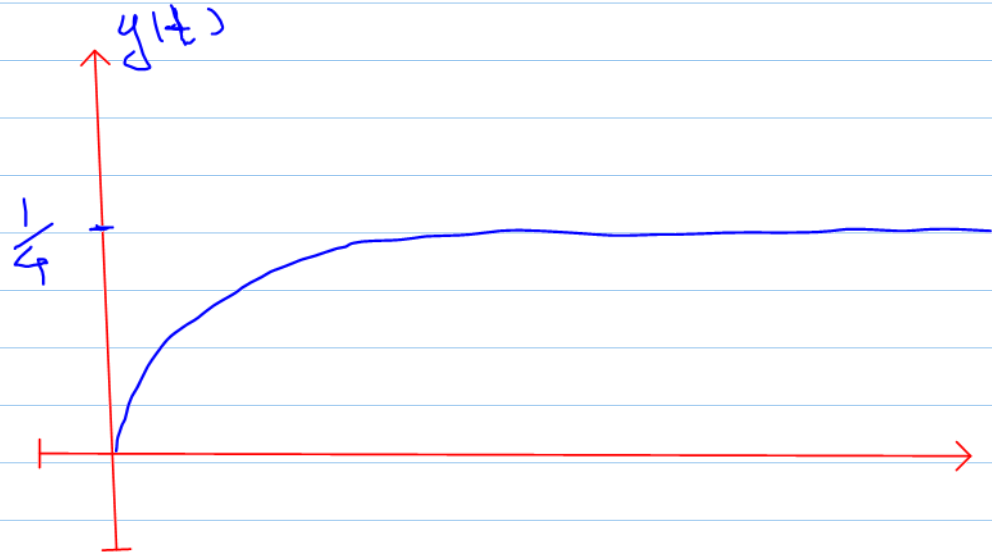
$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$$

$$s_{1,2} = -2, -2$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

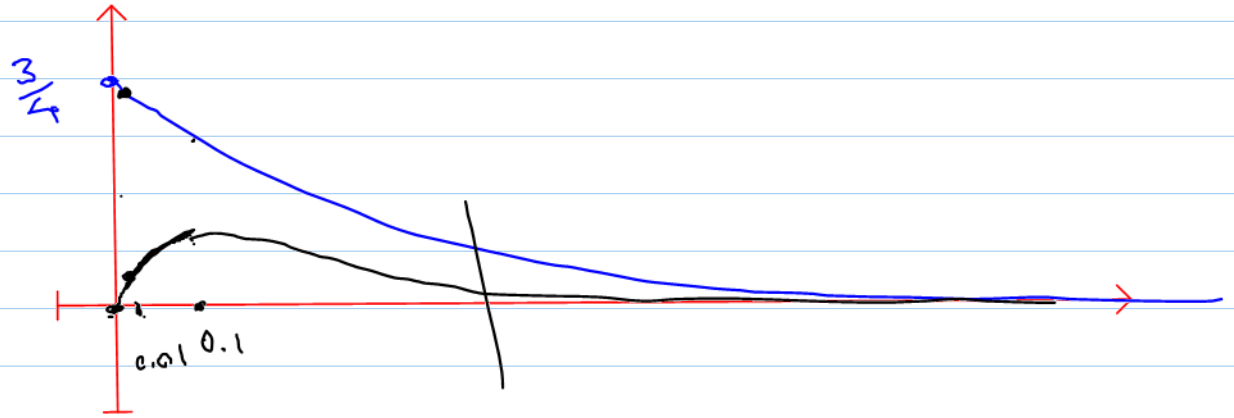
$$y(t) = \frac{1}{4} - A e^{-2t} - Bte^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{3}{4} t e^{-2t}$$



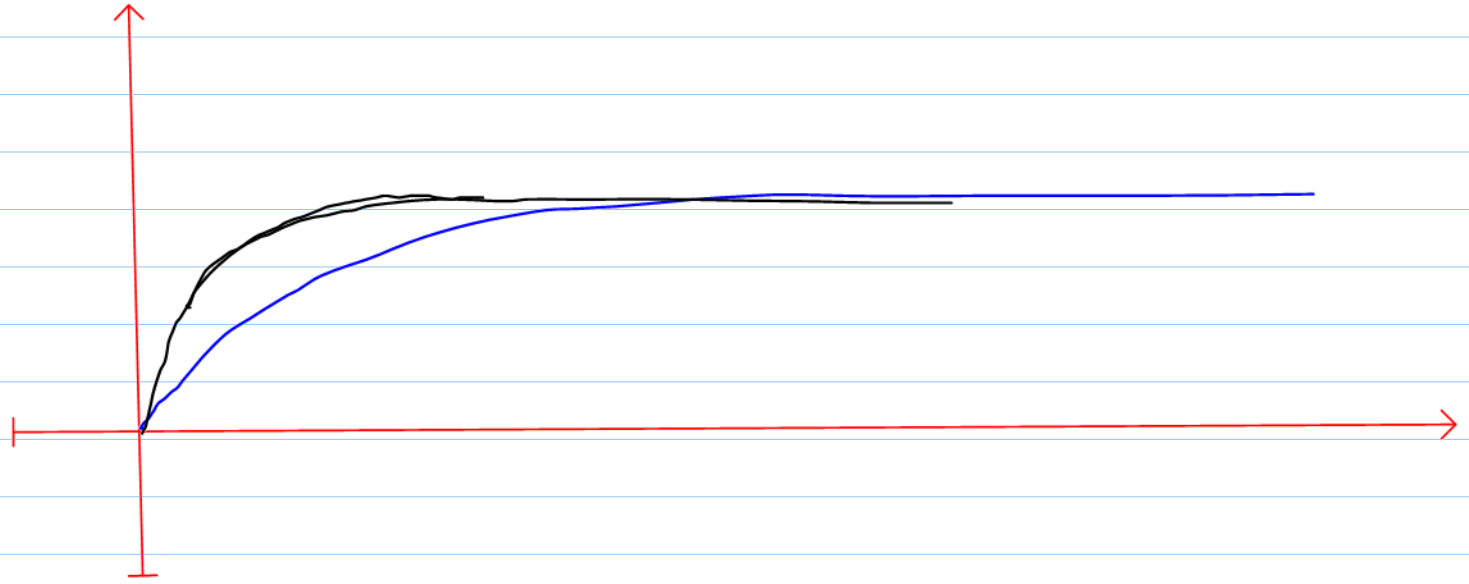
$$y_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{3}{4} e^{-2t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{3}{4} t e^{-2t}$$



$\frac{3}{4} e^{-2t}$

$\frac{3}{4} t e^{-2t}$



$y_1(t)$ (1)

$y_2(t)$ (2)

قاعده: اگر دو قطب حقیقی منفی و تکراری داشته باشیم ($a^2=4b$) پاسخ به شکل

$$y(t) = A + (B + Ct)\, e^{-\frac{a}{2}t}$$

زیر خواهد بود:

پاسخ نسبت به حالت اول بسیار سریعتر است.

حالت (3): دو قطب مختلط مزدوج

$\Delta < 0 \rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$$

$$s^2 + 4s + 5 = 0 \rightarrow (s+2)^2 + 1 = 0$$

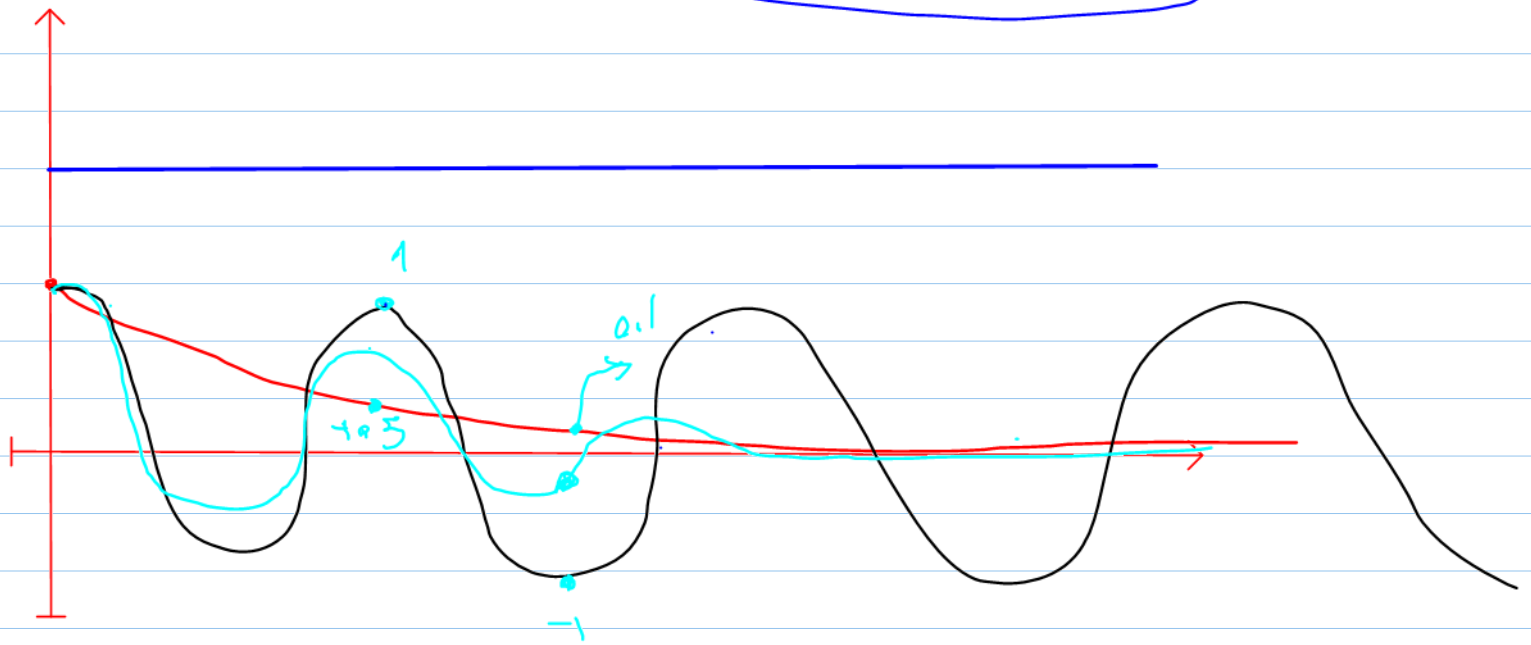
$$(s+2)^2 = -1$$

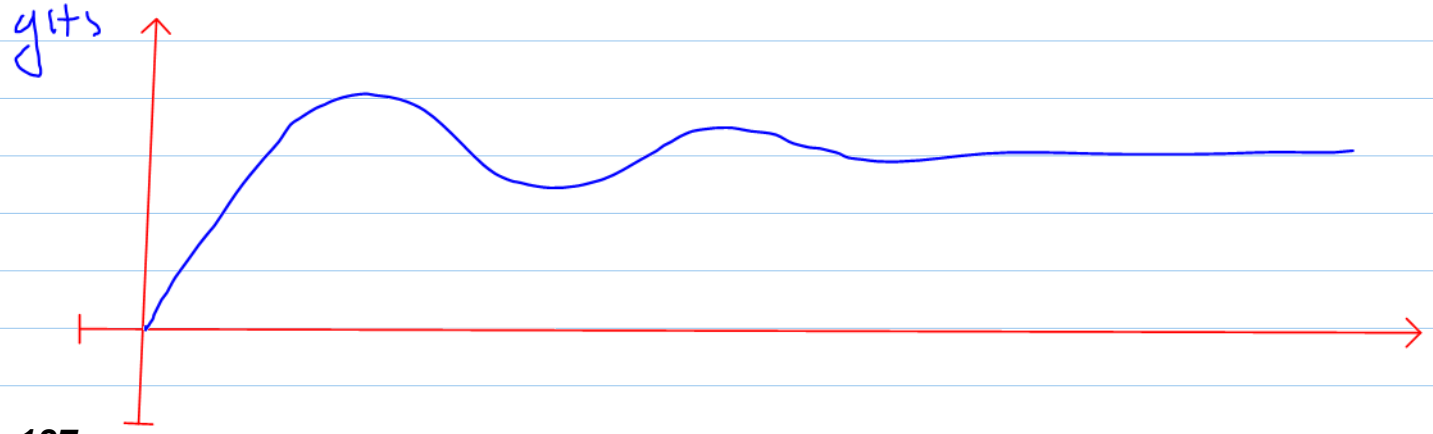
$$s + 2 = \sqrt{-1} = \pm j$$

$$\sqrt{-1} = \pm j$$

$s = -2 \mp j$ Lados

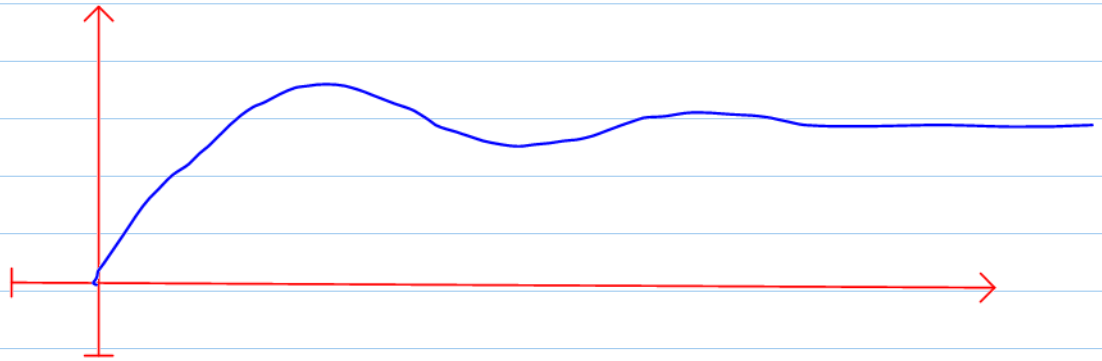
$$y(t) = A + B e^{-\frac{a}{2}t} \cos(ct)$$





قاعده: اگر دو قطب قدر مطلق چپ داشته باشیم پاسخ به شکل زیر خواهد شد:

$$y(t) = A + B e^{-\frac{a}{2}t} \cos(ct)$$

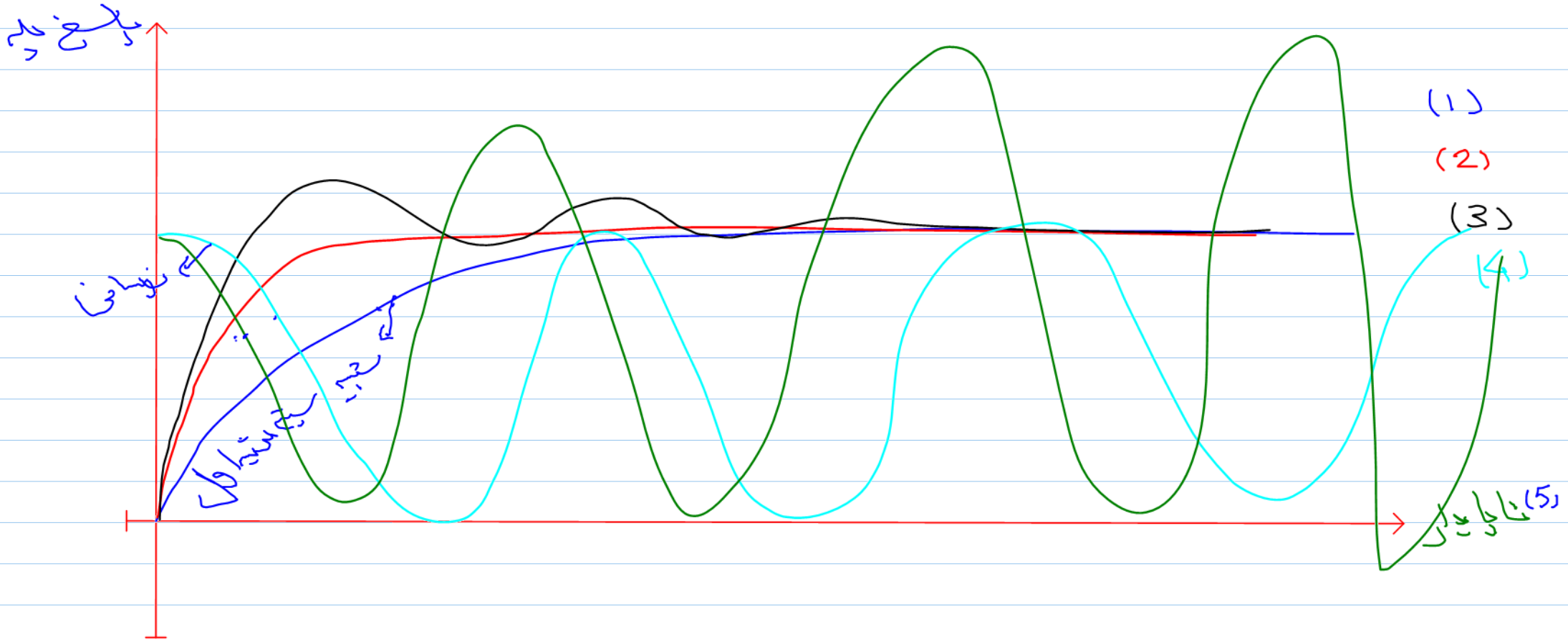


حالت (۴) اگر دو قطب روی محور موهومی داشته باشیم: $a = 0$

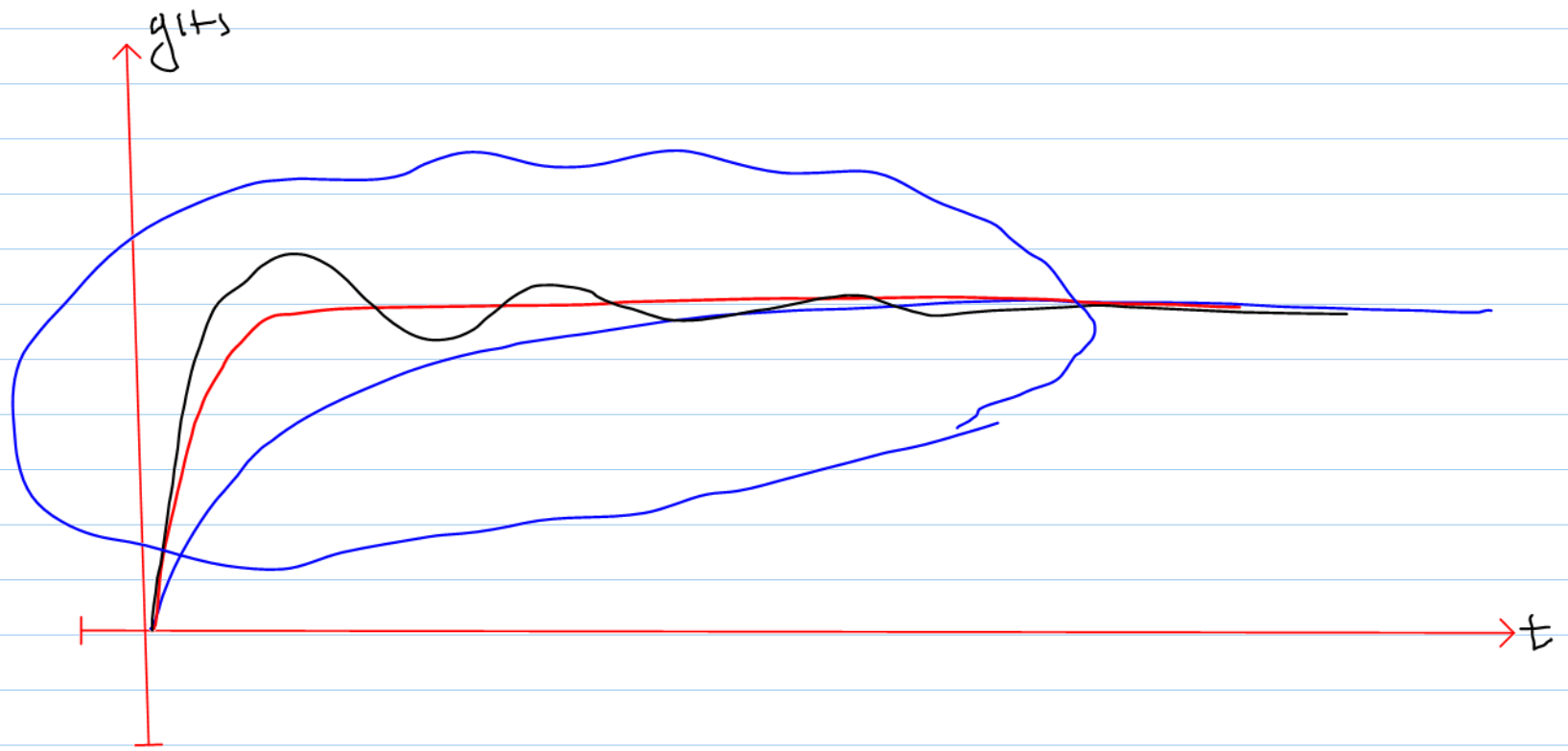
$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \times \frac{1}{s} \rightarrow y(t) = 1 + \cos(1t)$$


y(t)
2


(1)
(2)
(3)
(4)
(5)

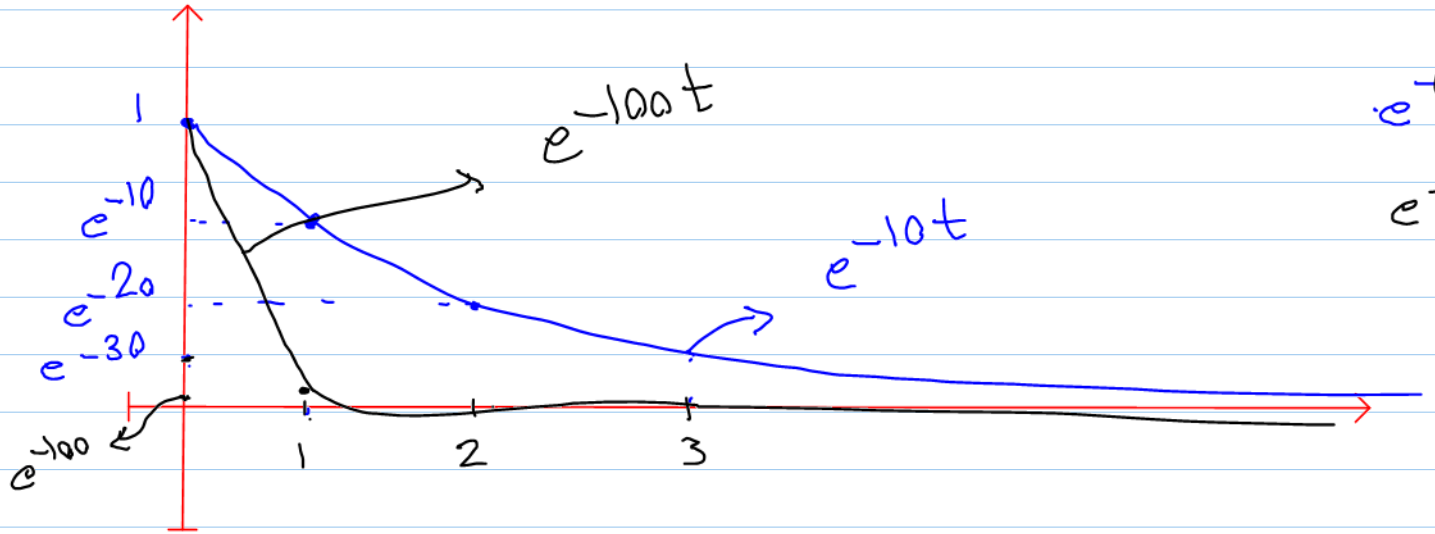
حالت ۱ و ۵ به حالت دائمی نمی‌رسند و بنابراین آنها حالت گذرا تعریف می‌شوند.



فرق ۲ حالت فوق در حالت گذرا است.

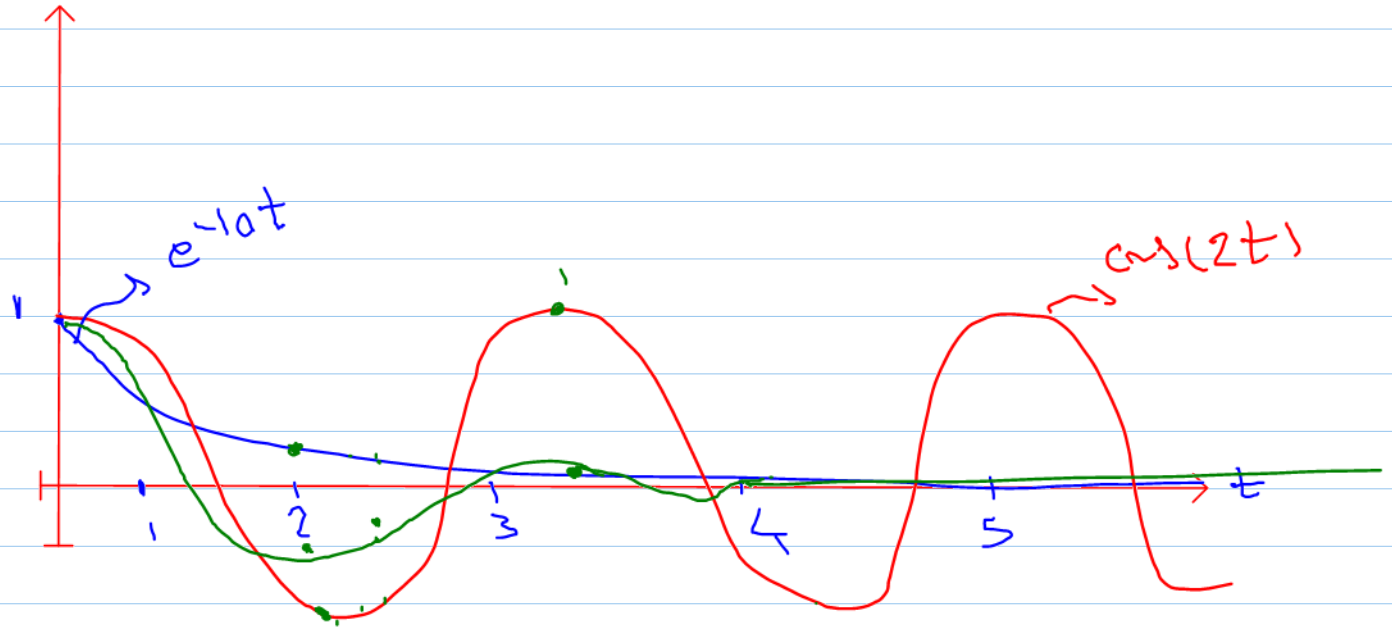
مفهوم میرایی: damping: خفگی

$$g(t) = A + B e^{-\frac{a}{2}t} \cos(ct)$$



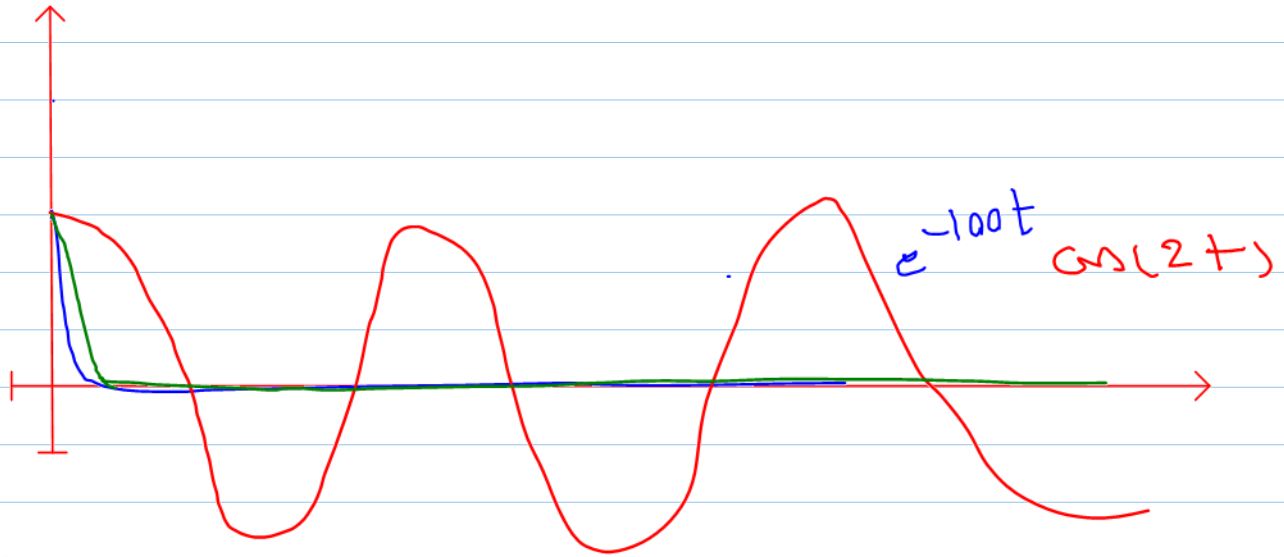
e^{-10t}

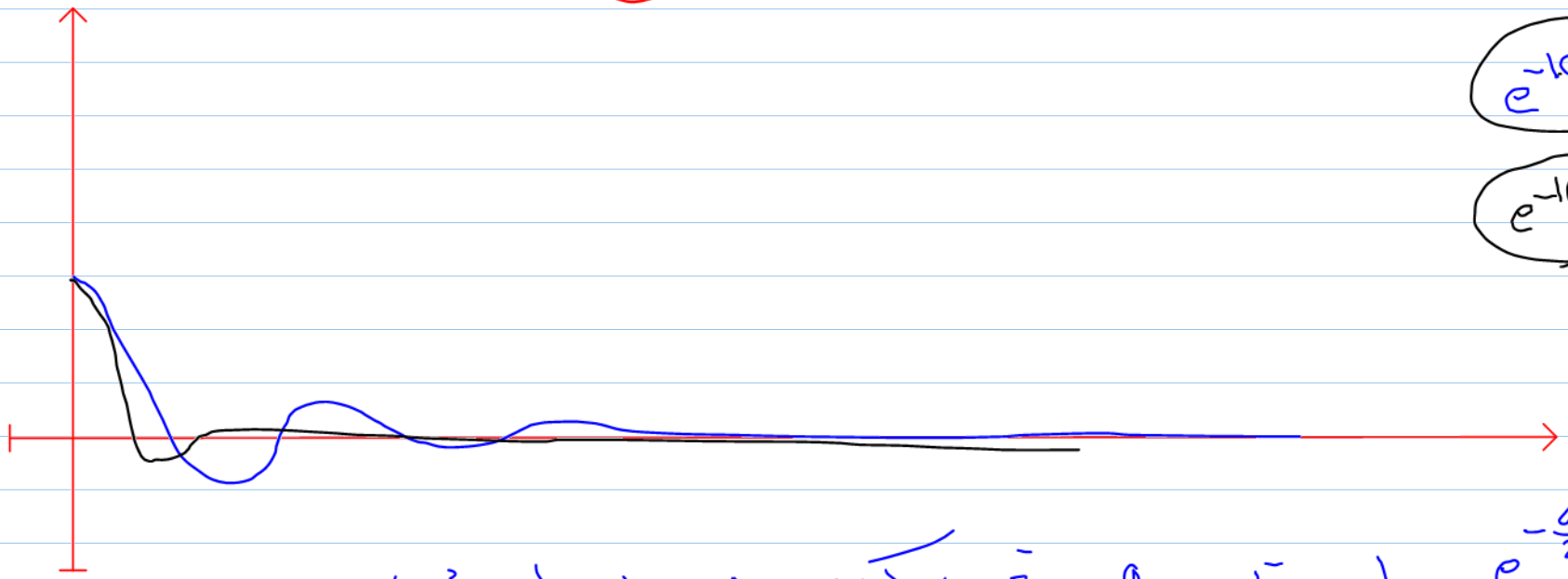
e^{-100t}



$e^{-10t} \cos(2t)$

$e^{-100t} \cos(2t)$





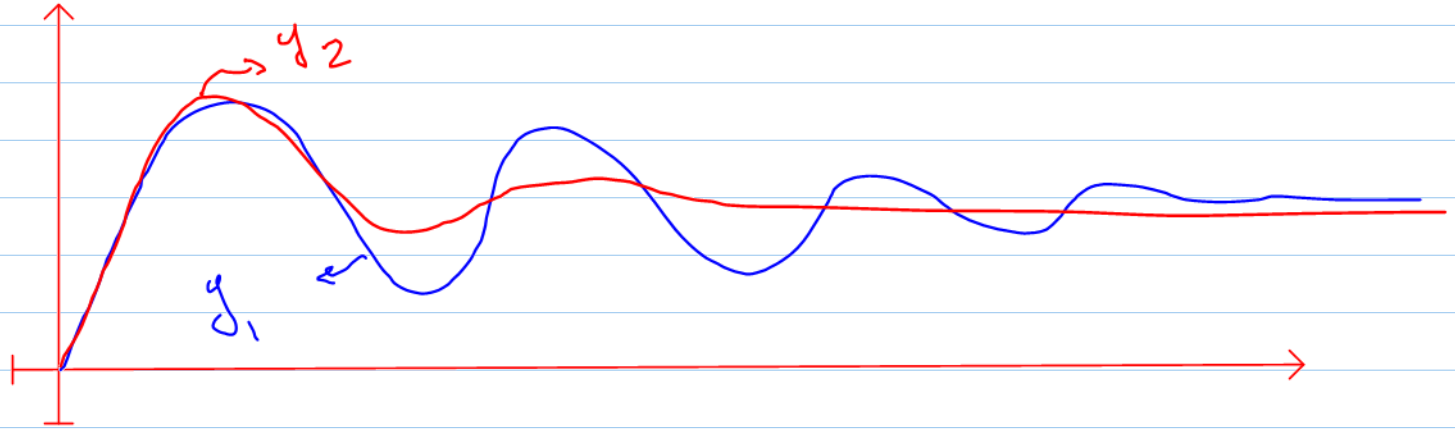
$e^{-2t}\cos(2t)$

$e^{-100t}\cos(2t)$

در $e^{-\frac{a}{2}t}\cos(ct)$ عبارت $\frac{a}{2}$ تعیین کننده میزان میرائی است

$y_1(t) = 1 + e^{-t}\cos(2t)$

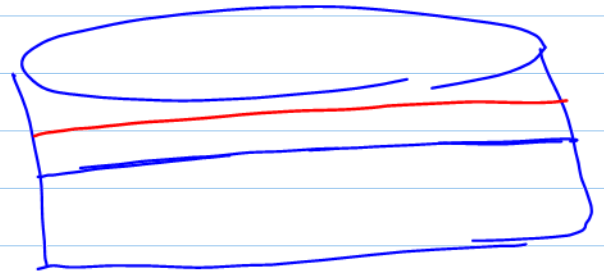
$y_2(t) = 1 + e^{-10t}\cos(2t)$



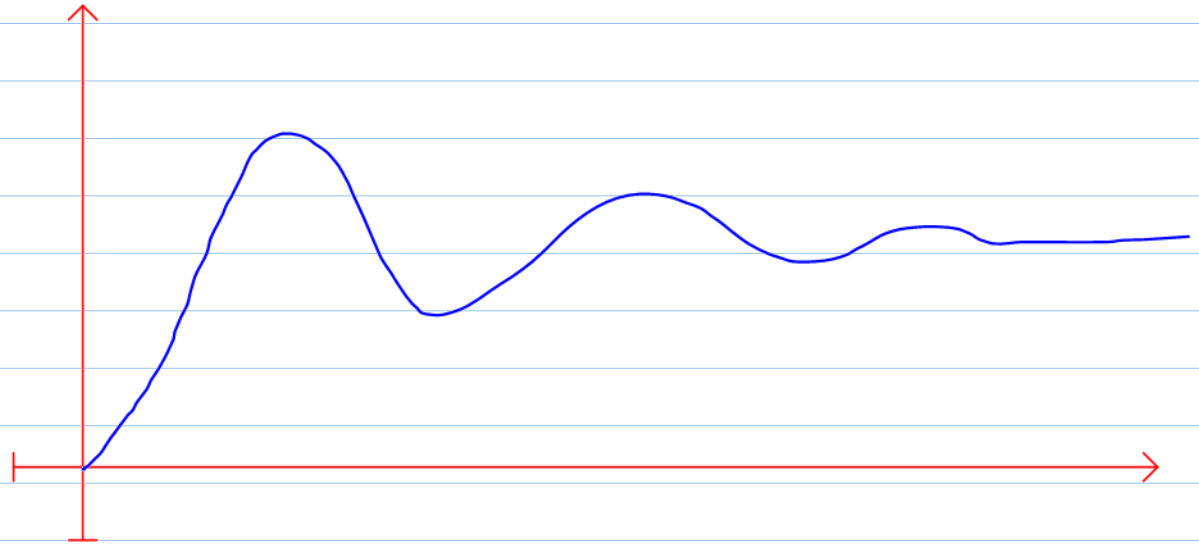
نقسم بدی دقتار سیتة مرتبة دوم باتوجه ه مذیب سیوی

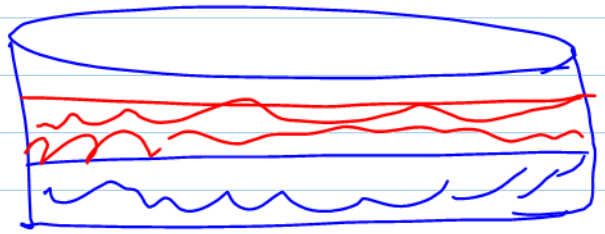
(1) فوقآمیی ا:



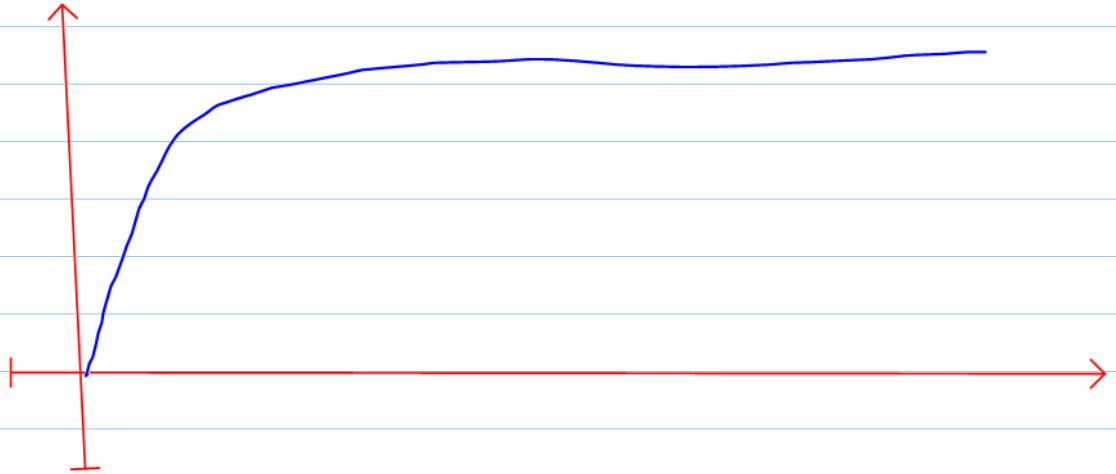


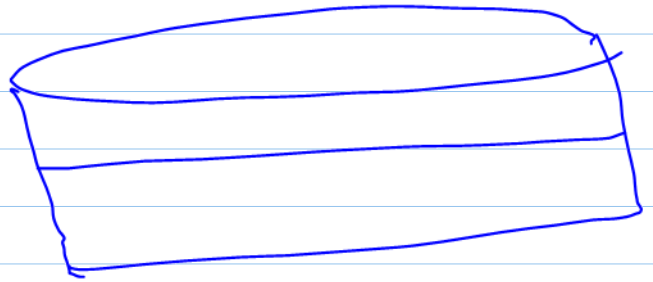
(2) زیر میراه





(3) میرای بحرانی





«جلسه ۱۲ کنترل خطی»

تحلیل پاسخ گذرای سیستم مرتبه دوم

هدف: تحلیل پاسخ حالت گذرای سیستم مرتبه دوم از روی تابع تبدیل

فرم استاندارد:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

یافتن پاسخ پله و ضربه:

① پاسخ ضربه:

$r(t) = \delta(t)$

$R(s) = 1 \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{1} = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

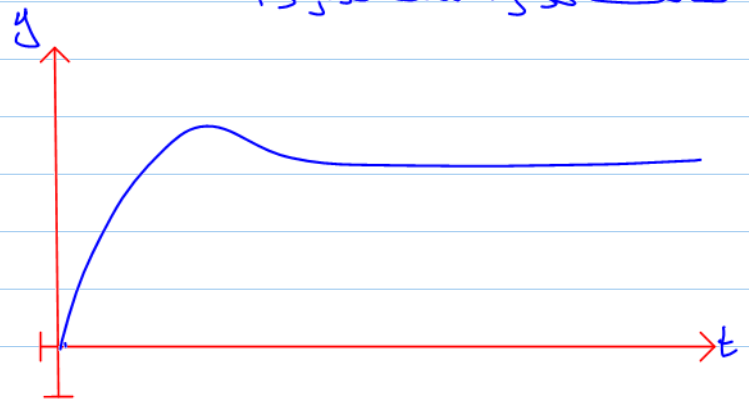
$$Y(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)} \quad ; \quad a = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

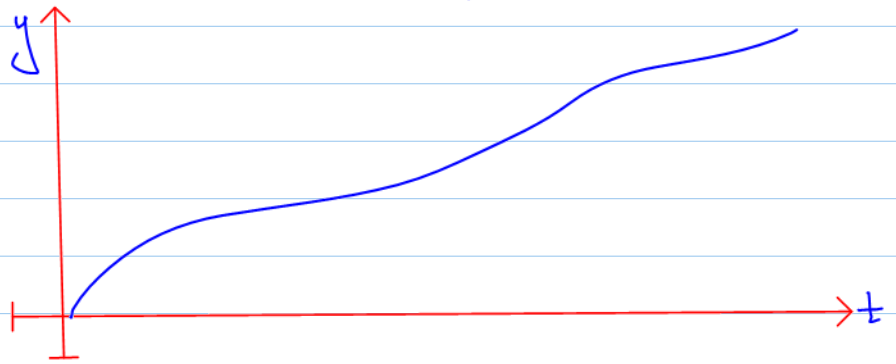
$$b = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

تعیین حالتهای مختلف a, b :

حالت اول : $\xi < 0$ ← $\Delta(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

دو قطب سمت راست محور و لذا سیستم ناپایدار بوده و حالت گذرا نمایی دارد.





لذا $\xi < 0$ یعنی سیستم مرتبه دوم ناپایدار بوده و حالت گذرا نمایی دارد.

حالت دوم : $\xi = 0$

$\xi = 0 \rightarrow \quad a = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = 0 + \omega_n\sqrt{-1} = j\omega_n$

$b = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = 0 - \omega_n\sqrt{-1} = -j\omega_n$

$$Y(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \longrightarrow \sin(\omega t)$$

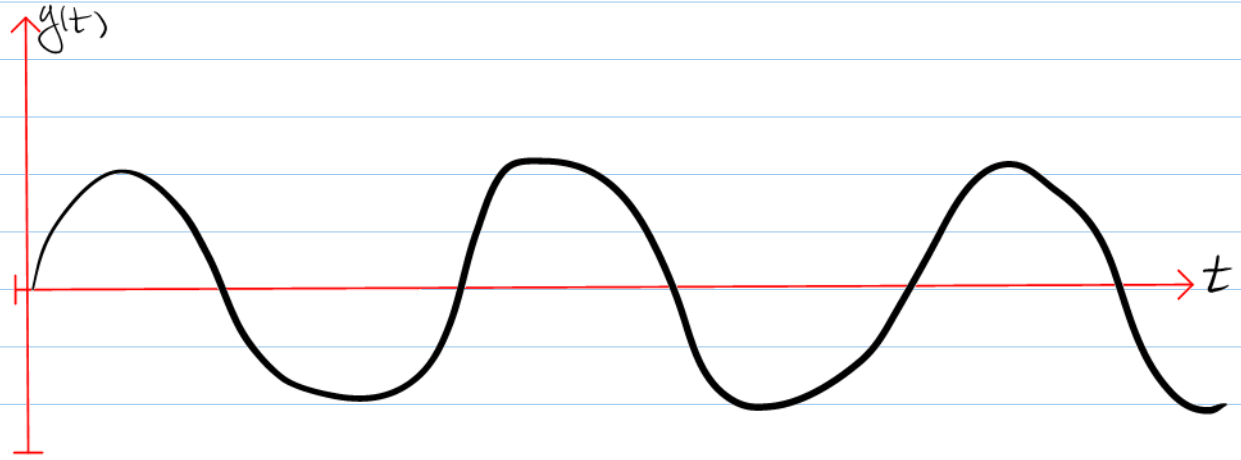
پاسخ ورودی ضربه

$$\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2} \longrightarrow \sin(\omega_n t)$$

$$\frac{k}{\omega_n}\ \frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2} \longrightarrow \frac{k}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

$$Y(s) \longrightarrow g(t)=\frac{k}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

$$\zeta=0 \longrightarrow g(t)=\frac{k}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$



پاسخ ضربه با $\zeta=0$

$r(t) = u(t)$

پاسخ پله با $\zeta = 0$

$R(s) = \frac{1}{s}$

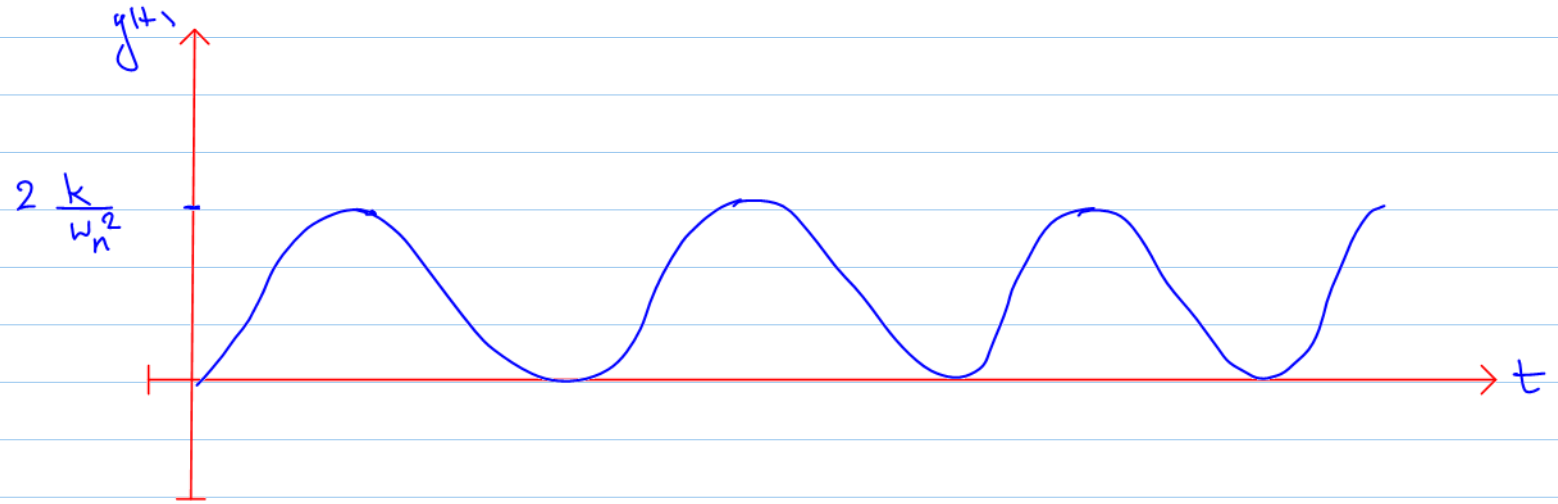
$$\frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{k}{s^2 + \omega_n^2} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \frac{k}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right) \frac{k}{\omega_n^2} \rightarrow Y(s) = \frac{k}{\omega_n^2} \frac{1}{s} - \frac{k}{\omega_n^2} \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{s} \longrightarrow 1$$

$$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \longrightarrow \cos(\omega_n t)$$

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n^2} - \frac{k}{\omega_n^2} \cos(\omega_n t) = \frac{k}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t))$$



حالت سوم: $0 < \xi < 1$

$$G(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)}$$

$$a = -\xi w_n + w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$b = -\xi w_n - w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\xi^2 - 1 < 0$

$$\sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{(-1)(1-\xi^2)}$$

$$= \sqrt{-1}\sqrt{1-\xi^2}$$

$$= j\sqrt{1-\xi^2}$$

$$a = -\xi w_n + j w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$b = -\xi w_n - j w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$r(t) = \delta(t)$

پاسخ ضربه $0 < \xi < 1$

$R(s) = 1$

$$\frac{Y(s)}{1} = \frac{k}{(s+a)(s+b)} \rightarrow Y(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{k}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2} = \frac{k}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)}$$

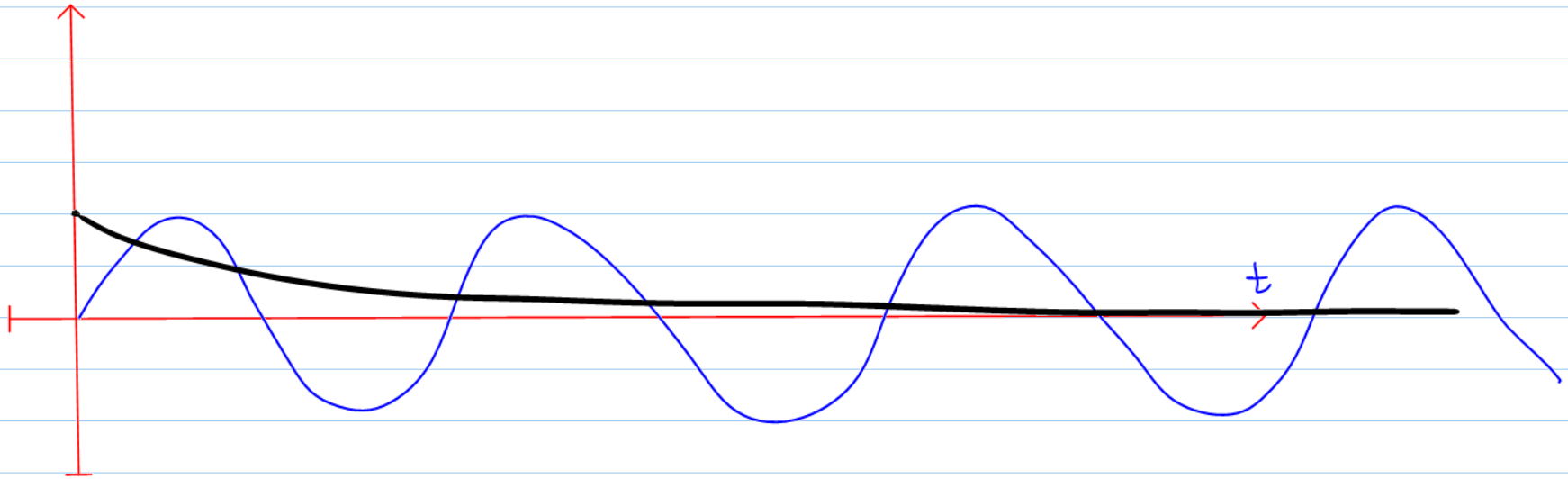
$$\frac{A}{s^2 + A^2} \longrightarrow \sin(At)$$

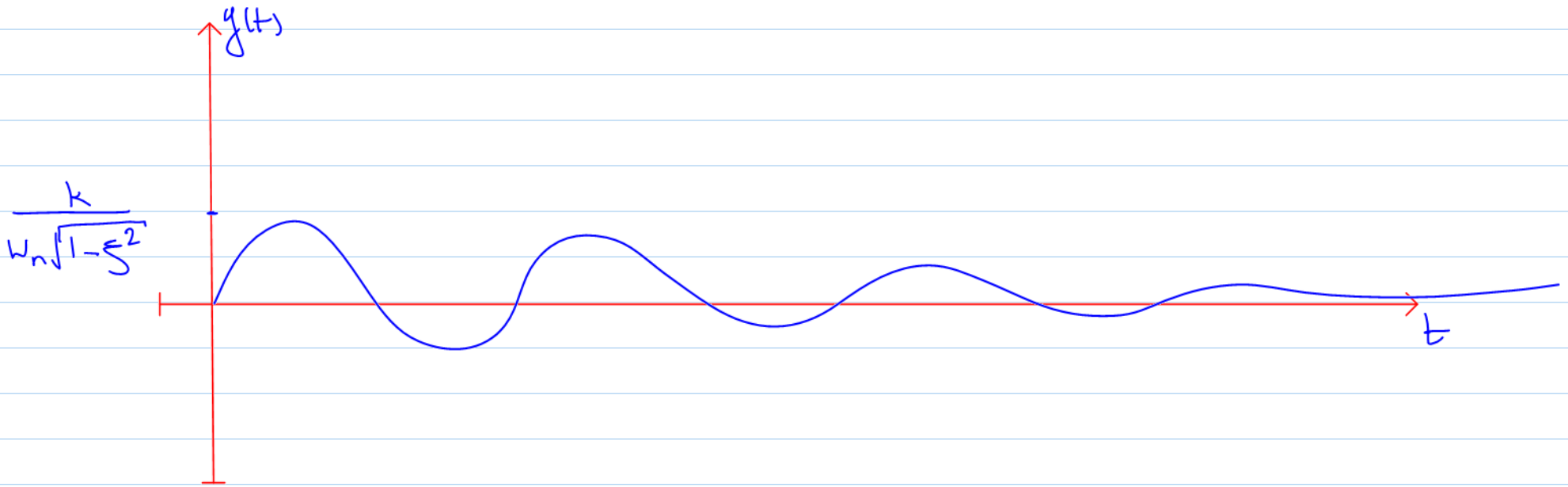
پله واحد

$$\frac{A}{(s+B)^2 + A^2} \longrightarrow e^{-Bt}\sin(At)$$

$$\frac{\sqrt{\omega_n^2(1-\xi^2)}}{(s+\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} \longrightarrow e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t)$$

$$g(t) = \frac{k}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$$





$$R(s) = \frac{1}{s}$$

ب) ج: ۲۰

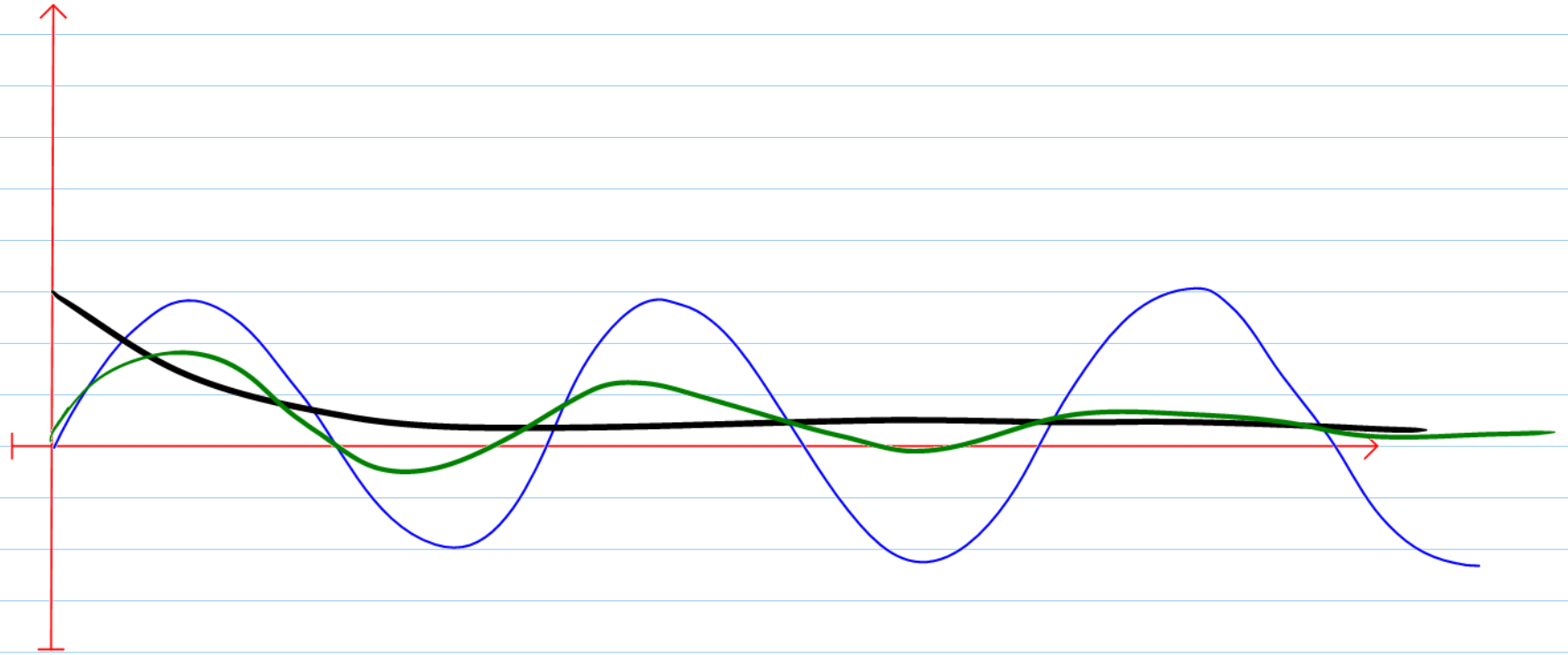
$$\frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{k}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

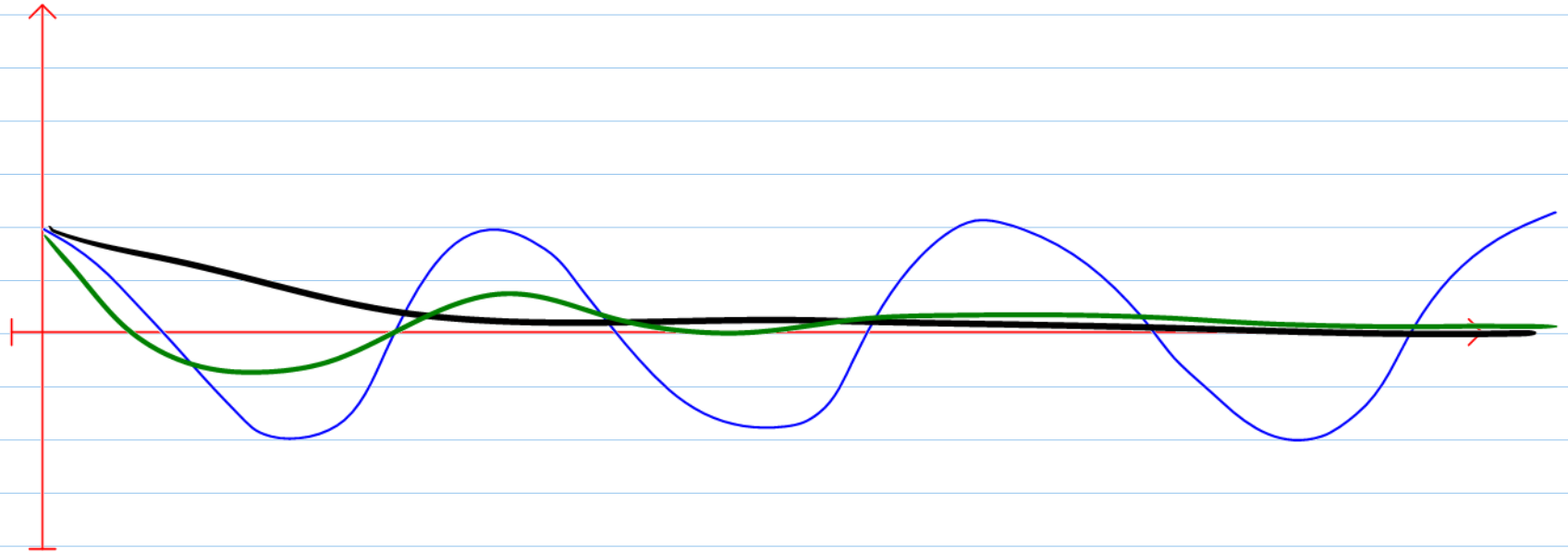
$$Y(s) = k\left(\frac{\frac{1}{\omega_n^2}}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right)$$

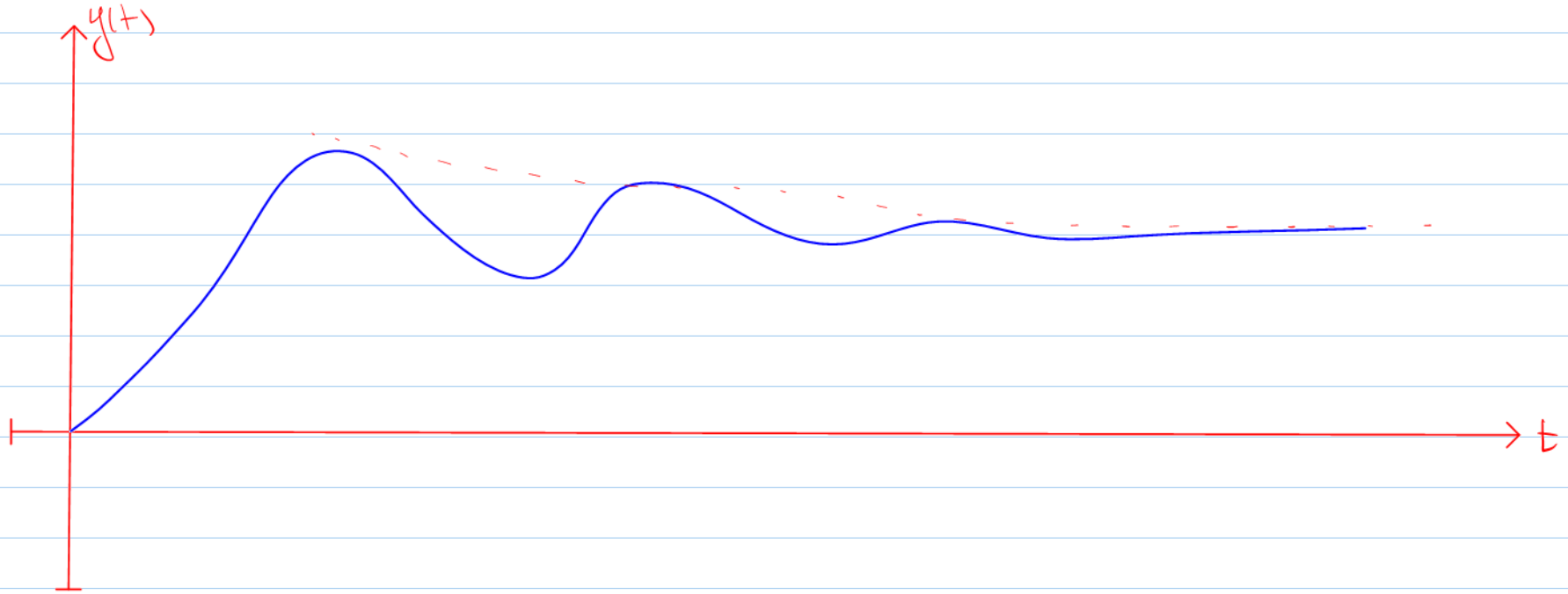
$$Y(s) = \frac{k}{\omega_n^2}\frac{1}{s} - \frac{k}{\omega_n^2}\left(\frac{s + \xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right)$$

$$Y(s) = \frac{k}{\omega_n^2}\frac{1}{s} - \frac{k}{\omega_n^2}\left(\frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)}\right)$$

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n} - \frac{k}{\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\, t) - \frac{k}{\omega_n^2(1 - \xi^2)} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\, t)$$





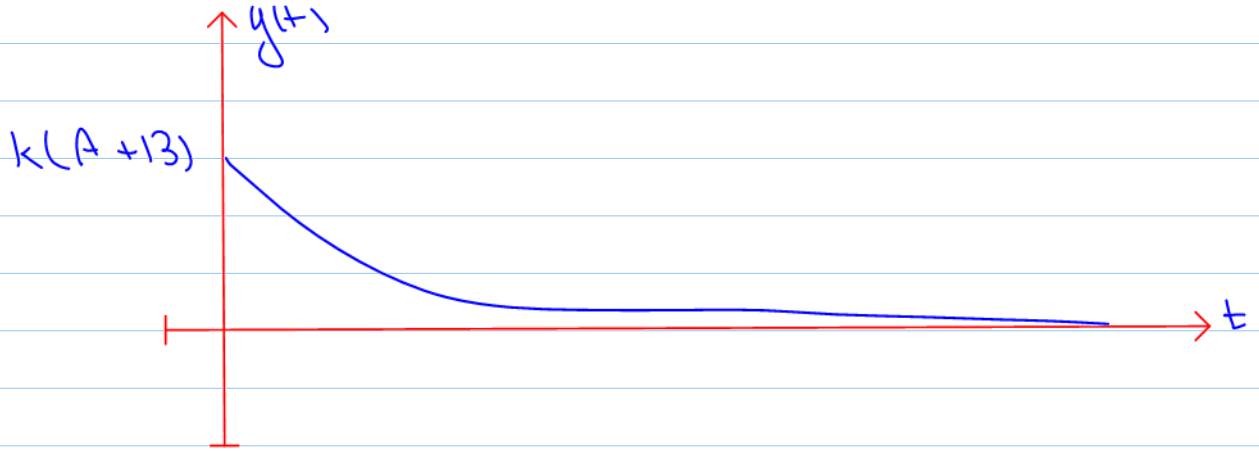


$r(t) = \delta(t)$ $\quad a, b$ حقيقي $\quad \leftarrow \xi > 1$ (4)

$R(s) = 1$

$$\frac{Y(s)}{1} = \frac{k}{(s+a)(s+b)} = k\left(\frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}\right)$$

$$y(t) = k A e^{-at} + k B e^{-bt}$$



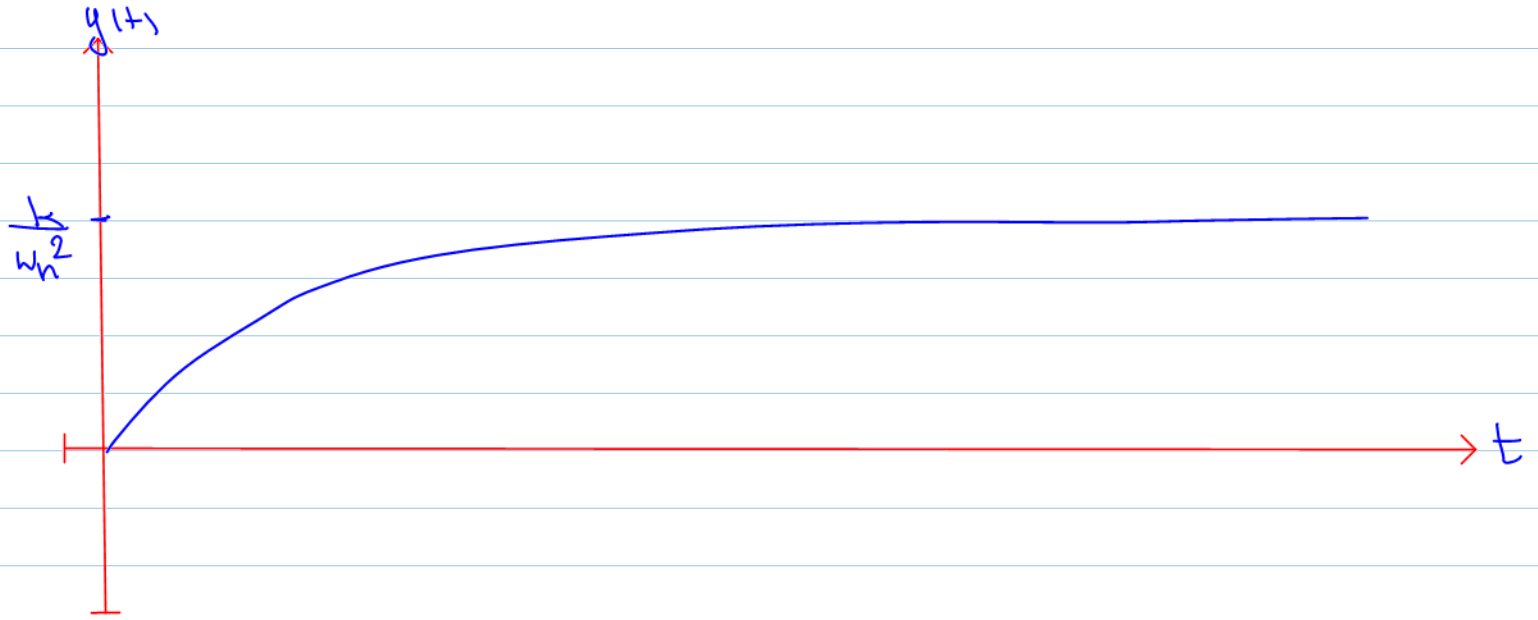
$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \quad \frac{k}{(s+a)(s+b)} = \frac{C}{s} + \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+C}$$

$$y(s) = \frac{k}{s} + \underbrace{\frac{k}{2\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}}_{A} \frac{1}{s+a} - \underbrace{\frac{k}{2\sqrt{\xi^2-1}\,(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}}_{B} \frac{1}{s+b}$$

$$a = -\xi w_n + w_n\sqrt{\xi^2-1} \qquad b = -\xi w_n - w_n\sqrt{\xi^2-1}$$

$$y(t) = \frac{k}{w_n^2}\left(1 + A\,e^{-at} - B\,e^{-bt}\right)$$



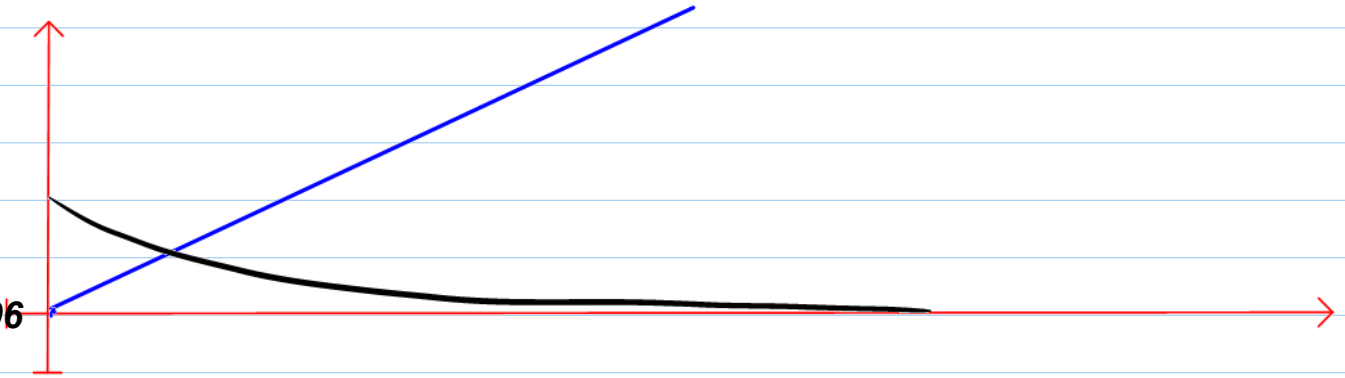
$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{(s+\omega_n)^2}$$

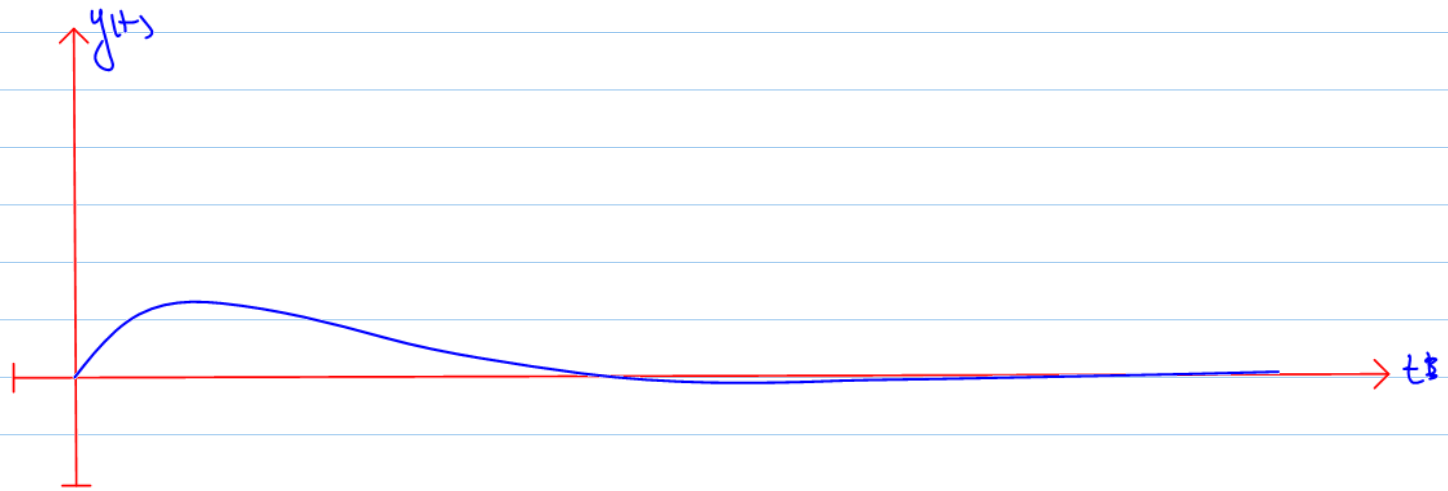
ξ=1 ⑥

$$R(s) = 1$$

پاسخ ضربه:

$$\frac{Y(s)}{1} = \frac{k}{(s+\omega_n)^2} \rightarrow y(t) = k\, e^{-\omega_n t}\, t$$

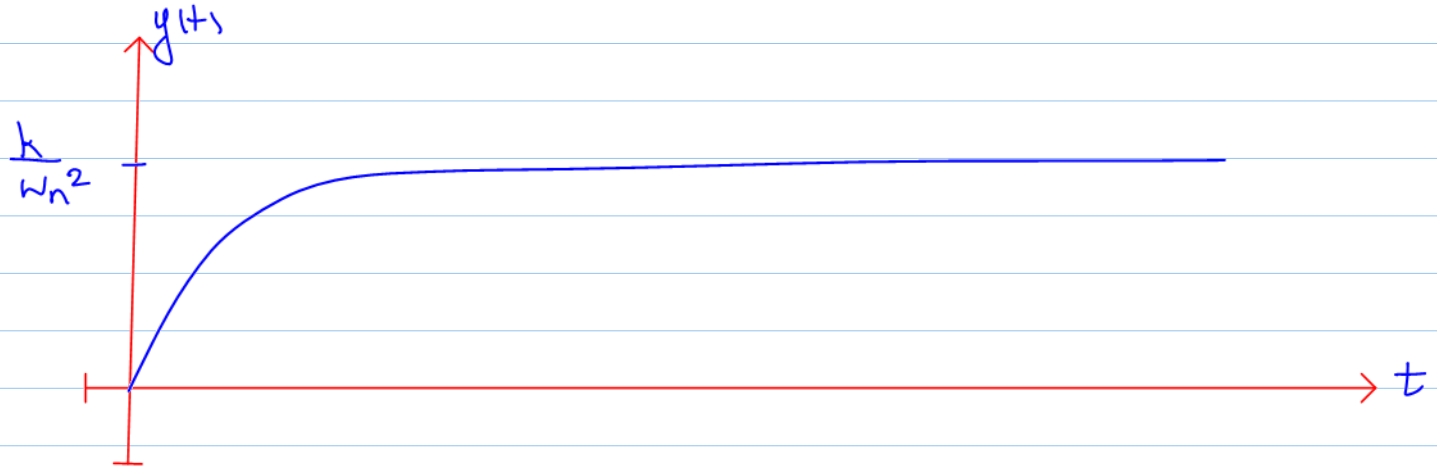




$$R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} \frac{k}{(s+\omega_n)^2}$$

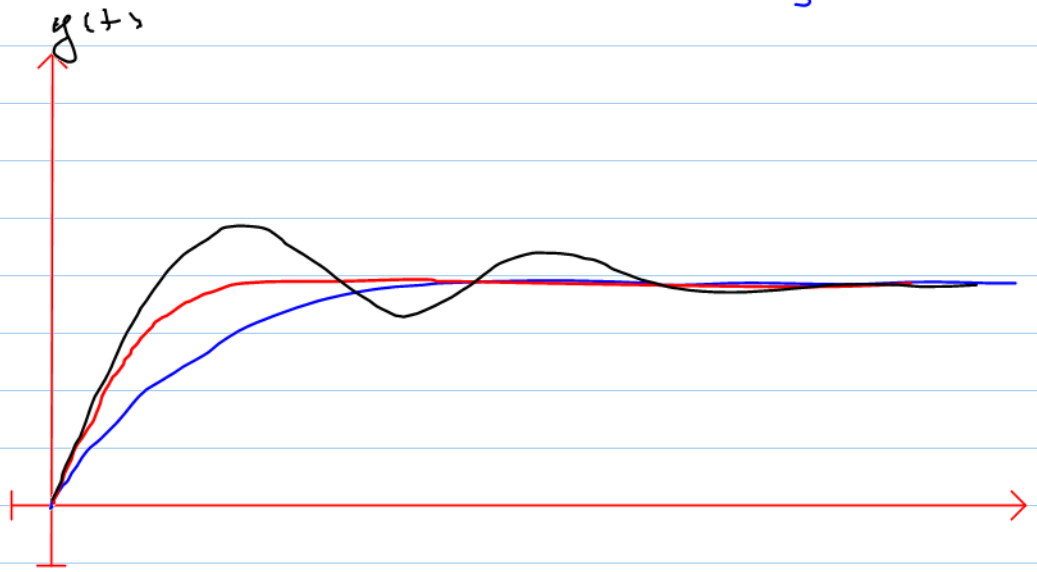
$$Y(s) = k\left(\frac{1}{\omega_n^2}\frac{1}{s} - \frac{1}{\omega_n^2}\frac{1}{s+\omega_n} - \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{(s+\omega_n)^2}\right)$$

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n^2}\left(1 - e^{-\omega_n t} - te^{-\omega_n t}\right)$$


y(t)
k/ωn²
t

کنترل فلی

تحلیل حالت گذرا



سیستم مرتبه اول: $G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$

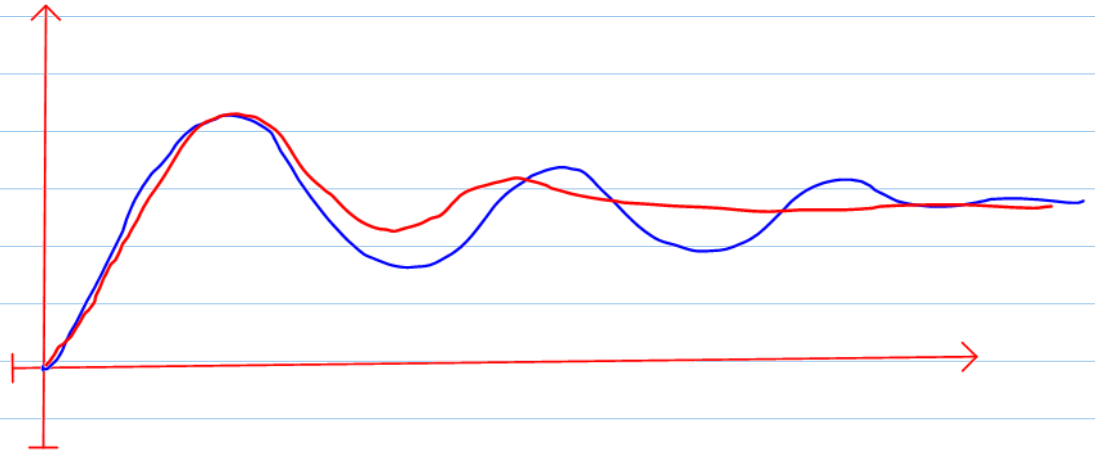
مزیت استفاده سیستم مرتبه دوم؟

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + as + b}$$

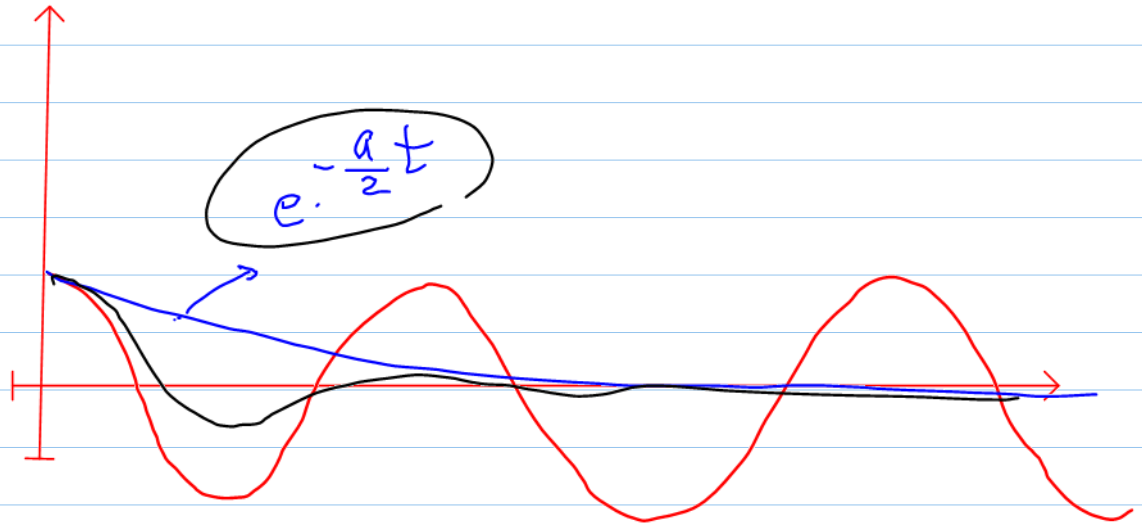
در حالت سوم:

$$y(t) = A + B\, e^{-\frac{a}{2}t} \cos(ct)$$



$\frac{a}{2} = 10$

$\frac{a}{2} = 100$

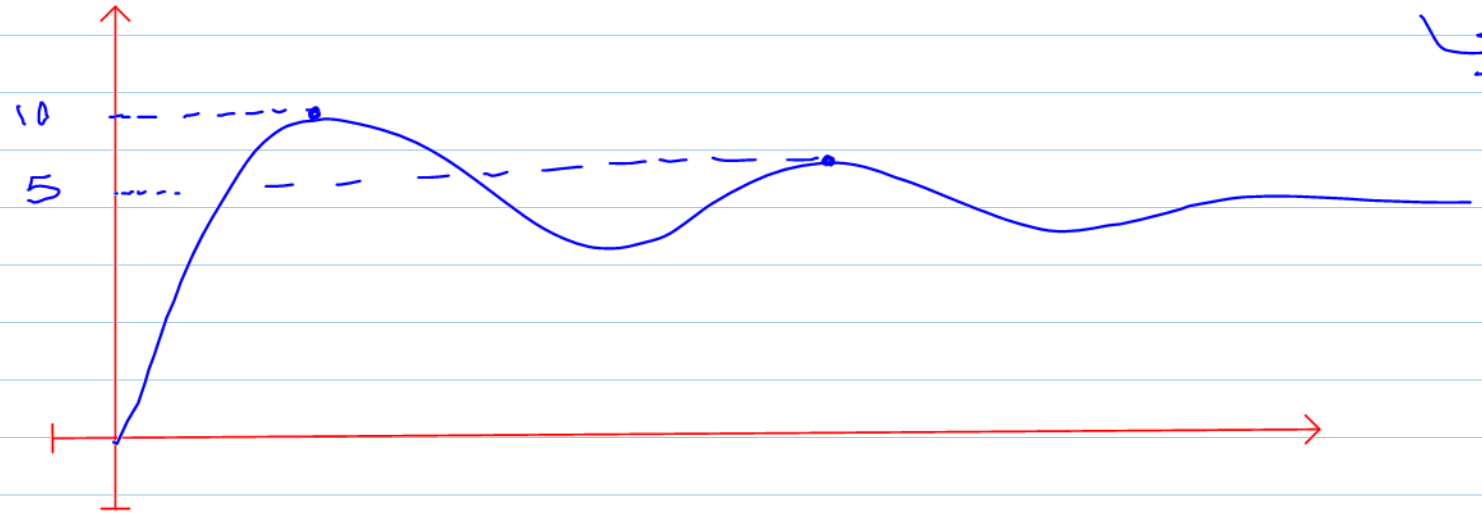


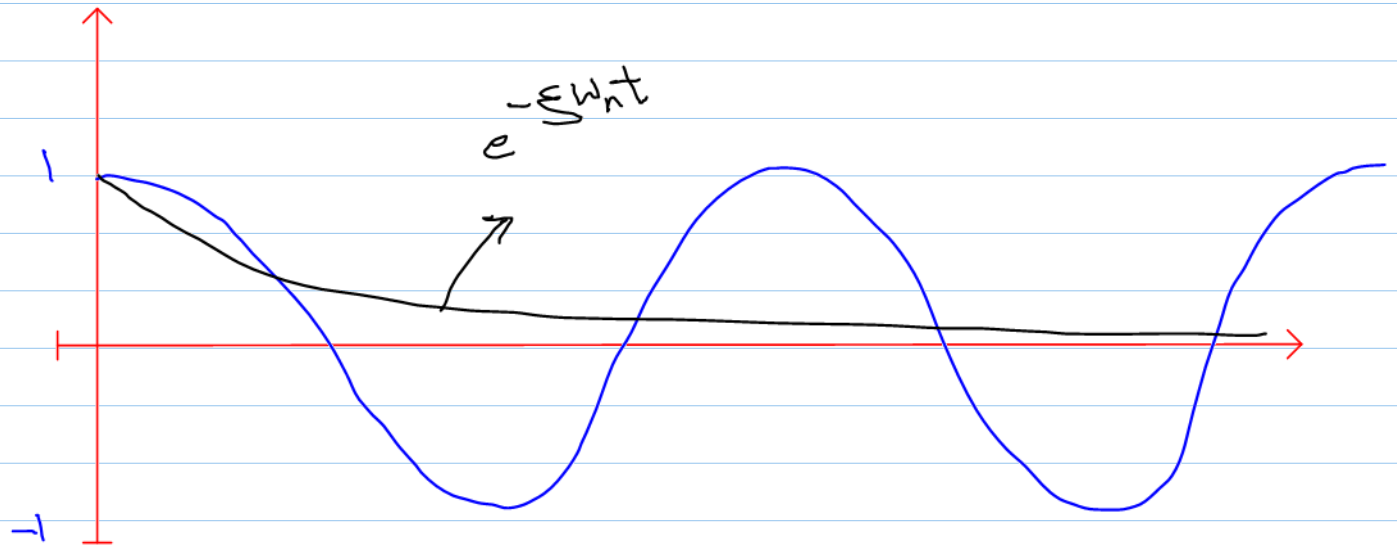
$\frac{a}{2}$ = ضریب اتلاف در مکانیک = ضریب میرایی

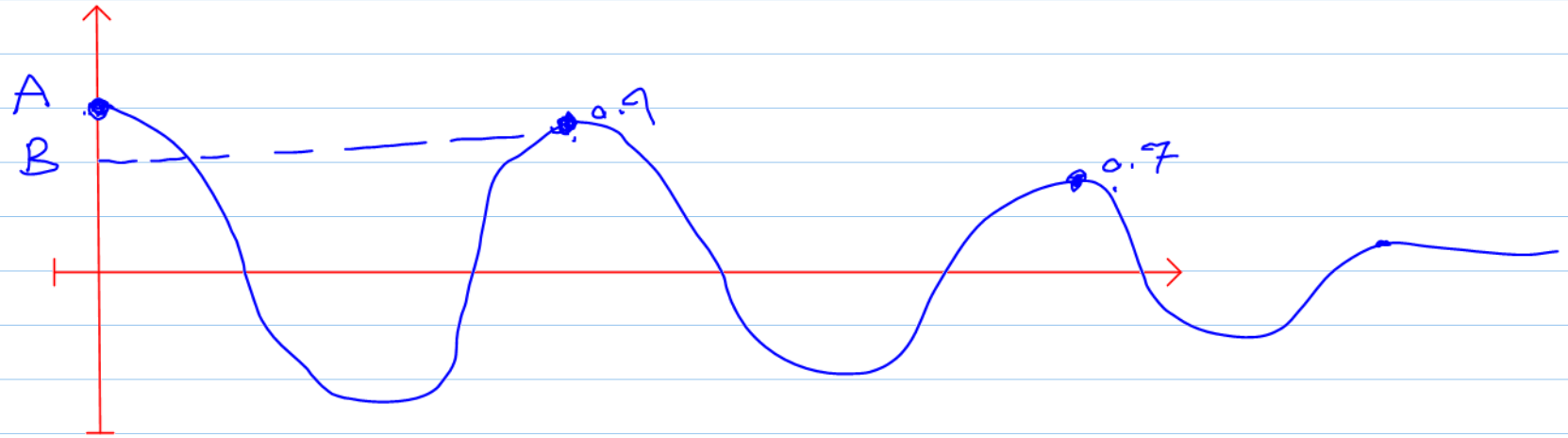
$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

ω_n = فرکانس طبیعی

ξ = نسبت میرایی







$\frac{B}{A}$ = فقط بستگی به ξ دارد.

ω_n : فرکانس طبیعی نامیرا.

توضیح : حالت نوسانی شدن پاسخ (نامیرا)



$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_0 s + b}$$

$a=0 \rightarrow$ حالت نوسانی

$$y(t) = b \cos(\sqrt{b}\, t)$$

در حالت خاص سیستم با فرکانس $\sqrt{b}$ نوسان می‌کند.

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

در حالت خاص سیستم با فرکانس $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$ نوسان می‌کند.

ω_n : فرکانس طبیعی خاص

$\omega_d = ?$ فرکانس طبیعی میرا

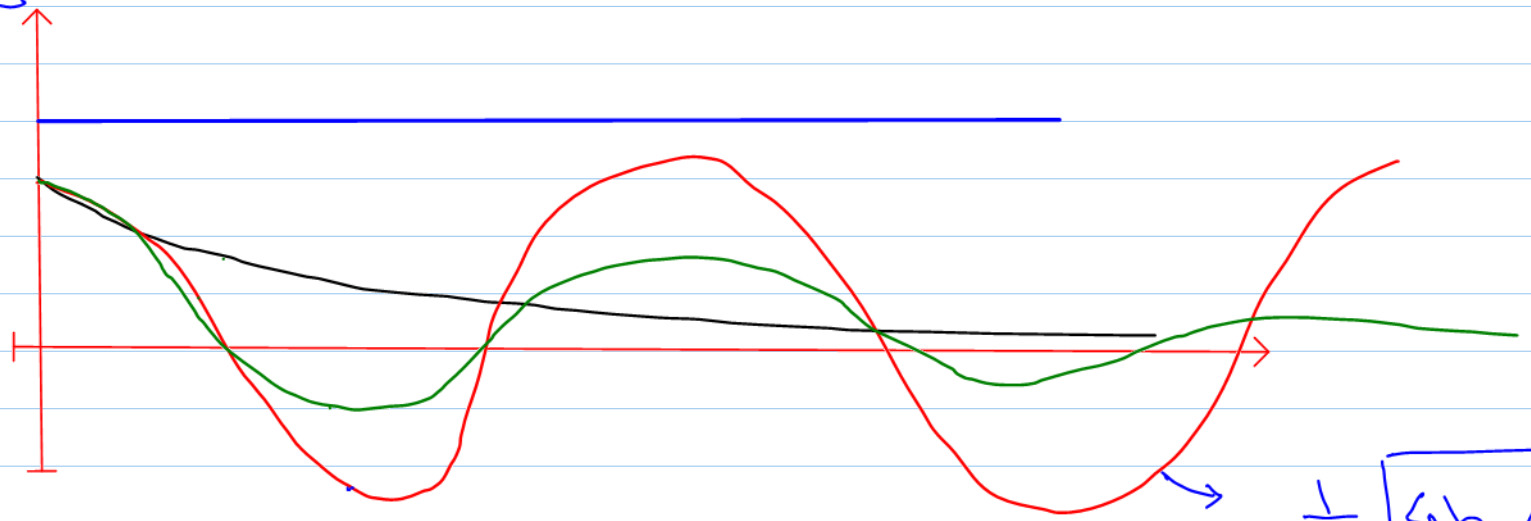
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

در حالت سوم (حد فاصل) داریم:

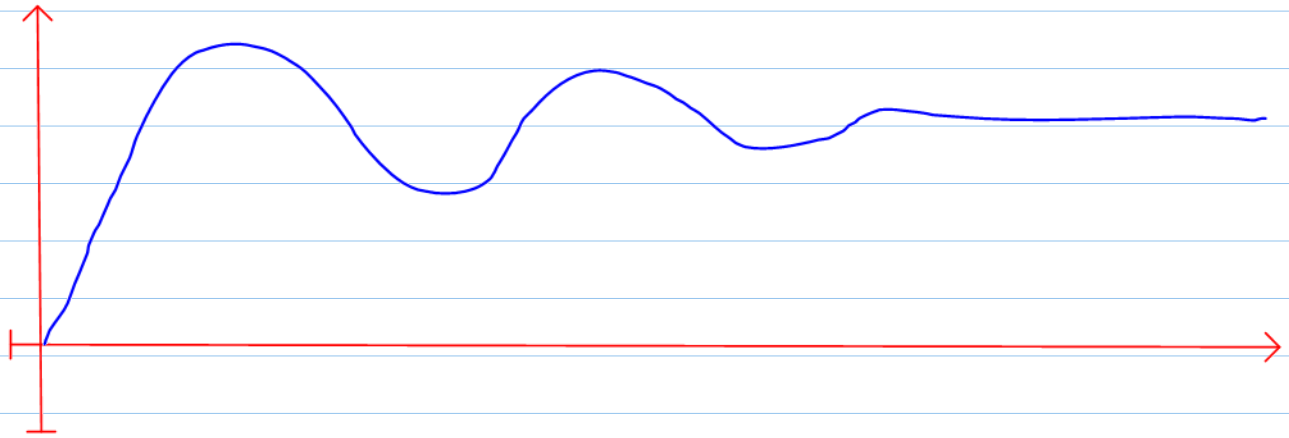
$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \quad ; \quad \Delta < 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \mp j\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$$

$$y(t) = A + B\, e^{-\frac{a}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\; t\right)$$



$\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$ = فرکانس



فرکانس طبیعی میرا

فرکانس طبیعی میرا = $\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$

$$G(s)=\frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{b}{s^2+as+b}$$

فرکانس طبیعی میرا = $\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_n^2-4\xi^2\omega_n^2}=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\omega_d$

ω_n : اگر سیستم نوسانی شود با فرکانس ω_n نوسان می‌کند.

ω_d : در حالت زیر میرا سیستم با فرکانس ω_d نوسان می‌کند.

ξ : نسبت میرایی

$\xi\omega_n$: ضریب میرایی

ω_n : فرکانس طبیعی نامیرا

ω_d : فرکانس طبیعی میرا

$$G(s)=\frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{2}{1s^2 + 4} = \frac{k}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} \omega_n = 2 \\ 2\xi\omega_n = 0 \rightarrow 2\xi \times 2 = 0 \rightarrow \xi = 0 \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2 \end{cases}$$

تحلیل حالت گذرای سیستم مرتبه دوم استاندارد:

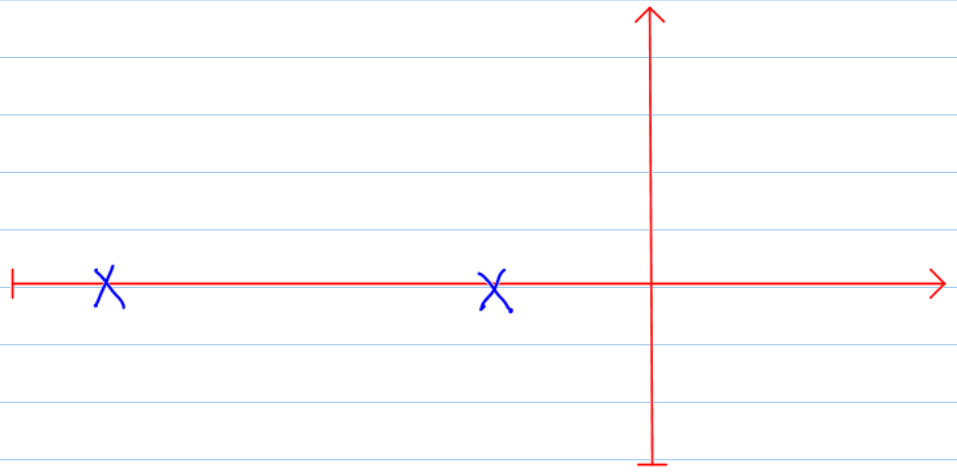
① $\xi > 1$ ← خروجی سیستم ← دو قطب حقیقی منفی غیر تکراری

$y(t)$

t

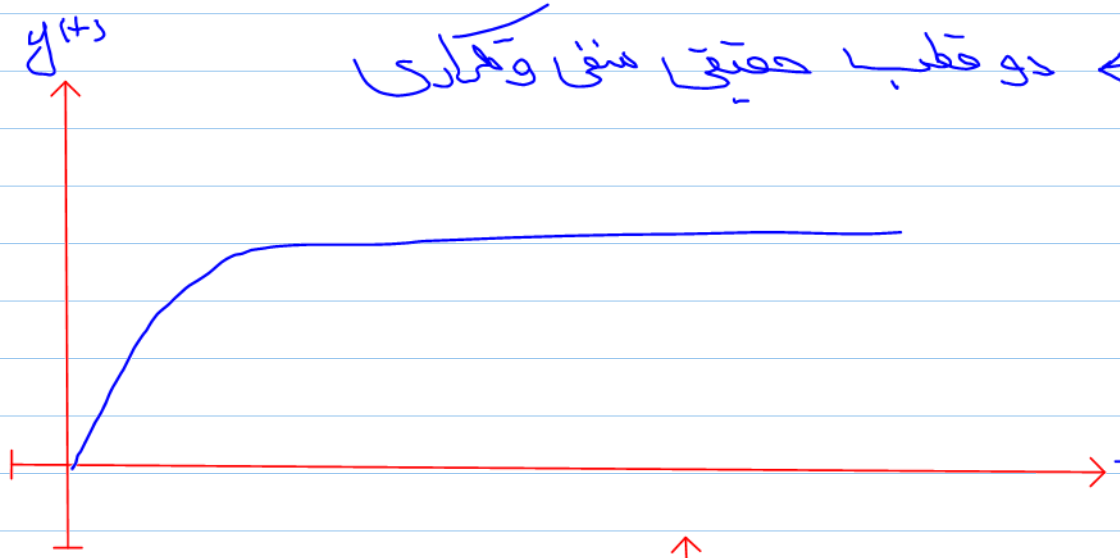
ماسخ بسیار کند

~ آرام و بدون نوسان



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

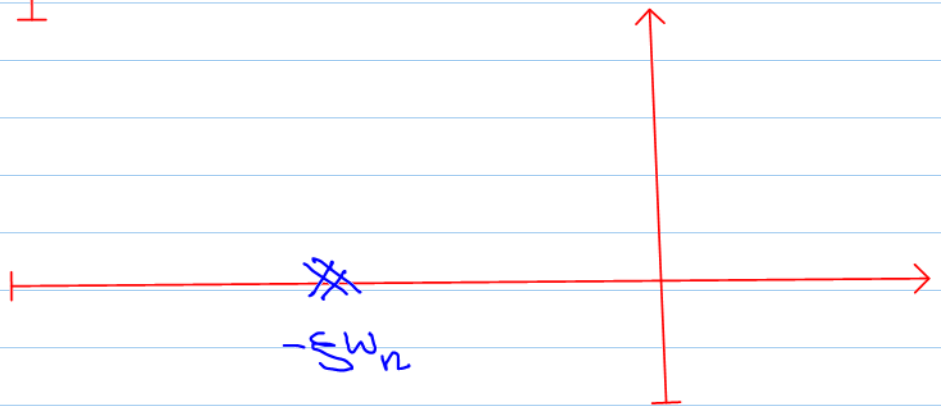
(2) $\xi = 1$ ← میرایی بحرانی ← دو قطب حقیقی منفی و تکراری



سریعترین پاسخ بدون بالازدگی

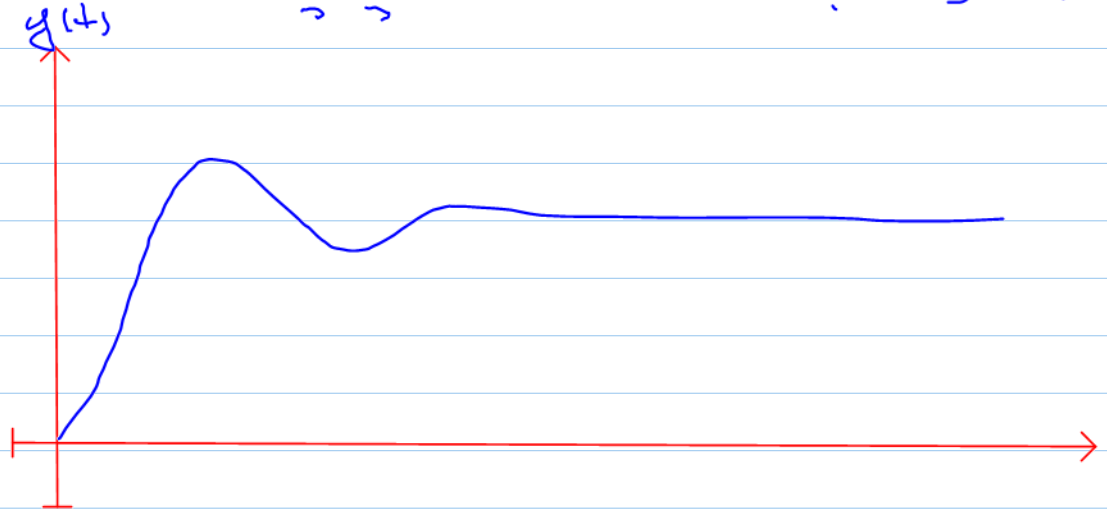
" " " نوسانی

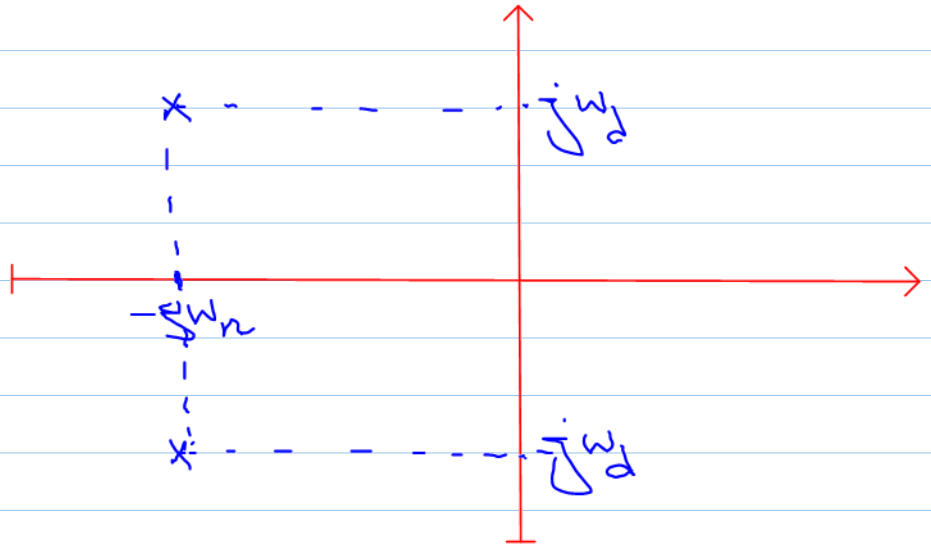
کم ترین انرژی را برای رسیدن به هدف سرمایه گذاری کند.



$$s_{1,2} = -\omega_n$$

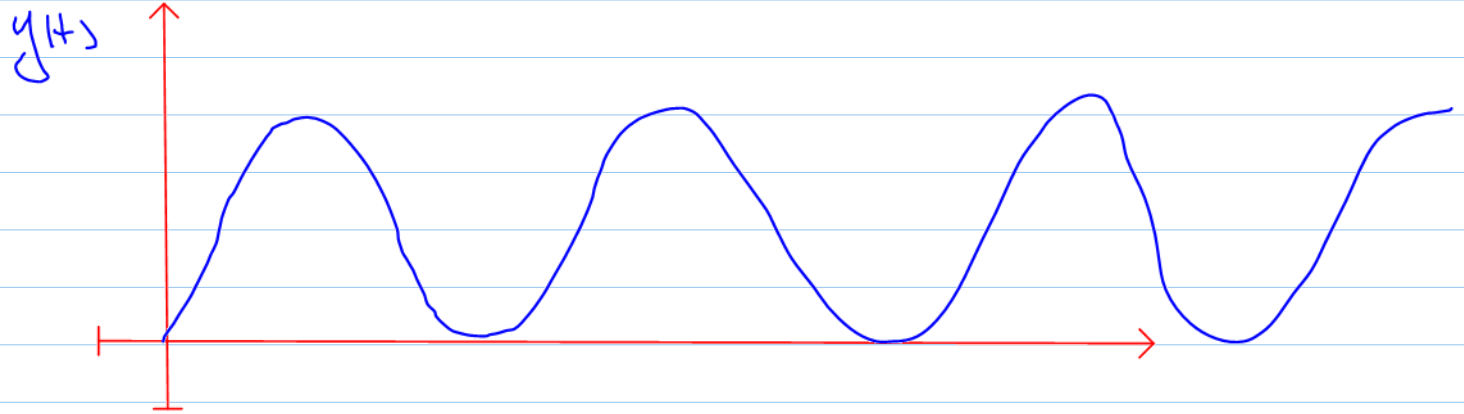
③ $0 < \zeta < 1$ ← زیرمیرا ← دو قطب مختلط مزدوج

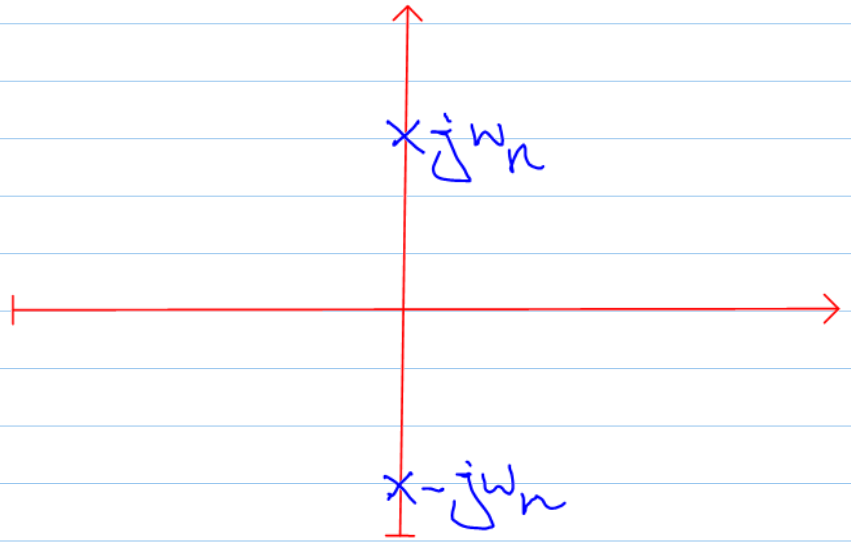




$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

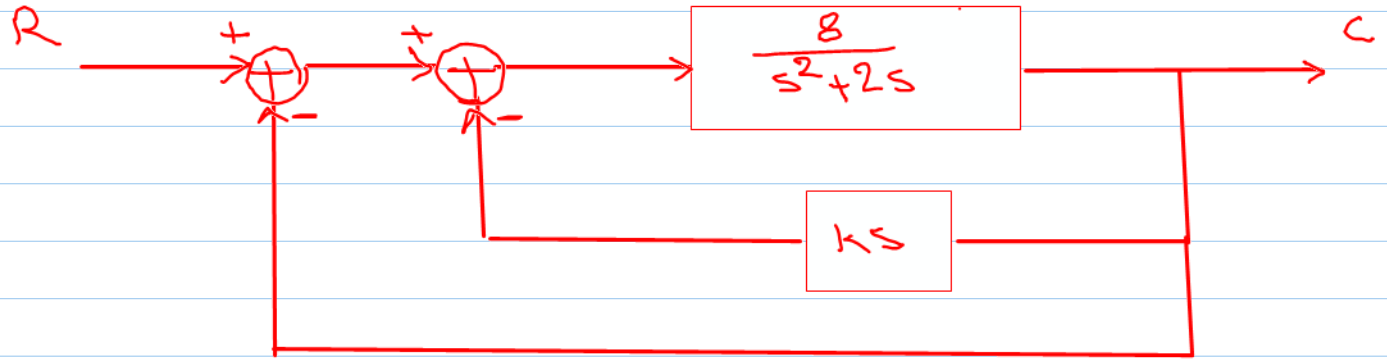
④ $\zeta = 0$ ← نامیرا = نوسانی ← دو قطب روی محور $j\omega$





ناپایدار ← $\zeta < 0$ (5)

مثال: در سیستم زیر به ازای چه مقدار k، سیستم دارای نسبت میرایی 0.8 خواهد بود؟



$\zeta = 0.8$ چون ← $k = ?$

$\frac{C(s)}{R(s)} = ?$ حلقه‌ها: $l_1 = -ks \times \frac{8}{s^2+2s} = -\frac{8k}{s+2}$

$$l_2 = -\frac{8}{s^2+2s}$$

مسیرها: $P_1 = \frac{8}{s^2+2s} \rightarrow \Delta_1 = 1$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{8k}{s+2} - \frac{8}{s^2+2s} \right)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{8}{s^2+2s} \times 1}{1 + \frac{8k}{s+2} + \frac{8}{s^2+2s}} = \frac{8}{s^2+2s+8ks+8} = \frac{8}{s^2+(8k+2)s+8}$$

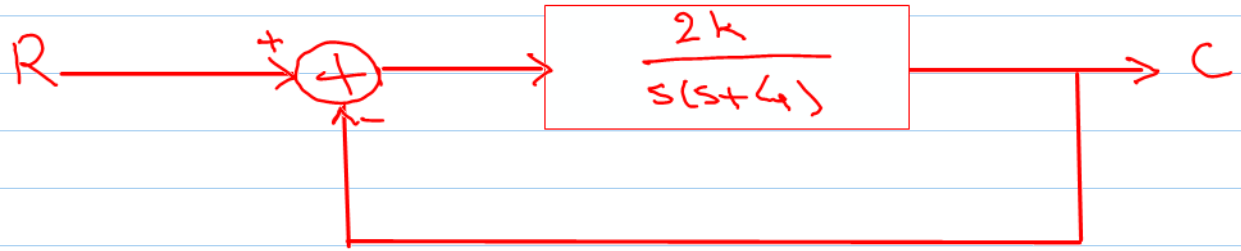
$$G(s) = \frac{8}{1s^2 + (8k+2)s + 8} = \frac{k}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 8 \longrightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$$

$$2\xi \times 2\sqrt{2} = 8k+2 \longrightarrow 2 \times 0.8 \times 2\sqrt{2} = 8k+2$$

$$8k = 3.2\sqrt{2} - 2 \longrightarrow k = \frac{3.2\sqrt{2} - 2}{8} \longrightarrow \xi = 0.8$$

در سیستم زیر k چقدر باشد تا سریعترین پاسخ بدون بالازدگی را داشته باشیم؟



سریعترین پاسخ بدون بالازدگی = میرایی بحرانی $\rightarrow \zeta = 1$

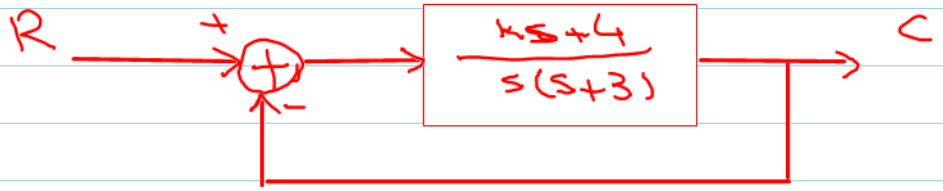
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k}{1s^2+4s+2k} = \frac{k'}{1s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$2\zeta\omega_n = 4 \rightarrow 2\times 1\times\omega_n = 4 \rightarrow \omega_n = 2$$

$$\omega_n^2 = 2k \rightarrow 4 = 2k \rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2+4s+4} = \frac{4}{(s+2)^2}$$ میرایی بحرانی

مثال: در سیستم زیر مقدار میرایی سیستم برابر با 2 است. نوع رفتار سیستم در حالت گذرا را تعیین کنید.



$$\xi w_n = 2 \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ks+4}{s(s+3)+ks+4} = \frac{ks+4}{s^2+(3+k)s+4}$$

$$G(s) = \frac{k'}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2} \neq \frac{\cancel{ks+4}}{s^2+(3+k)s+4}$$

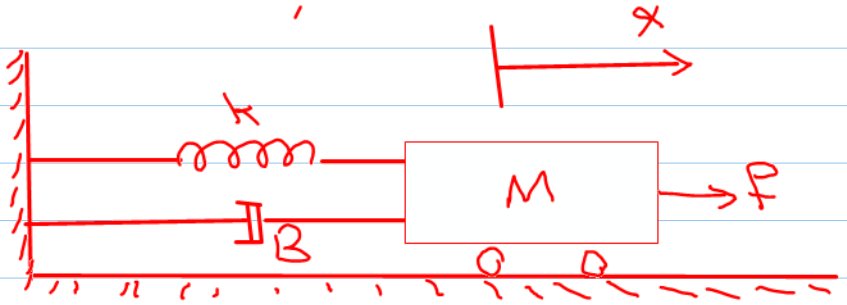
نوع رفتار حالت گذرا فقط توسط مقادیر میرایی و مشود و برای تحلیل حالت گذرا، صفرها را در نظر نمی‌گیریم.

$$\begin{cases} 2\xi w_n = 3+k \\ w_n^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \boxed{w_n = 2}$$

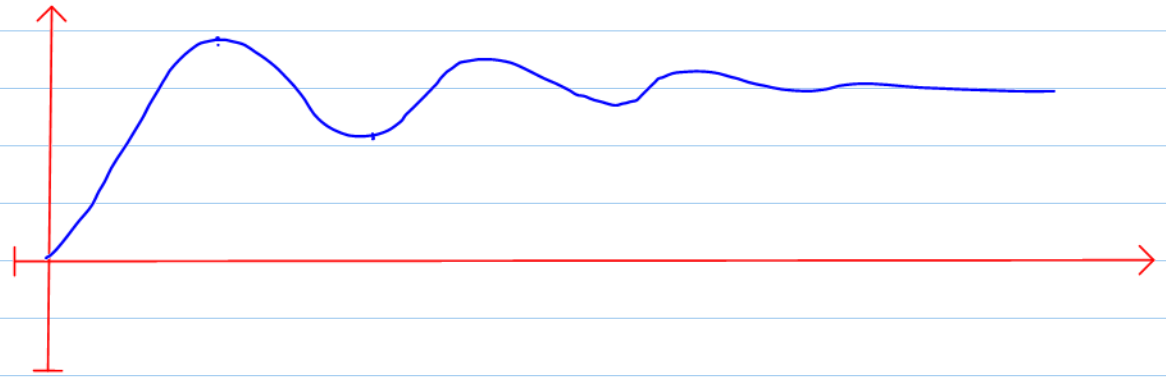
$\xi \omega_n = 2 \rightarrow \xi \times 2 = 2 \rightarrow \xi = 1 \rightarrow$ میرایی بحرانی

مثال:

در سیستم زیر اگر جرم $M = 10kg$ ، $B = 20$ باشد ضریب سختی فنر را به نحوی تعیین کنید که فرکانس نوسانات مشاهده شده در اثر نیروی یک واحد برابر $2 \frac{rad}{s}$ باشد.



$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k} = \frac{1}{10s^2 + 20s + k}$$



نوسانات میرا = نوسانات قابل مشاهده = ω_d

فرکانس طبیعی نامیرا ω_n ← آن سیستم نوسانی خود قابل مشاهده است.

$$\omega_d = 2 \rightarrow \quad k = ?$$

$$\frac{1}{10s^2 + 20s + k} = \frac{k'}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{s^2 + 2s + \frac{k}{10}} = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 2 \Rightarrow \xi\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{k}{10} \\ \omega_d = 2 = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi w_n = 1 \\ w_n^2 = \frac{k}{10} \\ w_n^2 - w_n^2 \xi^2 = 4 \end{cases}$$

$$\frac{k}{10} - (w_n \xi)^2 = 4 \rightarrow \frac{k}{10} - 1^2 = 4 \rightarrow \boxed{k = 50}$$

$$w_d = 2 \checkmark$$

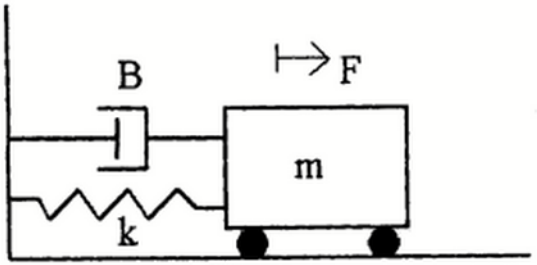
جلسه بعد حل مسئله این جلسه.

کنترل مفی جلسه 23

نوع رفتار حالت گذرا سیستم مرتبه دوم

برق ۹۲

۵۵- در شکل زیر، هدف آن است که پس از اعمال نیروی $F = 1\ N$ در زمان $t = 0$، جرم در فاصله یک متری از نقطه‌ی اولیه متوقف شود، با فرض این که ضریب اصطکاک جرم با سطح زمین قابل صرف‌نظر باشد، به ازای جرم $1\ kg$ مقادیر K و B را به گونه‌ای بدست آورید، تا مسافت طی شده توسط جرم برای رسیدن به نقطهٔ هدف مینیمم باشد؟



۱) $K = 1, B > 2$

۲) $K = 1, B \geq 2$

۳) $K = 1, -2 < B < 2$

۴) $B = 2$ بستگی به K ندارد.

خواسته‌های مسأله: ① جرم M با طی کردن کمترین مسافت = میرایی بحرانی

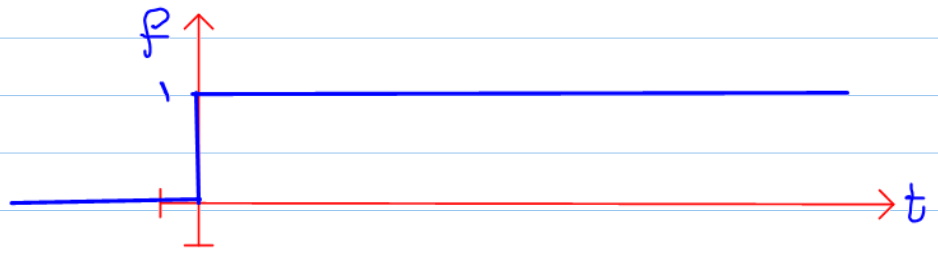
② ~ ~ در فاصله ۱ متری توقف کند.

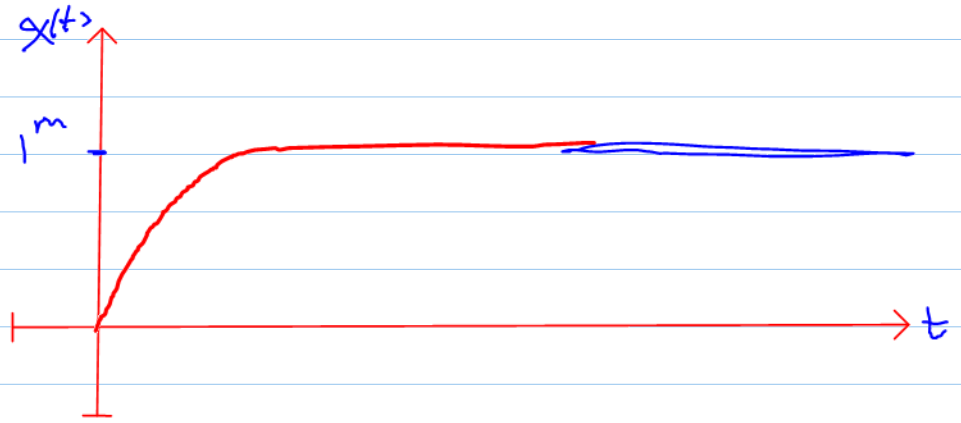
داده مسأله: ① $F = 1N$

② $M = 1kg$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k}$$

F = پله واحد





$x(\infty) = 1\,m$ ، $\zeta = 1$ میرای بحرانی ، $M = 1\,kg$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{1s^2 + Bs + k}$$

$F = 1 \rightarrow x = 1$

ورودی $= 1 \rightarrow$ خروجی $= 1$

بهره dc $= \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{1}{1} = 1$

بهره dc $= G(0) \rightarrow$

$$\sim\sim = \left.\frac{X(s)}{F(s)}\right|_{s=0} = \frac{1}{k} = 1 \rightarrow \boxed{k = 1}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + Bs + 1} = \frac{k'}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

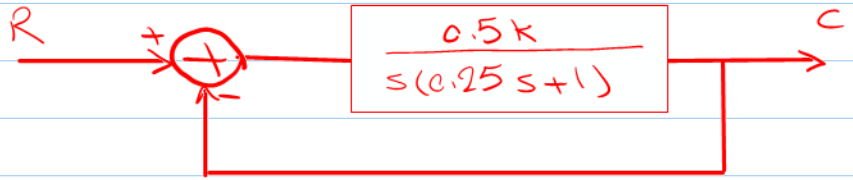
$\omega_n^2 = 1 \rightarrow \omega_n = 1$

$2\zeta \times 1 = B$

$2 \times 1 \times 1 = B \rightarrow \boxed{B = 2}$

$k = 1$ ، $B = 2$

در سیستم زیر برای اینکه سیستم حلقه بسته دو ریشه سمت چپ داشته باشد مقدار k و محل دو ریشه حلی سمت چپ کدام است؟



1) $k=1 , s_{1,2}=2$

2) $k=2 , s_{1,2}=-1$

3) $k=1 , s_{1,2}=-2$

4) $k=2 , s_{1,2}=-2$

خواسته مسأله: ریشه‌های حلقه بسته همنهاد باشند

① ~ ~ حقیقی و همنهاد ← میرای بحرانی ← $\xi = 1$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0.5k}{0.25s^2 + s + 0.5k} = \frac{k'}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{2k}{1s^2 + 4s + 2k} = \frac{k'}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 4 \\ \omega_n^2 = 2k \end{cases} \quad \xi = 1 \rightarrow \quad 2\omega_n = 4 \rightarrow \omega_n = 2$$

$$\rightarrow \quad 4 = 2k \rightarrow \boxed{k = 2}$$

در حالت میرای بحرانی قطبهای حلقه بسته $-\xi\omega_n$ است.

$$-1 \times 2 = -2$$

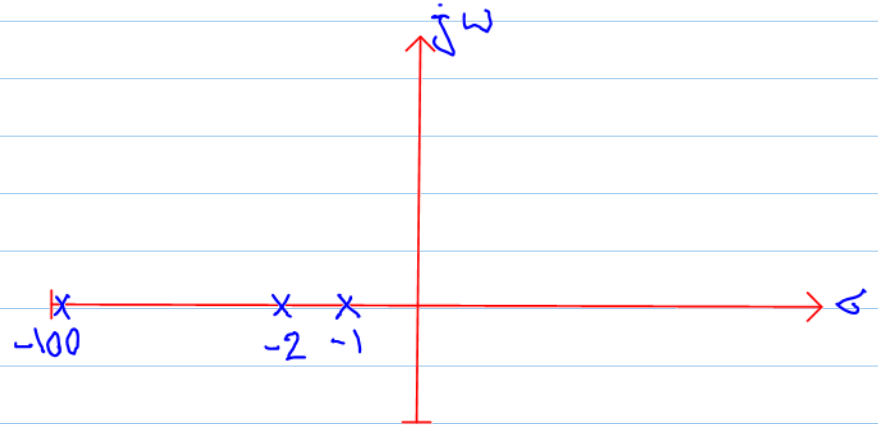
$$s_{1,2} = -2$$

تقریب ذل ؟

تحلیل سیتم مرتبه ۱ و ۲ را همیدیم ← برای سیتم‌های مرتبه بالاتر؟

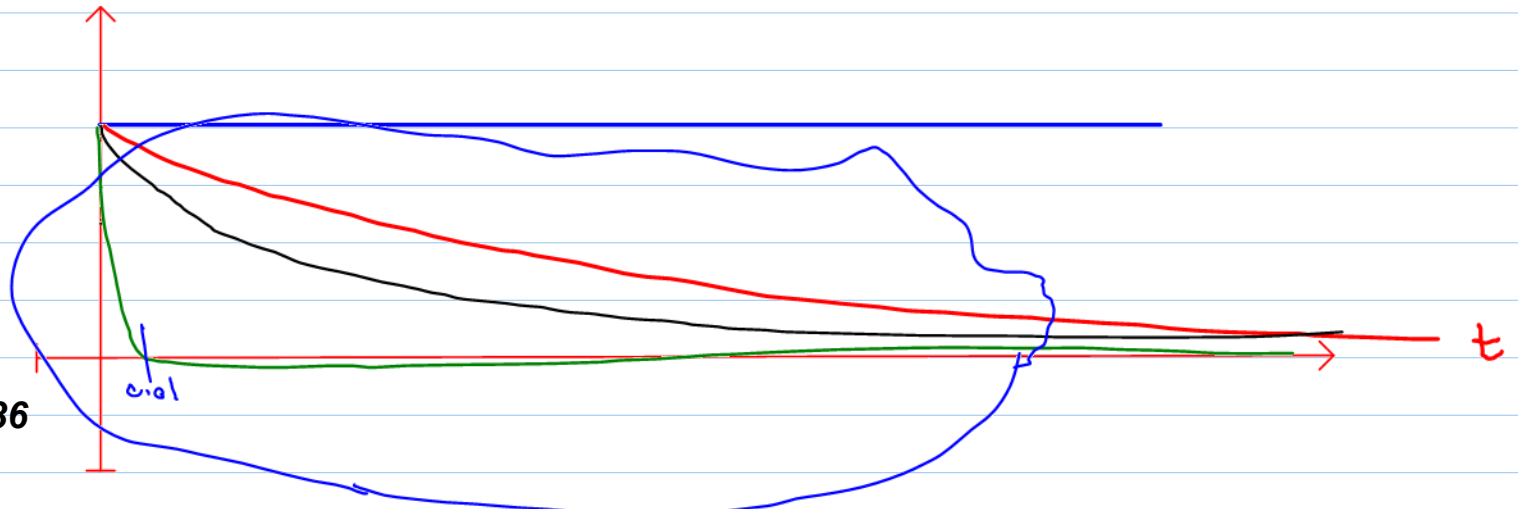
* از روش تقریب ذل استفاده میوتا استفاده‌کننده مورت سوال گفته باشد.

روش تقریب ذل ؟



$$g(t) = \overset{1}{A}e^{-t} + \overset{1}{B}e^{-2t} + \overset{1}{C}e^{-100t} + 1$$

فرض $A = B = C = 1$

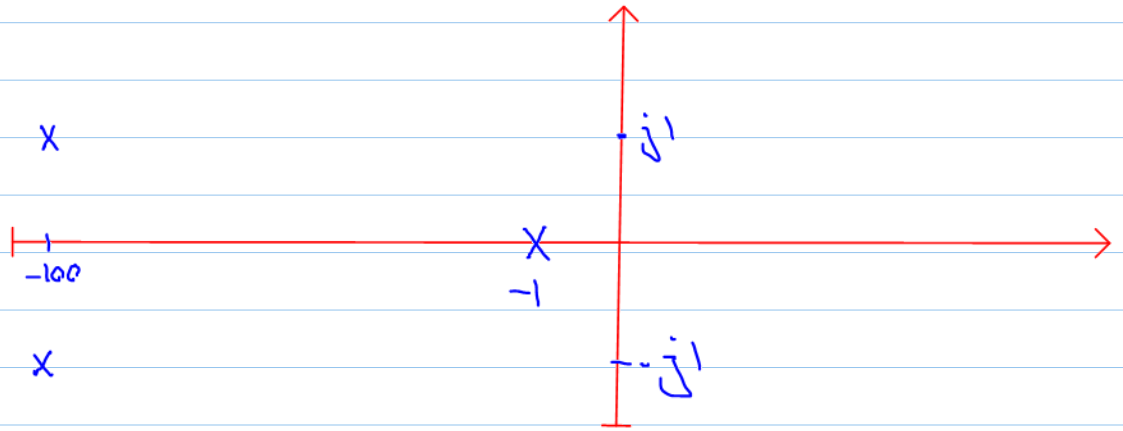


e^{-100t} خیلی سریع میرنده ← روی حالت گذرا خیلی تأثیر ندارد.

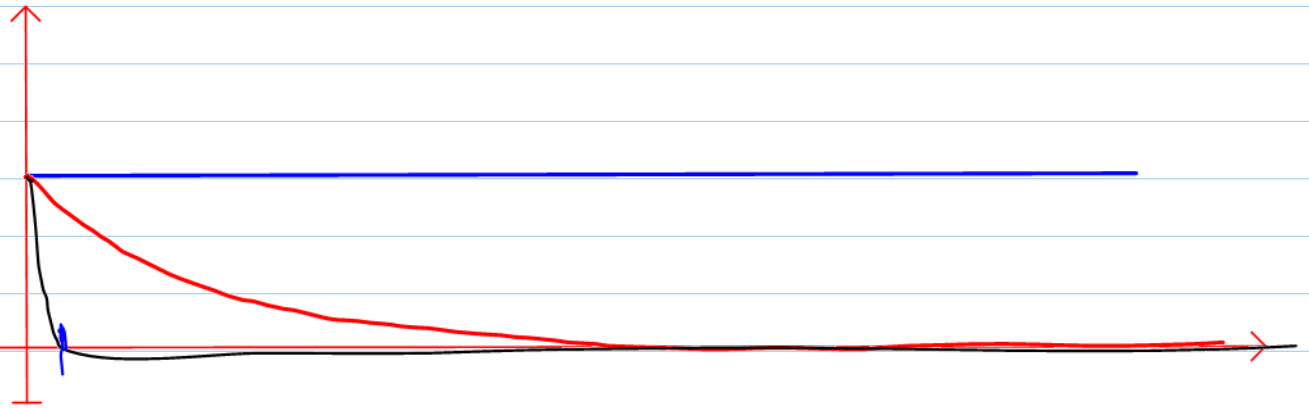
$$y(t) \simeq 1 + e^{-t} + e^{-2t}$$

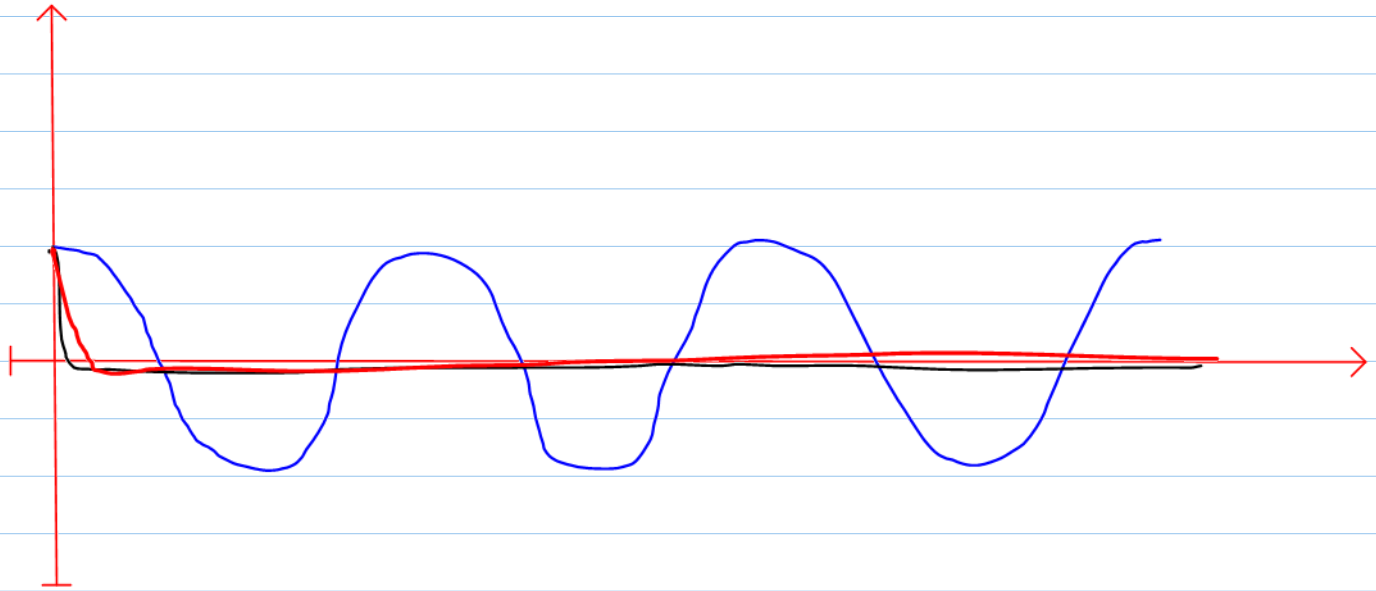
برای تقریب زدن قطبهای دورتر از محور $j\omega$ را می‌توان حذف کرد.

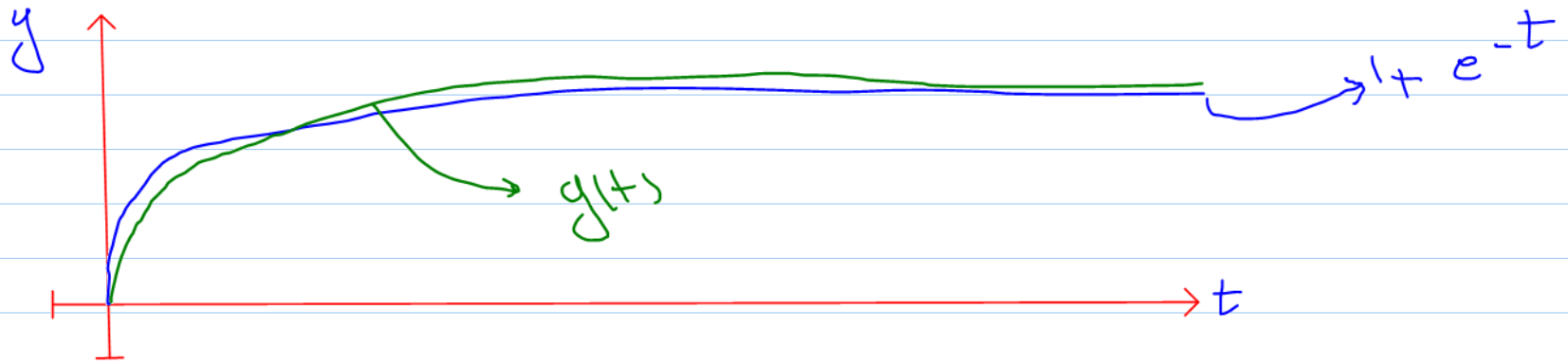
قطب غالب: قطبی که رفتار حالت گذرا بیشتر به آن وابسته است.



مثلا $y(t) = 1 + e^{-t} + e^{-100t}\cos(1t)$







$g(t) \simeq 1+e^{-t}$ ← یا سیستم با این مقدار

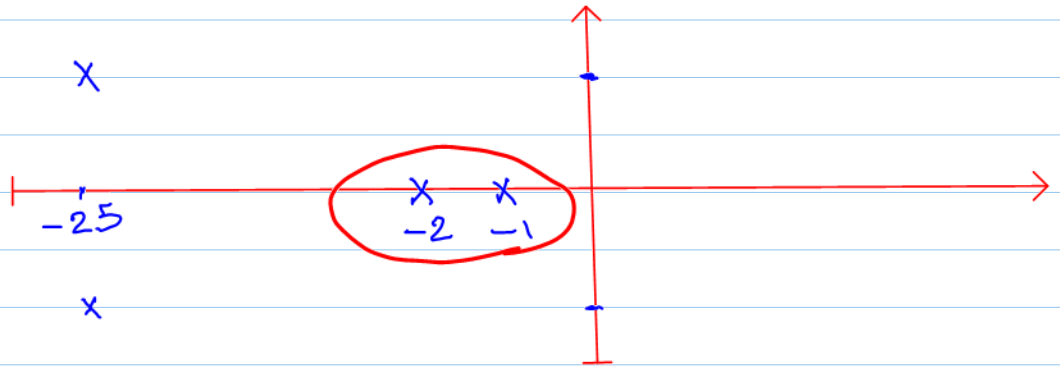
و $s=-1$

قطب‌های غالب: قطب‌های نزدیک به محور $j\omega$ را قطب‌های غالب گوییم.

تقریب زدن: در سیستم مرتبه بالاتر، قطب‌های دور از محور $j\omega$ را می‌توان حذف کرد. اما مقدار dc آن را قطب را باید در سیستم اعمال نمود.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)} \simeq \frac{1}{(s+1)(100)}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+1)(s^2+50s+1000)} \simeq \frac{2}{(s+2)(s+1)(1000)}$$



برای تحلیل حالت گذرای سیستم‌های بالاتر از مرتبه 2 تنها وقتی که مورد سوال گفته باشد از تقریب استفاده می‌کنیم.

* در هنگام تقریب زدن توان صفر قطبهای نزدیک به صفر را حذف کرد.

$$G(s) = \frac{2(s+1.95)}{(s+2)(s+1)(s+20)} \simeq \frac{2(1.95)}{2(s+1)(20)}$$

مسئله‌ی ۷۳.

تابع تبدیل یک سیستم $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{200(s+2.9)}{(s+3)(s+4)(s+100)}$ است. کدام تقریب برای این سیستم مناسب است؟

۱) $\frac{200}{s+3}$ ۲) $\frac{200}{s+4}$ ۳) $\frac{1.933}{s+4}$ ۴) $\frac{2}{s+4}$

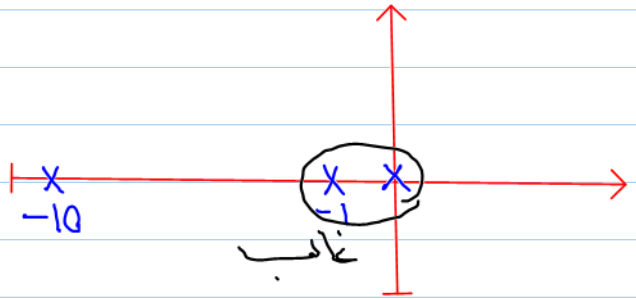
$$G(s) = \frac{2(s+2.9)}{(s+3)(s+4)(s+100)} \simeq \frac{200(2.9)}{3(s+4)(100)} \simeq \frac{1.933}{s+4}$$

تست ۷۸.

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$ و $(H=1)$ است. این سیستم با کدام تابع تبدیل حلقه باز، قابل تقریب است؟

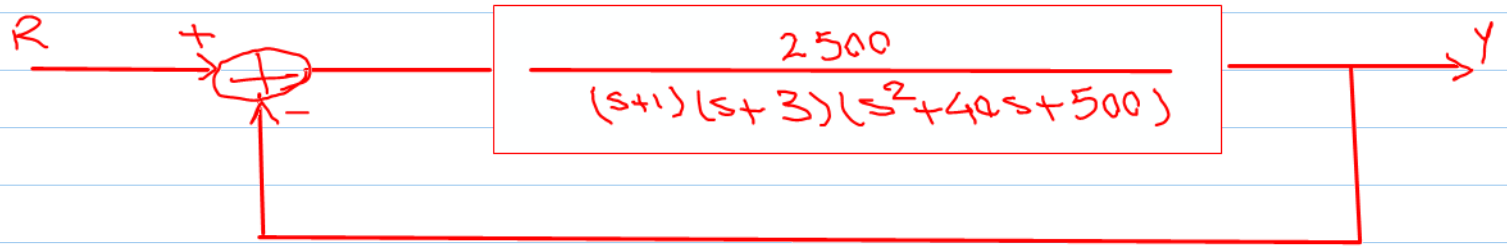
۱) $\frac{1}{s(s+10)}$ ۲) $\frac{10}{s(s+1)}$ ۳) $\frac{10}{s(s+10)}$ ۴) $\frac{1}{s(s+1)}$

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} \simeq \frac{10}{s(s+1)(10)} = \frac{1}{s(s+1)}$$



مثال. اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم زیر را با یک سیستم مرتبه دوم تقریب بزنیم، سیستم حلقه بسته حاصل چه نوع رفتاری دارد؟

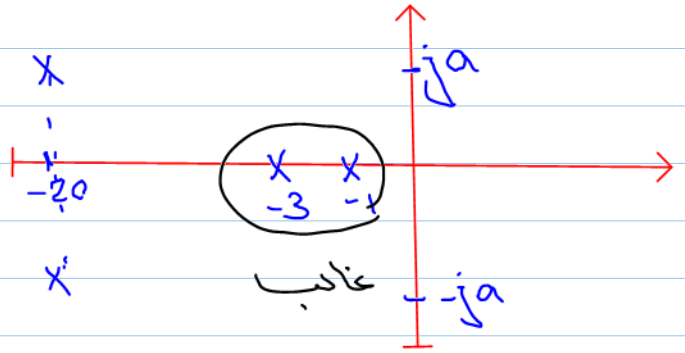
۱) خوب میرا ۲) زیر میرا ۳) میرای بحرانی ۴) فاقد میرا



$$G(s) = \frac{2500}{(s+1)(s+3)(s^2+40s+500)}$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{2500}{(s+1)(s+3)(500)}$$





$$\tilde{G}(s) = \frac{5}{s^2+4s+3} \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2+4s+3+5} = \frac{5}{s^2+4s+8}$$

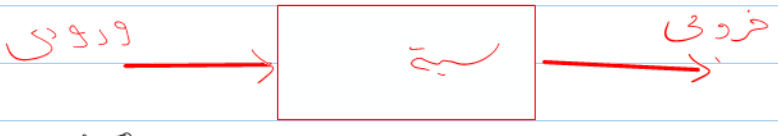
$$= \frac{k'}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

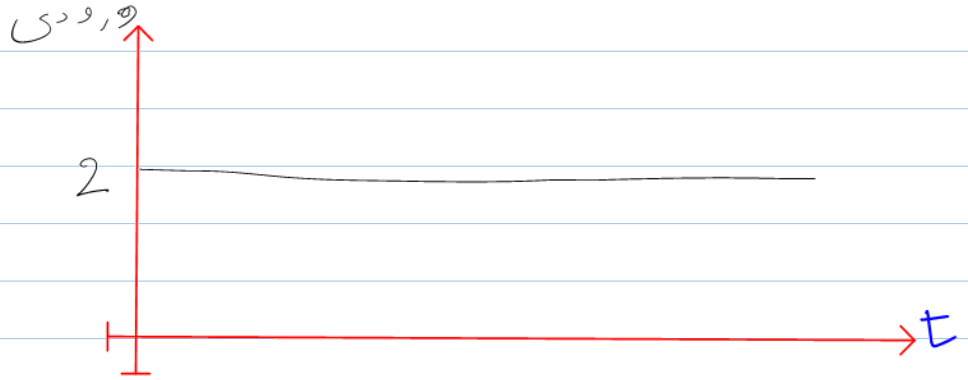
$\omega_n^2 = 8$, $2\xi\omega_n = 4$

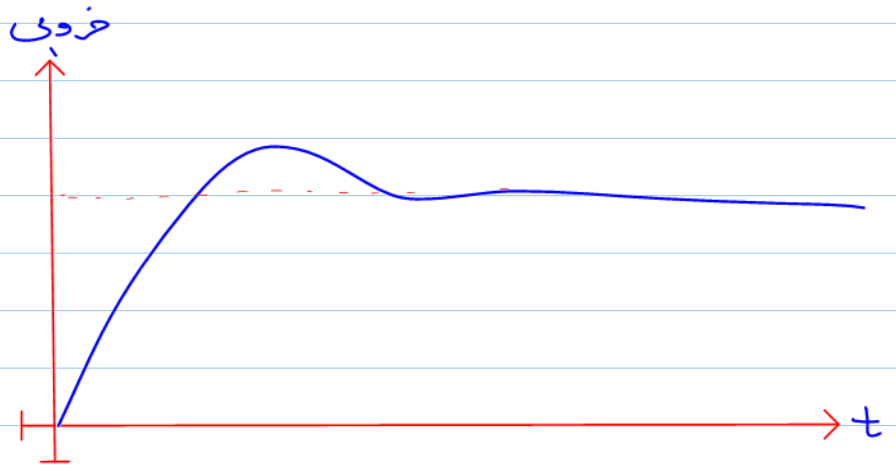
$\omega_n = 2\sqrt{2}$ $\qquad 2\times\xi\times 2\sqrt{2} = 4 \rightarrow \xi = 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$0 < \xi < 1$ ← زیر میرا

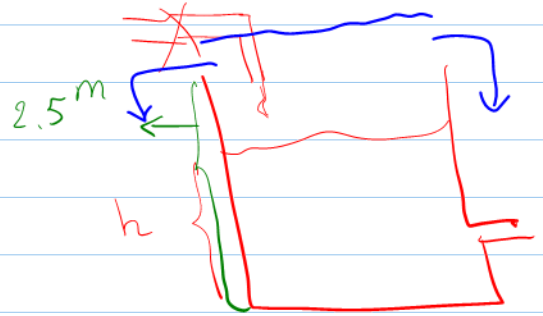
مشخصات سیستم مرتبه دوم.



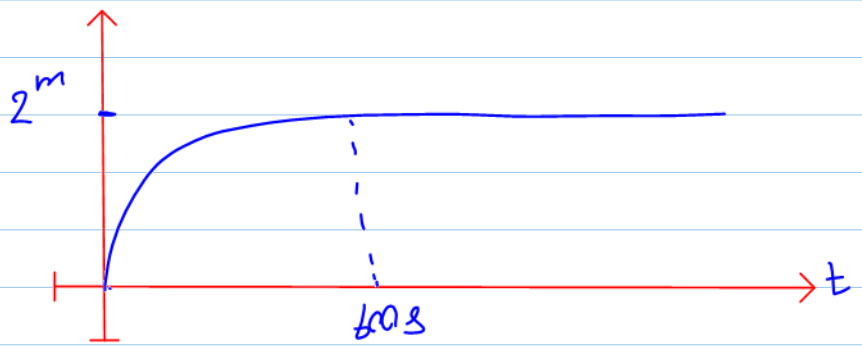


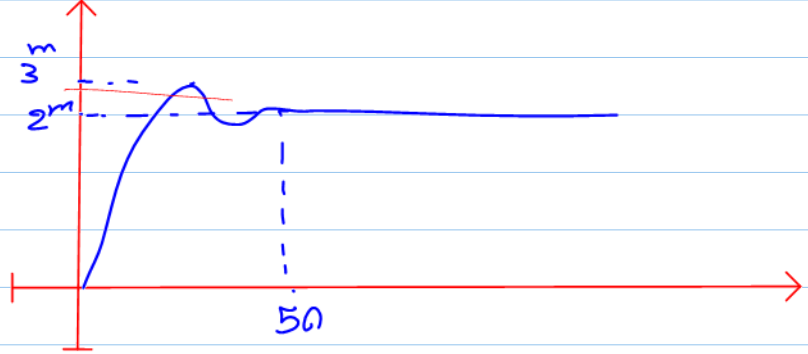


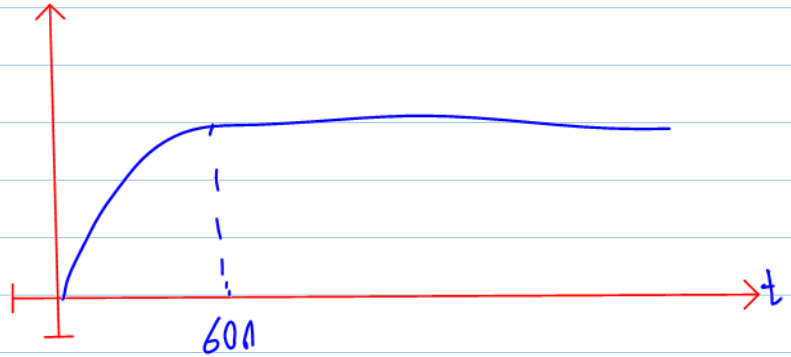
زیرسیستم: برای خوب یا بد بودن یک سیستم باید معیار تعریف کنیم؟

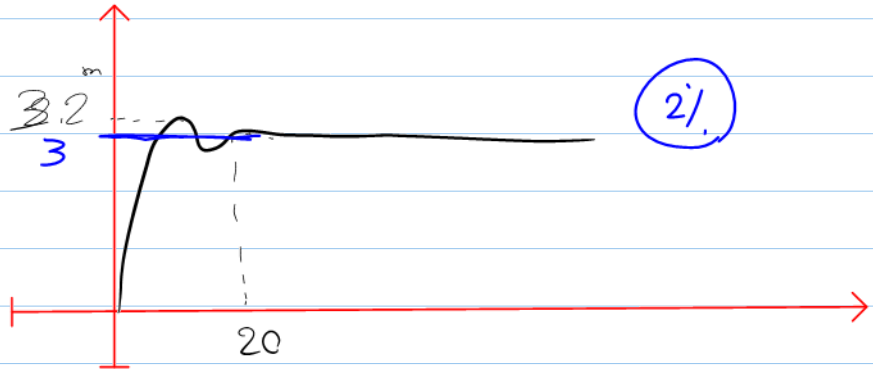


مثلا: $h \rightarrow 2\,m$

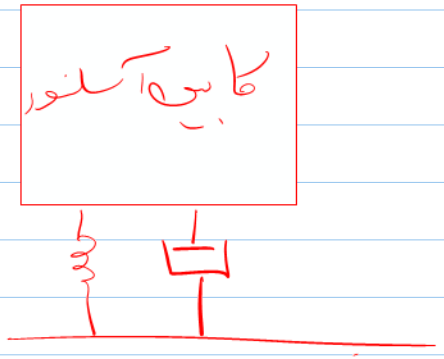








2/



کابین در ارتفاع 3^m متوقف ← هدف نمود.

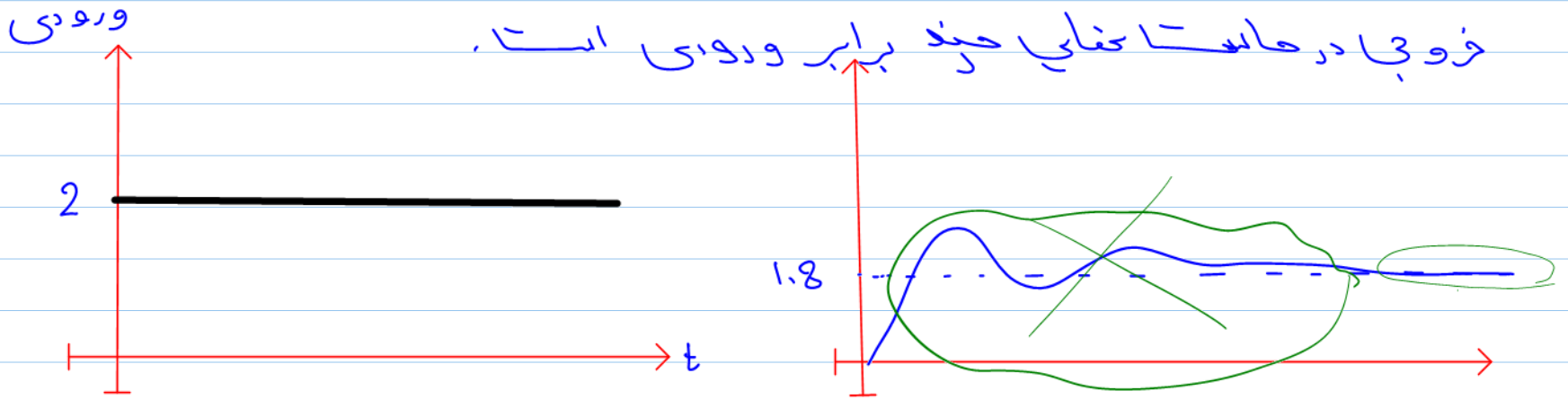
زمان رسیدن پاسخ ← اسم ← مشخصه (2s)

میزان با نوسان گذرا ← اسم ← ~ (1/2)

مشخصات ← یک سری معیار استاندارد برای سنجش کیفیت پاسخ گذرا

① بهره dc : یعنی در حالت ماندگار ، ورودی چند برابر می‌شود.

خروجی در حالت ماندگار چند برابر ورودی است.



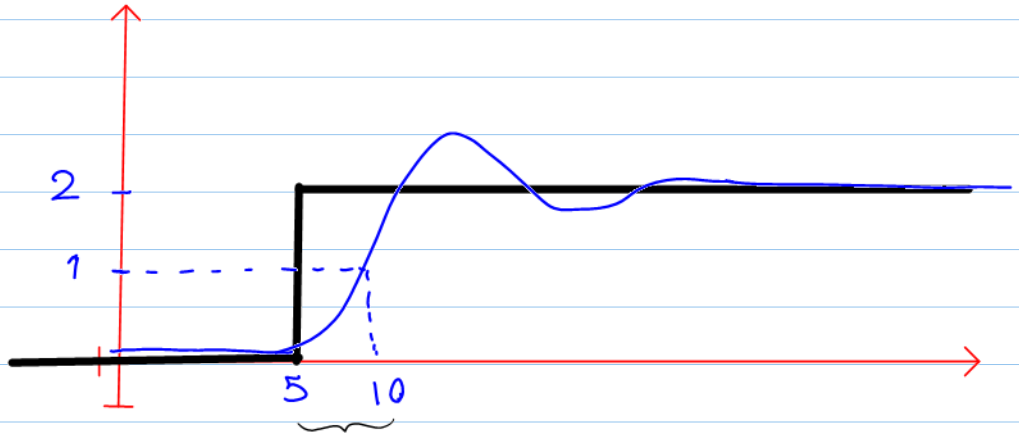
$$\text{بهره dc} = \frac{1.8}{2}$$

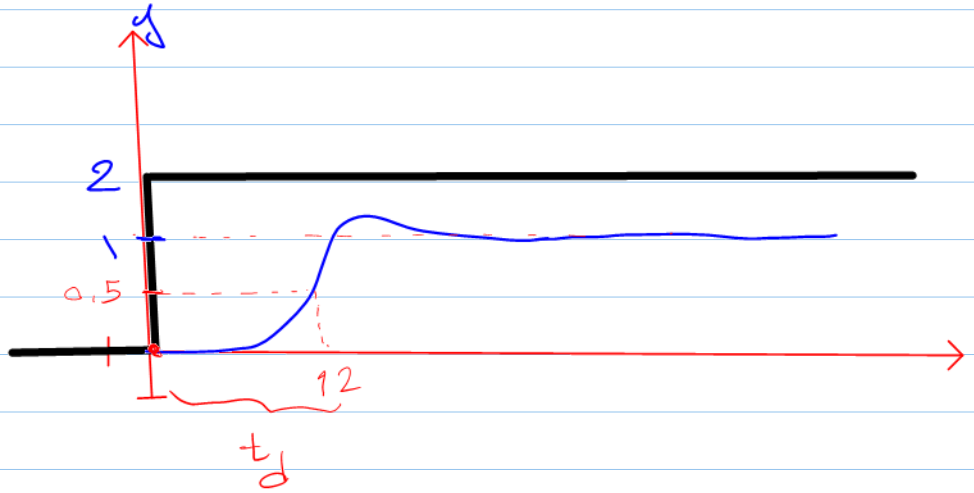
$$\text{بهره dc} = \frac{\text{دامنه خروجی در حالت ماندگار}}{\text{ورودی}} = \frac{y(\infty)}{r(\infty)}$$

مشخصات را از روی تابع تبدیل بدست آوریم.

$$\text{بهره dc} = \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s)\Big|_{s=0} = G(0)$$

② زمان تأخیر t_d: زمان لازم برای اینکه خروجی به نصف مقدار نهایی خود برسد.

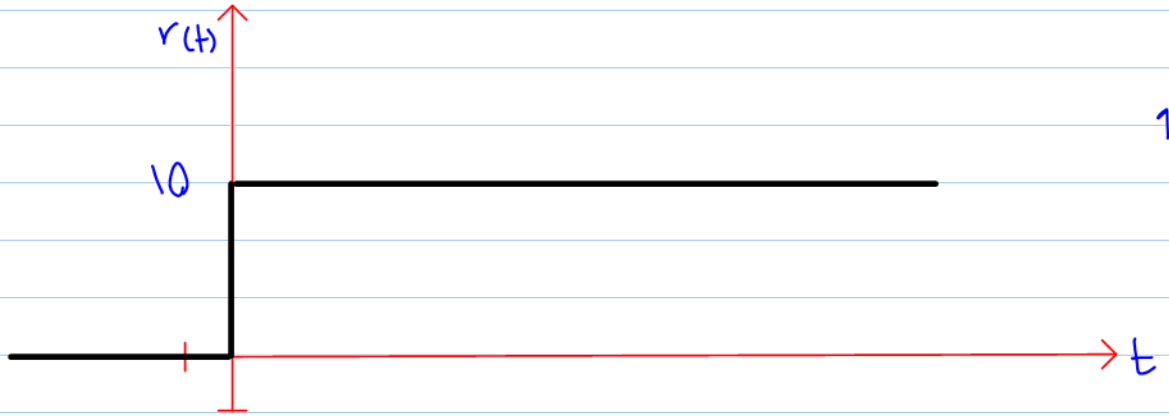


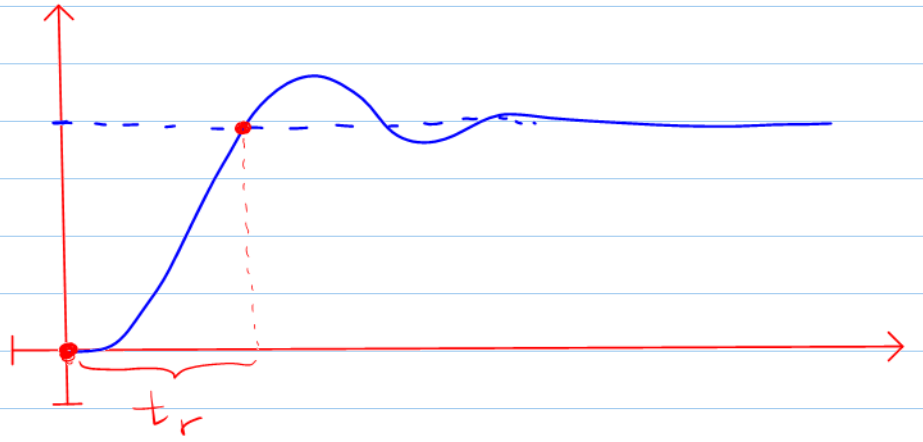


$$t_d = \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n} \qquad G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

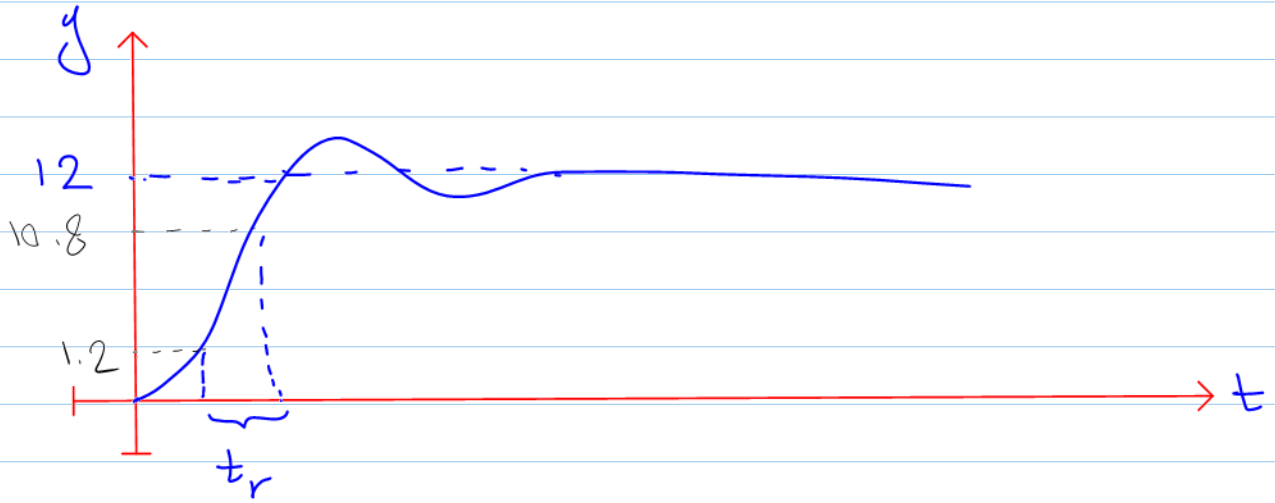
③ زمان صعود t_r: (rise time)

زمان لازم برای رسیدن پاسخ (حرکتی) از مقدار ٪۱۰ تا ٪۹۰ مقدار نهایی ٪۱۰۰





t_r = 12 تا ۰ زمان رسیدن پاسخ



$t_r =$ 10.8 زمان لازم برای رسیدن پاسخ از 1.2 به

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{\omega_d}$$

برحسب رادیان

مثال: در سیستم $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{2s^2+6s+18}$ بهره dc و t_d ، t_r با خطای 10٪ به 90٪ را حساب کنید.

$$G(s) = \frac{1}{2s^2+6s+18} = \frac{k'}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^2+3s+9}$$

$$\omega_n^2 = 9 \quad , \quad 2\xi\omega_n = 3 \quad , \quad k' = \frac{1}{2}$$

$$\omega_n = 3 \quad , \quad 2\times\xi\times 3 = 3 \rightarrow \xi = \frac{1}{2}$$

بهره dc = $G(0) = \frac{1/2}{0^2 + 3\times 0 + 9} = \frac{1}{18}$

$t=\infty$ در خروجی = $\frac{1}{18}$ × ورودی

$t_d = \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n}$ ؟ $t_d = \frac{1 + 0.7 \times 1/2}{3}$ برحسب ثانیه

$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{\omega_d}$ ؟

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 3 \times \sqrt{1 - 1/4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

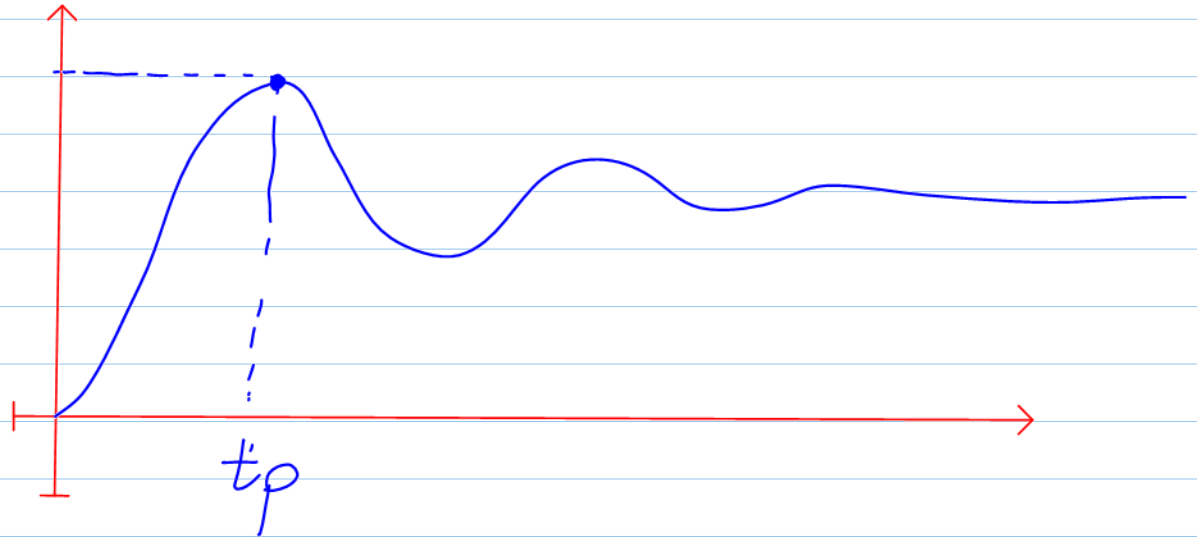
$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = ?$ $\cos(\theta) = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ$

$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 60^\circ$ $60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ رادیان

درجه $\times \frac{\pi}{180}$ = رادیان

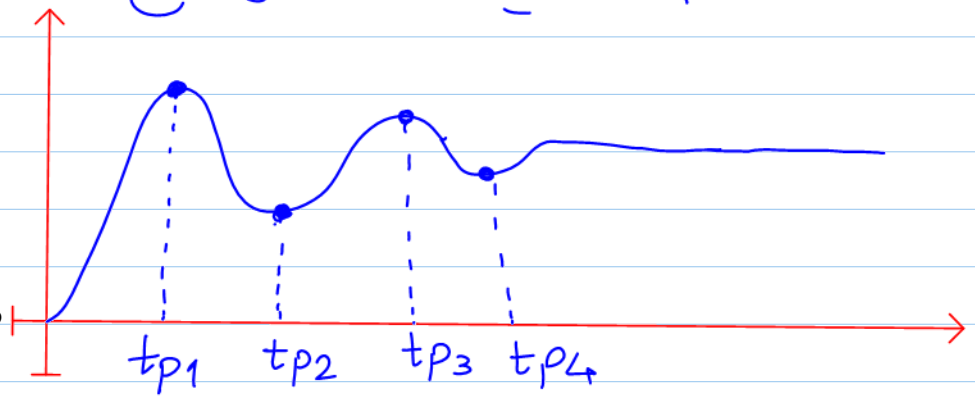
$$t_r = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$ ثانیه

④ زمان پیک یا اوج (t_p): زمان لازم برای رسیدن به مقدار ماکزیمم اولی



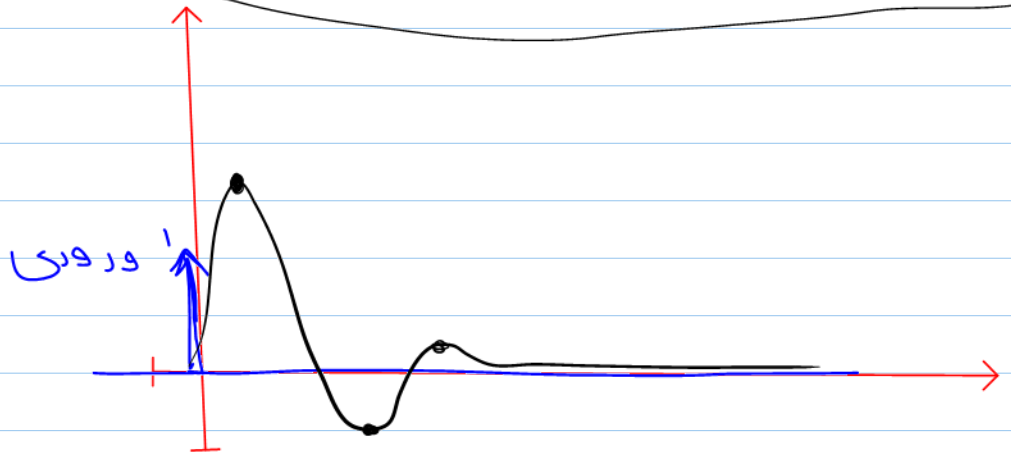
زمان پیک n ام (t_{pn}): زمان لازم برای رسیدن به n امین قله یا اوج

قله ۵ استریم ملی



رابطه روبرو برای پاسخ پله است.

$$t_{pn} = \frac{n\pi}{\omega_d}$$



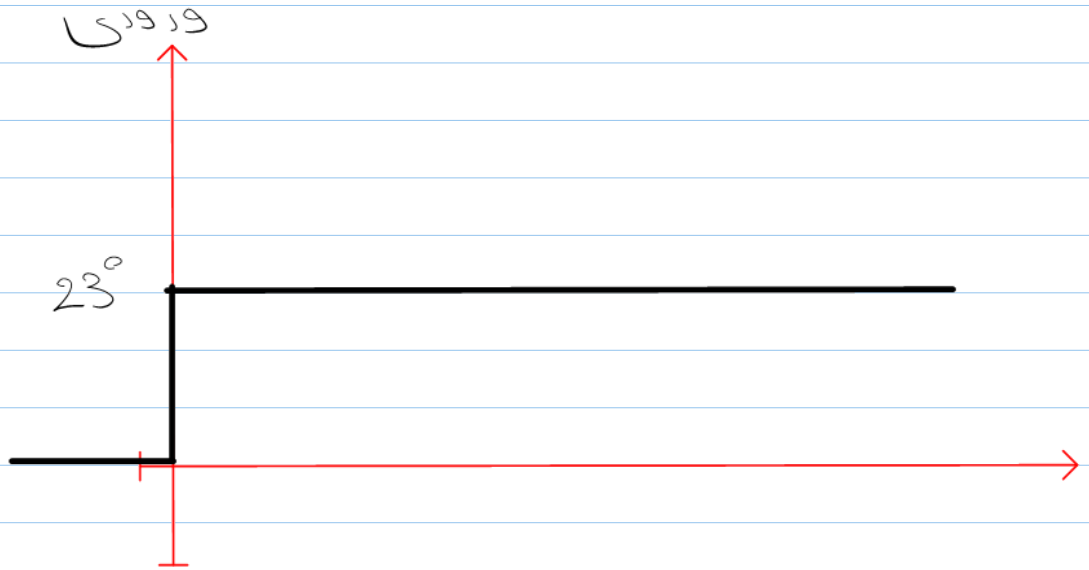
$t_p = ?$



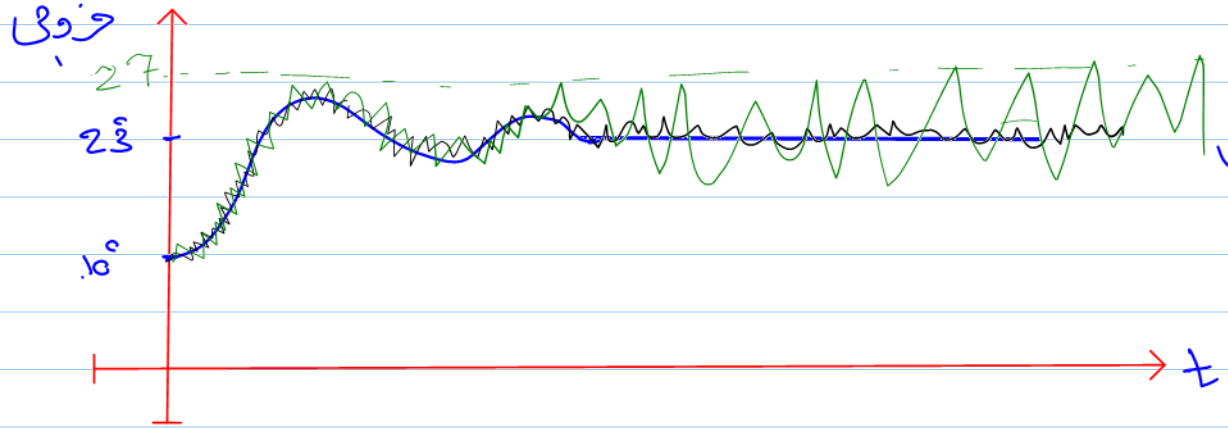
$t_p = ?$

اگر ورودی غیر از پله باشد برای پیدا کردن t_p ، باید $y(t)$ را حساب کنیم و سپس زمانی را که به ازای آن $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ و پیدا کنیم این زمان t_p است.

⑤** زمان نشست سیستم (t_s)



مثال: دمای اتاق را با استفاده از هیتر می خواهیم به مقدار ورودی برسانیم.



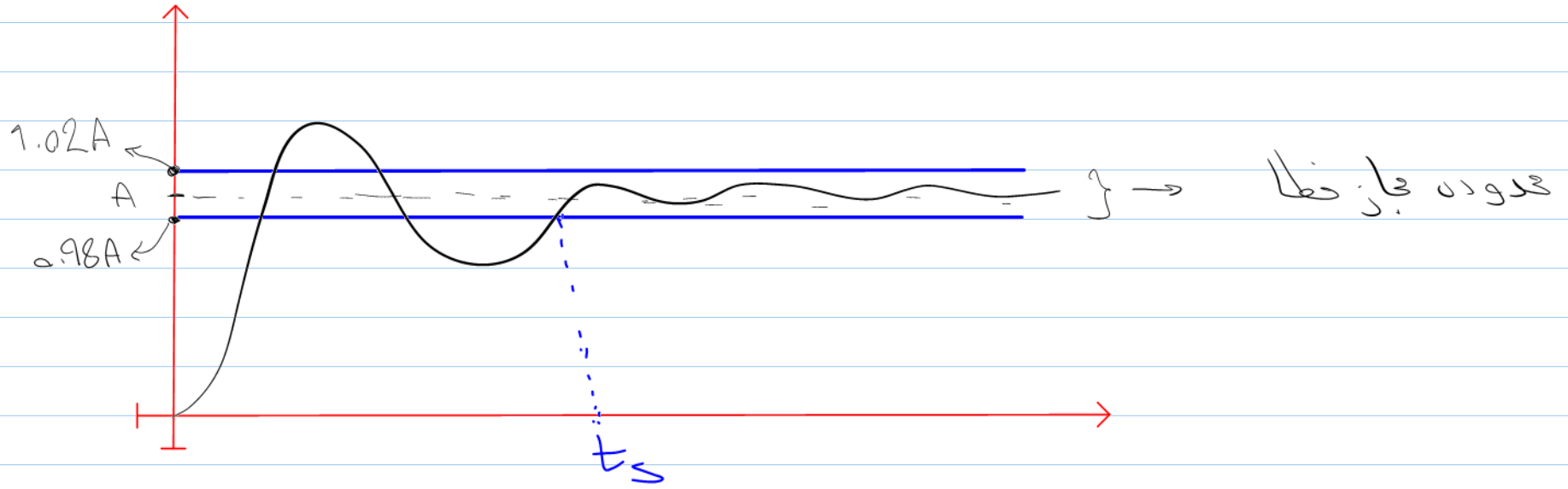
شبیه سازی

واقعیت

در واقعیت ما نمی توانیم تغییرات اندک دما حول مقدار مطلوب اشکال ندارد.

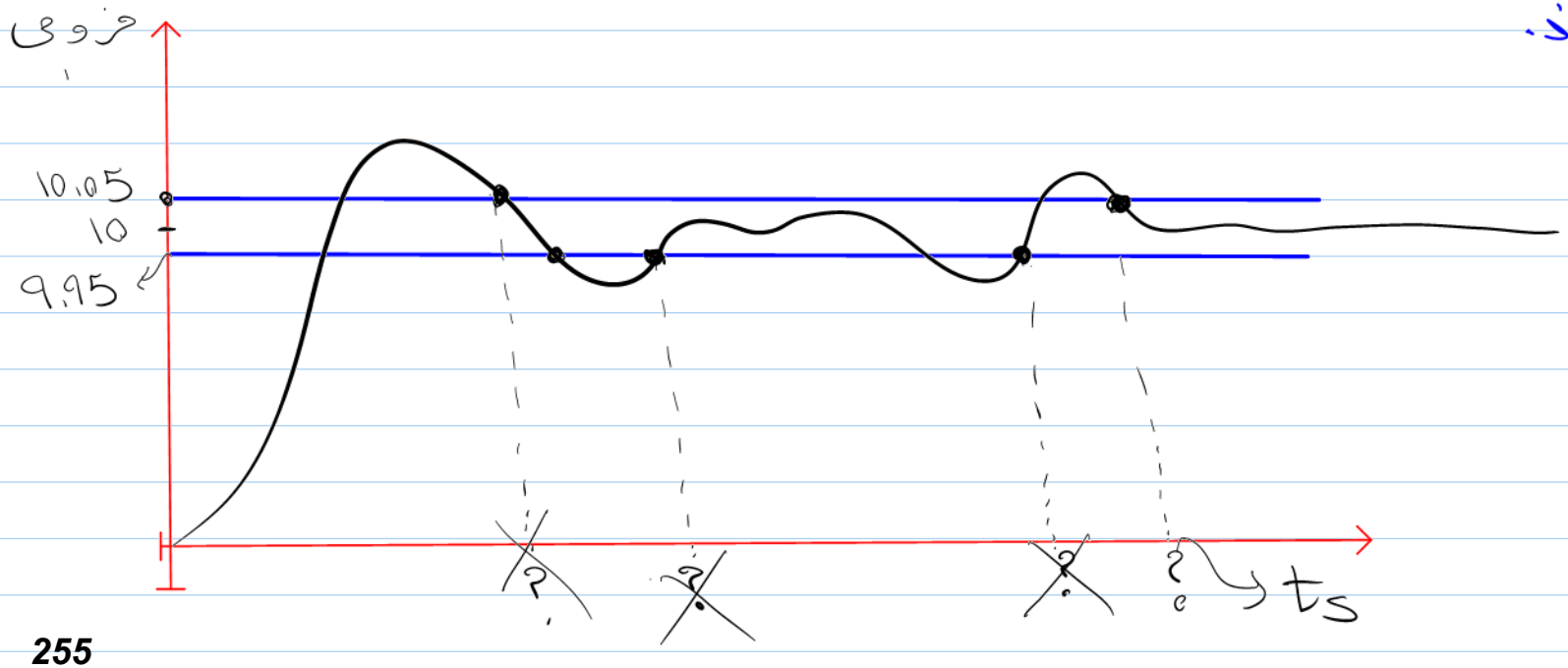
؟

~ ~ ~ ~ حول مقدار مطلوب قابل قبول است. $\begin{cases} 2\% \\ 5\% \end{cases}$



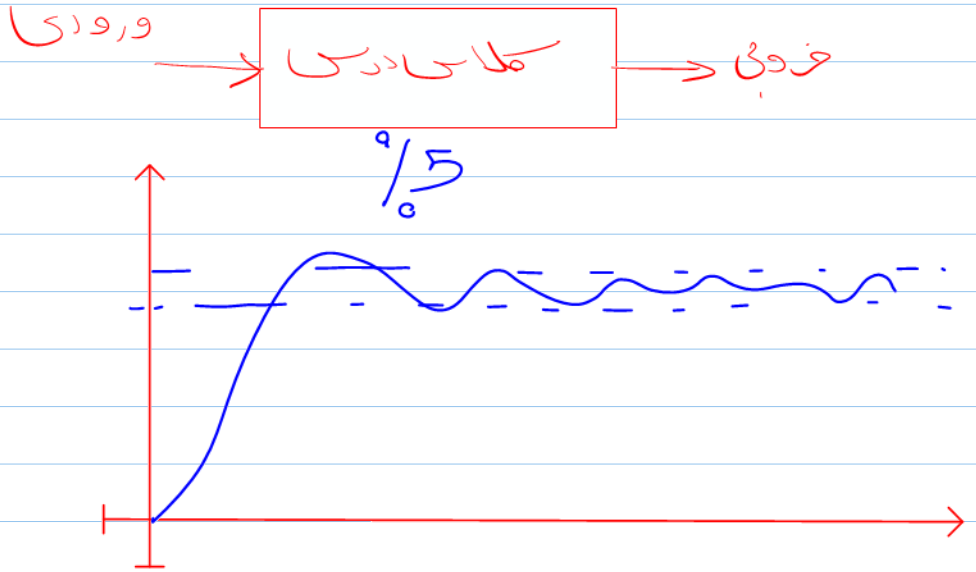
محدوده مجاز خطا

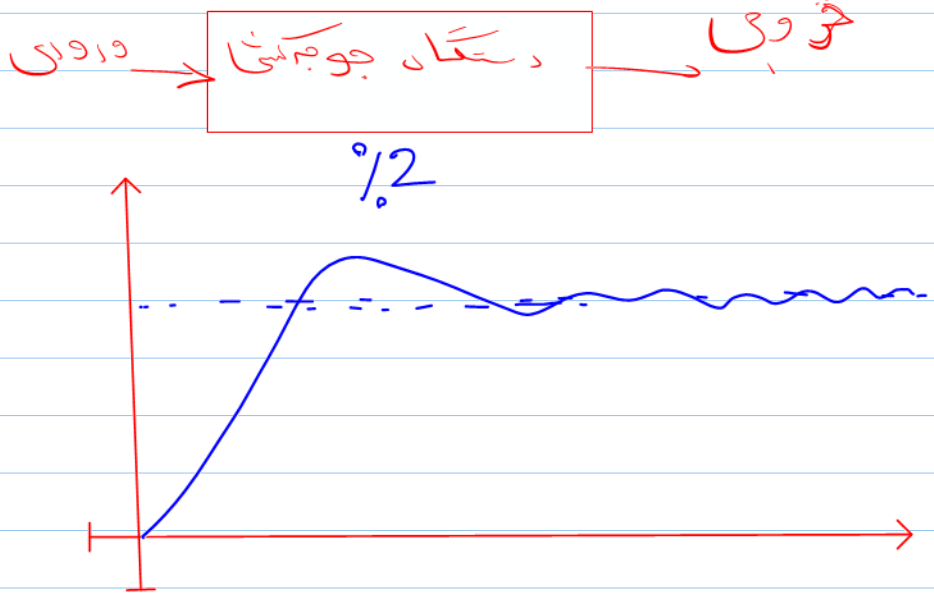
t_s : زمانی که پاسخ وارد محدوده مجاز خطا (۲٪ یا ۵٪) میشود و پس از آن در آن محدوده بماند.



معیار ٪2 یا ٪5 برحسب سیستم انتخاب می‌شود.

هدف: در دو سیستم زیر دما را به 25° برسانیم.



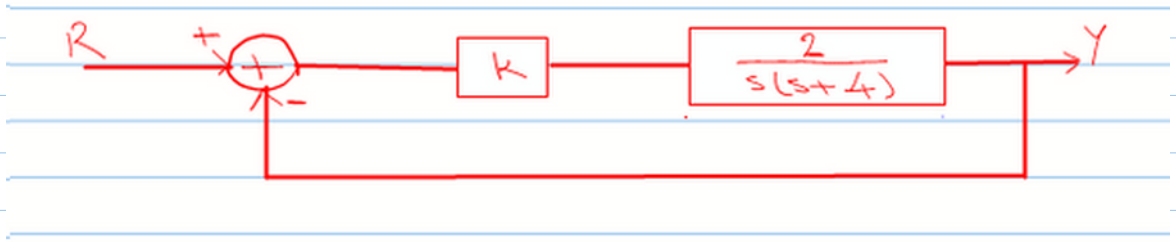


$$t_s = \begin{cases} \dfrac{3}{\xi w_n} & ٪5 \\ \dfrac{4}{\xi w_n} & ٪2 \end{cases}$$

برق ۷۹. دستگاه زیر با فرض انتخاب k به نحوی که سریعترین پاسخ بدون فراجهش را داشته باشیم

زمان مستقر شدن با معیار ۲٪ کدام است؟ $\frac{1}{2}$ ۱ ۲ ۴





$k \rightarrow$ حیوای برای $\rightarrow \xi = 1$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2k}{s^2+4s+2k} = \frac{k'}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 4 \rightarrow 2\omega_n = 4 \rightarrow \omega_n = 2 \\ \omega_n^2 = 2k \rightarrow 4 = 2k \rightarrow \boxed{k=2} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = 2 \\ \xi = 1 \end{cases} \end{cases}$$

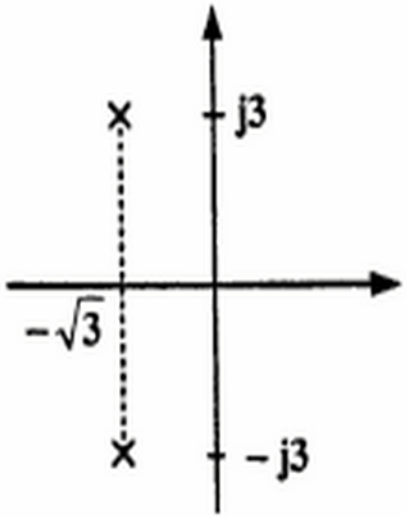
$$\begin{cases} t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{1\times 2} = 2 \text{ ثانیه} \\ \xi\omega_n = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow t_s = \frac{4}{2} = 2 \text{ s} \end{cases}$$

راه حل کوتاه تر

www.Prozheha

دقت ۸۵

۸- محل قطب‌های حلقه بسته یک سیستم مرتبه دوم در شکل مقابل داده شده‌اند. زمان فراجهش و زمان مستقر شدن سیستم به ترتیب کدام است؟



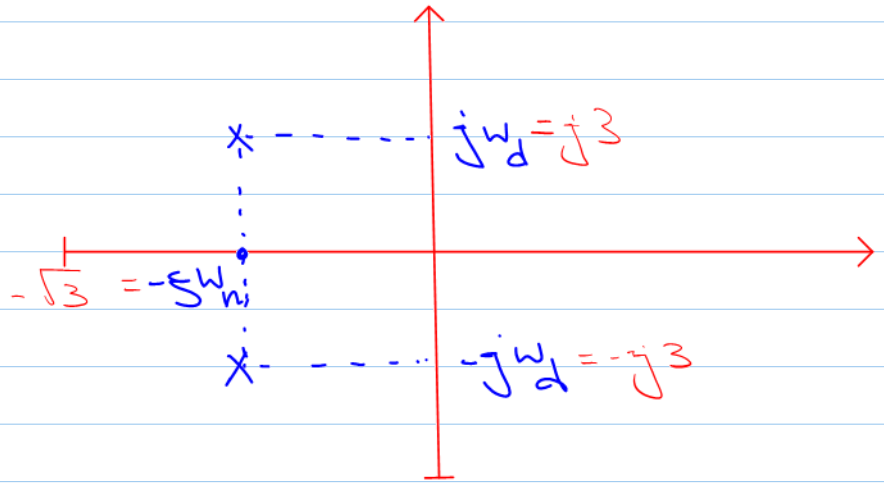
۱) $۲٫۳ ، \frac{\pi}{۳}$

۲) $۴٫۶ ، \frac{\pi}{۳}$

۳) $۲٫۳ ، \frac{\pi}{۶}$

۴) $۴٫۶ ، \frac{\pi}{۶}$

$$t_{p_1} = \frac{\pi}{w_d} \qquad t_s = \frac{4}{\xi w_n}$$



$$G(s) = \frac{k'}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$t_p = \frac{\pi}{3} \quad , \quad t_s = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{1._} < 4$$

کنکوری ۹۱.

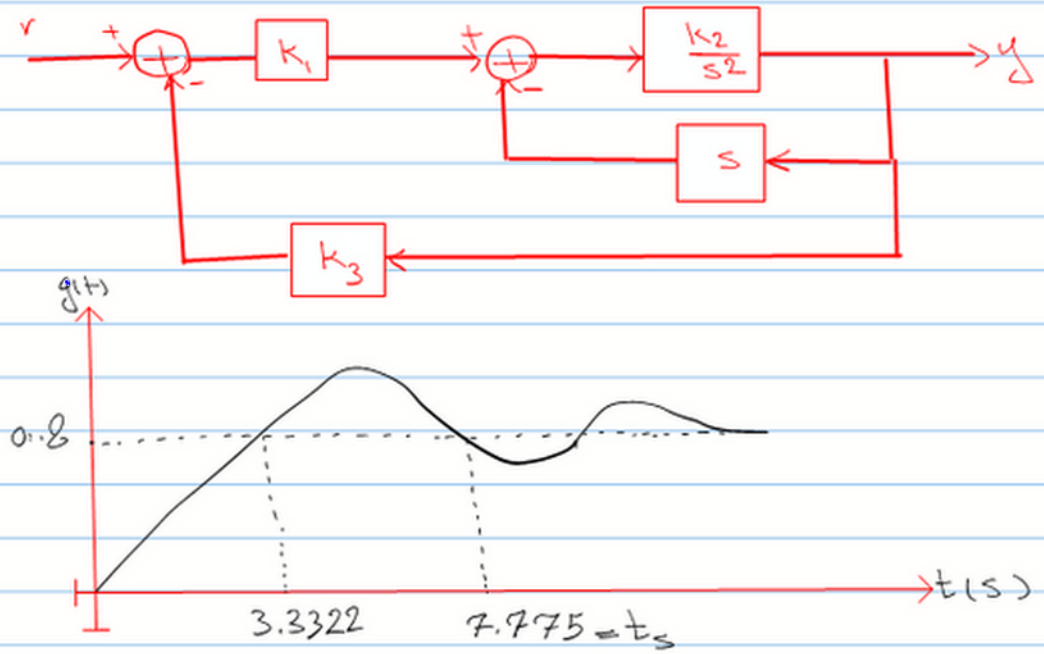
پاسخ پله واحد سیستم داده شده در شکل دیده می‌شود. ثابت‌های k_1، k_2، k_3 به ترتیب کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ، $0.4\sqrt{2}$ ، $1/25$

۲) $0.4\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ، 0.8

۳) $\sqrt{2}$ ، $0.4\sqrt{2}$ ، 0.8

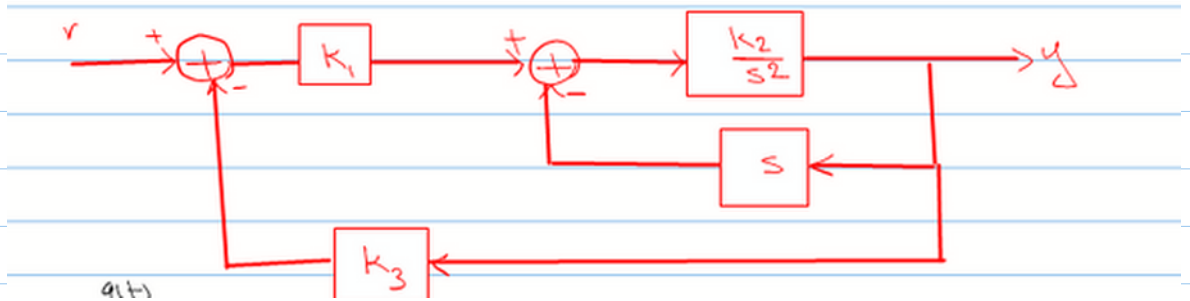
۴) $0.4\sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}$ ، $1/25$



پاسخ پله واحد: $g(t)$

$r(t) = u(t)$

$\sqrt{2} = 1.4$ $\quad$ $0.4 \times 1.4 = 0.56$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$$

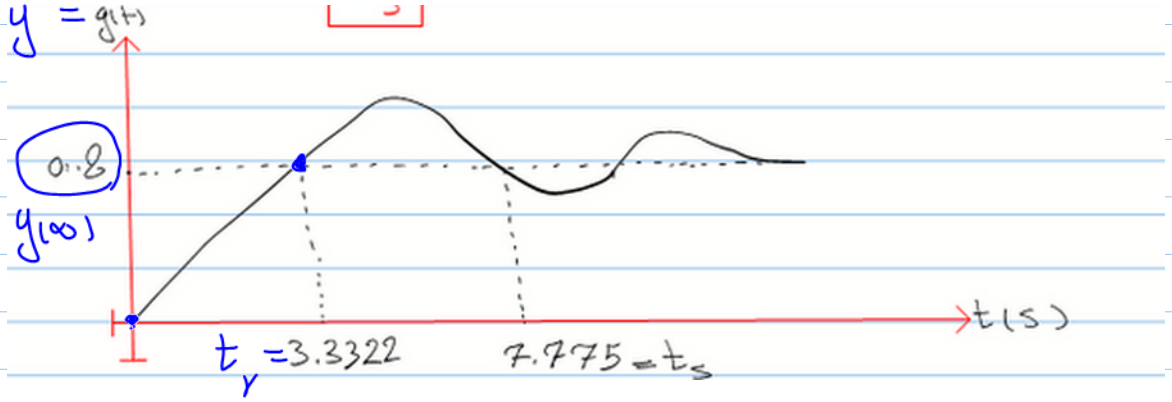
$$l_1 = -\frac{K_2}{s^2} \times s = \frac{-K_2}{s} \quad , \quad l_2 = -K_1 \frac{K_2}{s^2} K_3$$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{K_2}{s} - \frac{K_1 K_2 K_3}{s^2} \right) = 1 + \frac{K_2}{s} + \frac{K_1 K_2 K_3}{s^2}$$

$$P_1 = K_1 \frac{K_2}{s^2} \quad , \quad \Delta_1 = 1$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_1 K_2}{s^2}}{1 + \frac{K_2}{s} + \frac{K_1 K_2 K_3}{s^2}} = \frac{K_1 K_2}{s^2 + K_2 s + K_1 K_2 K_3} = G(s)$$

$2\zeta\omega_n$



ورودی واحد = $r(t)$

$$\begin{cases} y(\infty) = 0.8 \longrightarrow \text{بهره dc} \\ t_s = 7.775 \longrightarrow t_s = \dfrac{4}{\xi \omega_n} \longrightarrow 2\xi\omega_n = k_2 \\ t_r = 3.3322 \longrightarrow t_r = \dfrac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{\omega_d} \end{cases}$$

$$\text{بهره dc} = \frac{0.8}{1} = 0.8 = G(0) = \frac{1}{k_3} \longrightarrow \boxed{k_3 = 1.25}$$

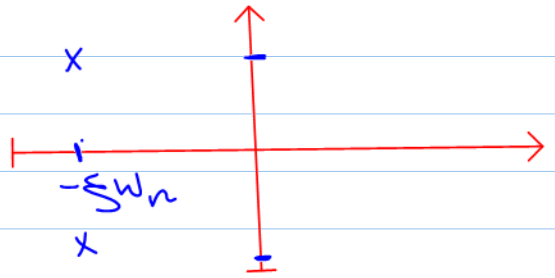
$$7.775 = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\frac{k_2}{2}} = \frac{8}{k_2} \longrightarrow \boxed{k_2 = \frac{8}{7.775}} > 1 \longrightarrow \text{جواب گزینه ۴}$$

حل تشریحی برای بدست آوردن k_3 را ترک میدهم.

دکتری ۹۲. در یک سیستم کنترل با فیدبک واحد $G(s)=\frac{k}{s(s+4)}$ است ($k>0$). زمان قرارسیستم با معیار ۲٪ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بستگی به مقدار k دارد.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 4s + k} = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



برای t_s داشتن مزیت ξ یا بعض محقق قطبا کافی است.

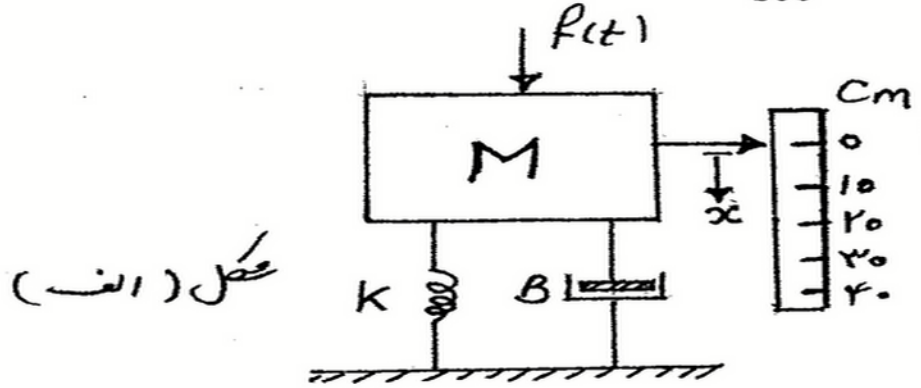
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = ?$$

$$2\xi\omega_n = 4 \qquad \xi\omega_n = 2 \qquad t_s = \frac{4}{2} = 2 \text{ s}$$

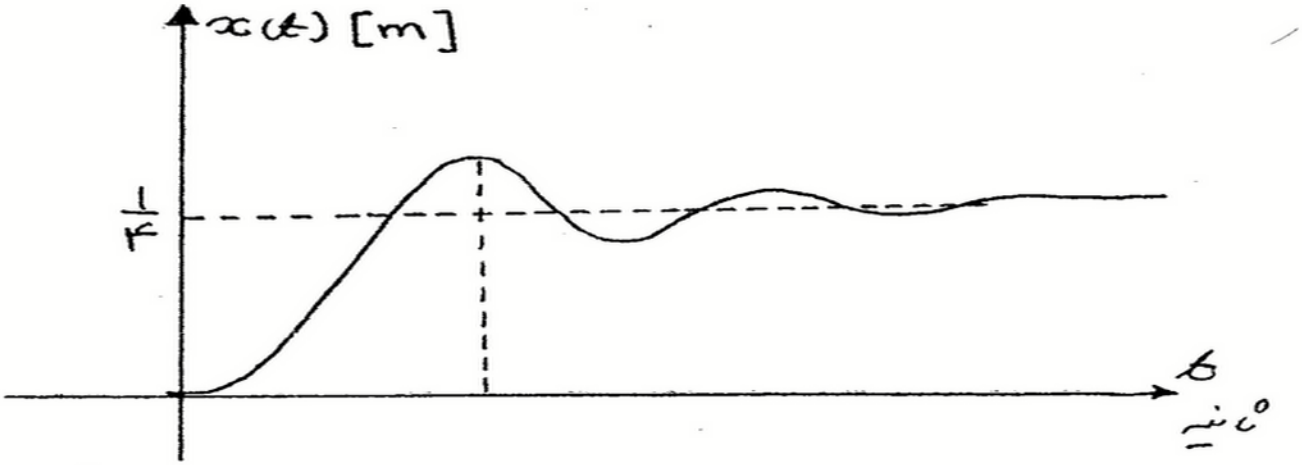
t_{pn} و t_r ، t_s ، t_d ، dc بحره

برق ۸۷

در سیستم مکانیکی شکل (الف) زیر در لحظه‌ی $t = 0$ ورودی پله واحد را بر جرم M که در حالت تعادل می‌باشد، اعمال می‌نمائیم. تغییر مکان عقربه در شکل (ب) رسم شده است. در صورتی که $M = 1\,kg$ ، $g = 10\frac{m}{sec^2}$ و $B = 1$ باشد، مقدار ζ برای سیستم شکل (الف) چقدر است؟



شکل (الف)



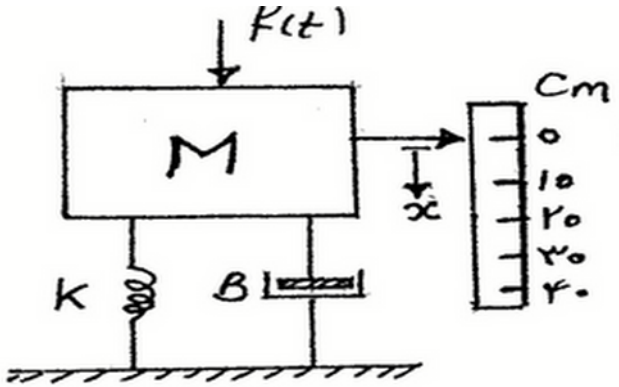
شکل (ب)

۱) $\frac{1}{4}$

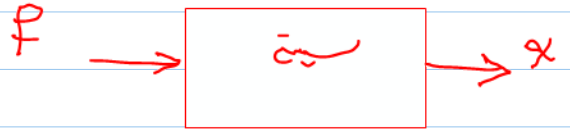
۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{k}}$

۴) $\frac{1}{2k}$



شکل (الف)



اگر f یک واحد پله و خروجی x باشد

شکل زیر ← $\xi = ?$

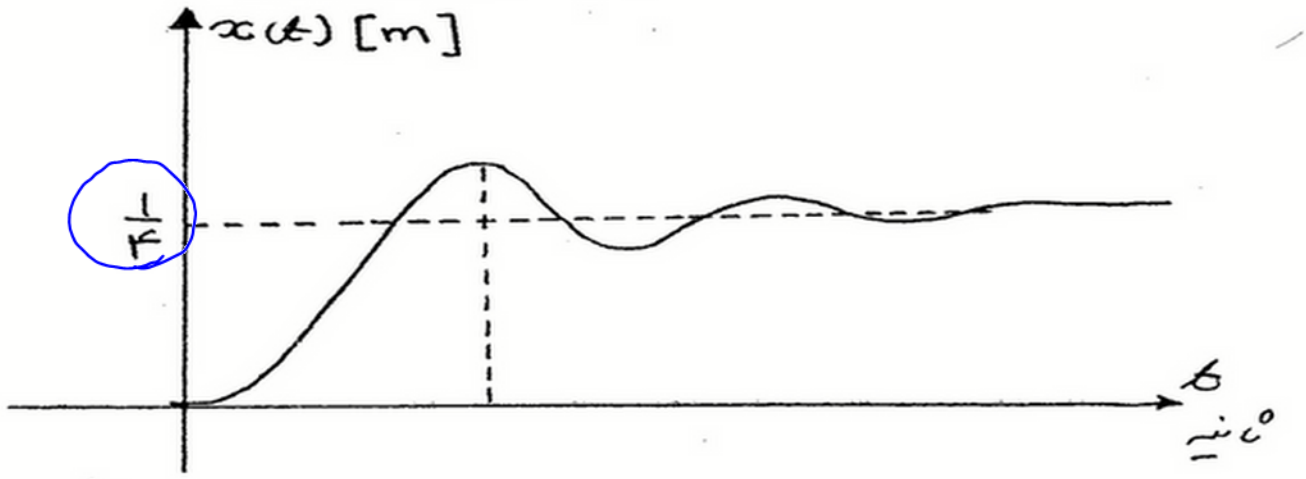
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k} \quad ; \quad M=1, B=1$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1s + k} = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 1 \rightarrow \xi = \dfrac{1}{2\omega_n} \\ \omega_n^2 = k \end{cases}$$

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

$k = ?$



شکل (ب)

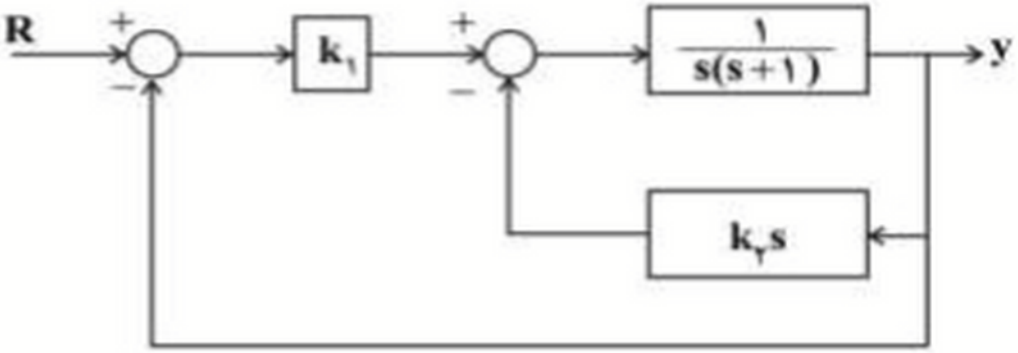
$$x(\infty) = \frac{1}{4} \qquad dc_0 = \frac{x(\infty)}{F(\infty)} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

$$dc_0 = G(0) = \frac{1}{a^2 + 0 + k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \rightarrow k = 4$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

مکانیک ۹۷

۱۰۹- در سیستم کنترلی زیر، مقدار k_1 و k_2 چقدر باشد تا نسبت میرایی سیستم حلقه‌بسته برابر ۰/۵ و زمان استقرار سیستم (با معیار ۵٪) برابر ۲ ثانیه شود؟

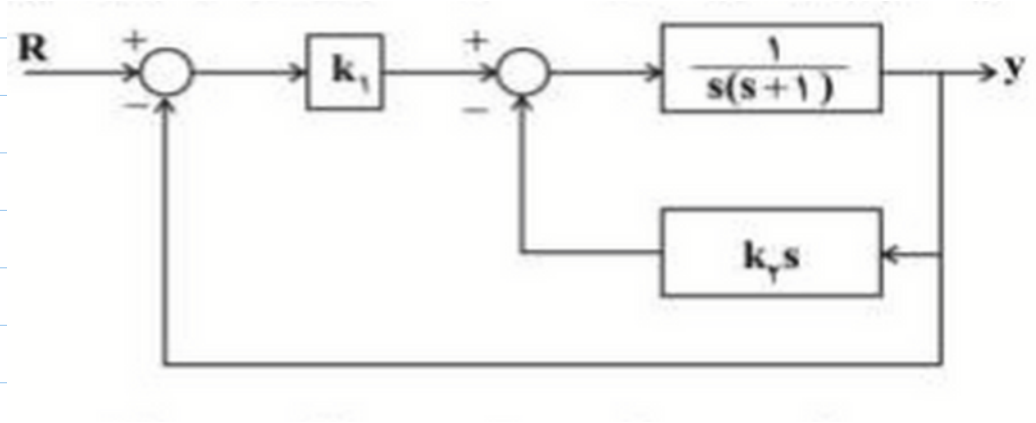


۱) $k_1 = 4$ و $k_2 = 3$

۲) $k_1 = 16$ و $k_2 = 3$

۳) $k_1 = 9$ و $k_2 = 2$

۴) $k_1 = 3$ و $k_2 = 2$



$\xi = \frac{1}{2}$ ← هدفنا

$t_s = 2$ %5

$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$

$$\begin{cases} \ell_1 = -\ k_2 s \ \dfrac{1}{s(s+1)} = -\ \dfrac{k_2}{s+1} \\ \ell_2 = -\ \dfrac{k_1}{s(s+1)} \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{k_2}{s+1} - \frac{k_1}{s(s+1)} \right) = 1 + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_1}{s(s+1)}$$

ما حواله با خروج تابع تبدیل یا حال قطعا ←

$$P_1 = \frac{k_1}{s(s+1)}, \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\frac{y}{R} = \frac{\frac{k_1}{s(s+1)}}{1 + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_1}{s(s+1)}} = \frac{k_1}{s(s+1) + k_2 s + k_1}$$

$$\frac{y}{R} = \frac{k_1}{s^2 + (1+k_2)s + k_1} = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = k_1 \\ 2\xi\omega_n = 1 + k_2 \end{cases}$$

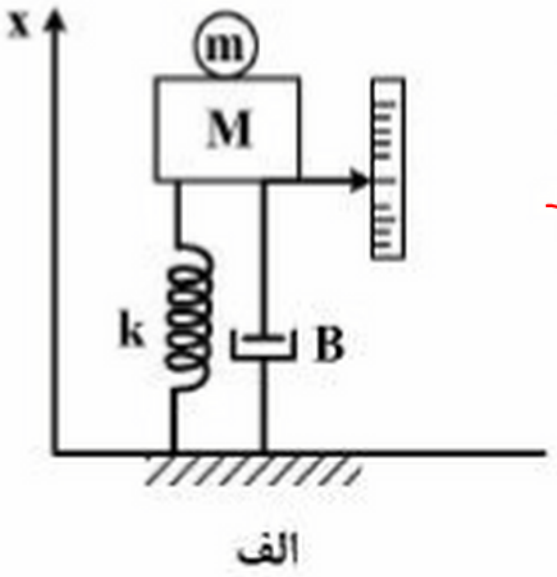
$$\longrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \\ t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 2 \rightarrow \xi\omega_n = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\omega_n = \frac{3}{2} \rightarrow \omega_n = 3 \end{cases}$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + k_2 \rightarrow k_2 = 2 \checkmark$$

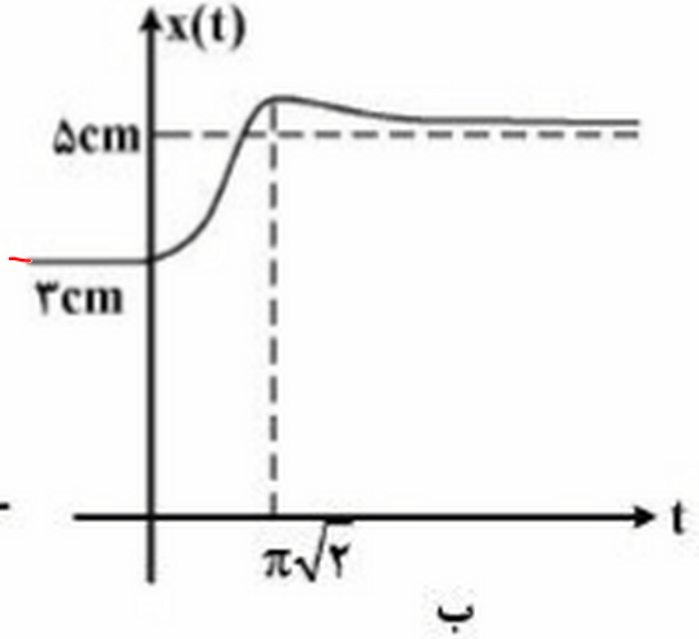
$$9 = k_1 \checkmark$$

۹۹ بد ۹

۹۱- در سیستم مکانیکی شکل الف که برای مدت طولانی در حالت سکون قرار داشته است، در لحظهٔ $t=0$ جرم $m=0/2kg$ را از روی جرم $M=1kg$ برمی‌داریم. در صورتی‌که $g=10m/s^2$ باشد، مقدار k و B چقدر باشد تا تغییر مکان عقربه در شکل الف، مطابق شکل ب باشد.



الف



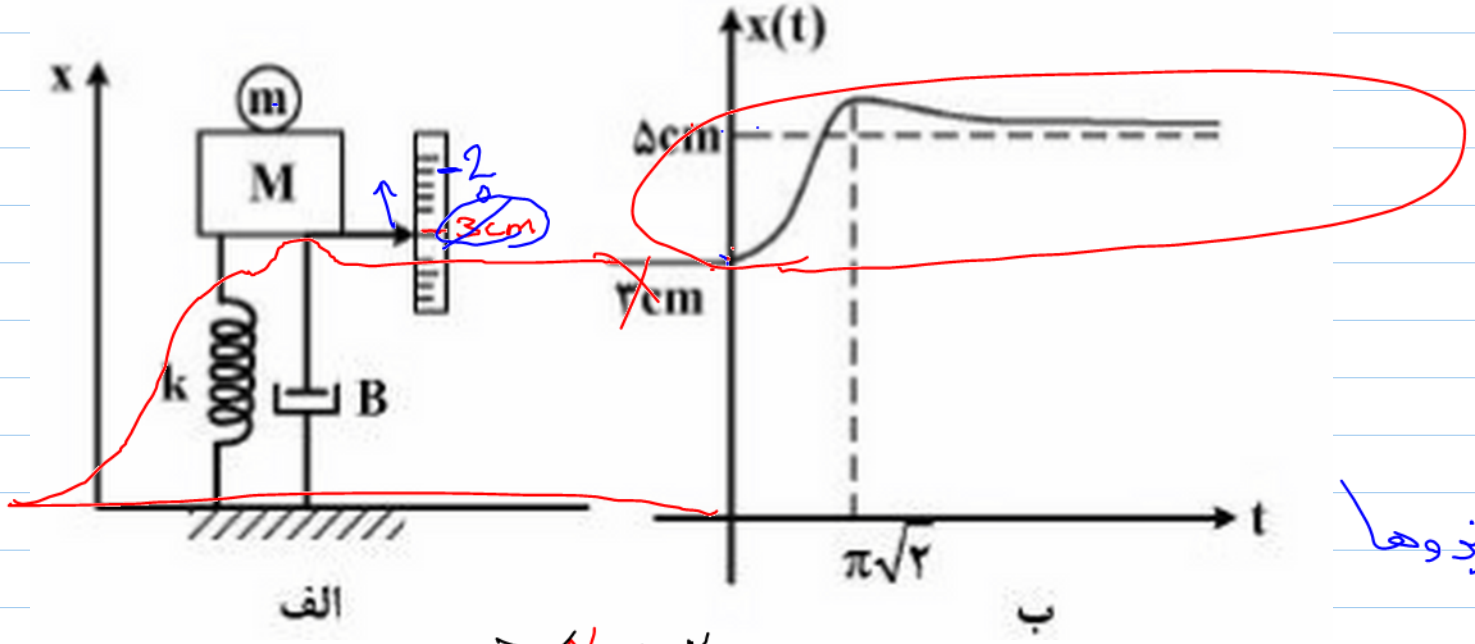
ب

۱) $k=1\ ,\ B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲) $k=1\ ,\ B=\sqrt{2}$

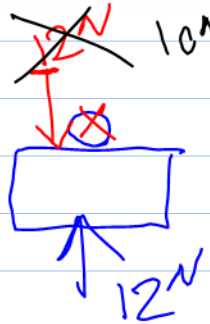
۳) $k=4\ ,\ B=2\sqrt{2}$

۴) $k=2\ ,\ B=\sqrt{14}$



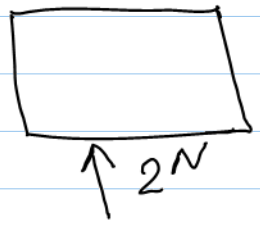


نیروها
وزن = جرم × g
فنر و دمپر

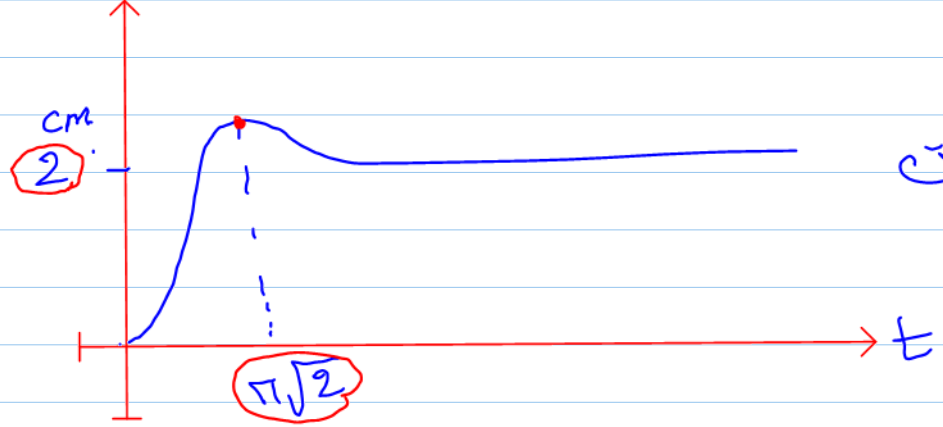


مجموع نیروها = $1.2 \times 10 - F_1 - F_2 = 0$

نیروی فنر و دمپر = $F_1 + F_2 = 12\ N$



مجموع نیروها بعد از وزنه = $12 - 10 = 2^N$



حرکت جرم M در اثر برداشتن جرم 0.2

$k, B = ?$

اگر به جرم M ، 2^N نیرو وارد شود حرکت آن مطابق شکل فوق است. k, B ؟

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2+Bs+k} = \frac{1}{s^2+Bs+k}$$

$x(\infty) = 2 \qquad t_{p_1} = \pi\sqrt{2}$

بهره dc $= \frac{2}{2} = 1 = G(0) = \frac{1}{k} \rightarrow \boxed{k=1}$

$$t_{p_1} = \frac{\pi}{\omega_d} = \pi\sqrt{2} \rightarrow \omega_d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+Bs+1} \Rightarrow \frac{k'}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\omega_n^2 = 1 \longrightarrow \boxed{\omega_n = 1}$, $2\xi\omega_n = B \rightarrow 2\xi \times 1 = B$

$\boxed{\xi = B/2}$

$$\begin{cases} \omega_d = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \omega_n = 1 \\ \xi = B/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}2 = 1 \times \sqrt{1 - \frac{B^2}{4}}$$

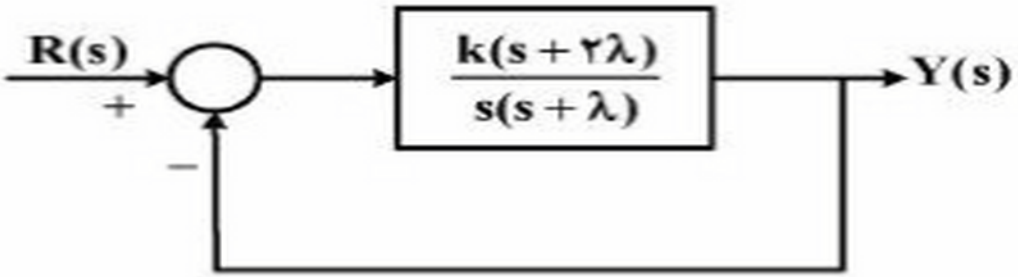
$$\frac{1}{2}4 = 1 - \frac{B^2}{4} \rightarrow \frac{B^2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$B^2 = 2 \rightarrow \boxed{B = \sqrt{2}}$

$\boxed{K = 1}$

برق ۹۶

۹- در سیستم زیر شیب پاسخ پلّهٔ واحد در $t = 0$ برابر ۲ و مقدار λ به گونه‌ای است که کمترین ضریب میرایی (ζ) حاصل می‌شود. در این صورت زمان نشست تقریبی پاسخ پلهٔ سیستم با معیار ۲٪ چند ثانیه است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۱٫۵

۴) $\frac{8}{3}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+2\lambda)}{s(s+\lambda)+k(s+2\lambda)} = \frac{ks+2\lambda k}{s^2+(\lambda+k)s+2\lambda}$$

سیستم پاسخ پله واحد در $t=0$ برابر 2 ـ پاسخ پله $y(t)$ =

$$r(t)=u(t) \longrightarrow y(t) \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2$$

قضیه مقدار اولیه: $x(t=0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ $\qquad x(t) \longrightarrow X(s)$

$$\frac{dy(t)}{dt} \longrightarrow sY(s) \qquad 2 = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{s\to\infty} s(sY(s))$$

$$\frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{ks+2\lambda k}{s^2+(k+\lambda)s+2\lambda k} \rightarrow Y(s) = \frac{ks+2\lambda k}{s^2+(k+\lambda)s+2\lambda k} \times \frac{1}{s}$$

$$2 = \lim_{s\to\infty} \cancel{s^2} \frac{ks+2\lambda k}{s^2+(k+\lambda)s+2k\lambda} \times \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to\infty} \frac{ks^2+2\lambda ks}{s^2+(k+\lambda)s+2\lambda k}$$

$$2 = \lim_{s\to\infty} \frac{ks^2}{s^2} = k \rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+4\lambda}{s^2+(2+\lambda)s+4\lambda} = \frac{}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 4\lambda \;,\quad 2\xi\omega_n = 2+\lambda \rightarrow \xi\omega_n = \frac{2+\lambda}{2}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\frac{2+\lambda}{2}} = \frac{8}{2+\lambda} = ?_0 \qquad \lambda = ?_0$$

با توجه به اینکه ξ مینیمم شود.

$$\omega_n = \sqrt{4\lambda} = 2\sqrt{\lambda} \rightarrow \xi 2\sqrt{\lambda} = \frac{2+\lambda}{2}$$

$$\xi = \frac{2+\lambda}{4\sqrt{\lambda}} \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\lambda} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\lambda} = \frac{1\times 4\sqrt{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{\lambda}}(2+\lambda)}{16\lambda} = 0$$

$$\frac{\frac{4\lambda - 4 - 2\lambda}{\sqrt{\lambda}}}{16\lambda} = 0 \longrightarrow \frac{2\lambda - 4}{16\lambda\sqrt{\lambda}} = 0 \longrightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

$$\lambda = 2 \longrightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow \varepsilon = \frac{2+2}{4\sqrt{2}}$$ لیتر بر متر مکعب

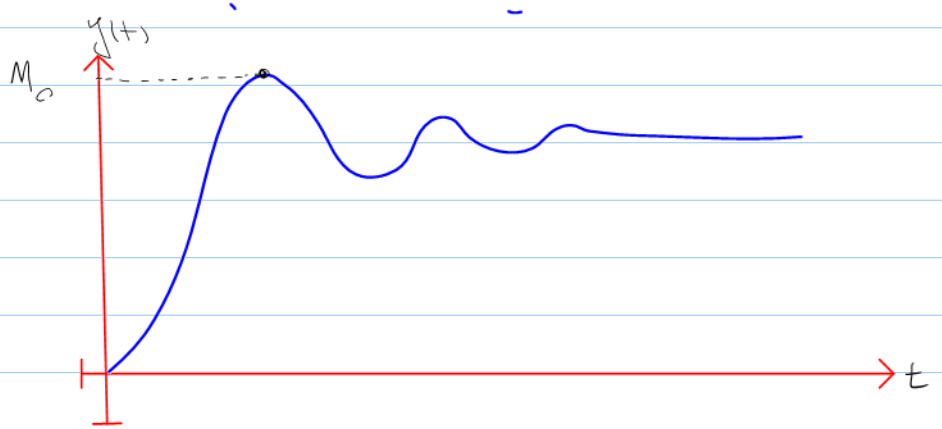
$$t_s = \frac{8}{2+\lambda} = \frac{8}{2+2} = 2\,s$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_d}$$

⑥ ماکزیمم جهش (M_o): بیشترین مقدار خروجی

$M_o = y(t)\big|_{t=t_p}$ در زمان پیک

$M_o = y(\infty) + e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$



⑦** حداکثر درصد فراجهش (%OS).

$\%OS = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$

زمانی

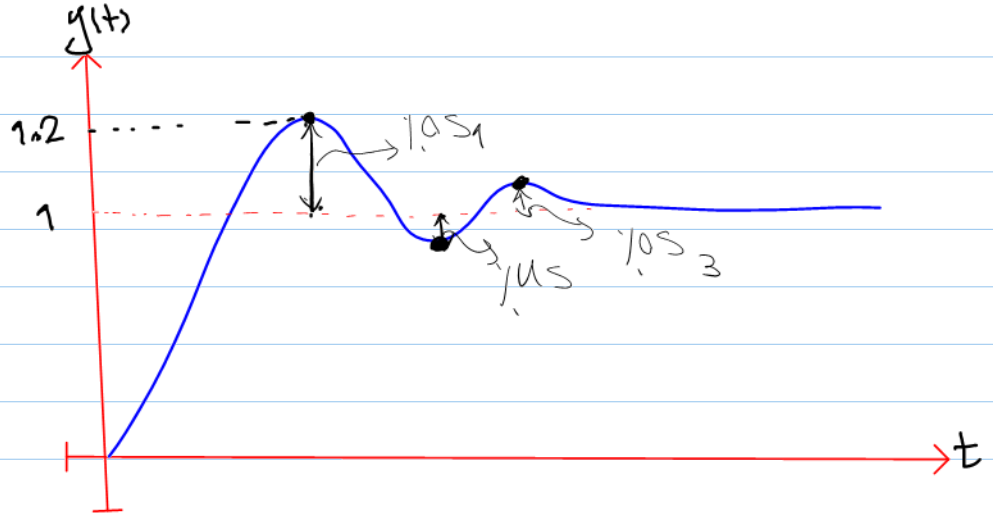
$\%OS_n = e^{-\frac{n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

↓

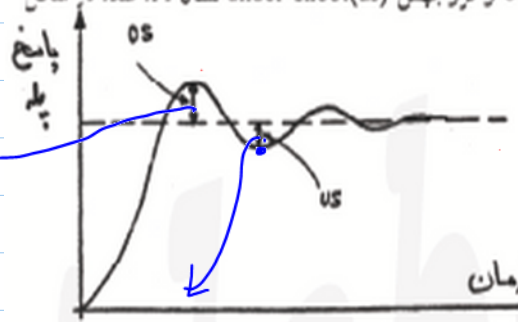
بازه زمانی یا

در پاسخ پله

فراجهش nام



۵۷- در پاسخ پله یک سیستم مرتبه دوم نمونه، رابطه میان فراجهش (Over shoot (ou و فروجهش (under shoot(us نشان داده شده در شکل مقابل کدام است؟



۱) $os = (us)^2$

۲) $us = 2os$

۳) $us = (os)^2$

۴) $us = 0/5\ os$

$$\%OS_1 = ? \; \%OS_2$$

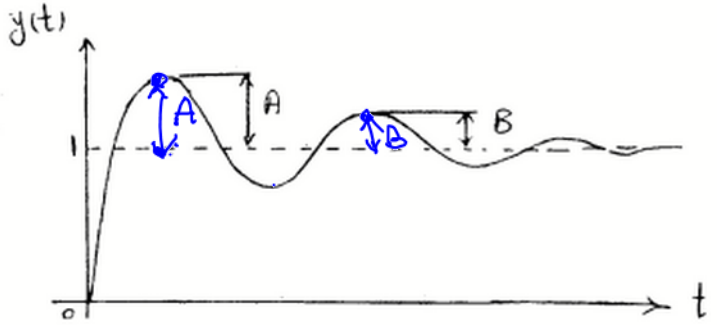
$$\%OS_1 = e^{-\frac{1\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\%OS_2 \div \%US = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\%OS_2 = \left(e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)^2 = \left(\%OS_1\right)^2$$

$$\%US = \%OS_1^{\,2}$$

۳- پاسخ پله واحد یک سیستم مرتبه دوم به شکل زیر است. با تعریف $\delta = \ln \frac{A}{B}$ ، نسبت میرایی سیستم (ζ) از کدام رابطه زیر به دست می‌آید؟



۱) $\frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}$

۲) $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$

۳) $\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\pi^2}}$

۴) $\frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+4\pi^2}}$

$\delta = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$ $\xi = ?\ \delta$ بحسب

$A = \%OS_1$ $B = \%OS_3$

$$A = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad B = e^{-\frac{3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{e^{-\frac{3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$\ln(e) = \log_e e = 1$

$$\delta = \ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln\left(e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln(e) \quad (\ln(e) = 1)$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \frac{\delta^2}{1} = \frac{4\pi^2\xi^2}{1-\xi^2}$$

$$\delta^2 - \xi^2\delta^2 = 4\pi^2\xi^2 \longrightarrow (4\pi^2 + \delta^2)\xi^2 = \delta^2$$

$$\xi^2 = \frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2}$$

$$\boxed{\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}}$$

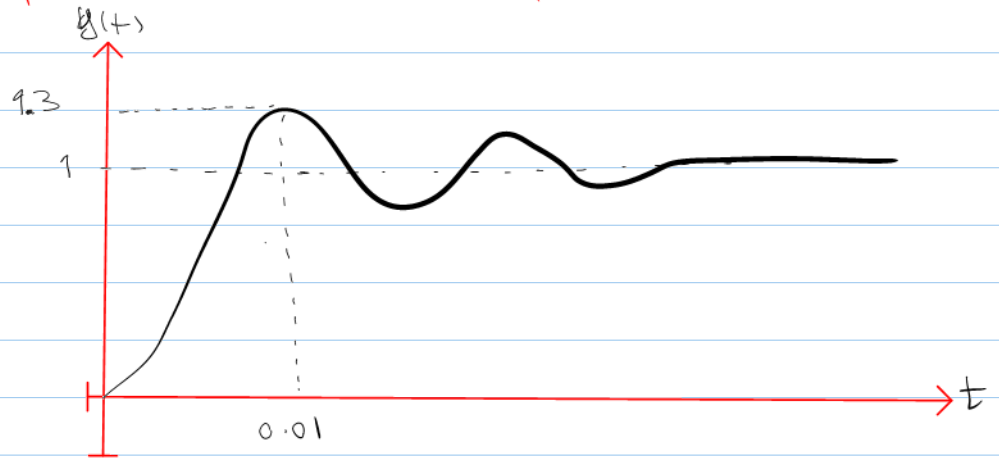
۷۷. پاسخ پله واحد داده شده مربوط به کدام تابع تبدیل است؟

1) $\frac{240}{s^2+135s+240}$

2) $\frac{240^2}{s^2+136s+240^2}$

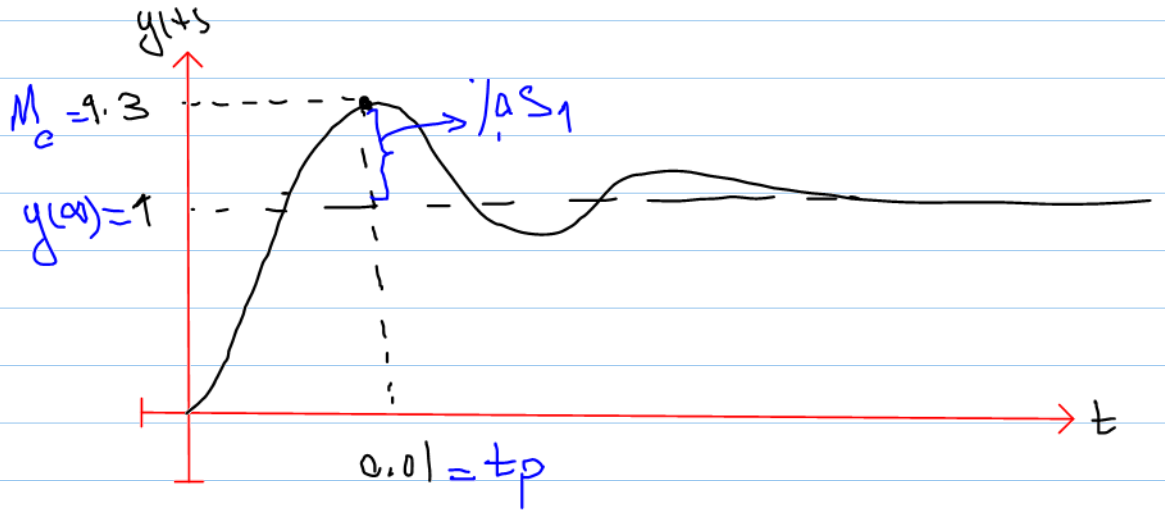
3) $\frac{336}{s^2+240s+336}$

4) $\frac{336^2}{s^2+240s+336^2}$



* بهتر است این جدول را حفظ باشید.

ξ	0.35	0.4	0.45	0.6	0.7	0.8
$\%OS_1$	%30	%25	%20	%10	%5	%2



$$G(s) = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$t_{p_1} = \frac{\pi}{\omega_d} = 0.01 \longrightarrow \omega_d = 314$$

$$\frac{3.14}{\omega_d} = \frac{1}{100} \longrightarrow \boxed{\omega_d = 3.14 \times 100}$$

$$\%OS_1 = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100 = \frac{1.3 - 1}{1} \times 100 = 30\%$$

$\%OS = 30\% \longrightarrow \boxed{\xi = 0.35}$

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \longrightarrow 314 = w_n\sqrt{1-0.35^2}$$

$$w_n = 336$$

$w_n = \begin{cases} 240 & \times \\ \sqrt{240} & \times \\ \sqrt{336} & \times \\ 336 & \checkmark \end{cases}$

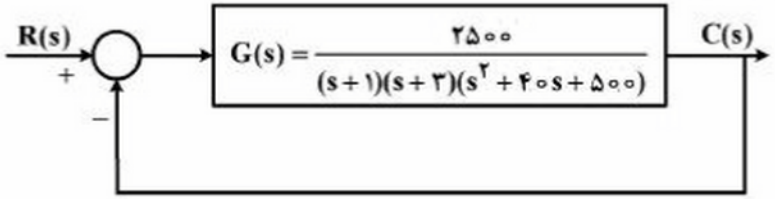
$w_d < w_n$ طراحی

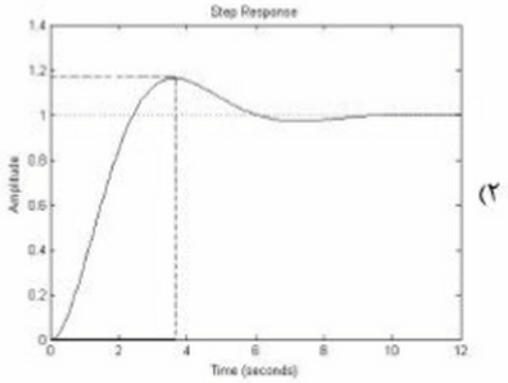
$314 < w_n$

$$G(s) = \frac{k'}{s^2 + 2\times 0.35 \times 336 s + (336)^2} = \frac{336^2}{s^2 + 240 s + 336^2}$$

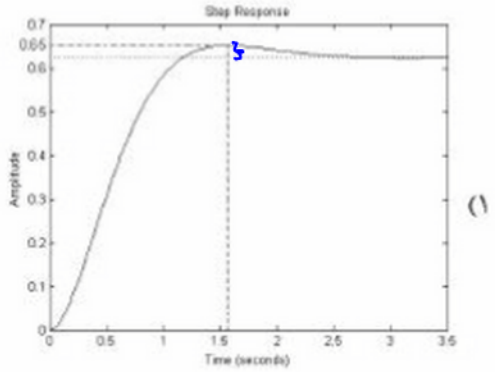
$$\text{بهره dc} = \frac{1}{1} = 1 = G(0) = \frac{k'}{(336)^2} \longrightarrow k' = (336)^2$$

۹۳- برای محاسبهٔ پاسخ پلهٔ سیستم حلقه بسته، تابع تبدیل $G(s)$ را توسط قطب‌های غالبش با یک سیستم مرتبهٔ ۲ تقریب می‌زنیم. در این حالت پاسخ پلهٔ واحد سیستم حلقه بسته کدام است؟

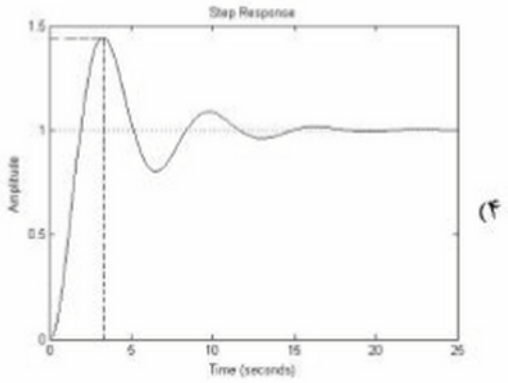




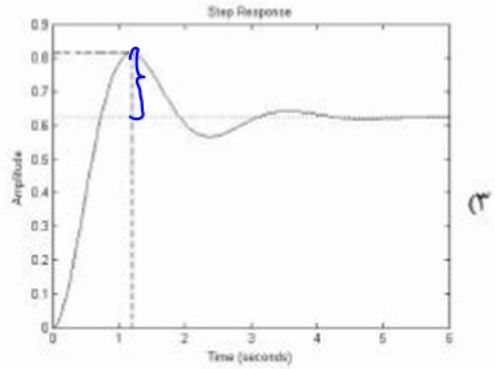
(۲)



(۱)



(۴)



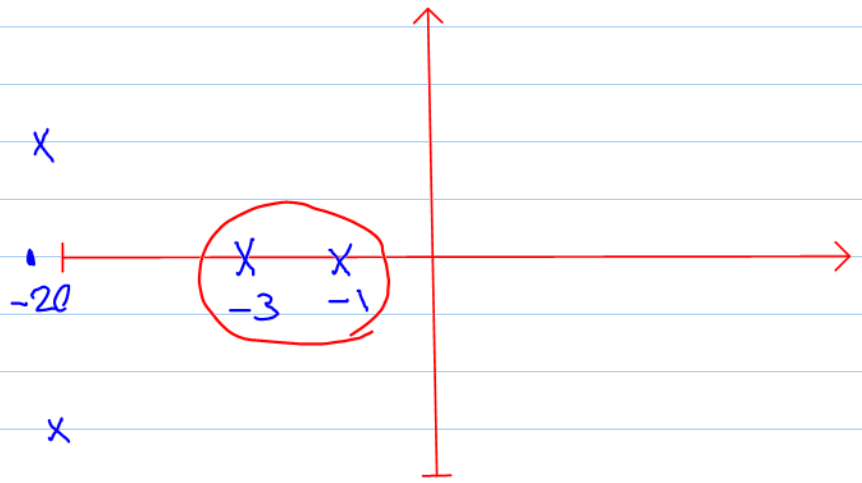
(۳)

$$G(s) = \frac{2500}{(s+1)(s+3)(s^2+40s+500)} \simeq \frac{2500}{(s+1)(s+3)(500)}$$

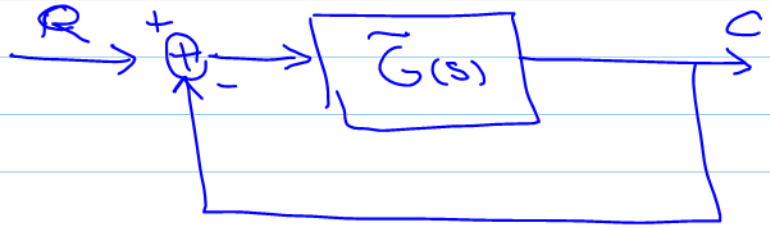
$$s^2 + 40s + 500 = 0$$

$$(s+20)^2 + 100 = 0$$

$$s = -20 \mp j10$$



$$\tilde{G}(s) = \frac{5}{(s+1)(s+3)}$$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{(s+1)(s+3)+5} = \frac{5}{s^2+4s+8}$$

$$c(\infty) = dc_{gain} \times r(\infty) = \frac{5}{8} \times 1 = 0.62$$

1) $\%OS = \frac{0.65 - 0.62}{0.62} \times 100 \simeq 4.5\%$

3) $\%OS = \frac{0.8 - 0.62}{0.62} \times 100 \simeq 30\%$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + 4s + 8}$$

$2\xi\omega_n \quad \omega_n^2$

$$\%OS_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$\omega_n^2 = 8 \longrightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$

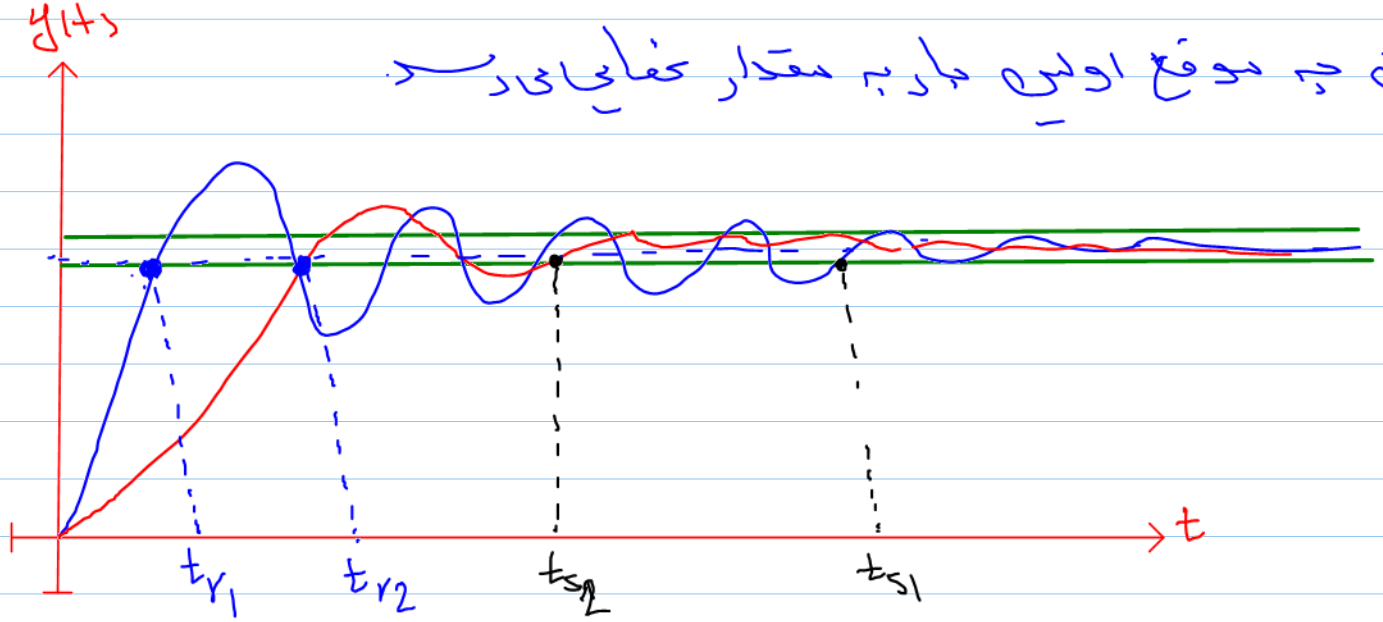
$2\xi\omega_n = 4 \longrightarrow 2\xi \times 2\sqrt{2} = 4 \longrightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7$

$\xi = 0.7 \longrightarrow \%OS = 5\% \longrightarrow$ گزینه ۱

مفهوم سرعت پاسخ و سرعت سیستم

سرعت پاسخ سیستم یعنی اینکه سیستم چه موقع با خطای مجاز 2٪ یا 5٪ مقدار نهایی را دنبال می‌کند.

سرعت سیستم یعنی سیستم چه موقع اولین بار به مقدار نهایی می‌رسد.



سیستم 1

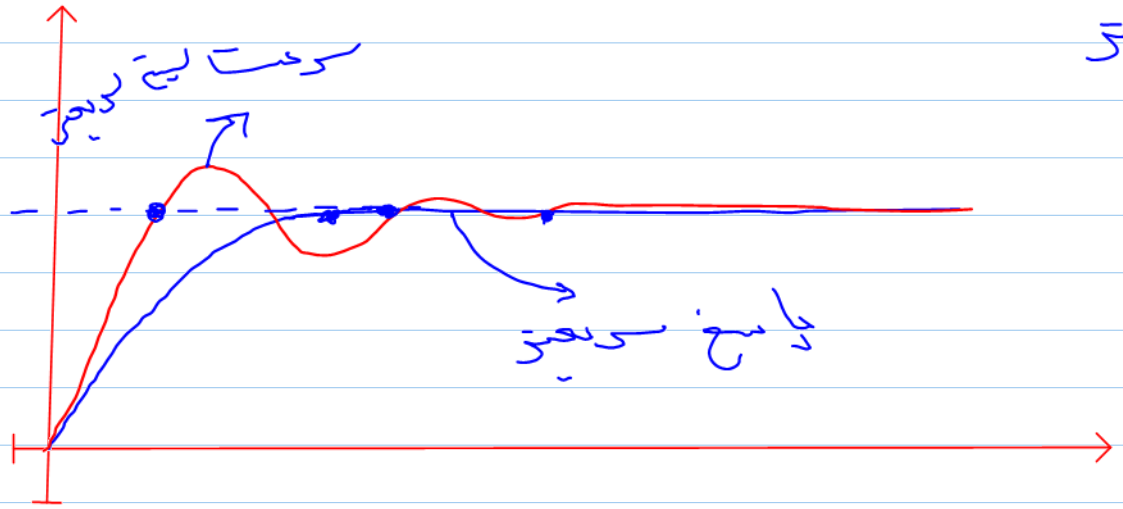
سیستم 2

سرعت سیستم 1 بیشتر است.

سرعت پاسخ سیستم 2 بیشتر است.

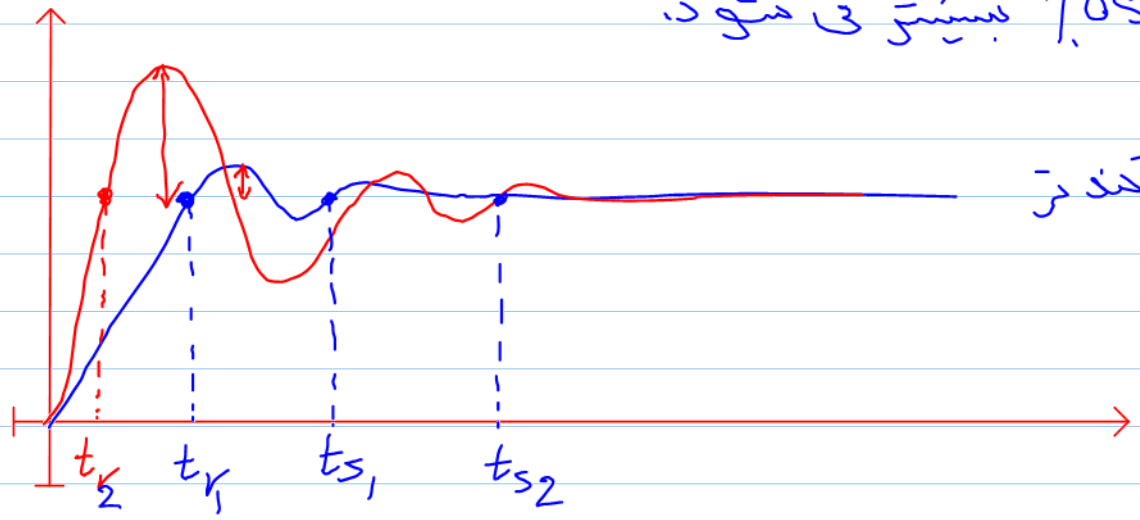
هرچه t_r کمتر ← سیستم سریعتر

هرچه t_s کمتر ← پاسخ سریعتر



هر چقدر سیستم سریعتر شود ← 0.5٪ بیشتر می شود.

هر چقدر 0.5٪ بیشتر شود ← پاسخ کندتر



رابطه بین ζ و ω_n با استفاده از پاسخ سیستم مرتبه دوم:

$$\%OS = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

① $\%OS$ تنها به ζ وابسته است.

② هرچقدر ζ کمتر شود ← $\%OS$ بیشتر

" " بزرگتر " ← کمتر

ناپایدار ← $\zeta < 0$

نوسانی ← $\zeta = 0$ ← $\%OS = 100$

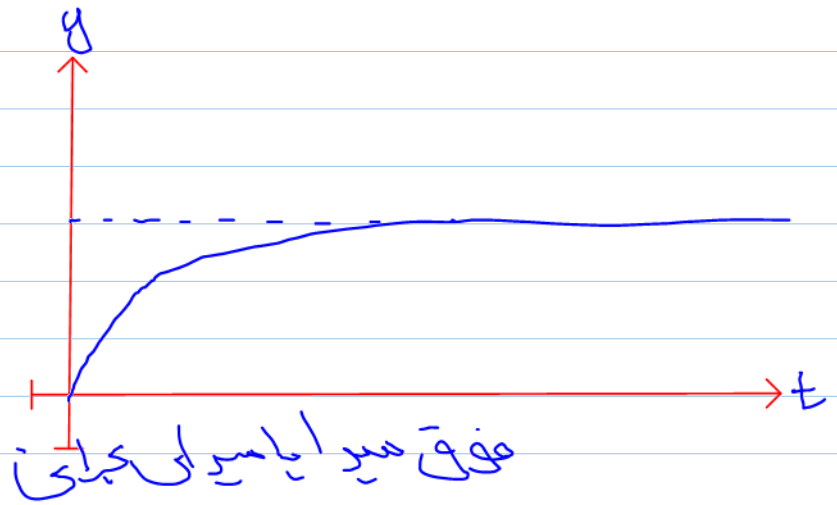
زیرمیرا ← $0 < \zeta < 1$ ← $0 < \%OS < 100$

میرای بحرانی ← $\zeta = 1$ ← $\%OS = 0$

فوق میرا ← $\zeta > 1$ ← $\%OS = 0$

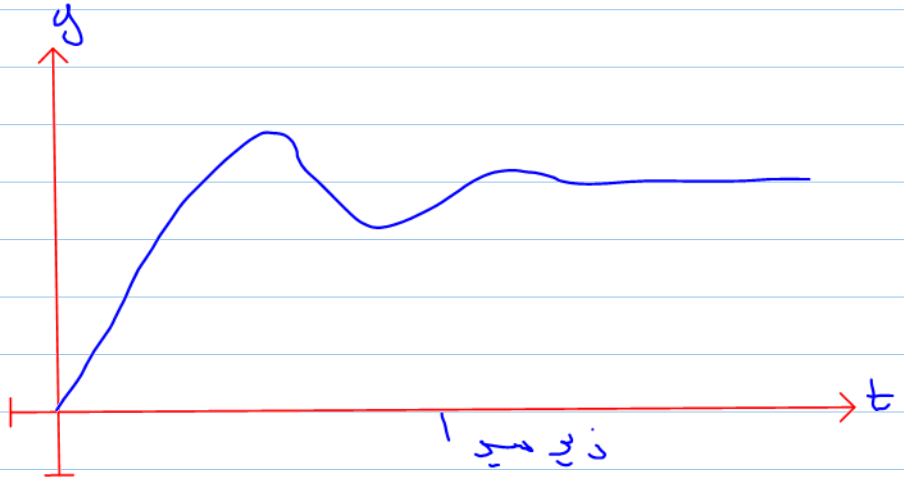
کاهش $\%OS$

افزایش ζ



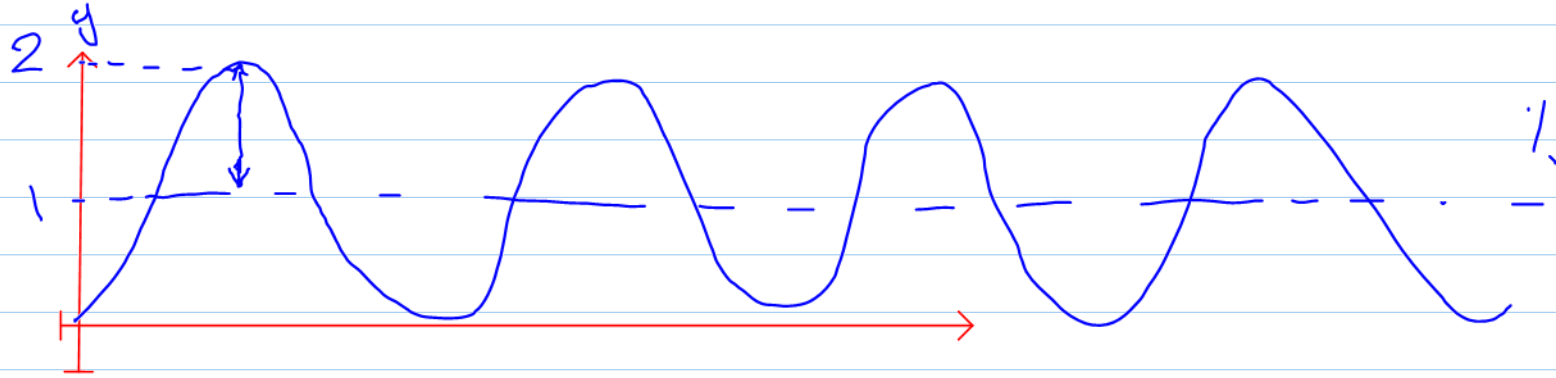
فوق میرایا میرای بحرانی

$\%OS = 0$



زیر میرا

$0 < \%OS < 100$



نوسانی

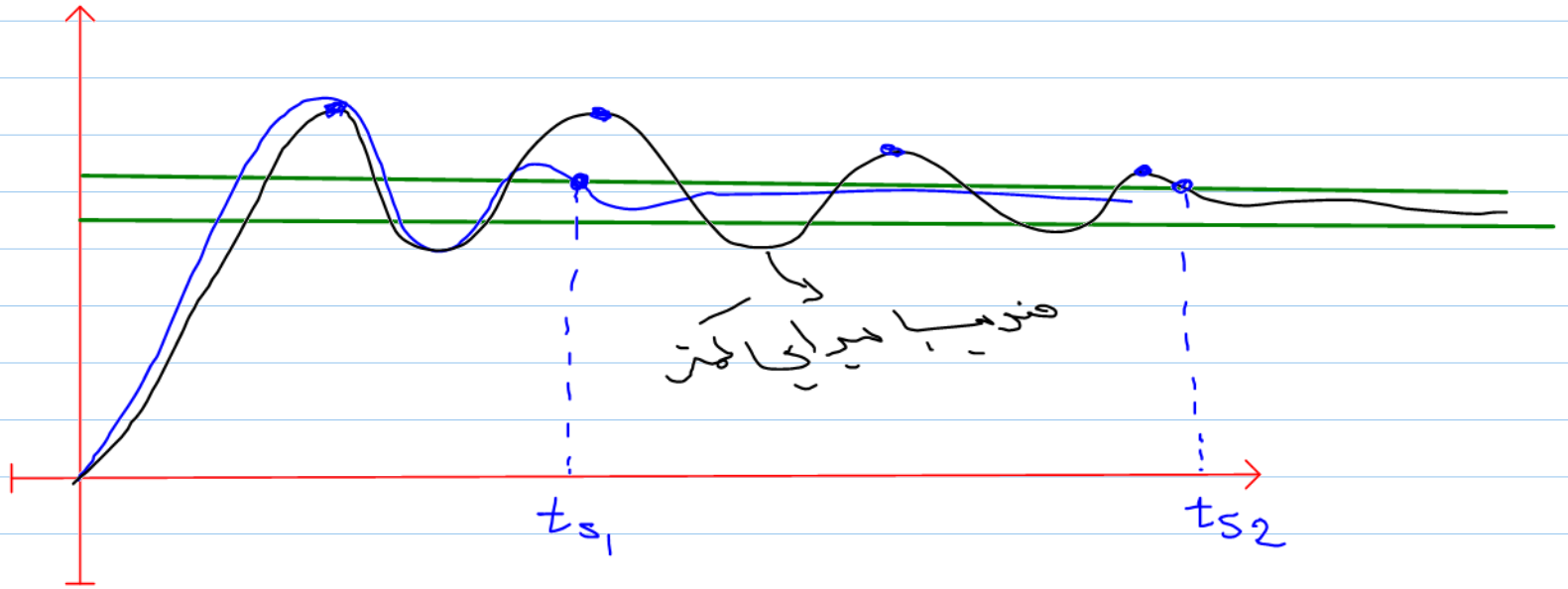
$\%OS = \frac{2-1}{1} \times 100 = 100\%$

③ زمان نشست تقریبا تابعی از ضریب میرایی ($\xi\omega_n$)

$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$ یا $\frac{3}{\xi\omega_n}$

هر چقدر ضریب میرایی کمتر ← زمان نشست بیشتر ← پاسخ کندتر

" " بزرگتر ← " " کمتر ← " " سریعتر



۱۳- در یک سیستم کنترل با پس‌خور واحد منفی $G(s)=\frac{k(s+۴)}{s(s+۳)}$ است $(k>۰)$. حداکثر مقدار اورشوت (فراجهش) به ورودی پله واحد به ازاء چه مقدار k به دست می‌آید؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+4)}{s(s+3)+k(s+4)} = \frac{k(s+4)}{s^2+(3+k)s+4k}$$

حداکثر ← ۵٪ بزرگترین مقدار ← ξ کوچک

به ازای چه مقدار k، ξ کمینه می‌شود؟

$$\frac{k(s+4)}{s^2+(k+3)s+4k} = \frac{}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 4k \longrightarrow \omega_n = 2\sqrt{k}$$

$$2\xi \times 2\sqrt{k} = k+3 \longrightarrow \xi = \frac{k+3}{4\sqrt{k}}$$

$\varepsilon_{min} = ?$ $\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = 0$

$$\frac{\partial \left(\frac{k+3}{4\sqrt{k}} \right)}{\partial k} = \frac{1 \times 4\sqrt{k} - \frac{2}{\sqrt{k}}(k+3)}{16k} = 0$$

$$\frac{4k - 2(k+3)}{16k\sqrt{k}} = 0 \longrightarrow 2k - 6 = 0 \qquad \boxed{k = 3}$$

$\downarrow$

ε_{min}

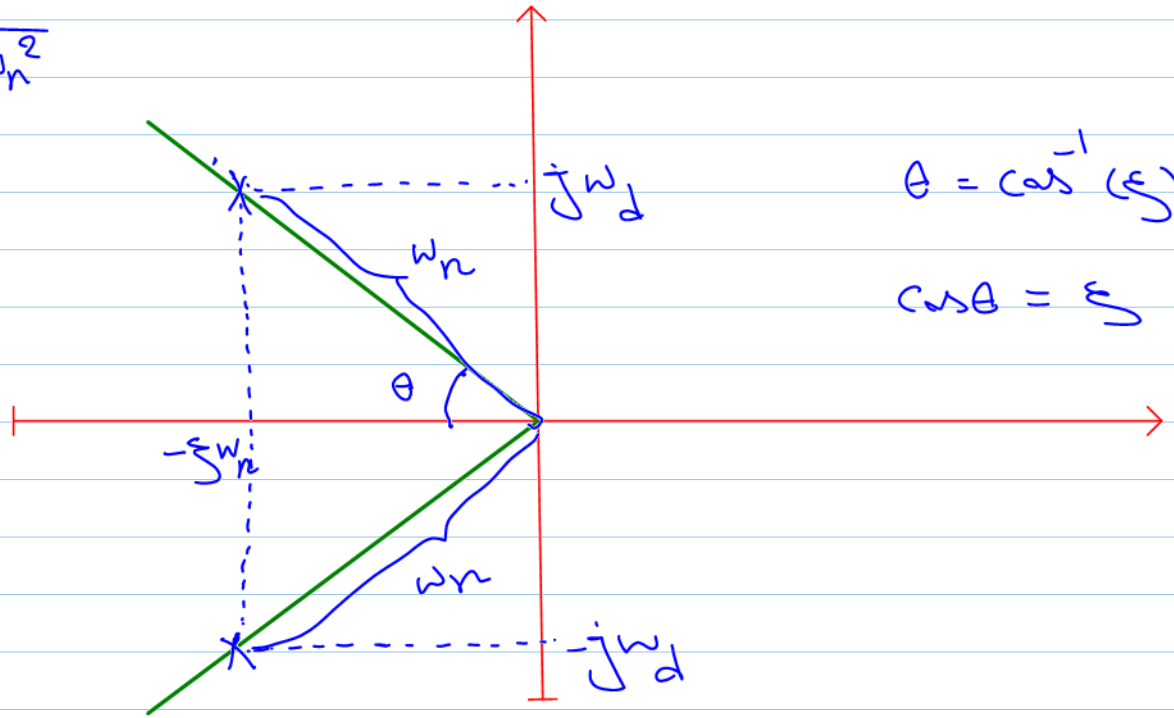
$\downarrow$

$\%3\ \varepsilon_{max}$

ارتباط کل قطعا با متصفات سیستم

بقیه مشخصات سیستم مرتبه دوم با توجه به فل قطبها

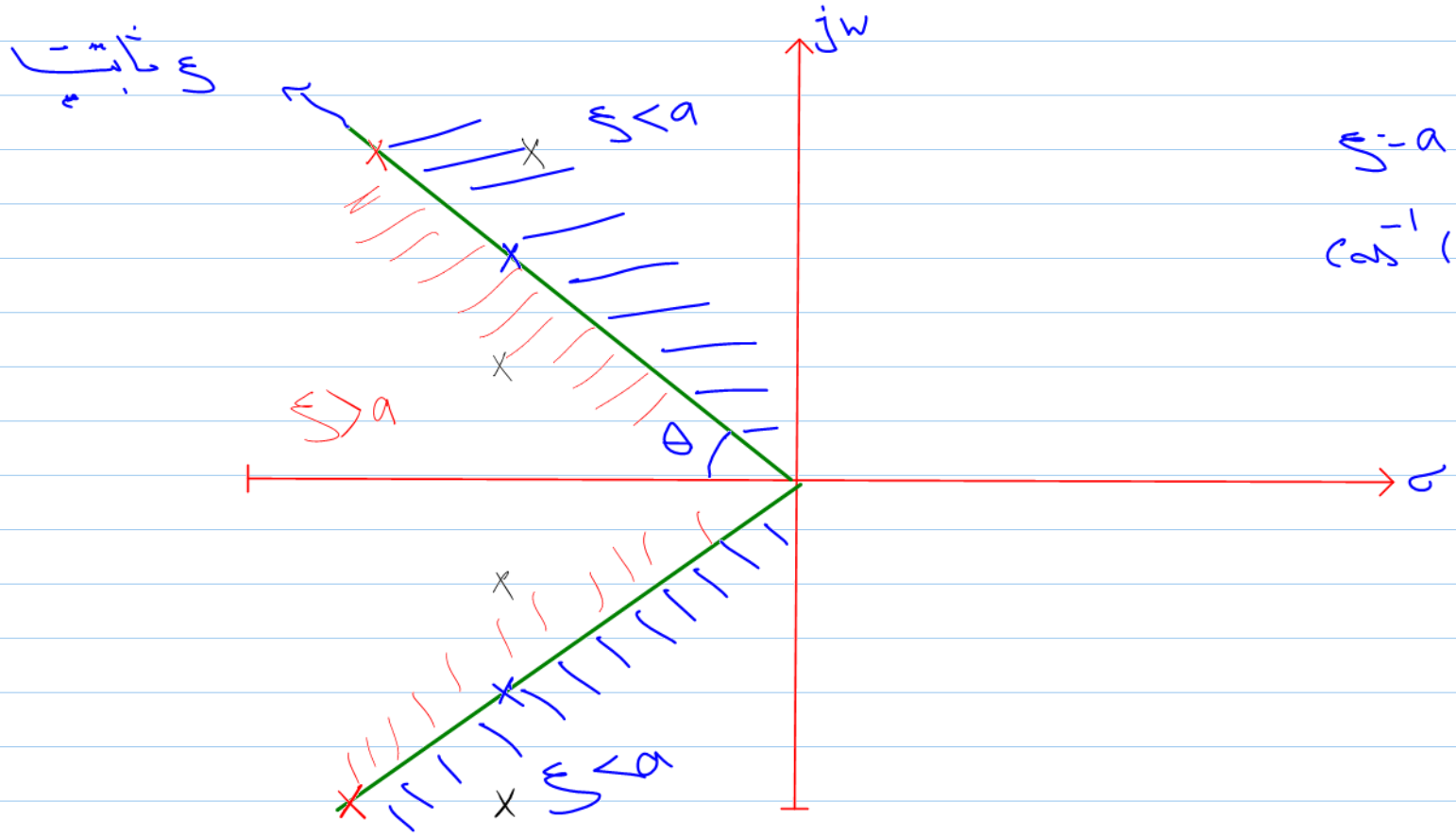
$$G(s) = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$\theta = \cos^{-1}(\xi)$$

$$\cos\theta = \xi$$

① قطبها و ξ :

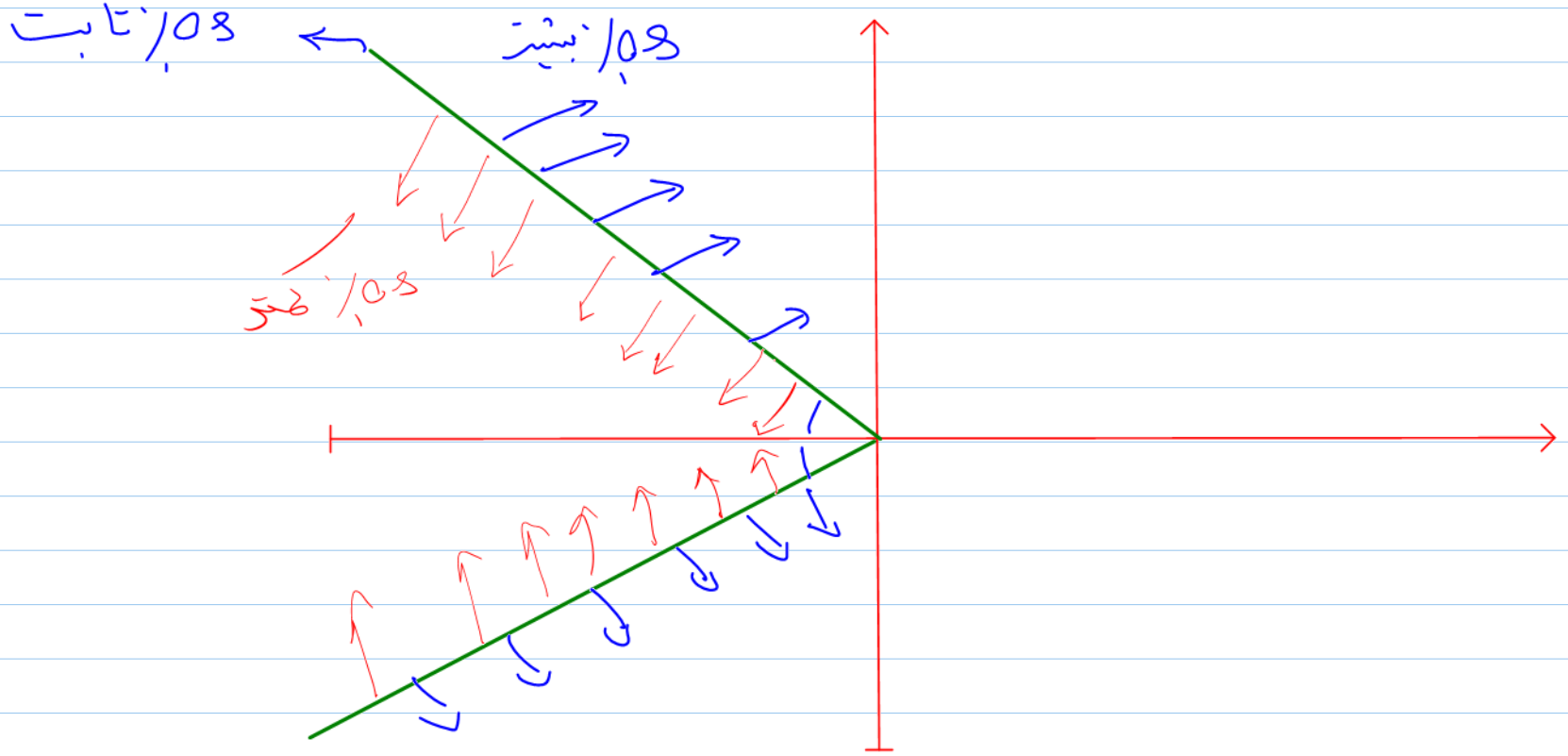


$\xi = a$

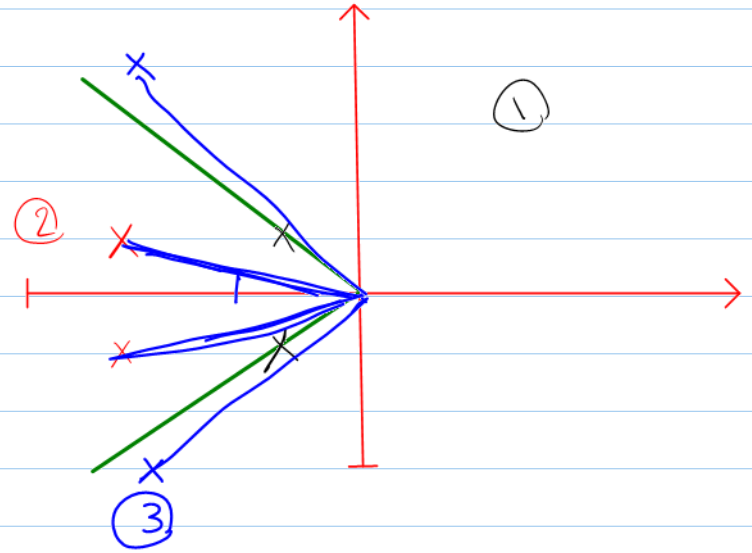
$\cos^{-1}(a) = \theta$

$\xi \downarrow \Rightarrow \%OS \uparrow$

*



$G_1(s)$ ، $G_2(s)$



$\xi_1 < \xi_2$

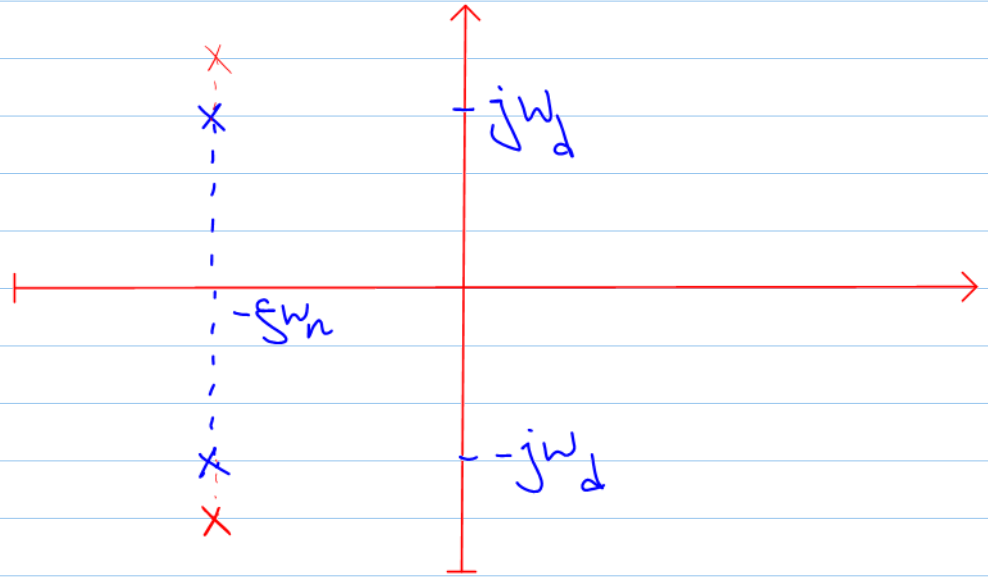
$\xi_3 < \xi_1 < \xi_2$

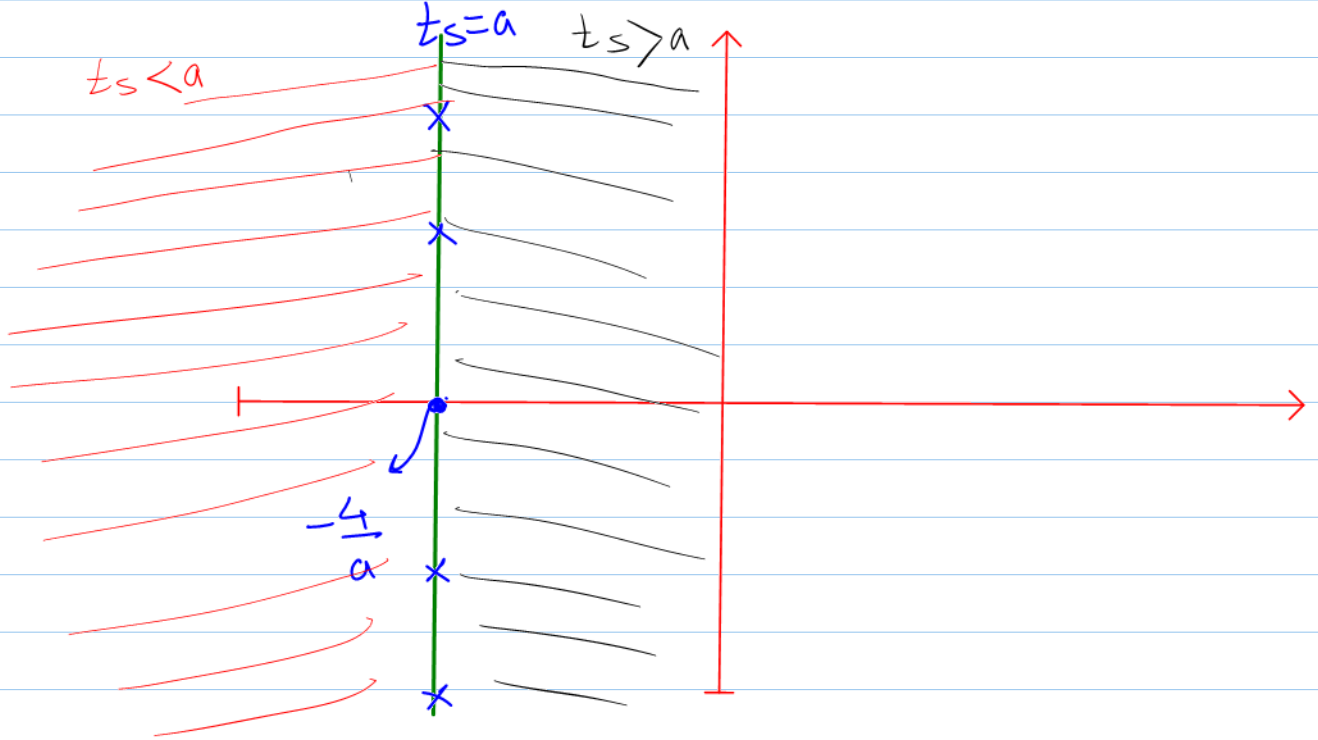
$\%OS_3 > \%OS_1 > \%OS_2$

$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$

$\xi\omega_n \uparrow \Rightarrow t_s \downarrow$

**2 هي الأفضل و t_s :





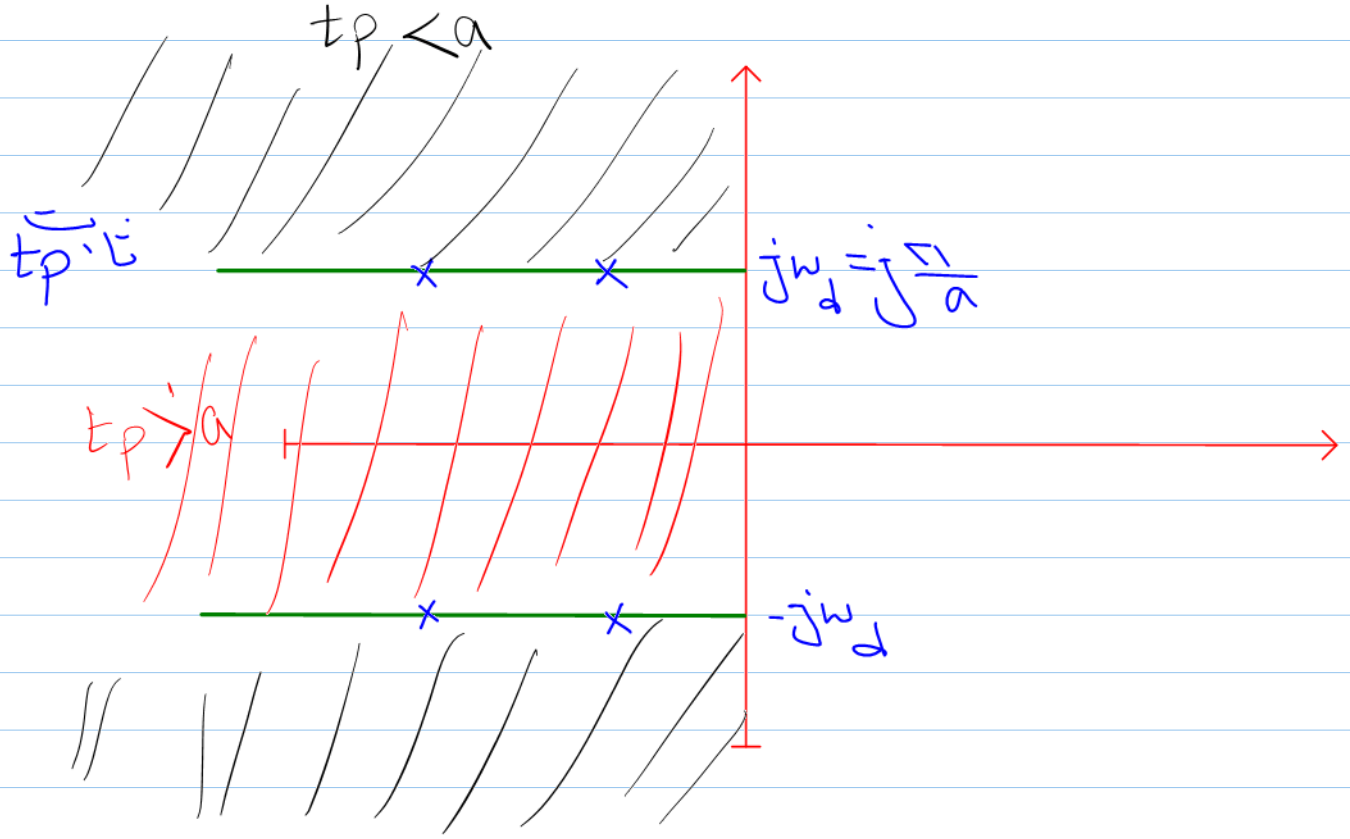
$t_s=a$

$t_s>a$

$t_s<a$

$t_s=a$ ← یعنی مقطعاوی خط‌هوی با مقدار حقیقی $-\frac{4}{a}$ قرار گیرند.

$t_s<a$ ← ~ ~ ~



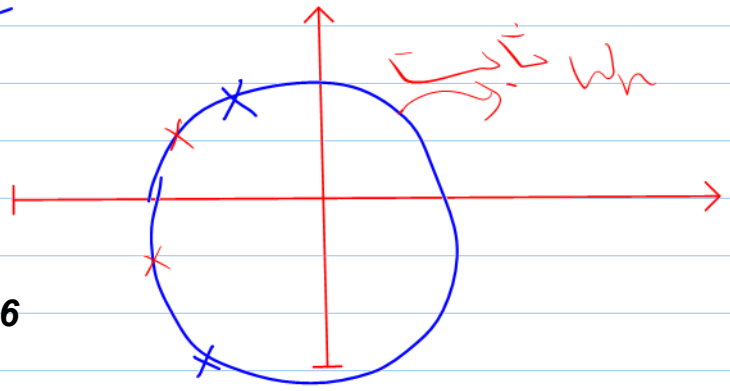
$\omega_d = \frac{\pi}{a}$ ← $t_p = a$

$t_p > a$

$t_p < a$

هر چه قطبها به محور حقیقی نزدیک شوند t_p بزرگتر می‌شود.

④ حل قطبها و ω_n ؛ اگر ω_n ثابت باشد یعنی قطبها روی دایره‌ای به شعاع ثابت قرار بگیرند.



مثله سیدی:

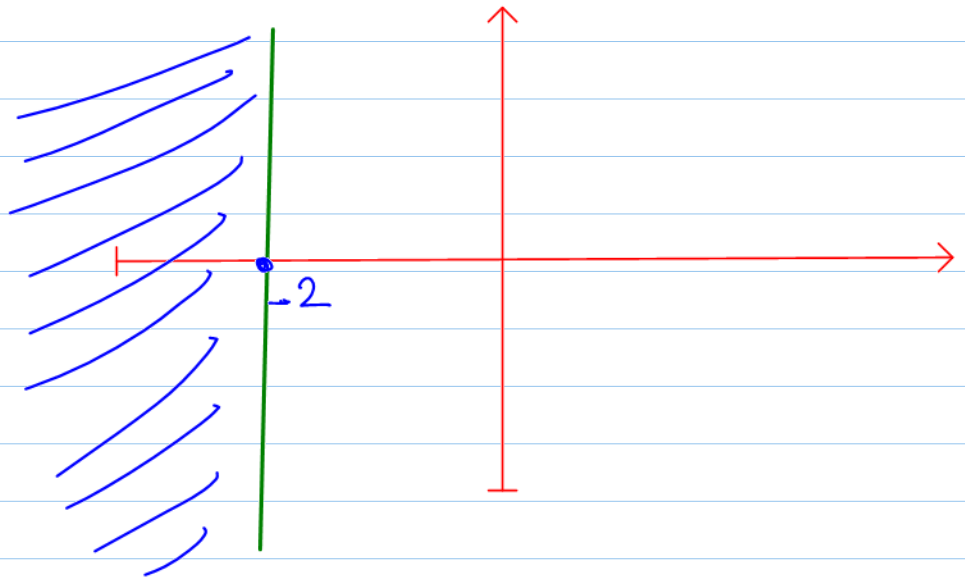
اگر در سیستم مرتبه بالاتر از 2 ، از مشخصات سیستم مرتبه 2 سوال کند، مثل

قطبها ملاک قرار می گیرد. (حق ندارم تقریب بزنم)

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s + k} \qquad t_s < 2s$$

مقدار k چقدر است؟

$t_s < 2$ در سیستم مرتبه 2 از نظر من قطبها یعنی چه؟ یعنی قطبها سمت چپ خط



عمودی با جنس حقیقی $-\frac{4}{2}$ قرار گیرند.

در سیستم $G(s)$ هم اگر قطبهاست چپ خط $s=-2$ قرار گیرد، $t_s<2$ خواهد شد

در $G(s)$ مقدار k چقدر باشد تا قطبهای سیستم چپ خط $s=-2$ قرار گیرد.

سوال فصل دوم: معیار پایداری روث (پایداری سنجی)

$$G(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+2s+k}$$

$$\Delta(s) = s^3+3s^2+2s+k=0$$

$$\Delta(s+2) = (s-2)^3+3(s-2)^2+2(s-2)+k=0$$

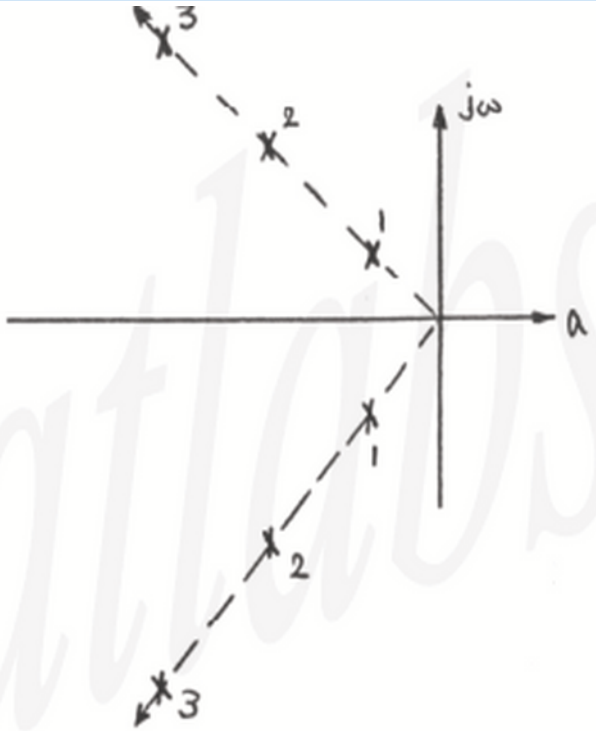
$$= s^3-2s^2+4s-8+3s^2-12s+12+2s-4+k=0$$

$$\Delta(s-2) = 15s^3+15s^2-6s+k=0$$

چون علامت ضرایب یکسان نیست هرگز $\Delta(s-2)$ پایدار نمی شود.

یعنی قطبهای $G(s)$ سمت چپ خط $s=-2$ قرار نمیگیرد $\leftarrow$ t_s کمتر از 2 نمی شود.

۵۸. قطبهای یک سیستم مرتبه دوم مطابق شکل مقابل حرکت می‌کنند. کدام بیان در مورد این سیستم صادق است؟

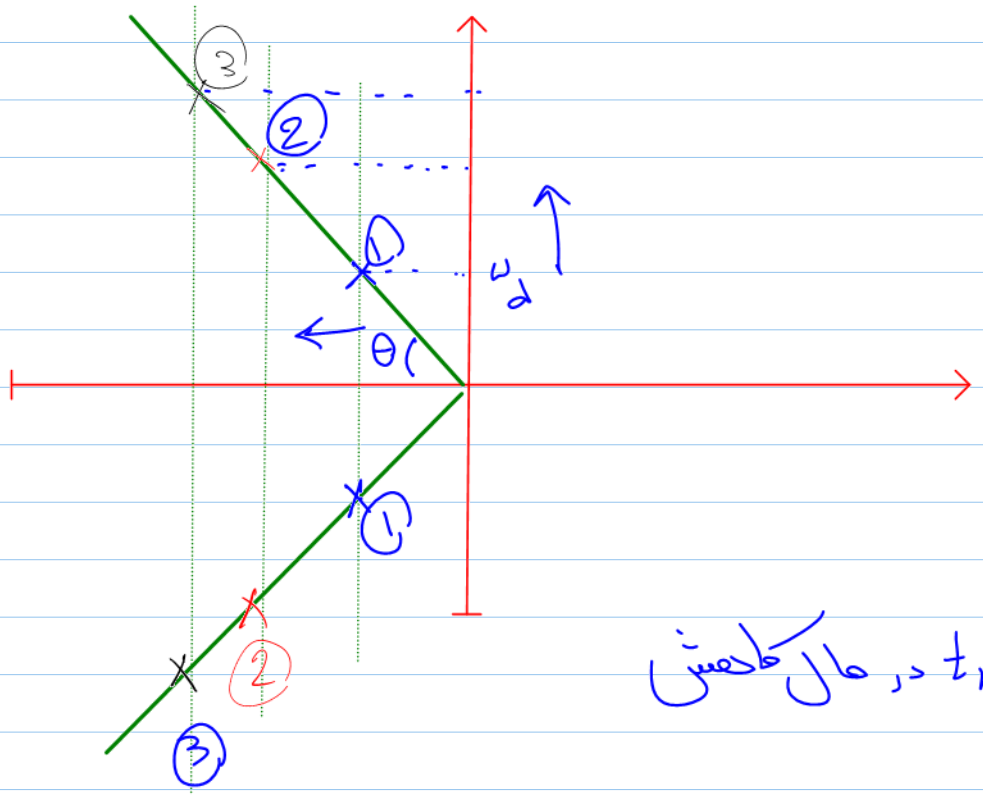


۱) زمان صعود سیستم کاهش می‌یابد.

۲) فراجهش سیستم افزایش می‌یابد.

۳) زمان مستقر شدن سیستم افزایش می‌یابد.

۴) فرکانس نوسانات سیستم کاهش می‌یابد.



$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1}(\xi)}{\omega_d}$$

$\xi \rightarrow \theta$

t_r در حال کاهش $\leftarrow$ { الف - ξ ثابت است
ب - ω_d در حال افزایش است.

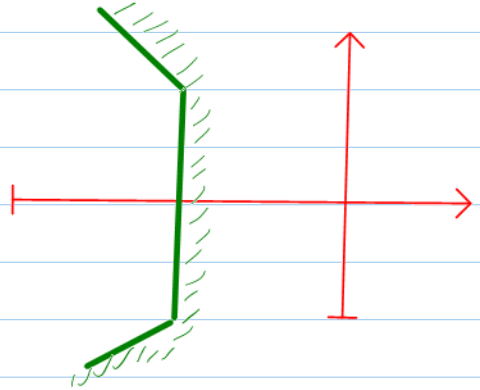
ξ ثابت $\rightarrow$ 0.8 ثابت ؟ 1.0

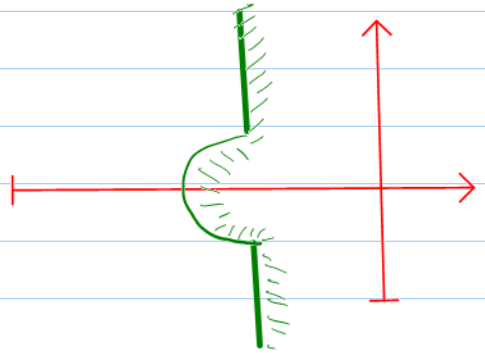
$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

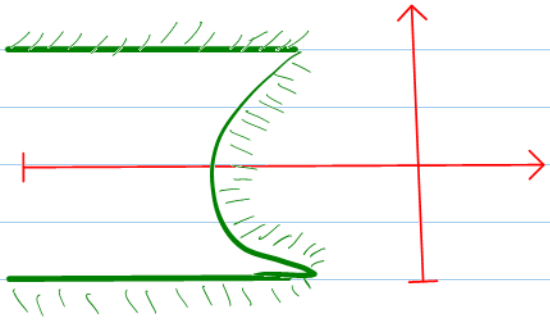
t_s در حال کاهش

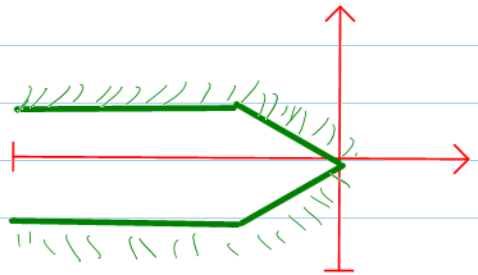
هوافضا ۹۳. کدام گزینه محدوده‌ی راستای را نشان می‌دهد که اگر قطبهای طبقه بسته در آن محدود باشد

زمان اوج دارای کرانه پایین و فاصله دارای کرانه بالاست؟

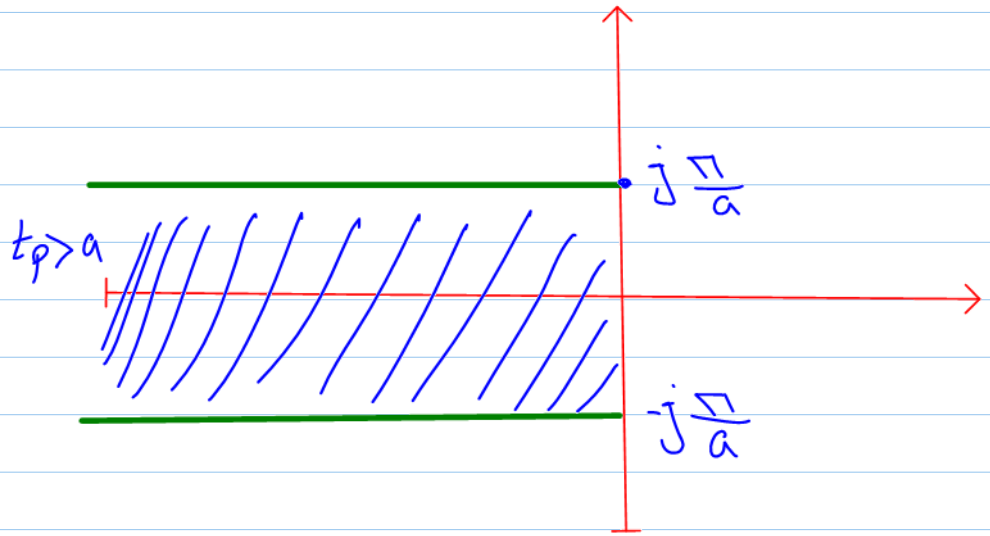




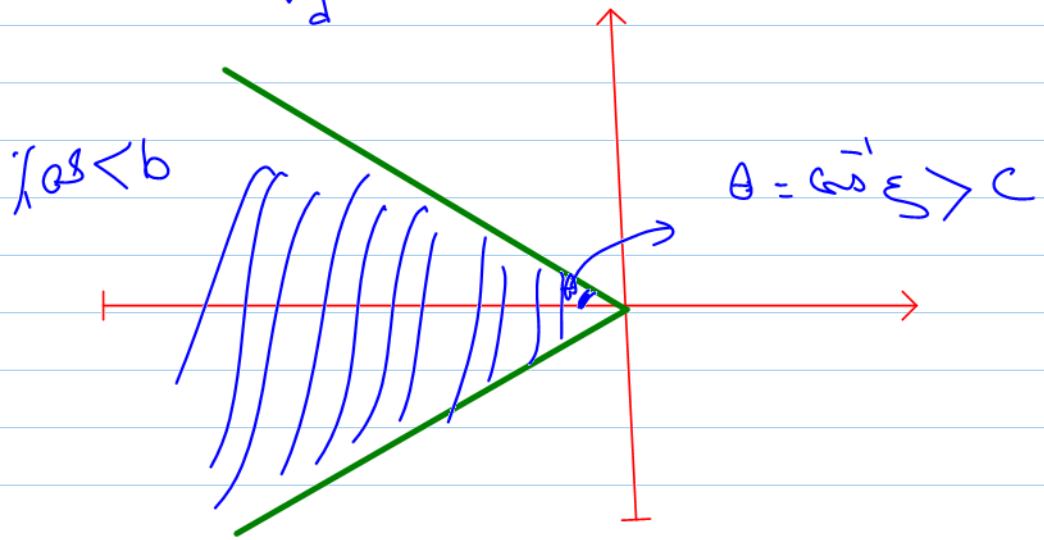


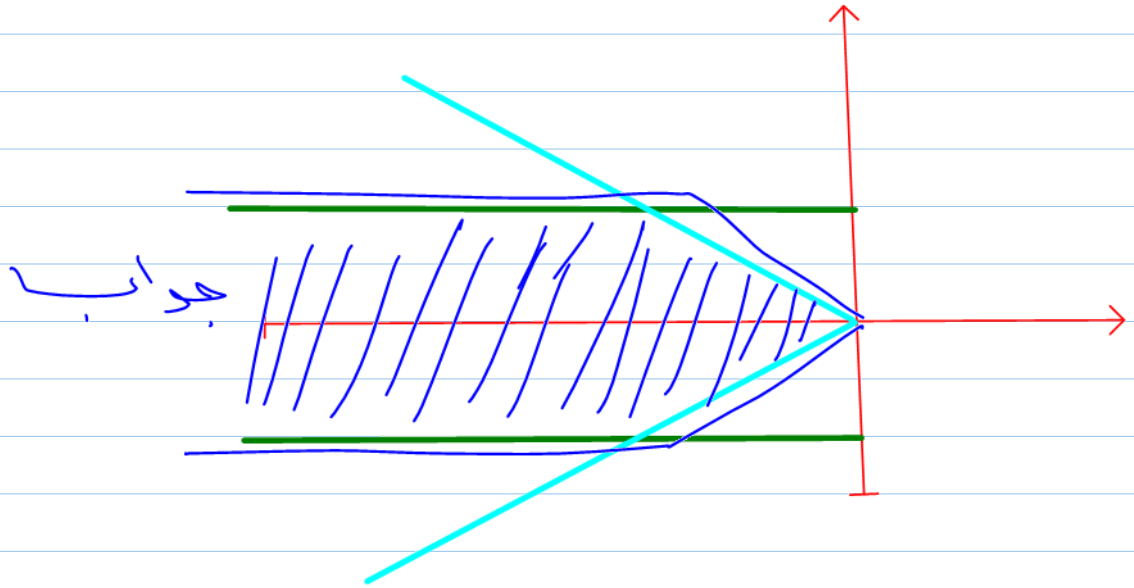


$t_p > a$, $j\beta < b$



$t_p = \frac{\pi}{w_d}$

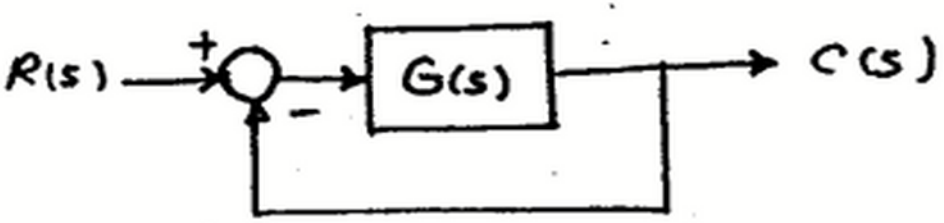




۸۷ برق

۸ ـ به ازای چه مقداری از k زمان نشست (با معیار ۲درصد) کمتر از ۲ ثانیه است؟

(در سیستم شکل مقابل $G(s) = \frac{k}{(s+1)(s+7)(s+10)}$ است.)



۱) ۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۸۰

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s+1)(s+7)(s+10)+k}$$

به ازای چه مقداری از k، $t_s<2$ است؟

قطبها سمت چپ خط $s=-(\frac{4}{2})$ باشند.

$$\Delta(s) = (s+1)(s+7)(s+10)+k = 0$$

$$\Delta(s-2) = (s-1)(s+5)(s+8)+k = 0$$

$$= (s-1)(s^2+13s+40)+k = 0$$

$$\Delta(s-2) = s^3+12s^2+27s+k-40 = 0$$

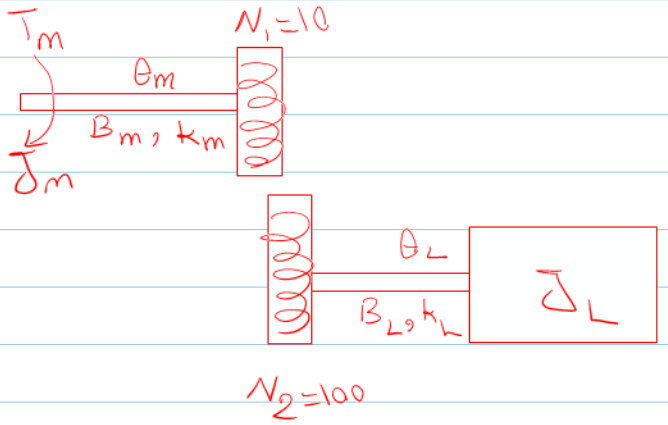
$$\begin{cases} 12\times 27 > 1\times(k-40) \\ k-40>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k< 12\times 27+40 \\ k>40 \end{cases}$$

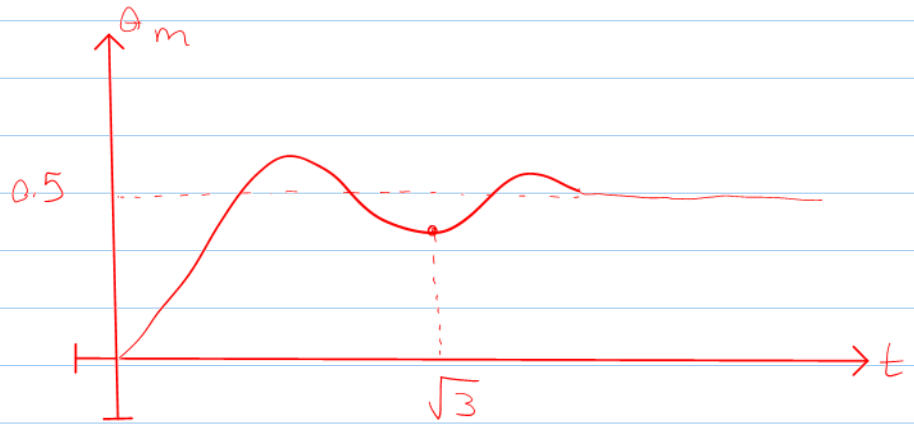
$$k< 324+40 \rightarrow \underline{40<k<364}$$

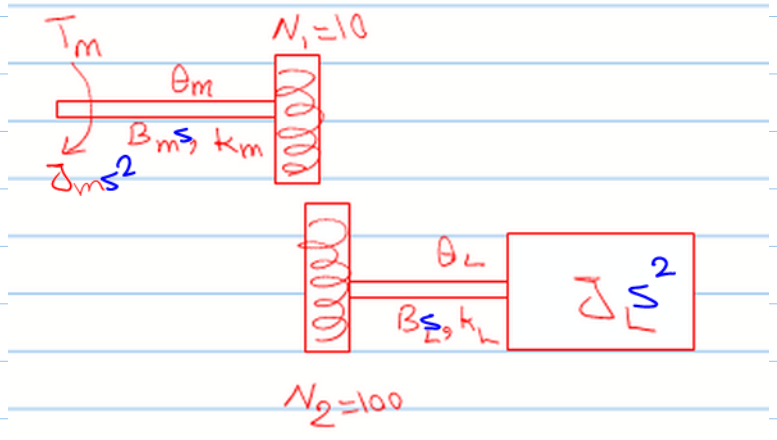
بدون ۹۴. سیستم شکل زیر یک موتور DC را که توسط جعبه دنده به بار مکانیکی متصل است

نشان می‌دهد. شکل دوم پاسخ زاویه θ_m را به ورودی $T_m = \frac{1}{s}$ نشان می‌دهد. اگر $k_L = 100$

باشد و بدانیم که زاویه فازی سیستم با خور حقیقی 60° است، مقدار w_n و k_m به ترتیب کدام است؟





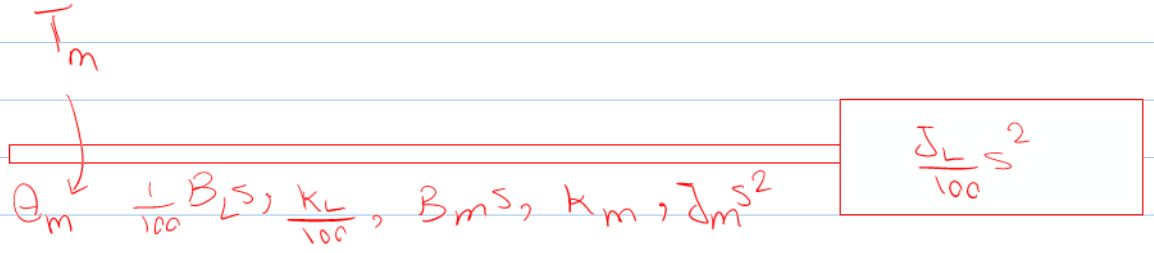


$$\frac{\theta_m}{T_m} = ?$$

معامل العطالة J_L على المحور الأول $= \left(\frac{10}{100}\right)^2 J_L s^2 = \frac{J_L s^2}{100}$

$$k_L \sim \nu = \left(\frac{10}{100}\right)^2 k_L = \frac{k_L}{100}$$

$$B_L \sim \nu = \left(\frac{10}{100}\right)^2 B_L s = \frac{1}{100} B_L s$$



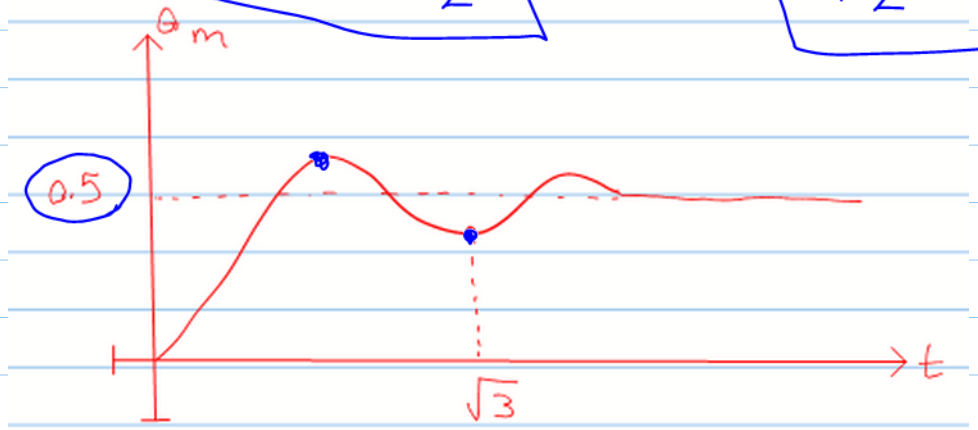
$$\left(\frac{J_L}{100} s^2 + J_m s^2 + k_m + \frac{k_L}{100} + B_m s + \frac{B_L}{100} s \right) \theta_m = T_m$$

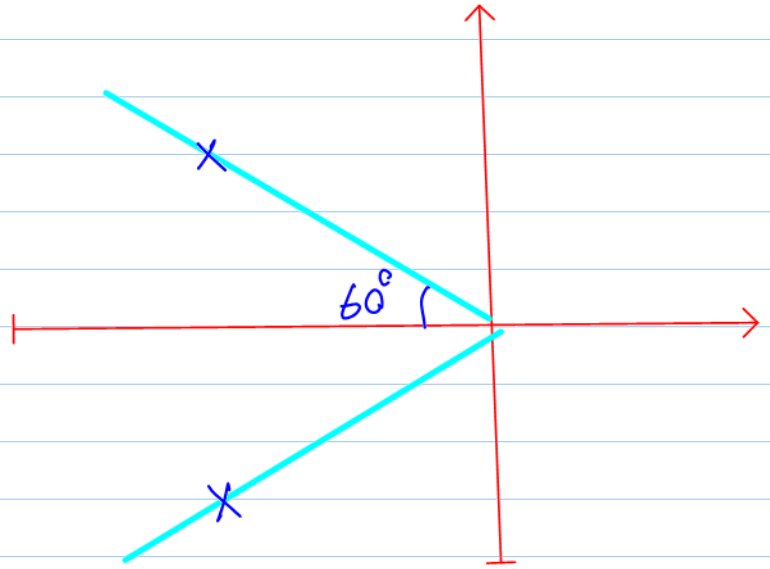
$$\therefore \quad \frac{\theta_m}{T_m} = \frac{1}{\left(J_m + \frac{J_L}{100}\right) s^2 + \left(B_m + \frac{B_L}{100}\right) s + k_m + \frac{k_L}{100}} = G(s)$$

$$\frac{\theta_m}{T_m} = \frac{1}{\left(J_m + \frac{J_L}{100}\right)s^2 + \left(B_m + \frac{B_L}{100}\right)s + k_m + 1}$$

$T_m = \frac{1}{s} \longrightarrow \theta_m$

$\theta_{m(\infty)} = \frac{1}{2}$, $t_{p_2} = \sqrt{3}$,





$\cos(60°) = \xi \rightarrow \xi = \frac{1}{2}$

$\theta_{m(\infty)} = \frac{1}{2} \longrightarrow$ dc gain $= \frac{\theta_{m(\infty)}}{T_{m(\infty)}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = G(0) = \frac{1}{k_m + 1} \rightarrow \frac{1}{k_m + 1} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{k_m = 1}$ ✓

$$t_{p_2} = \frac{2\pi}{w_d} = \sqrt{3} \rightarrow w_d = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}$$

$w_n = ?$ $\quad w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = w_n\sqrt{1-\frac{1}{4}}$

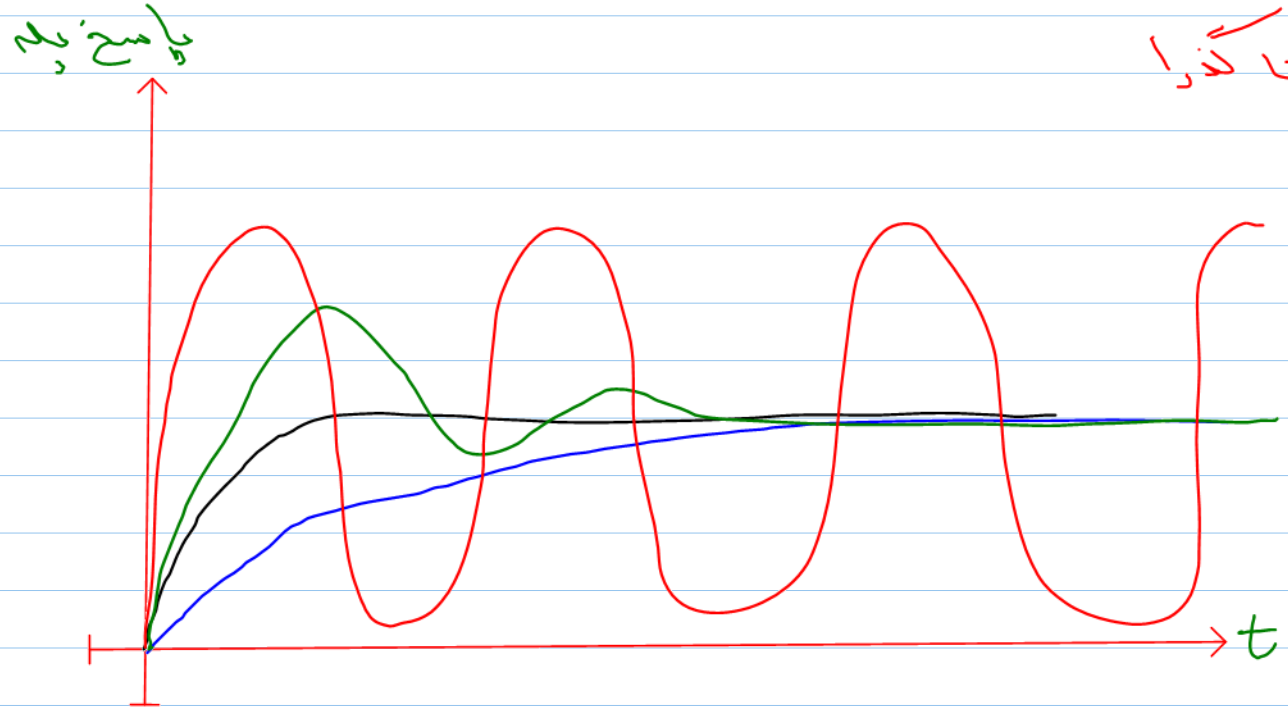
$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = w_n \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{w_n = \frac{4\pi}{3}} \checkmark$$

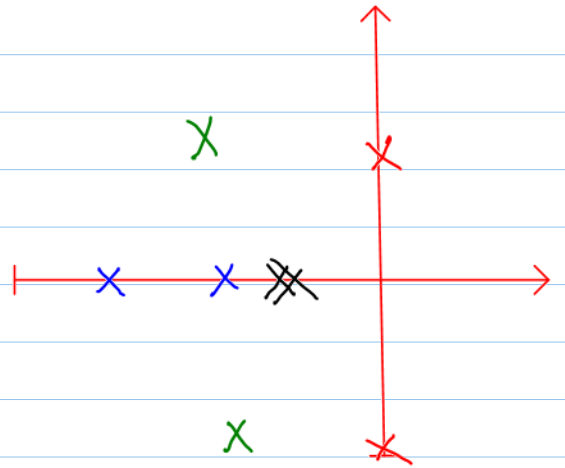
جلسه آینده: تأثیر مزهای دوم و پاسخ سیستم مرتبه دوم

جلسه 28 کنترل خطی

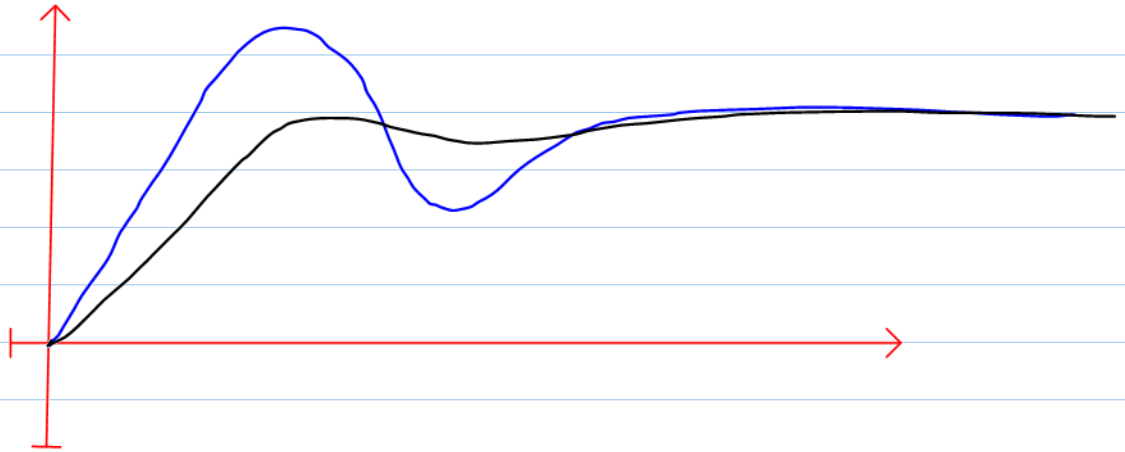
بررسی اثر صفرها روی پاسخ حالت گذرا

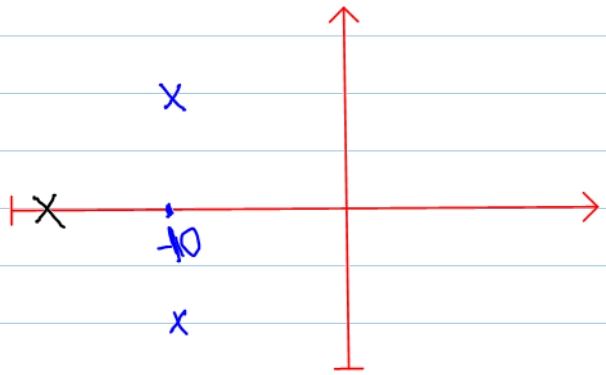
* بررسی تأثیر قطبها روی حالت گذرا

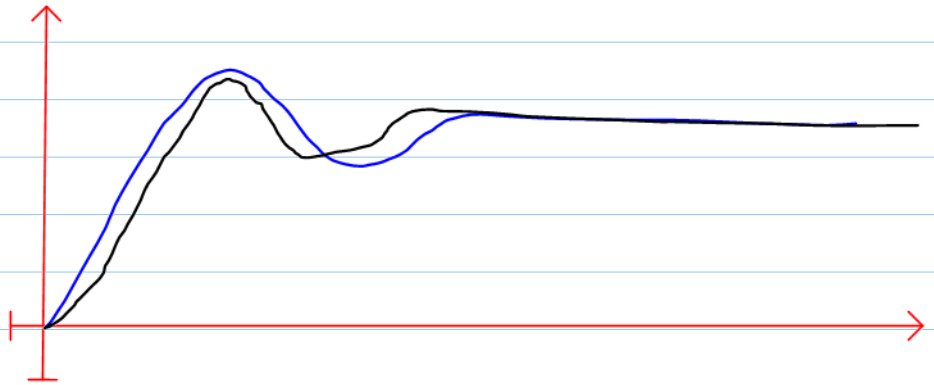


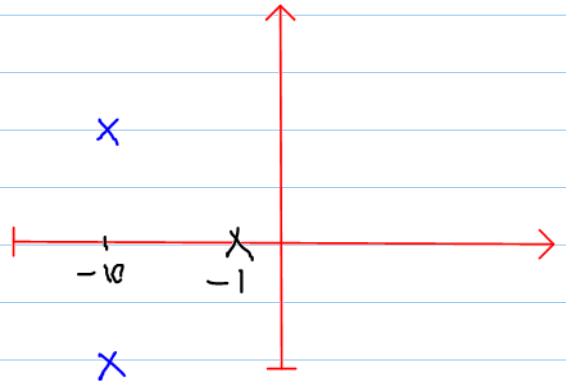


* قطب حقیقی منفی پاسخ را آرام می‌کند. (95٪ کمتر)

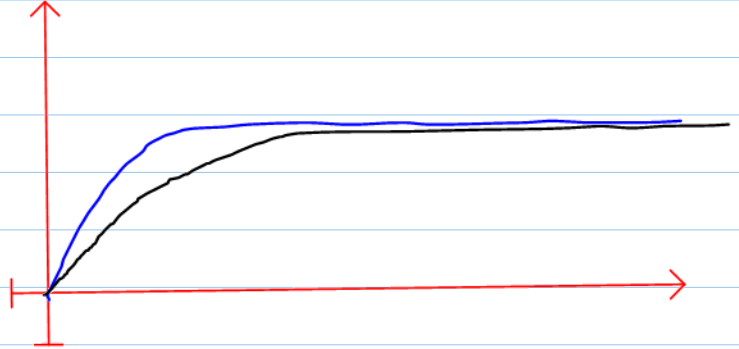


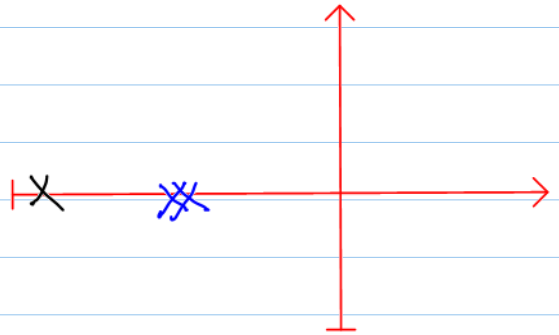






هر چقدر قطب حقیقی منفی به محور تاخ نزدیکتر باشد اثر آن را کم کرده و پایا کنترلی شود.



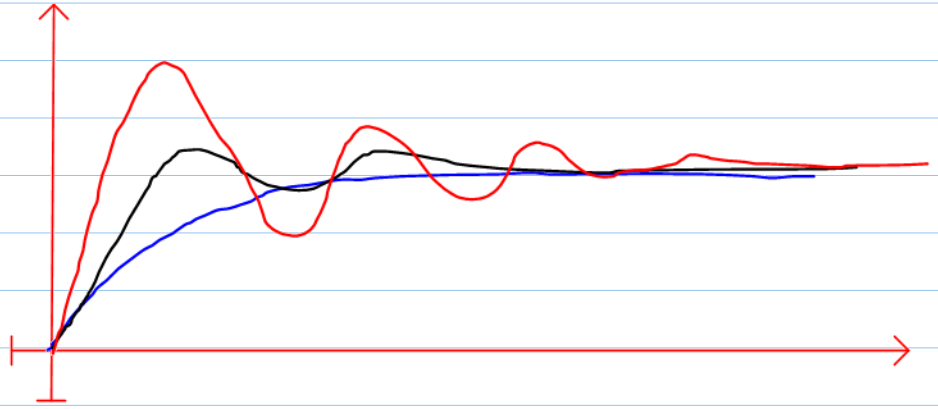


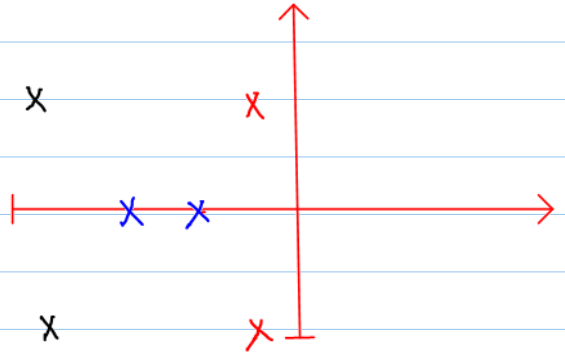
نکته

* اضافه کردن قطب حقیقی سفت پاسخ را آرام می‌کند.

هر چه قطب از محور $j\omega$ دورتر باشد تأثیر آن بیشتر خواهد بود.

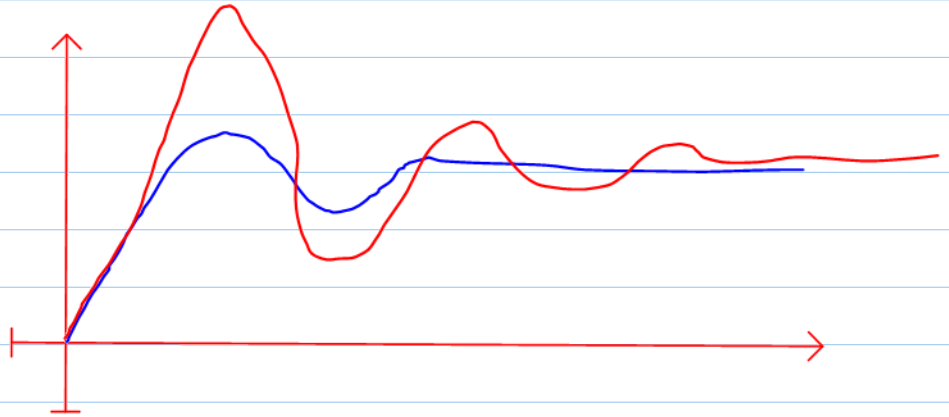
قطب مختلط سرعت را وحشی‌تر می‌کند.

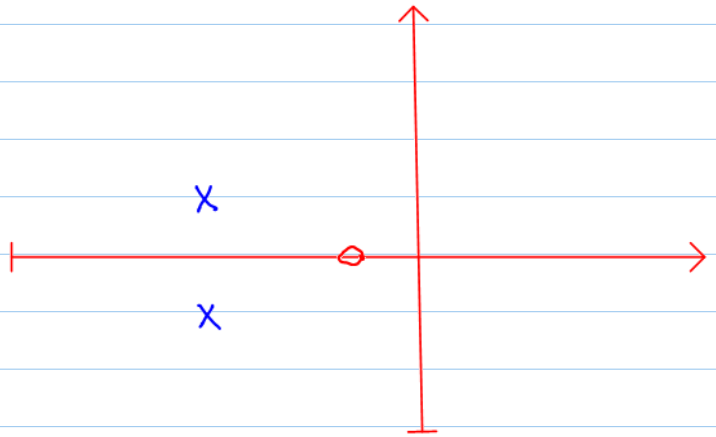




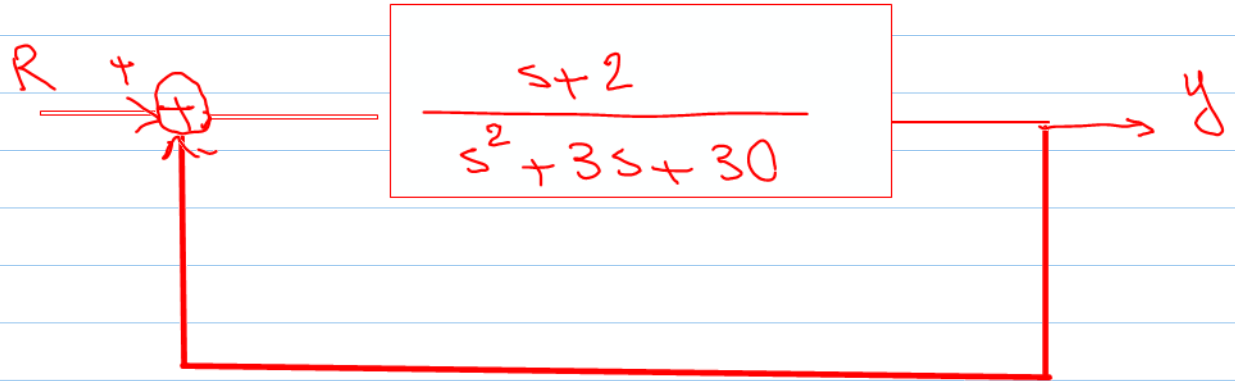
تأثیر صفر ؟

اضافه شدن صفر سمت چپ پاسخ را وحشی می‌کند. (OS% زیاد و t_s افزایش)





هر چقدر صفر سمت چپ به محور $j\omega$ نزدیکتر باشد اثر آن بیشتر است.



پاسخ پله واحد را رسم کنید.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{s^2+4s+32} = \frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

برای تحلیل پاسخ؟

$$G(s) = \frac{1}{s^2+4s+32}$$

ابتدا صفرها را در نظر نمی‌گیریم.

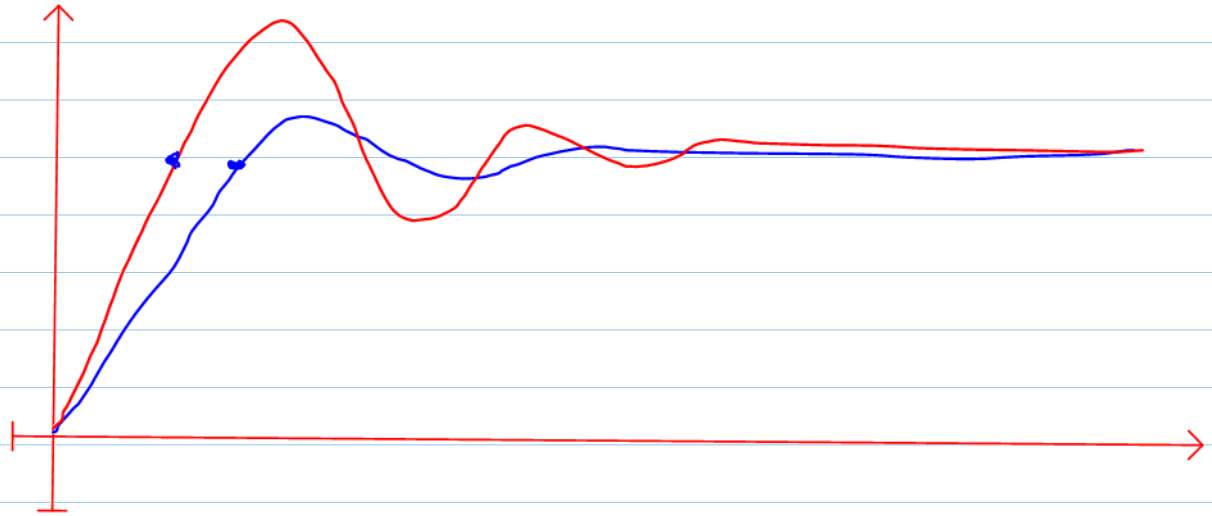
پاسخ بدون صفر تحلیل می‌شود.

در نهایت اثر صفر را اضافه می‌کنیم.

$$\omega_n^2 = 32 \rightarrow \omega_n = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$2\xi\omega_n = 4 \rightarrow \xi = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$$

زیرمیرا



پاسخ بدون صفر

پاسخ با صفر

قواعد اثر همزمان

① اضافه همزمان سه ترکیب باعث وحشی پاسخ می‌شود که ۵۰٪ به سرعت زیاد

t_3 هم زیاد

t_1 کمتر

② اضافه دو یا چند همزمان تأثیر بسیار بیشتری دارد.

③ اگر سیتوکین بدون همزمان در حالت زیرمیزا باشد، اضافه شدن همزمان باعث افزایش بسیار زیاد ۵۰٪ می‌شود.

④ اگر سیتوکین فوق‌میزا باشد اضافه شدن همزمان تأثیر کمی قطعی می‌شود. اگر همزمان اضافه شده به حد کافی به همزمان نزدیک باشد باعث بروز ۵۰٪ کم در پاسخ می‌شود ولی اگر همزمان از همزمان دور باشد سیتوکین را تبدیل به میزان بحرانی می‌کند.

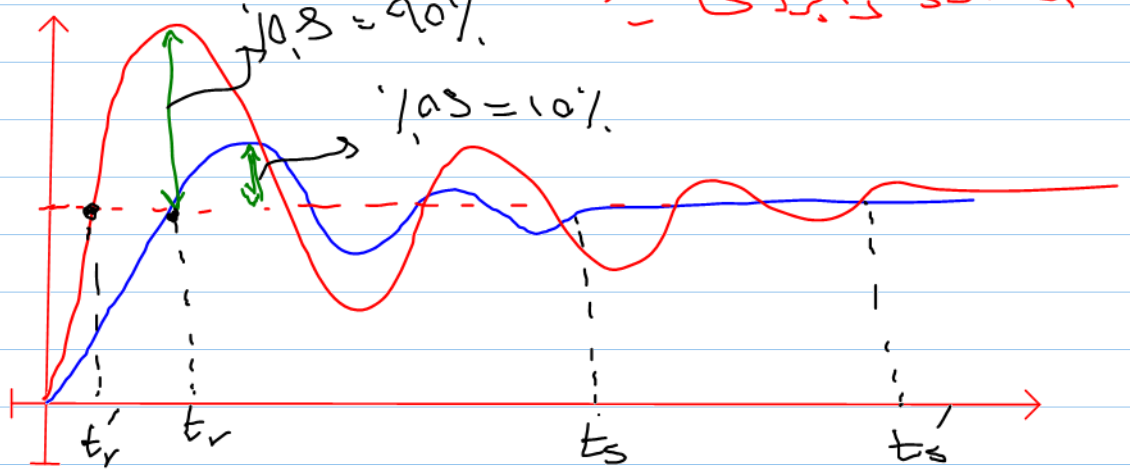
⑤ اگر سیتوکین برای باشد اضافه شدن همزمان موجب بروز ۵۰٪ سیتوکین می‌شود.

مثال ۱.

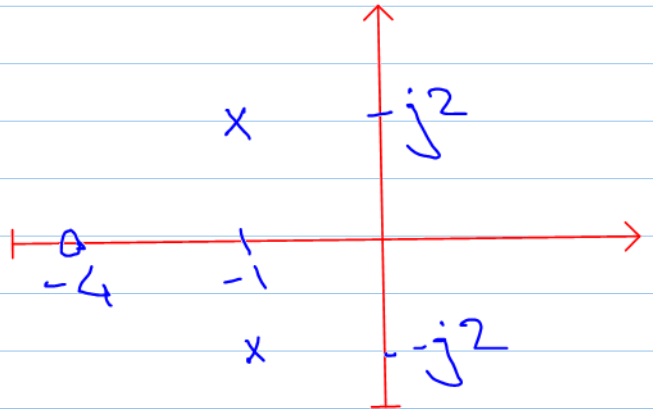
$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+2s+5} \quad ، \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}$$

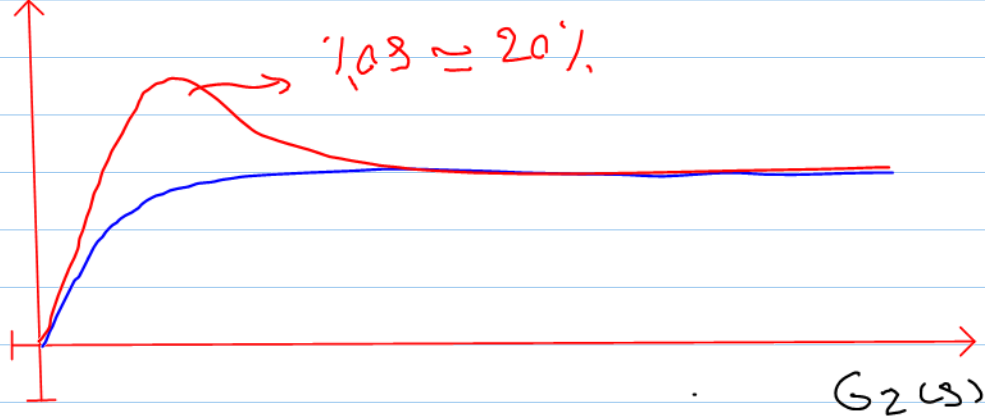
$$G_3(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

تأثیر اضافه شدن یک صفر در -4 در پاسخ پله سیستم

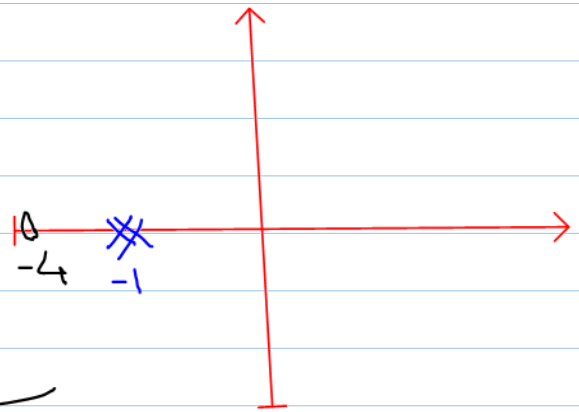


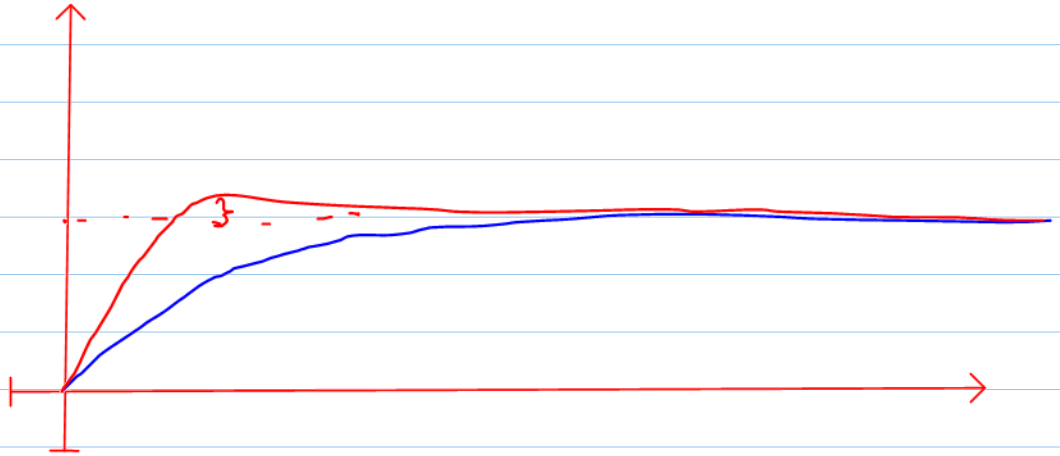
$G_1(s)$



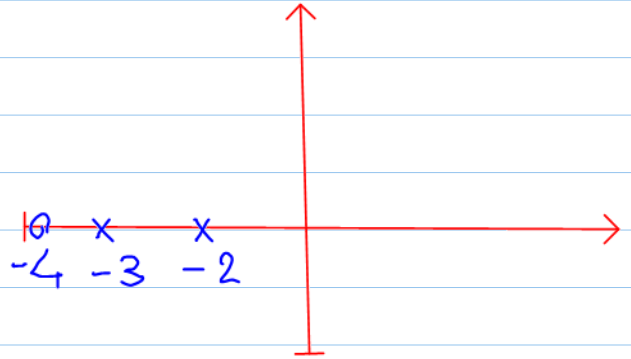


$G_2(s)$





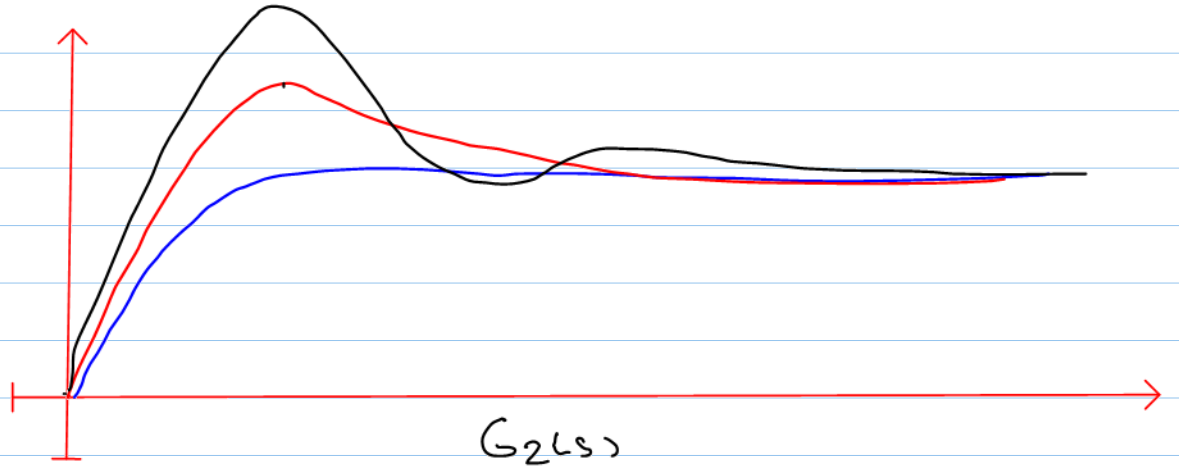
$G_3(s)$



بررسی تأثیر اضافه شدن دو قطب در $s = -2 \pm j$

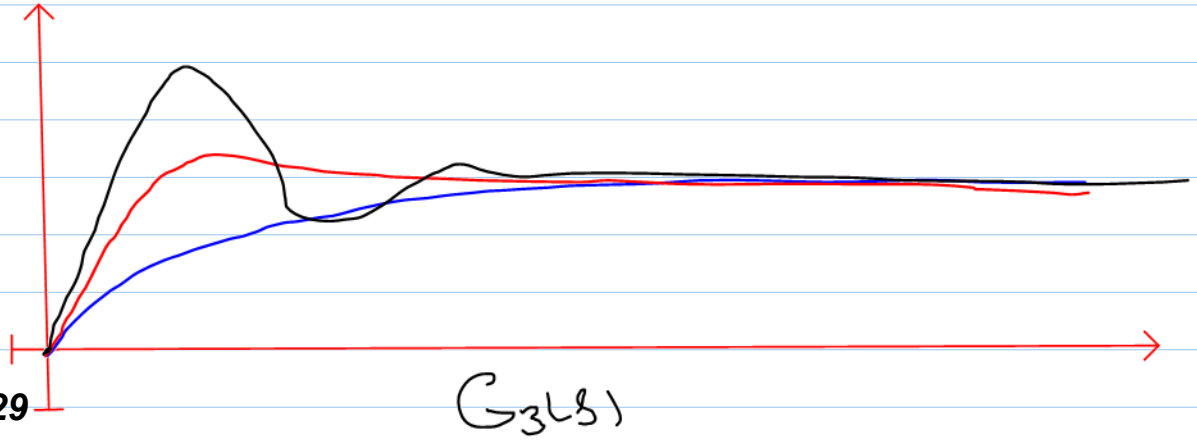


تأثیر دو تا صفر خیلی شدیدتر است.



اثر یک صفر

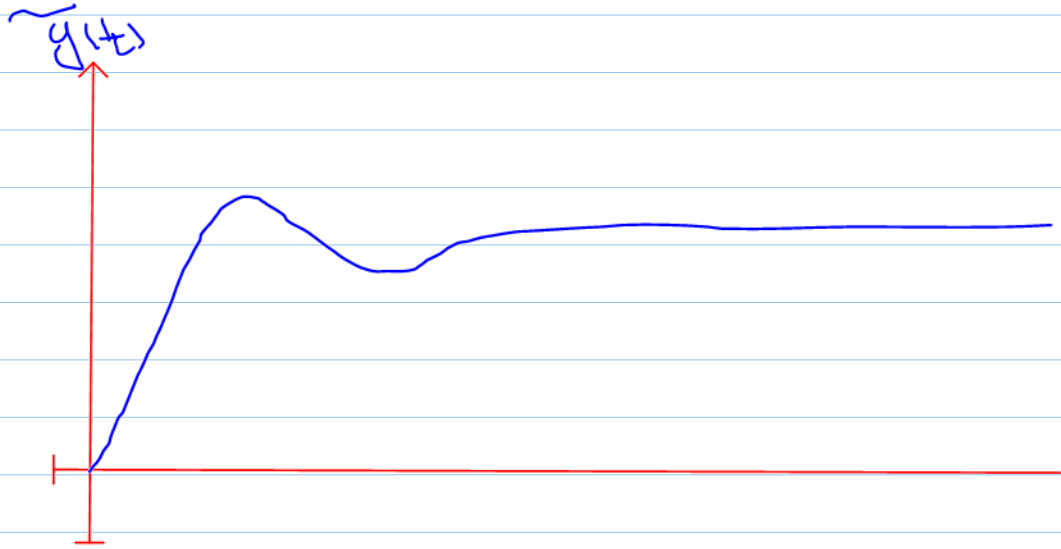
اثر دو تا صفر



بلی بررسی تاثیر اضافه شدن مثلاً 2 قطب ابتدا یک صفر اضافه می‌کنیم،
روی پاسخ بدست آمده، یک صفر دیگر اضافه می‌کنیم.

پاسخ $G(s) = \frac{s+2}{(s+10)(s^2+2s+3)}$ را رسم کنید.

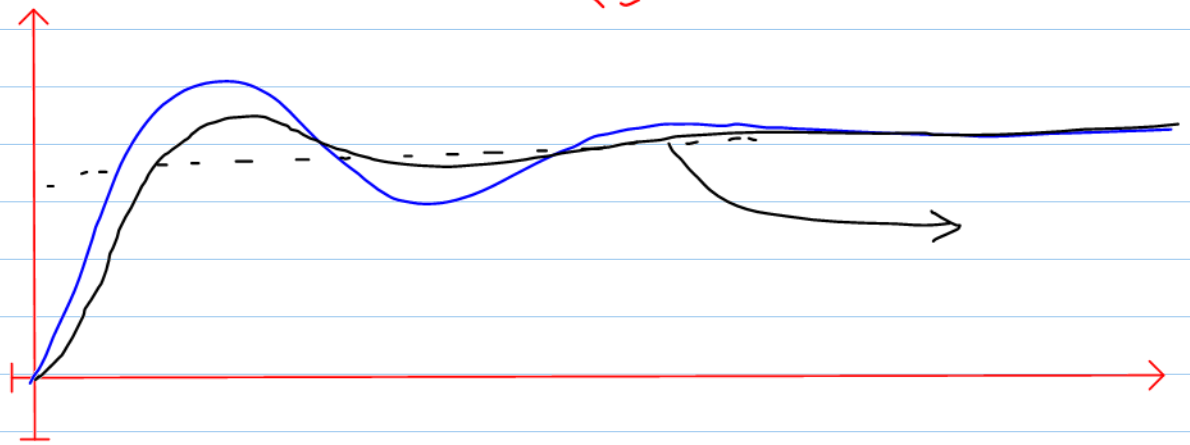
$$\bar{G}(s) = \frac{1}{(s+10)(s^2+2s+3)}$$



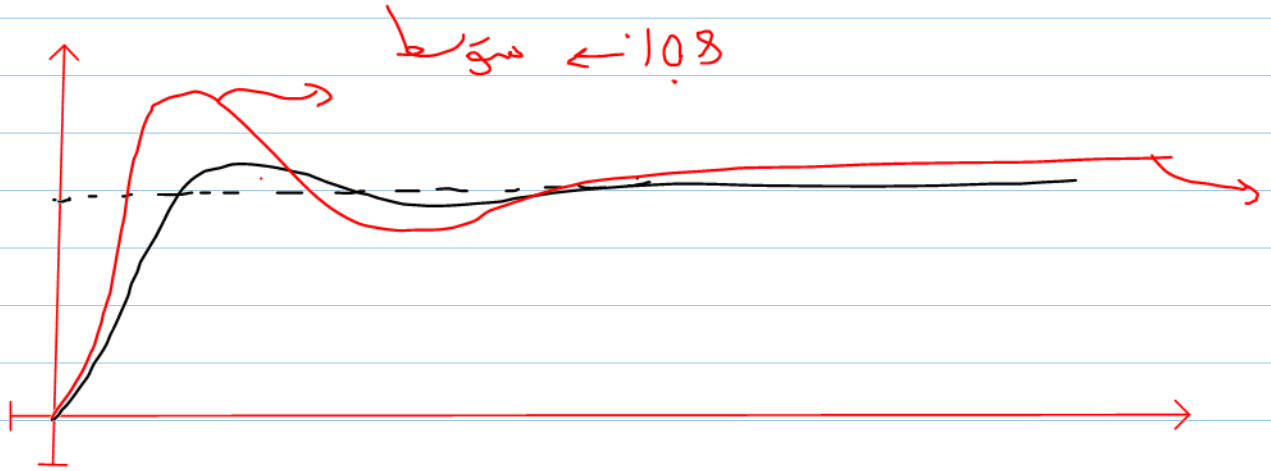
$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$$

$\tilde{G}(s)$ پاسخ

* به پاسخ $\overline{G(s)}$ ، یک قطب در $s=-10$ اضافه می کنیم.

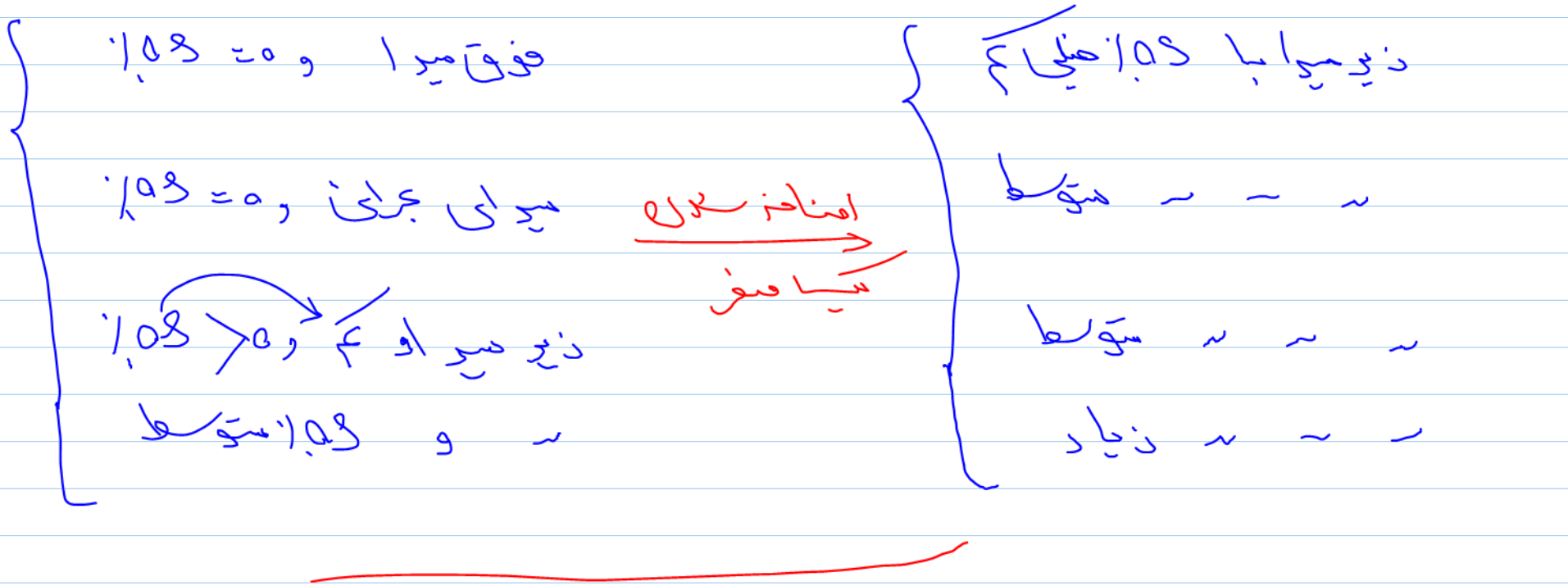


پاسخ $\overline{G(s)}$



105 ← سریع‌تر

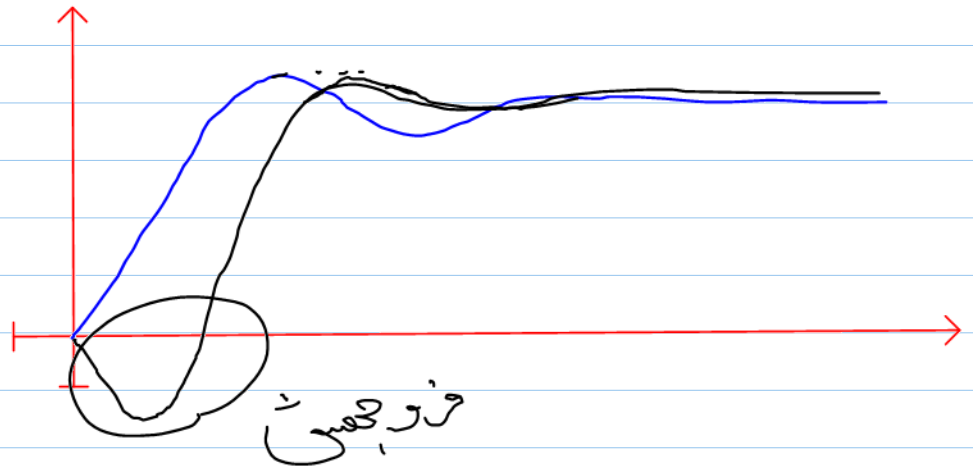
پاسخ $G(s)$



صفرصت راست ؟

اگر یک صفرصت راست به سیستم امنافه شود ، تنها باعث فزودن جهش اولیه می شود.
ولی فراجهش را زیاد می کند.

$$G(s) = \frac{1-s}{s^2+2s+3}$$



نکته:

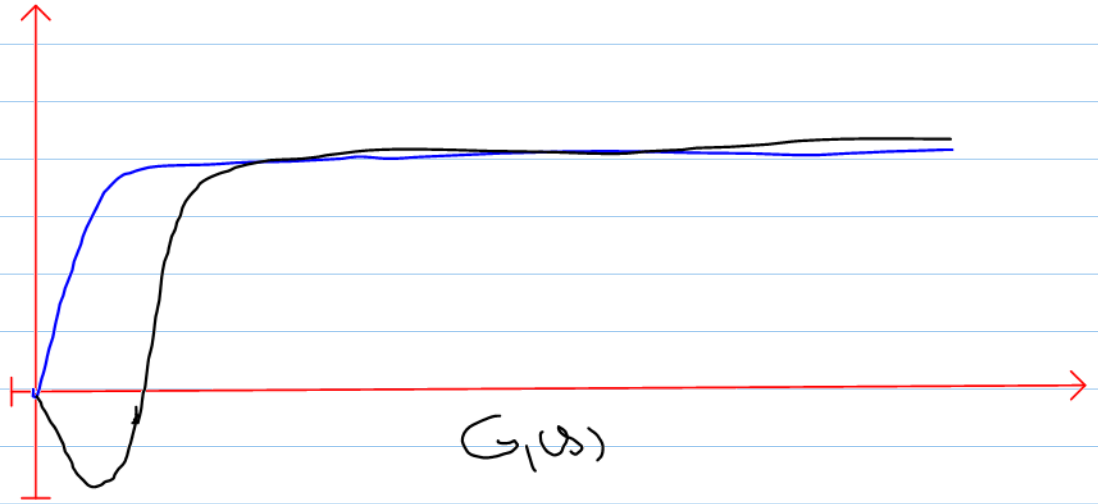
① اگر به مقدار فرد معزمت راست به سیم امانه شود باعث فروجهش اولیه می‌شود و هرچه مقدار معزمت راست بیشتر باشد فروجهش بیشتر است.

② اگر مقدار معزمت راست زوج باشد معزمت چپ عمل می‌کند و فروجهش ایجاد می‌کند.

$$G_1(s) = \frac{s-2}{s^2+2s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{(s-2)(s-1)}{s^2+2s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{(s-2)(s-1)(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$







نکته: در سوالاتی که از روی پاسخ باید تابع تبدیل را استخراج کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

① اگر در پاسخ یک قله (فقط یک قله) با 95٪ متوسط دیدیم ← پاسخ میرای بحرانی با یک مزدوج

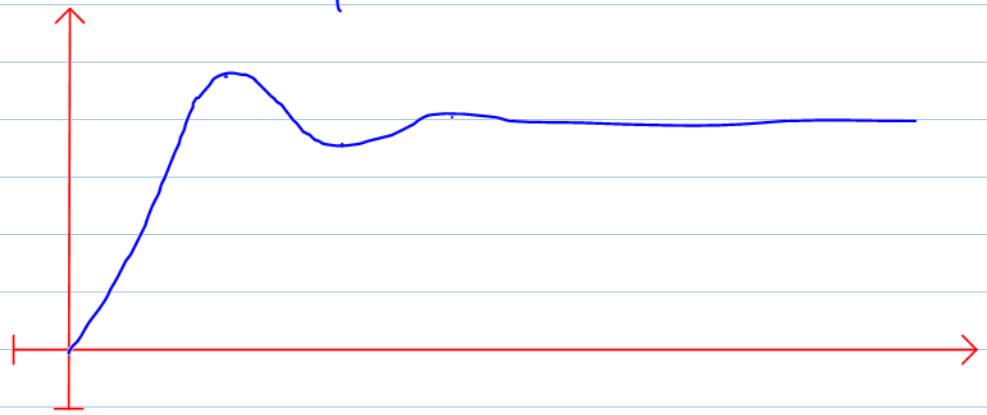
② " " " " " " " " " " " " " " میرا " "

③ اگر در پاسخ 95٪ خیلی زیاد دیدیم که مقدار y همواری ندارد ← زیرمیرا با صفر مزدوج

④ " " 100٪ > 95٪ ← زیرمیرا با صفر مزدوج



$$\%OS = \frac{1.1 - 1}{1} \times 100 = 10\%$$ گزینه ۴



1) $G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+3}$ → $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ زیرمیرا

2) $G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$

3) $G(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+4}$ → $\xi = 1$ میرای بحرانی

4) $G(s) = \frac{s-1}{s^2+4s+4}$

مکانیک ۷۸ . پاسخ سیستمی با تابع تبدیل $G_1(s)=\frac{1}{s^2+1/2s+1}$ به ورودی پله واحد دارای فراجهش ۱۵٪ و زمان نشست تقریبی ۶ ثانیه با معیار ۲٪ است.

در این صورت پاسخ سیستم $G_2(s)=\frac{2s+1}{s^2+1/2s+1}$ ؟

۱) $\%OS<10\%$ و $t_s<6$ ۲) $\%OS>10\%$ و $t_s>6$

۳) $\%OS>10\%$ و $t_s<6$ ۴) $\%OS<10\%$ و $t_s=6$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+1.2s+1}$$

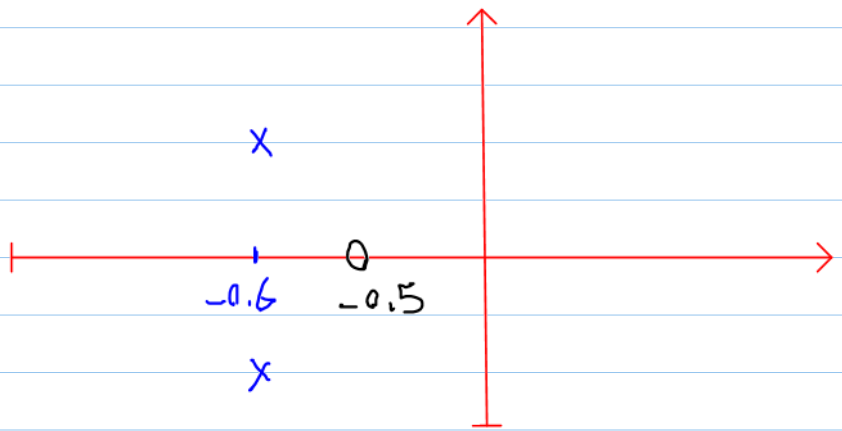
$\%OS = 10\%$ ، $t_s = 6s$

$$G_2(s) = \frac{2s+1}{s^2+1.2s+1}$$

$\%OS > 10\%$ ، $t_s > 6s$

صفر باعث زیاد شدن $\%OS$ و t_s می‌شود.

هر چقدر صفر به محور $j\omega$ نزدیک‌تر باشد تأثیر بیشتر است



پاسخ سیستمی با $G(s) = \frac{۲ - s}{s(۲+ s)}$ و $H(s) = ۱$ به ورودی پله واحد کدام است؟

۱)



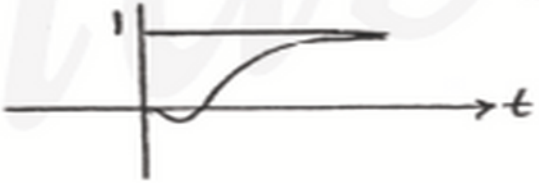
۲)

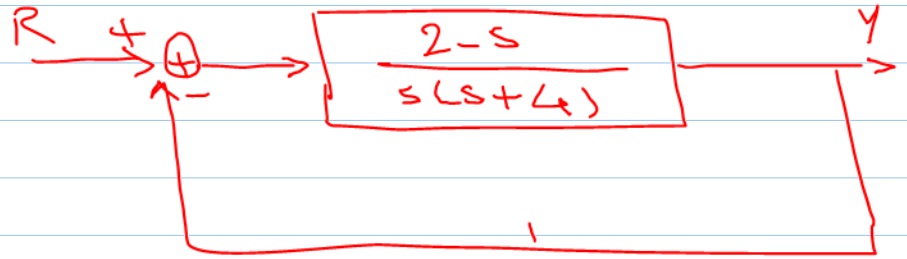


۳)



۴)



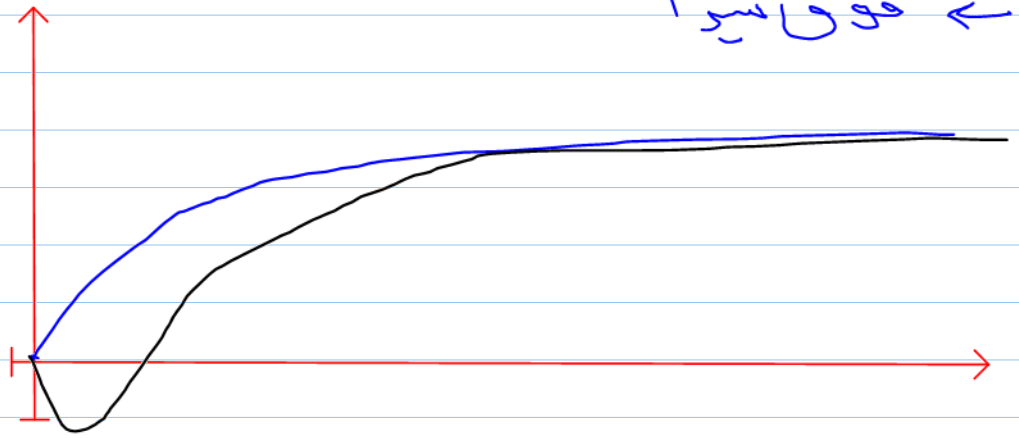


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2-s}{s(s+4)+2-s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2-s}{s^2+3s+2}$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$ اول: پاسخ بدون صفر.

$T(s)$ دو قطب حقیقی منفی غیر تکراری ← فوق سیر ا



پاسخ بدون صفر

ـ با صفر

۸۹ مدرج

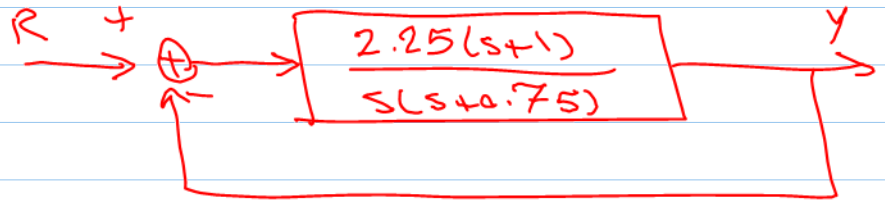
۸۹- در یک سیستم کنترل با فیدبک واحد منفی، $G(s) = \frac{۲/۲۵(s+۱)}{s(s+۰/۷۵)}$ است. کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) بعلت صفر $s = -۱$ در $G(s)$ درصد فروجهش آن کم ولی غیر صفر است.

۲) بعلت صفر $s = -۱$ در $G(s)$ فراجهش درصد قابل توجهی دارد.

۳) درصد فراجهش صفر است

۴) درصد فراجهش ناچیز ولی غیر صفر است



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2.25(s+1)}{s^2+3s+2.25}$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2+3s+2.25}$$

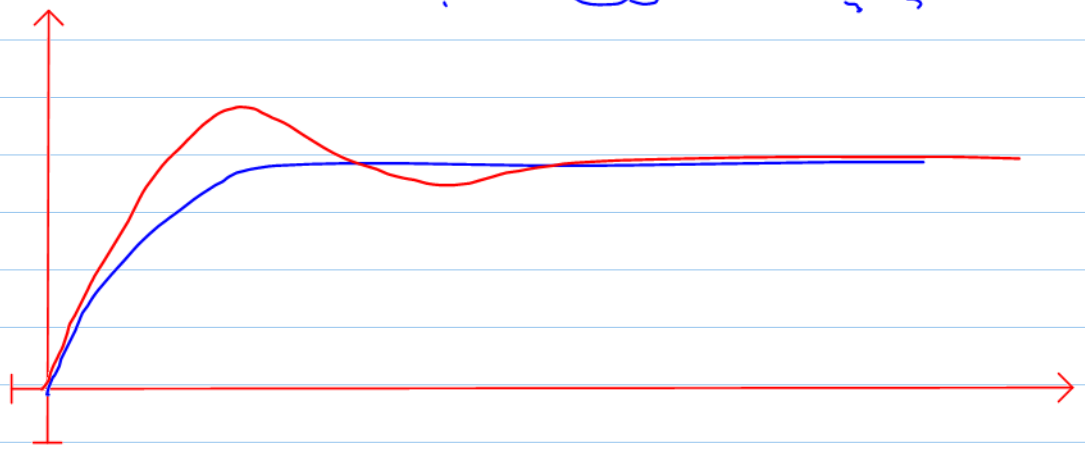
$3 = 2\xi\omega_n$, $2.25 = \omega_n^2$

پاسخ پله‌ی واحد ←

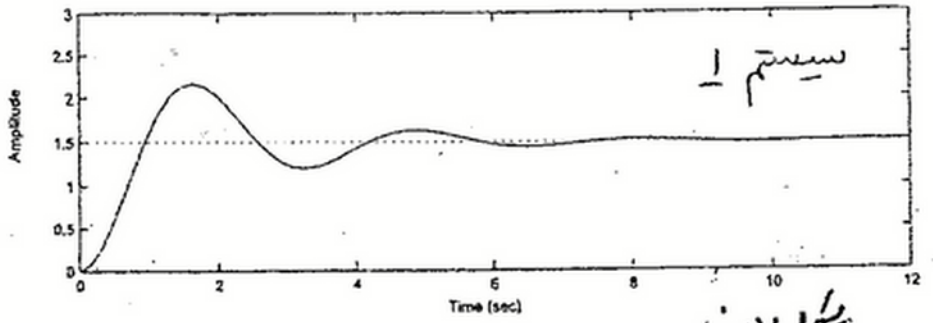
$\omega_n = 1.5$, $2\xi \times 1.5 = 3$ ⟶ $\xi = 1$ ⟶ میرای بحرانی

↓ افزایش کردن ω_n

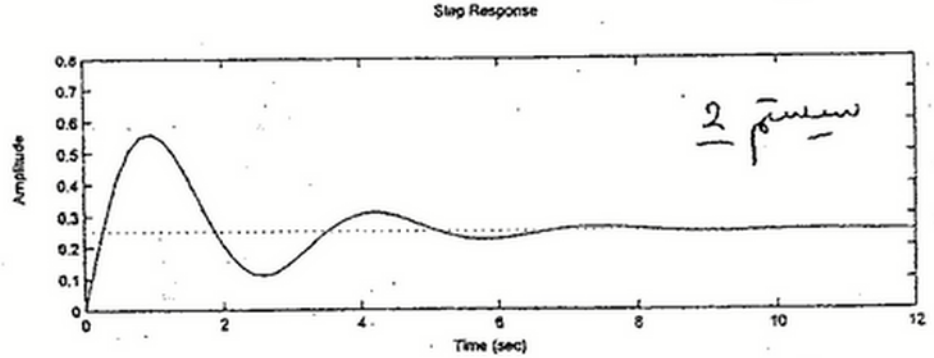
کمی سریع‌تر برای بحرانی با کمی سرعت بیشتر ← دارای ۵٪ متوسط



پاسخ پلّه دو سیستم مرتبه دوم با میرایی و فرکانس طبیعی یکسان در شکل‌های (الف) و (ب) زیر نشان داده شده است. اگر بدانیم پاسخ ضربه‌ی سیستم $G_2(s)$ در لحظه‌ی 0^+ برابر با ۱ بوده $(g_2(0^+)=1)$ و $G_1(s)$ دارای صفری نمی‌باشد، تابع تبدیل دو سیستم کدامند؟



شکل (الف)



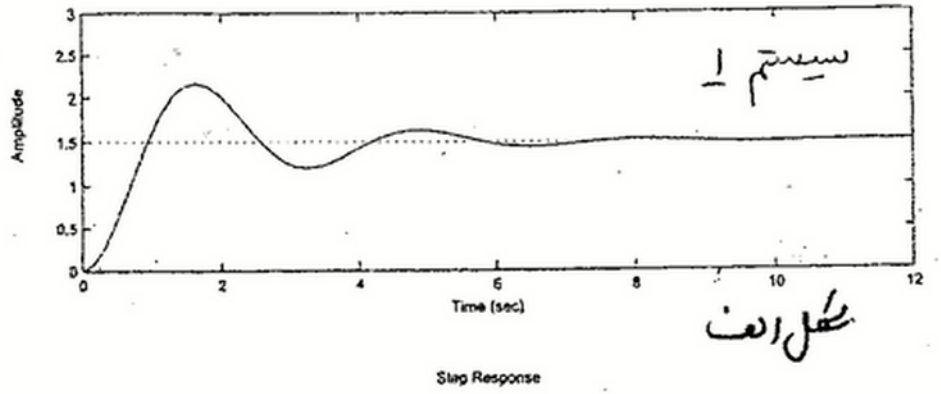
شکل (ب)

۱) $G_1(s)=\frac{۶}{s^۲+s+۴}$, $G_2(s)=\frac{(s+۱)^۲}{s^۲+s+۴}$

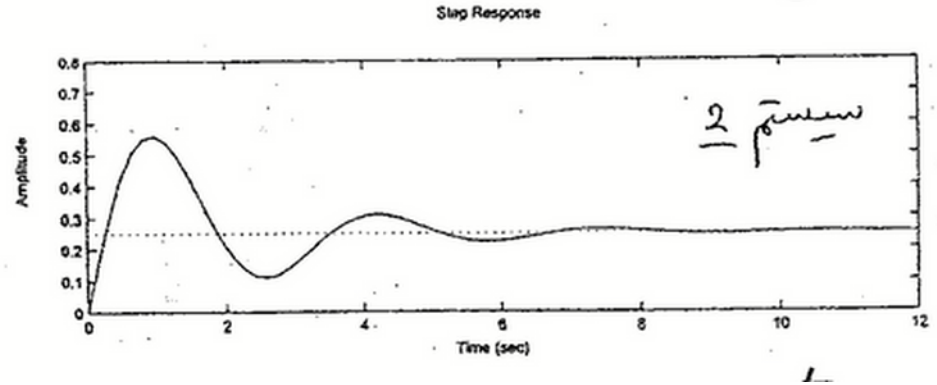
۲) $G_1(s)=\frac{۱۲}{s^۲+۰/۱s+۸}$, $G_2(s)=\frac{۲(s+۱)^۲}{s^۲+۰/۱s+۸}$

۳) $G_1(s)=\frac{۶}{s^۲+s+۴}$, $G_2(s)=\frac{s+۱}{s^۲+s+۴}$

۴) $G_1(s)=\frac{۶}{s^۲+s+۴}$, $G_2(s)=\frac{۰/۱s+۱}{s^۲+s+۴}$



شکل الف



پاسخ پله واحد G_2 در لحظه $t = 0^+$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_2(s) \qquad R(s) = 1$$

$$Y(s) = 1 \times G_2(s) \rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_2(s)\}$$

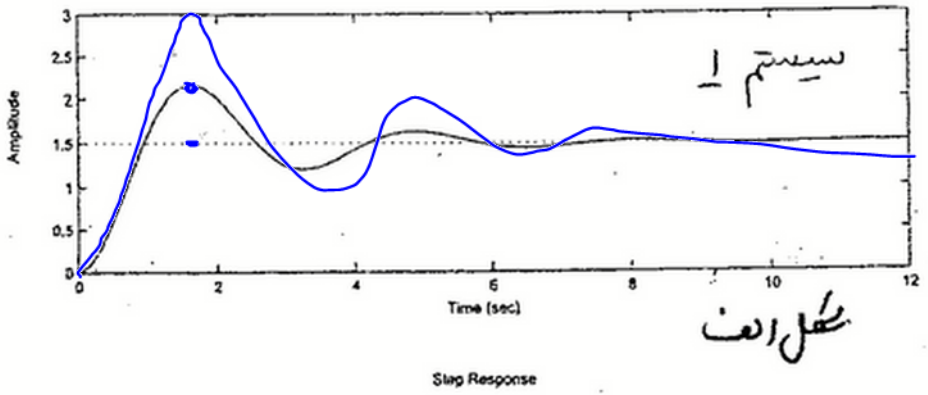
$$y(0^+) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = \lim_{s \to \infty} sG_2(s) = 1$$

X 1) $\lim_{s\to\infty} s\,\frac{(s+1)^2}{s^2+s+4} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3+2s^2+s}{s^2+s+4} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{s^2} = \infty$

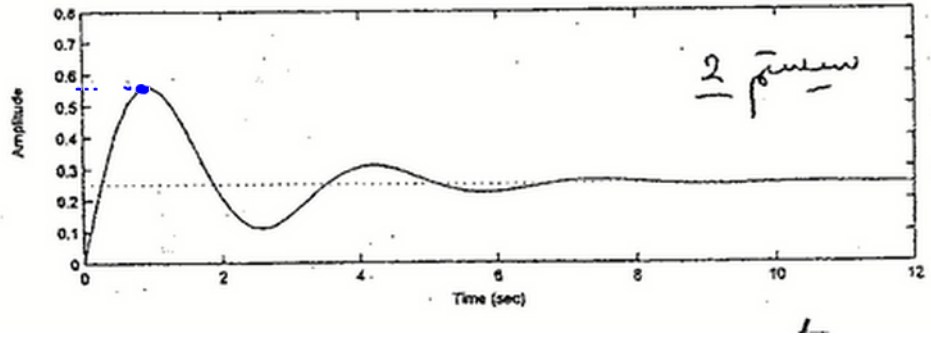
X 2) $\lim_{s\to\infty} s\,\frac{2(s+1)^2}{s^2+0.1s+8} = \infty$

3) $\lim_{s\to\infty} s\,\frac{s+1}{s^2+s+4} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+s}{s^2+s+4} = 1$ ✓

X 4) $\lim_{s\to\infty} s\,\frac{0.1s+1}{s^2+s+4} = \lim_{s\to\infty} \frac{0.1s^2}{s^2} = 0.1$ X



شکل الف



$$G_1(s) = \frac{6}{s^2+5+6} \rightarrow \xi = \frac{1}{4}$$

$$\%OS = \frac{2-1.5}{1.5} \times 100 \simeq \%30$$

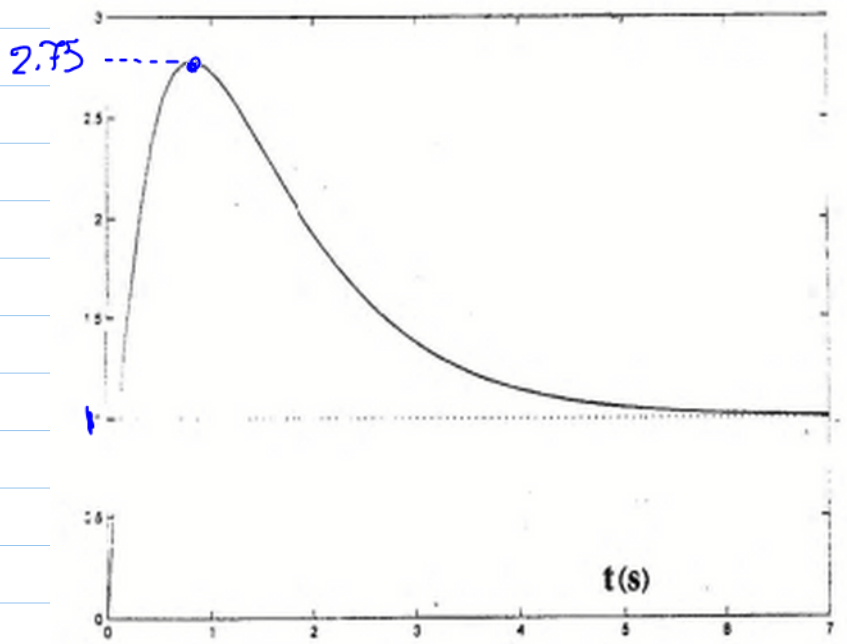
$$G_2(s) = \frac{s+1}{s^2+5+6}$$

$$\xi = \frac{1}{4}$$

$$\%OS = \frac{0.5-0.25}{0.25} \times 100 = 100\%$$

مرور ۹۱

شکل زیر پاسخ پله کدام تابع تبدیل است؟



۱) $G(s)=\frac{۲(۱+۵s)}{(s+۱)(s+۲)}$

۲) $G(s)=\frac{۲(۱+۵s)(۱+۰/۱s)}{s^۲+۱/۴s+۲}$

۳) $G(s)=\frac{۲(۱+۵s)(۱+۰/۱s)}{(s+۱)(s+۲)}$

۴) $G(s)=\frac{۲(۱+۵s)}{s^۲+۱/۴s+۲}$

Kam

$\%OS = \frac{2.75 - 1}{1} \times 100 = 175\%$

تأثیر صفر ←

$\%OS$ بسیار زیاد ← کمی سریع‌تر با اضافه شدن صفر سمت چپ

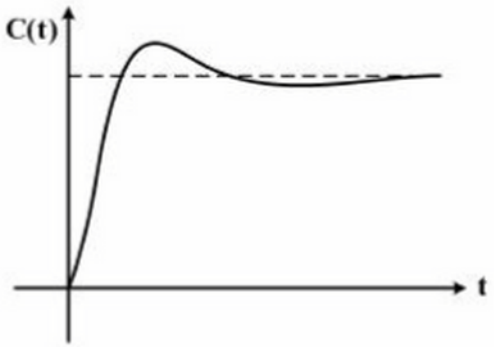
$\Delta(s) = s^2 + 1.4s + 2 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{2}$, $\zeta = \frac{1}{2} \rightarrow \%OS$ متوسط

$\%OS$ متوسط ← صفر ← $\%OS$ خیلی زیاد ✓

$\%OS$ متوسط ← 2 تا صفر ← $\%OS$ خیلی خیلی زیاد ✗

دکتری ۹۶

تابع تبدیل سیستمی با پاسخ پلّهٔ زیر کدام است؟



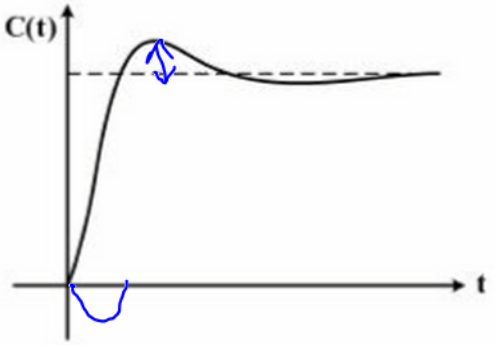
۱) $G(s)=\frac{(s+\gamma)}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$, $\alpha,\beta,\gamma>0$

۲) $G(s)=\frac{(1-s)(s+\gamma)}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$, $\alpha,\beta,\gamma>0$

۳) $G(s)=\frac{(s+1)(s+\gamma)}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$, $\alpha,\beta,\gamma>0$

۴) $G(s)=\frac{(s+1)(s+\gamma)}{(s+10)(s^2+0/5s+1)}$, $\gamma>0$

2) امروز صبت رات ۷ باشت ۱۰۸



تابع تبدیل سیستمی با پاسخ پلّهٔ زیر کدام است؟

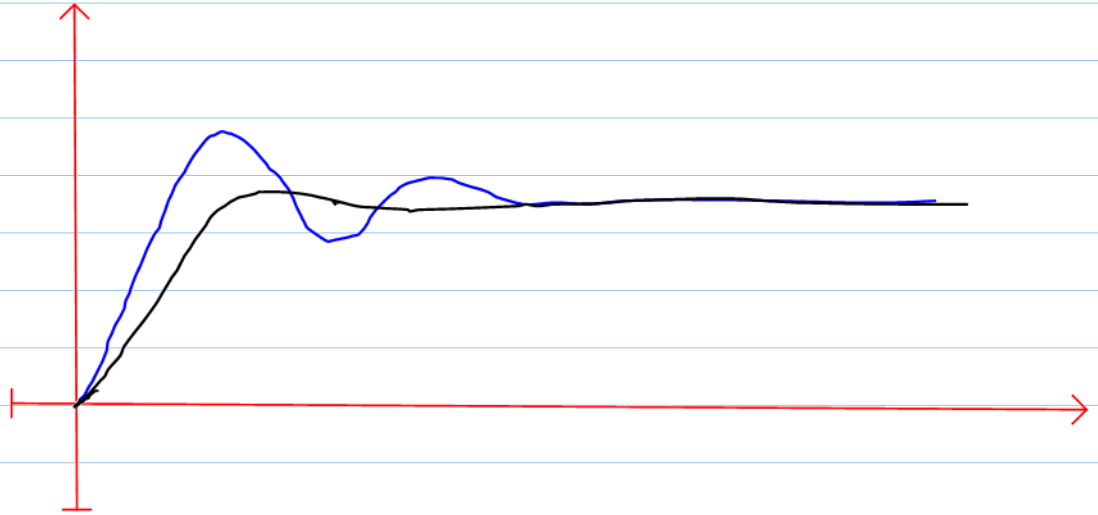
۱) $G(s)=\frac{(s+\gamma)}{(s+۱۰)(s+\alpha)(s+\beta)}$ ، $\alpha,\beta,\gamma>۰$

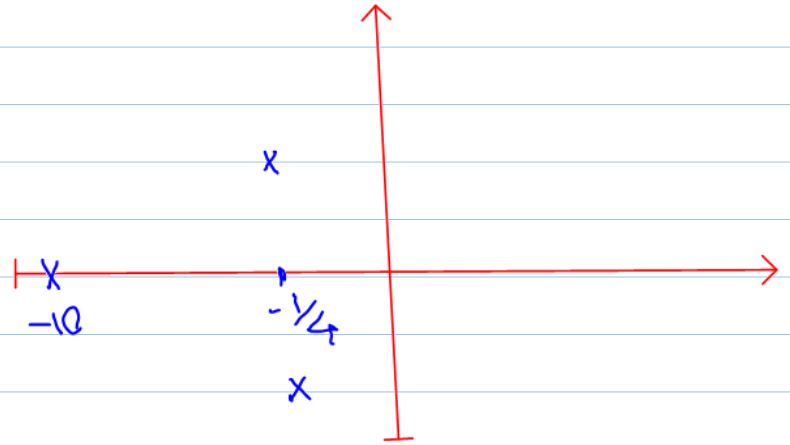
۲) $G(s)=\frac{(۱-s)(s+\gamma)}{(s+۱۰)(s+\alpha)(s+\beta)}$ ، $\alpha,\beta,\gamma>۰$

۳) $G(s)=\frac{(s+۱)(s+\gamma)}{(s+۱۰)(s+\alpha)(s+\beta)}$ ، $\alpha,\beta,\gamma>۰$

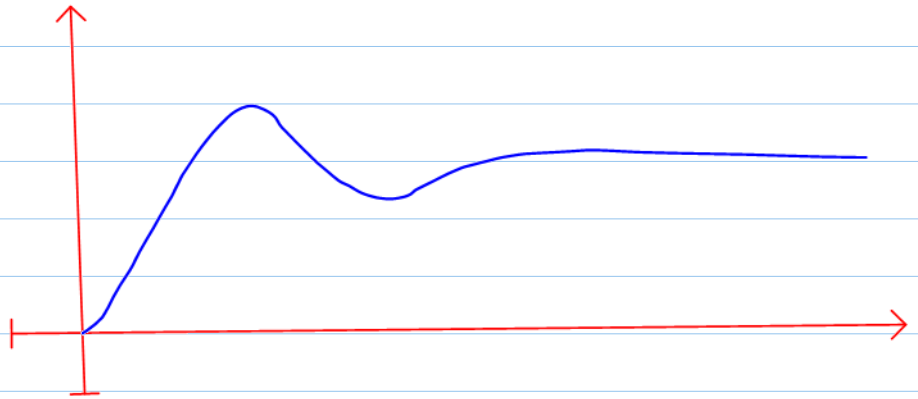
۴) $G(s)=\frac{(s+۱)(s+\gamma)}{(s+۱۰)(s^۲+۰/۵s+۱)}$ ، $\gamma>۰$

4) $G(s)=\frac{(s+1)(s+\gamma)}{(s+10)(s^2+\frac{1}{2}s+1)}$

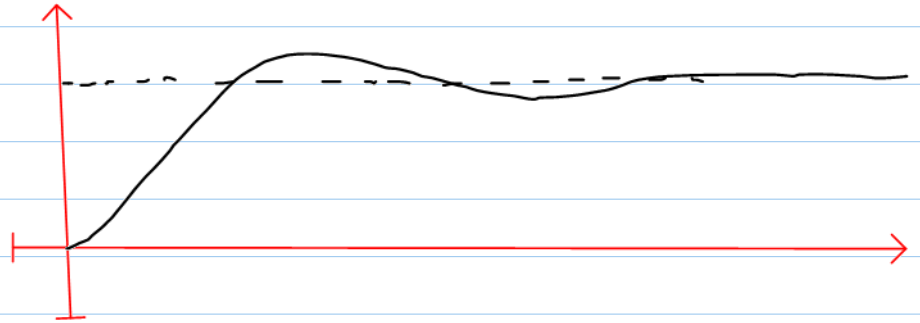




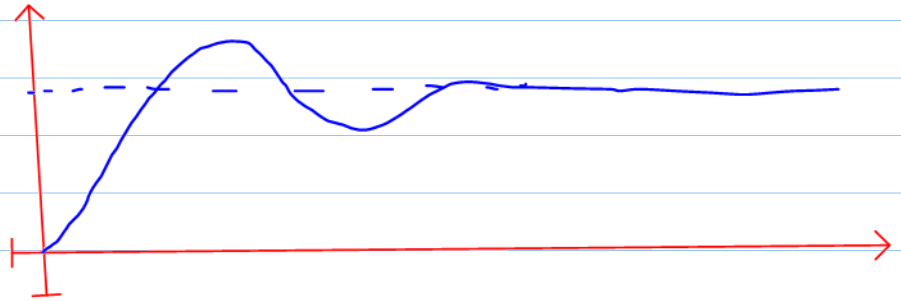
$$\bar{G}(s) = \frac{1}{(s+10)\left(s^2+\frac{1}{2}s+1\right)}$$



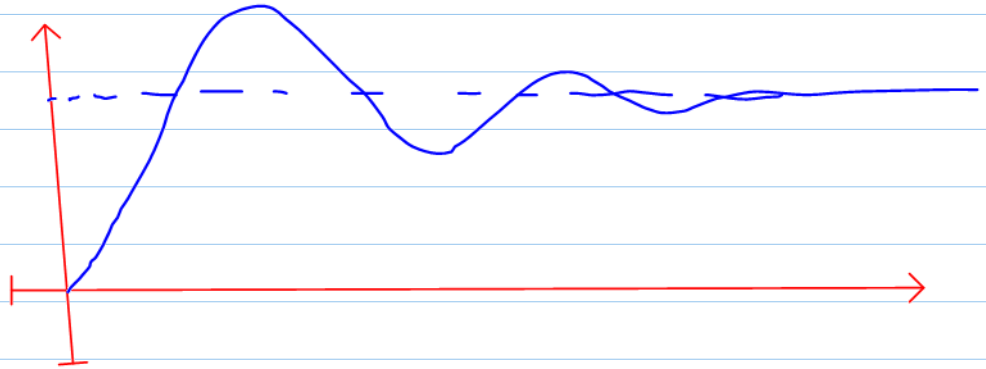
$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s^2+\frac{1}{2}s+1}$$



$$\bar{G}(s) = \frac{1}{(s+10)\left(s^2+\frac{1}{2}s+1\right)}$$



$$\hat{G}(s) = \frac{s+1}{(s+10)\left(s^2+\frac{1}{2}s+1\right)}$$



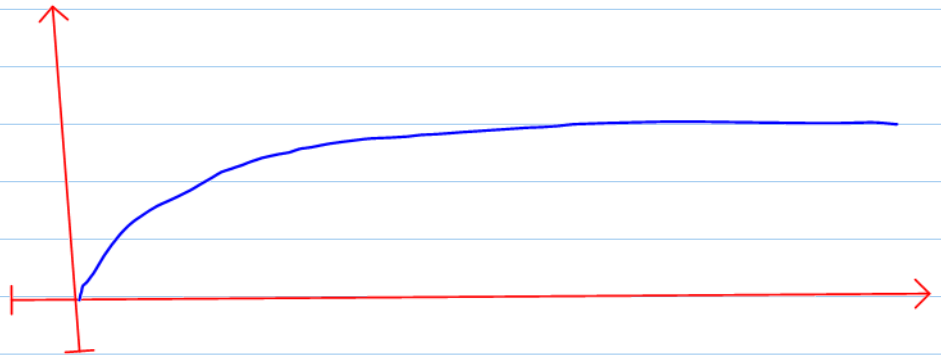
$$G(s) = \frac{(s+1)(s+y)}{(s+10)\left(s^2+\frac{1}{2}s+1\right)}$$

گزینه های سیستم زیر سوا با 95٪ زیادات .

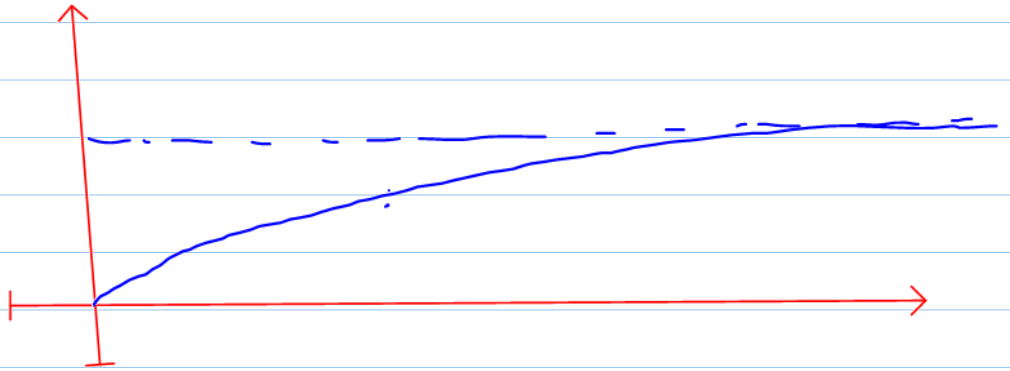
کامل گزینه 1 و 3.

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{(s+0)(s+\alpha)(s+\beta)}$$

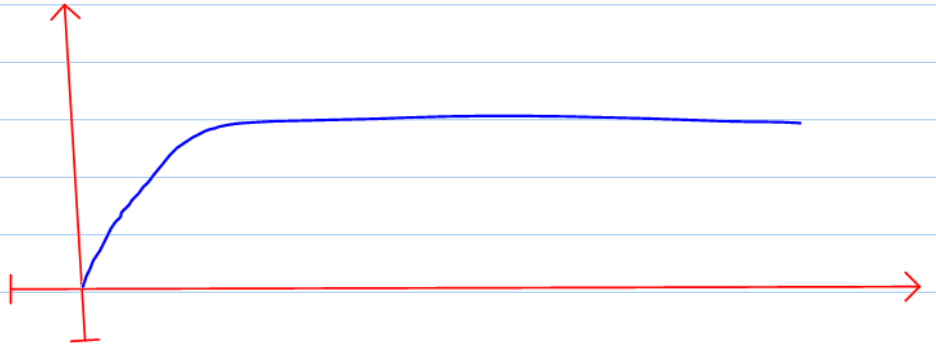
$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$



$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$$



1) $G(s) = \frac{s+7}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$



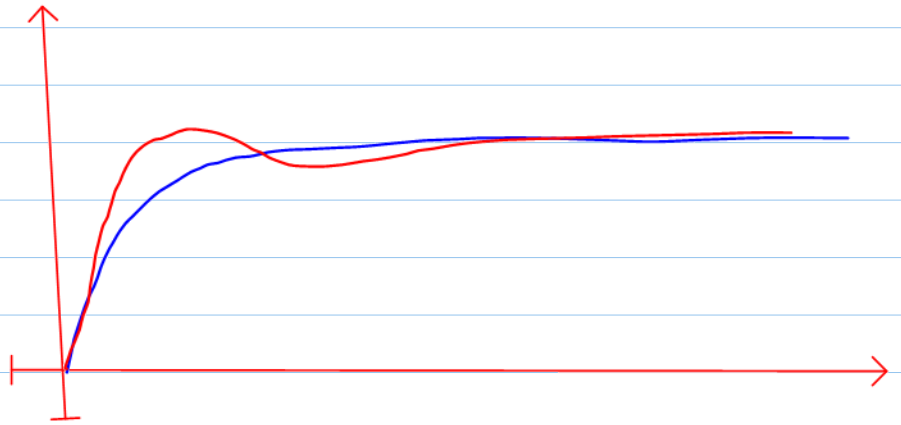
$G(s)$ یک سیستم خیلی فوق میرا

فوق میرا ← از اضافه شود → زیر میرا با ٪۵ خیلی کم

خیلی فوق میرا ← ساده شود ← $\zeta = 0.9$٪

3) $G(s) = \dfrac{(s+7)(s+1)}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$

$\hat{G}(s) = \dfrac{s+7}{(s+10)(s+\alpha)(s+\beta)}$



یک سیستم فوق میرا ← از صفر → زیر میرا با ٪۵ کم

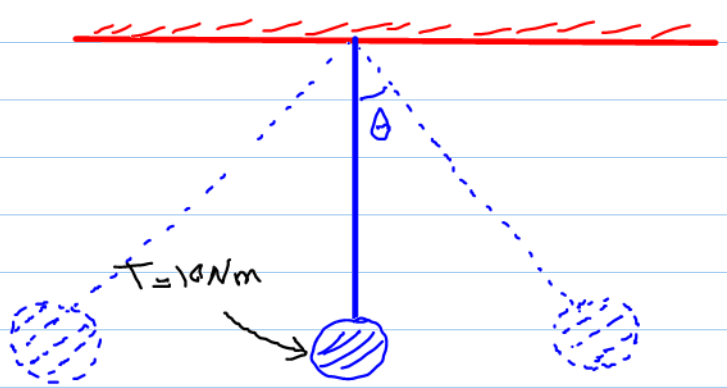
جلسه ۲۹ کنترل خطی

تحلیل حالت گذرای سیستم با فرمت فضای حالت

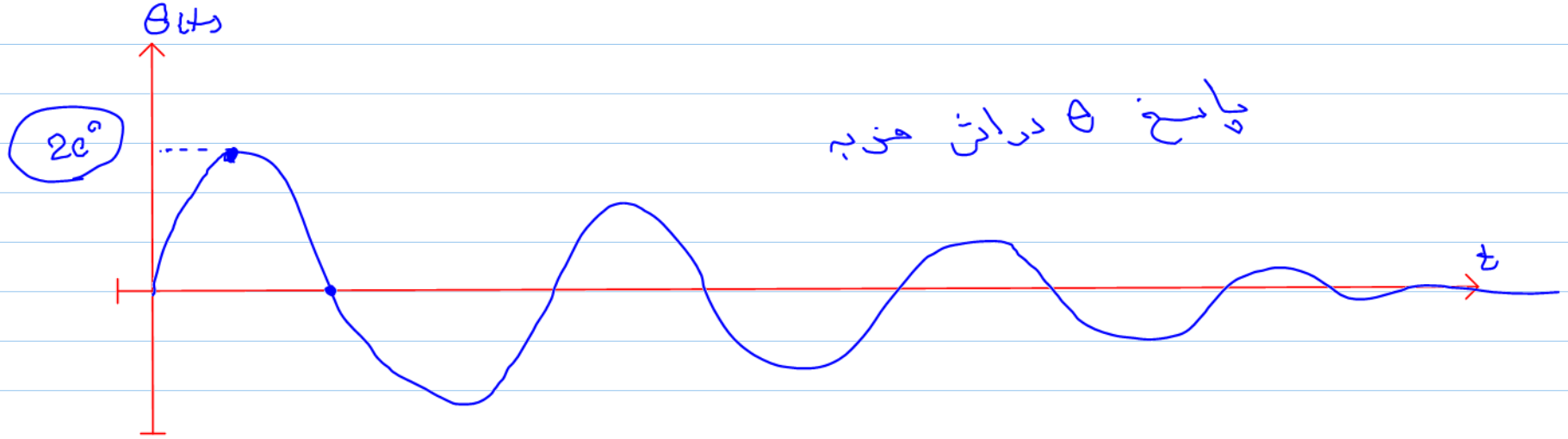
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

هدف: یافتن رفتار $y(t)$ خروجی سیستم بر حسب متغیرهای حالت

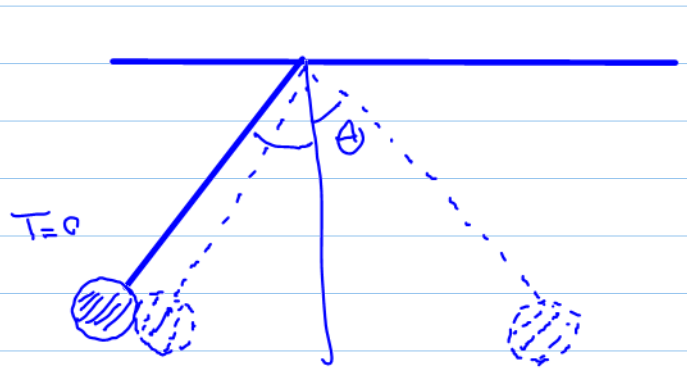
پاسخ فضای سیستم $= y(t)$

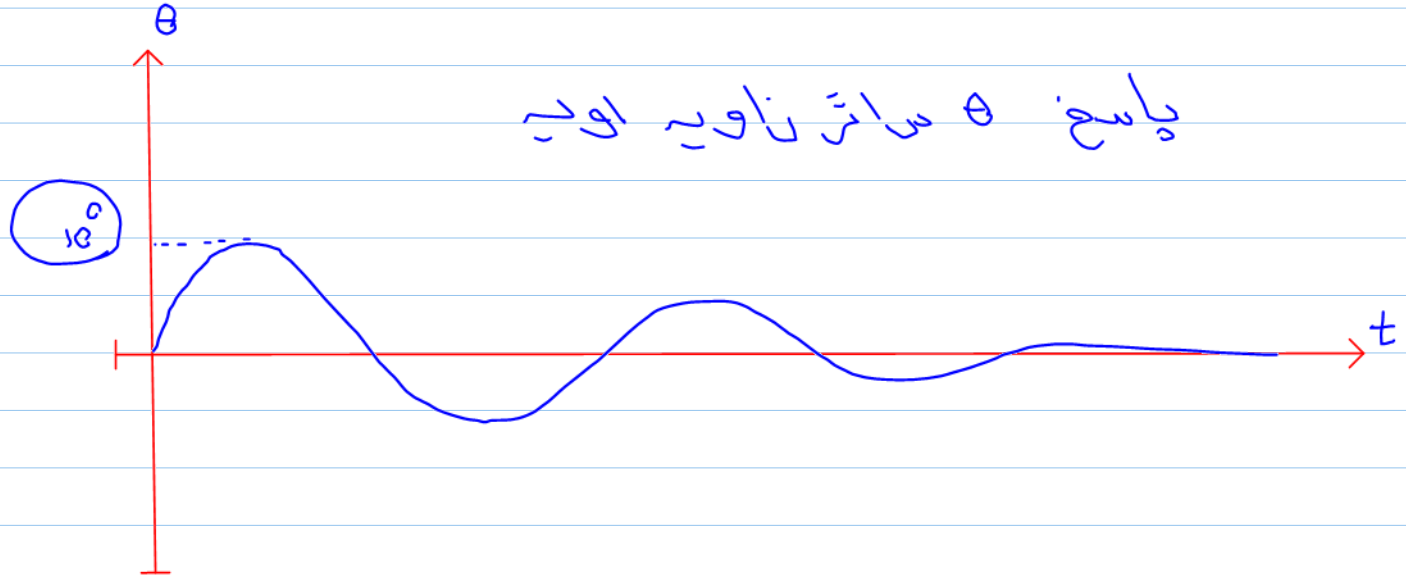


وقتی $\theta = 0$

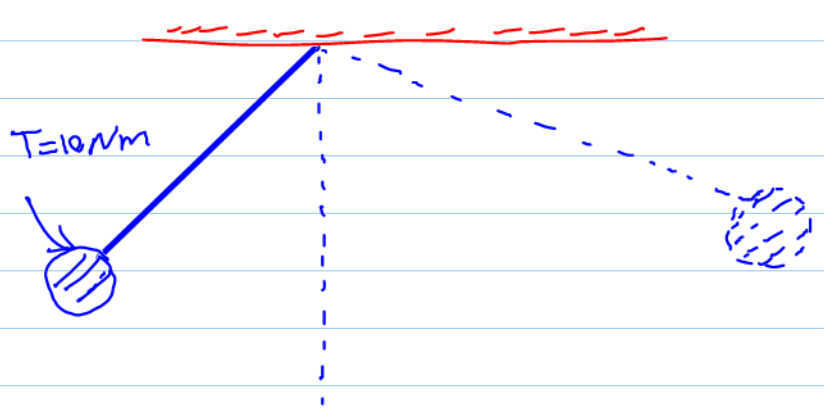


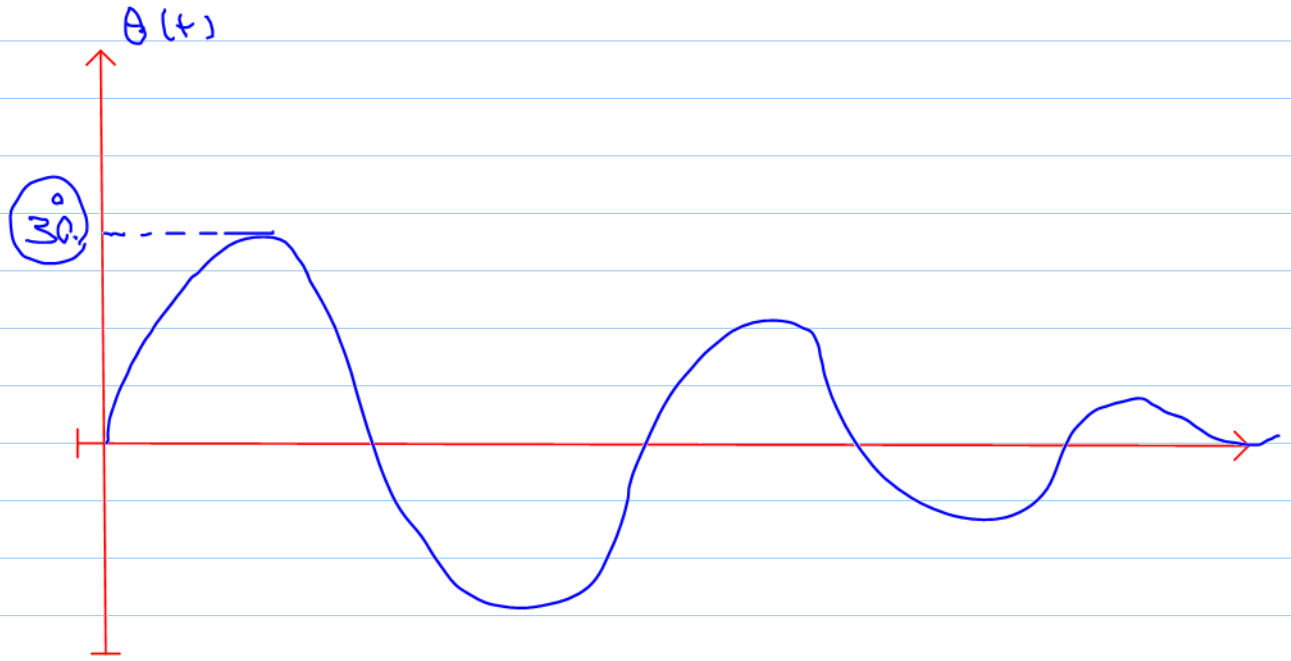
پاسخ θ در اثر مزبه





پاسخ θ ساده زاویه اولیه





$\theta(t)$ = پاسخ کل = پاسخ ناشی از ورودی خارجی + پاسخ ناشی از شرایط اولیه

θ ناشی از گشتاور T + θ ناشی از زاویه اولیه

$\theta_0 = 0$ $\quad$ $T = 0$

پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر = پاسخ

$$y(t) = y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t)$$

$$x(t) = x_{ZI}(t) + x_{ZS}(t)$$ ← $y(t) = x(t)$ چون

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$x_{ZI}(t)$ ؟ → $u = 0$ → $\dot{x}(t) = Ax(t)$ → $x_{ZI}(t) = e^{At}x(0)$

$$x_{ZI}(t) = e^{At}x(0)$$ پاسخ حالت صفر

$x_{ZS}(t)$ ؟ $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $x(0) = 0$

$$x_{ZS}(t) = \int_0^t e^{A\tau} B u(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}\,x(0)}_{x_{ZI}} + \underbrace{\int_0^t e^{A\tau}\,B\,u(t-\tau)\,d\tau}_{x_{ZS}}$$

مسئلہ ! e^{At} حاصل

$$e^{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}t} = ?$$ >>

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad e^{At} = ?$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} s - \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s-2 & 0\\ 0 & s-1\end{bmatrix}$$

$sI - A$ حل اول :

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} \Rightarrow ?$$

$$\det(sI - A) = (s-2)(s-1) - 0 = (s-2)(s-1)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

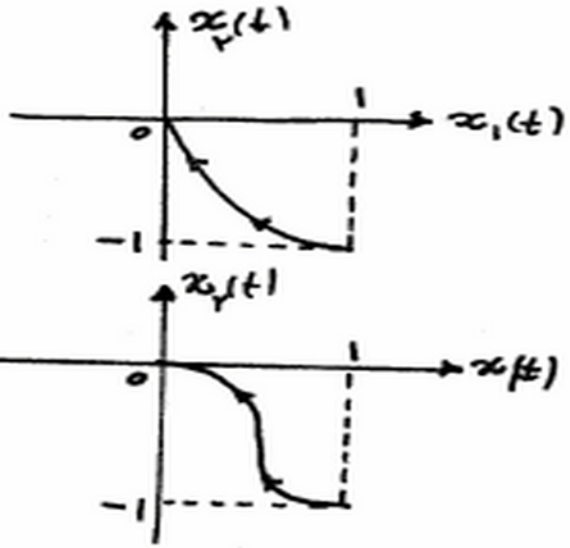
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{1t} \end{bmatrix}$$

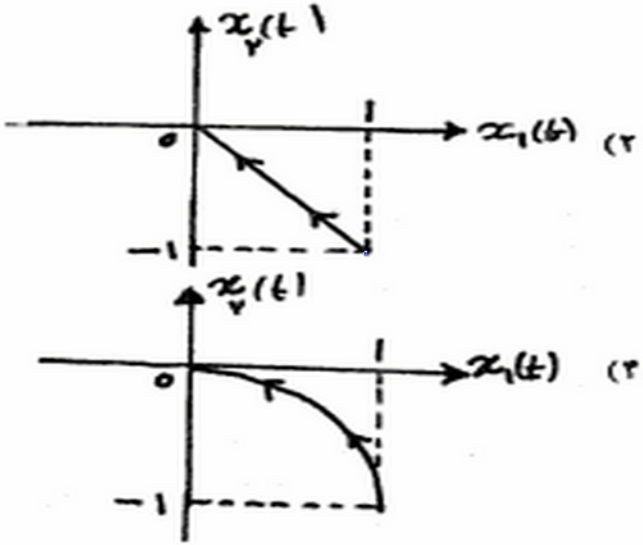
$t=1 \longrightarrow$ $$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2} & 0 \\ 0 & e^{1} \end{bmatrix}$$

در معادلهٔ حالت $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ چنانچه $u = 0$ و $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ باشد کدام شکل، نمودار $(x_1(t), x_2(t))$ را معرفی می‌کند.

۱)



۲)



۳)

۴)

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $u = 0 \rightarrow x_1(t), x_2(t) = ?$

سپس $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را برحسب چگونه بیان کنید؟

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \cancel{Bu}^{\,0}$$

$x(t)$ در اثر $x[0]$ و برابر با $x_{ZI}(t)$ می‌شود.

$$x(t)\Big|_{u=0} = x_{ZI}(t)$$

$$x_{ZI}(t) = e^{At}\, x[0]$$

$e^{At} = ?$

$$x[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

e^{At} ؟

$$sI - A = s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s(s+4) - (-1)(3) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)}\\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right)\\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3}{(s+1)(s+3)}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)(s+3)}\right)\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\right\} = ?$$

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+3)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+3}$$

$$a = \lim_{s \to -1} \frac{s+4}{\cancel{(s+1)}(s+3)} \cancel{(s+1)} = \frac{3}{2}$$

$$b = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{s+3}\right)$$

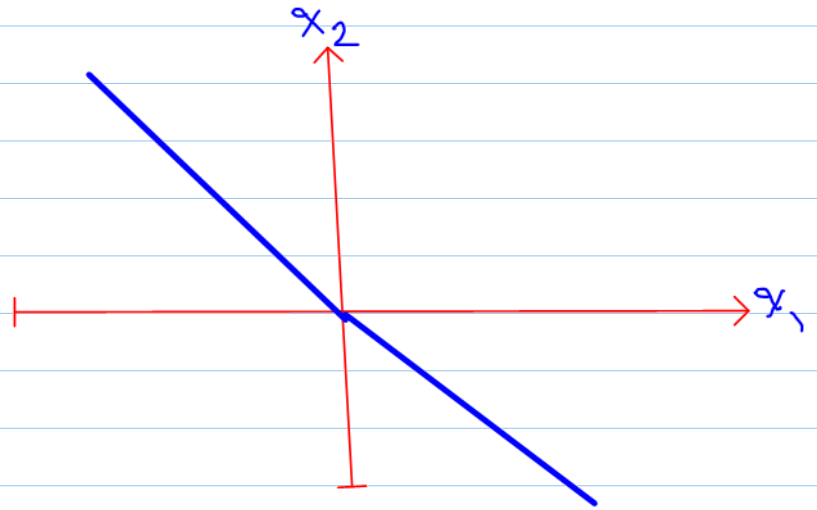
$$= \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$



$x_1(t) = e^{-t}$ $\quad x_2(t) = -e^{-t}$

$x_2(t) = -x_1(t)$

مکانیک ۹۷

سیستم خطی نامتغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax$$
$$y = Cx$$

خروجی سیستم به ازای شرایط اولیهٔ $x = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix}$ و ماتریس‌های $A = \begin{pmatrix} -\frac{۳}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۶} & -\frac{۳}{۲} \end{pmatrix}$ و $C = (۱ \quad ۰)$، کدام است؟

۱) $e^{-t} + e^{-۲t}$

۲) $e^{-t} + ۲e^{-۲t}$

۳) $e^{-t} + \frac{۳}{۲}e^{-۲t}$

۴) $\frac{۳}{۲}e^{-t} + e^{-۲t}$

اگر نمودار سیگنال در شکل زیر، به صورت $\dot{X} = AX + BU$ نوشته شود و $X = [x_۱ \; x_۲]^T$ باشد، ماتریس A

$\dot{x}(t) = A x(t)$ $\quad$ $u = 0$ $\quad$ $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = ? = x_1(t)$

$x_1(t) = ?$

$x(t) \to u=0$ و $x(0)$ از نظر $= x_{ZI}(t) = e^{At} x(0)$

$e^{At} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ مجهول

$x_{ZI}(t) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2c \end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2c \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{x_1(t) = 2a}$$

e^{At} برابر دایه $(1,1)$ ماتریس ^{2} برابر $\leftarrow x_1 \leftarrow y$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad e^{At} = ? \qquad x_{zi}(t) = e^{At} x(0)$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ +\frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s+\tfrac{3}{2})(s+\tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{4} = s^2 + 3s + 2$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & s+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(s) & g(s) \\ h(s) & k(s) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} f(s) & g(s) \\ h(s) & k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}(f(s)) & \mathcal{L}^{-1}(g(s)) \\ \mathcal{L}^{-1}(h(s)) & \mathcal{L}^{-1}(k(s)) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \\ h(t) & k(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} f(t) & g(t) \\ h(t) & k(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f(t) \\ 2h(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = 2f(t)$$

همواره در مسائل سخت کمی دقیقتر دنبال چی هستیم؟

$$F(s) = \frac{s+\frac{3}{2}}{(s+1)(s+2)} \qquad f(t) = ?$$

$$= \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

$$a = \frac{-1+\frac{3}{2}}{-1+2} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{-2+\frac{3}{2}}{-2+1} = \frac{1}{2}$$

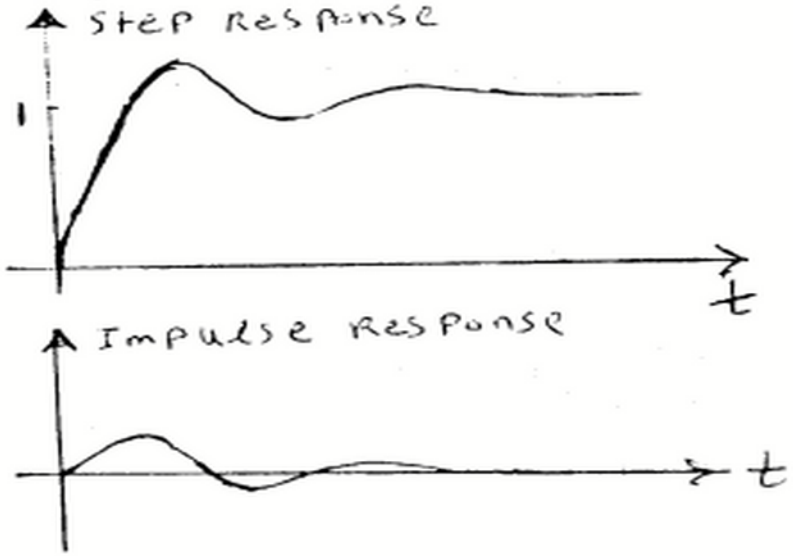
$$F(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^{-2t}$$

$y(t) = 2 f(t) = e^{-t} + e^{-2t}$ ✓

۹۵ درصد

پاسخ پله و پاسخ ضربه سیستمی در شکل مقابل نمایش داده شده‌اند. معادلات حالت سیستم کدام‌اند؟



$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

۱) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, C = [۰ \quad ۱], d = ۱$

۲) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, C = [۲ \quad ۱], d = ۰$

۳) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, C = [۰ \quad ۱], d = ۰$

۴) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}, C = [۱ \quad ۱], d = ۱$

توجه! حواره قبل از حل سوال گزینه ها را خوب مطالعه کنید.

ما از گزینه ها متوجه شدیم A و B در کدام گزینه ها یکسان است.

در واقع A و B را داده است.

کسی سیتم با معادلات $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ که $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

است دارد، پاسخ پله و هزینه آن داده شده است، C، D کدام است؟

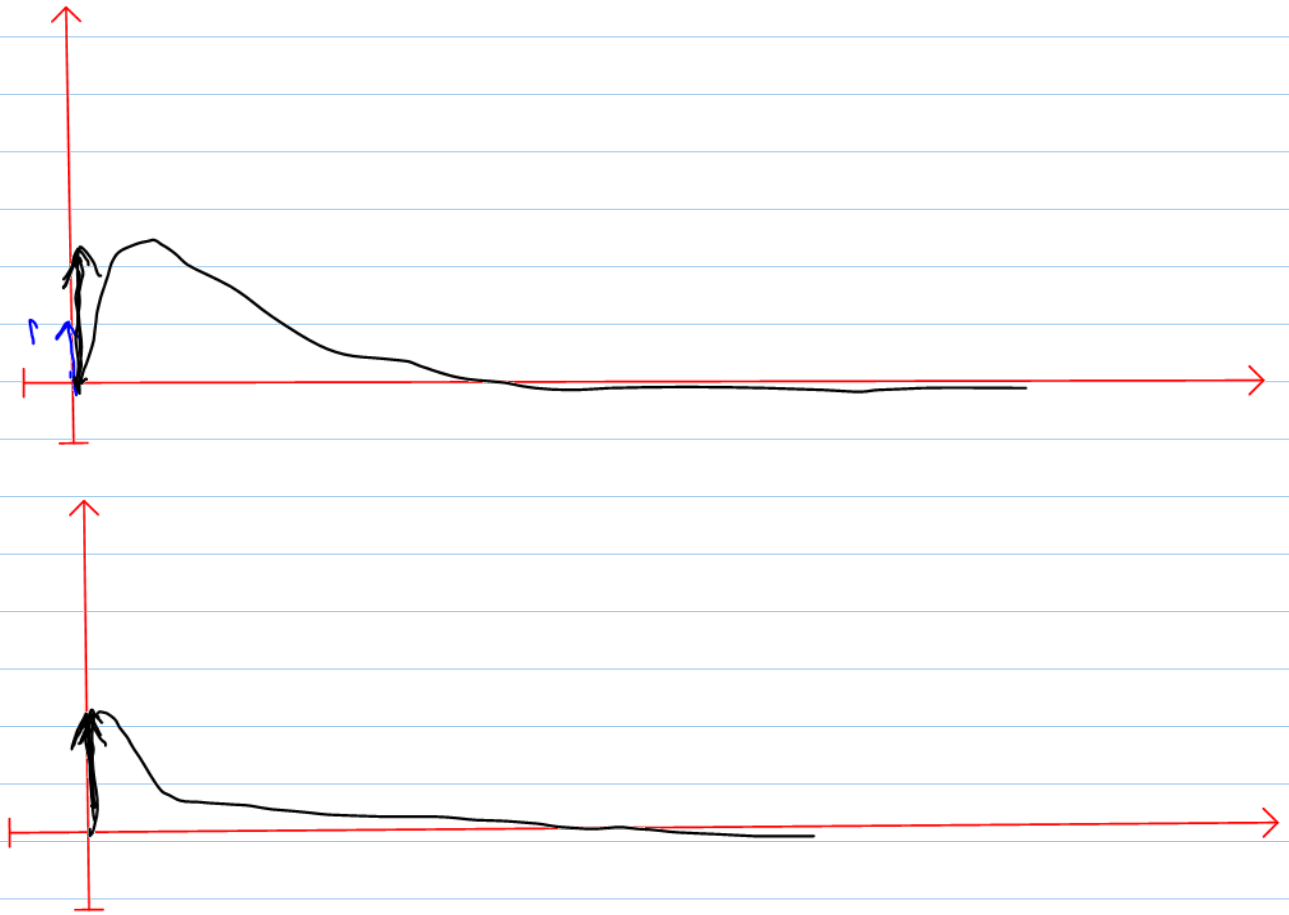
نکته: ماتریس D = اثر مستقیم ورودی روی خروجی

اگر ماتریس $D=0$ باشد ورودی را در خروجی نمی بینیم.

" " $D\neq 0$ " " " " می بینیم.

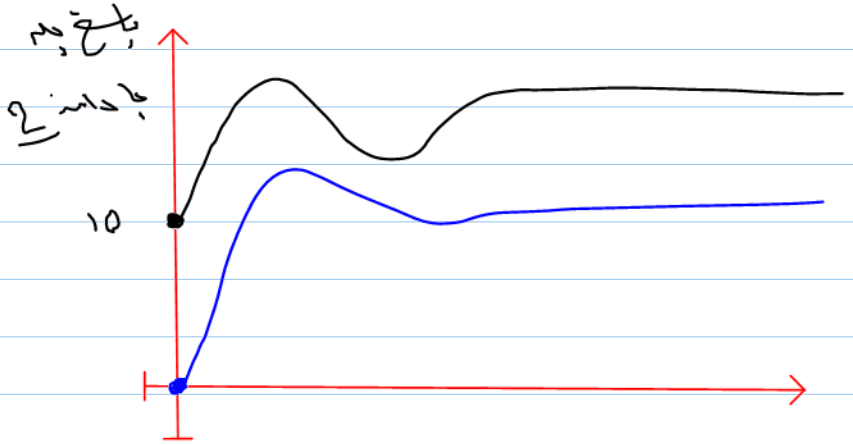
ورودی → سیستم → پاسخ

$D = 2$



اگر پاسخ پله از مقدار ۰ شروع شود یعنی $D = 0$ است.

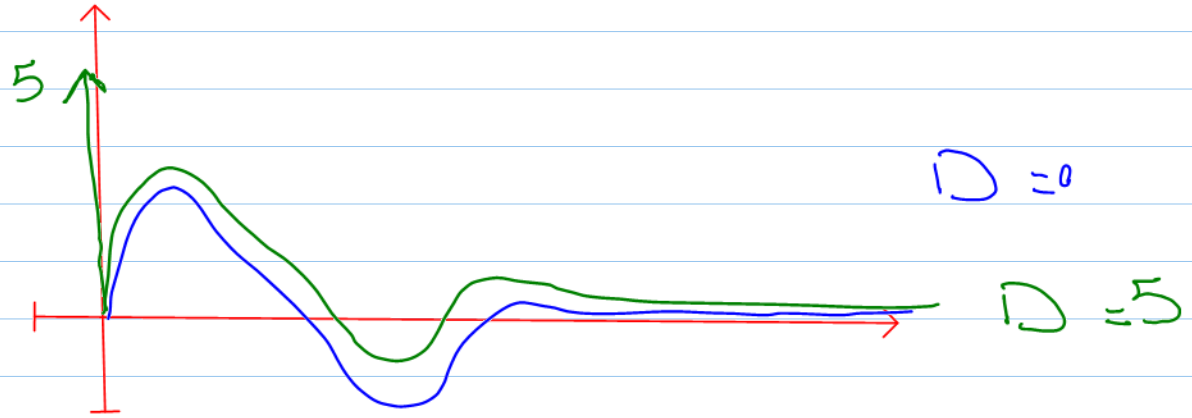
اگر پاسخ پله از مقدار a شروع شود $D = \frac{a}{\text{دامنه ورودی}}$.

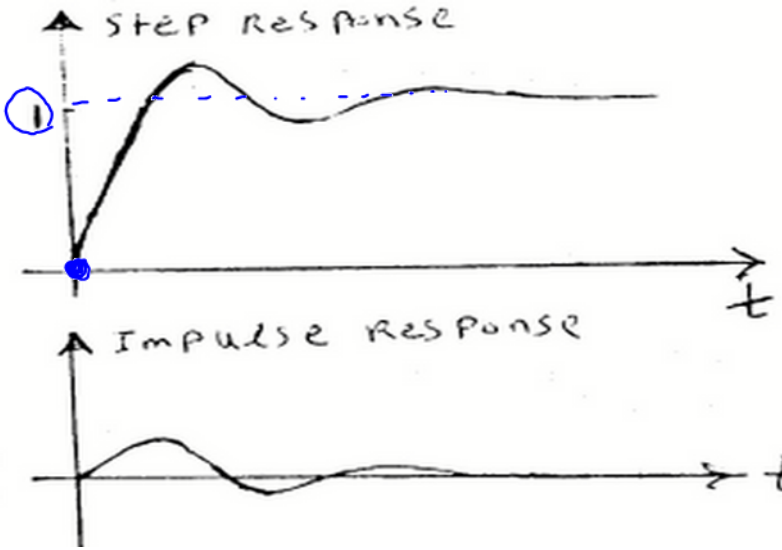


$$D = \frac{10}{2} = 5$$

اگر در پاسخ پله، خود میرایی اندازه نگرفته باشد $D = 0$ است.

" " " ، میرایی بدانه داشته باشد $D = 5$ است.





$D = 0 \rightarrow$ كسر سره ، لا يحوي

معادلة الحالة $= 1 = y(\infty)$

$G(0) = dc$ gain $= \frac{y(\infty)}{r(\infty)} = \frac{1}{1} = 1$

$$\boxed{G(0) = 1} \leftarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(0) = \overset{?}{C}(0 - \overset{\checkmark}{A})^{-1}\overset{\checkmark}{B} + \overset{0}{\cancel{D}} = 1$$

$$C(-A)^{-1}B = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(-A) = 2$$

$$(-A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C(-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{a_1}{2} = 1 \rightarrow \boxed{a_1 = 2} \qquad C = [\,\textcircled{2}\ \text{دیگی}\,]$$

$a_2 =$ معلوم نیست

آزمون فصل سوم

تحلیل پاسخ حالت گذرا

1. رفع اشکال فصل سوم
2. حل آزمون
3. رفع اشکال کل فصلها

در یک سیستم کنترل با فیدبک واحد $G(s)=\frac{K}{s(s+4)}$ است $(K>0)$. زمان قرار سیستم به ورودی پله با ۲٪ تلرانس کدام است؟

حلقه باز

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) بستگی به مقدار K دارد.

مشخصات سیستم حلقه بسته ← $\Delta(s)$

$$\Delta(s)=1+G(s)=0$$

$$\Delta(s)=1+\frac{k}{s(s+4)}=0$$

$$\Delta(s)=s(s+4)+k=0$$

$$\Delta(s)=s^2+4s+k=0$$

$$=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

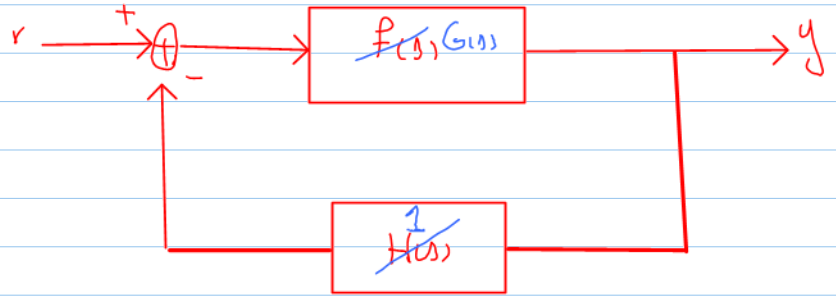
$$\begin{cases}\xi\omega_n=2\\ \omega_n^2=k\end{cases}$$

$$T_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=\frac{4}{2}=2\,sec$$

به ازای چه مقدار K فرکانس نوسانات میرای سیستم با تابع تبدیل حلقه $G(s)=\frac{K(s+1)}{(s-1)^2}$ در پاسخ به ورودی پلـه واحـد ماکزیمم می‌شود؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۹

$\omega_{d\max} = ?$



$L(s) = G(s) \times H(s)$

حلقه باز $= G(s)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K(s+1)}{s-1+K(s+1)}$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{K(s+1)}{(1+K)s+K-1} \qquad \omega_d = ? \qquad \frac{Y}{R} = \frac{K(s+1)}{s^2+(K-2)s+1+K}$$

$$\Delta(s) = s^2+(K-2)s+K+1 = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{K+1} \\ \xi = \dfrac{K-2}{2\sqrt{K+1}} \end{cases}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{K+1}\sqrt{1-\frac{(K-2)^2}{4(K+1)}}$$

$$\omega_d = \sqrt{K+1-\frac{(K-2)^2}{4}}$$

$\frac{\partial \omega_d}{\partial K} = 0 \rightarrow$ به دنبال ω_d برای K

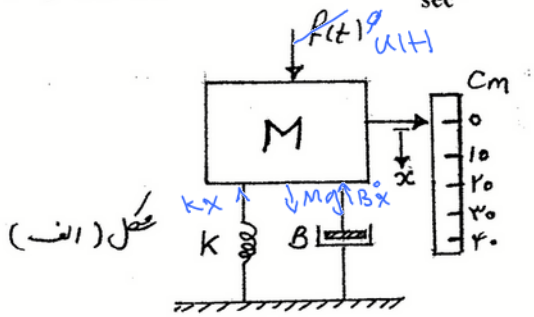
$$\omega_d = \sqrt{\frac{-K^2+8K}{4}}$$

$$\frac{\partial \omega_d}{\partial K} = \frac{1}{4}(-2K+8)\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{8K-K^2}{4}}} = 0 \rightarrow \boxed{K=4}$$

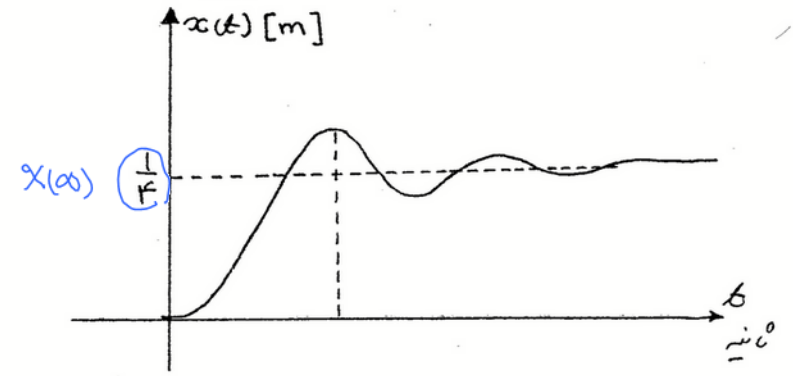
در سیستم مکانیکی شکل (الف) زیر در لحظه‌ی $t = 0$ ورودی پله واحد را بر جرم M که در حالت تعادل می‌باشد، اعمال می‌نمائیم. تغییر مکان عقربه در شکل (ب) رسم شده است. در صورتی که $M = 1\,kg$، $g = 10\frac{m}{sec^2}$ و $B = 1$ باشد، مقدار ζ برای سیستم شکل (الف) چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{k}}$
۴) $\frac{1}{2k}$

$Mg = kx + B\dot{x}$



شکل (الف)



شکل (ب)

ورودی $f(t)$ ؛ مدل‌سازی ؟ $\quad G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = ?$

خروجی $x(t)$

$M\ddot{x} = f(t) - B\dot{x} - kx \qquad M\ddot{x} + B\dot{x} + kx = f(t)$

$Ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s) \rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k}$

$G = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + s + k}$

اطلاعات مسئله: $M = B = 1$

$x(\infty) = \frac{1}{4}$

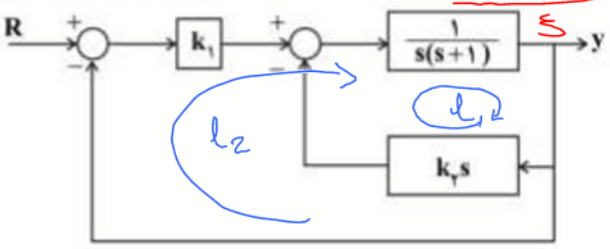
$x(\infty) = \frac{1}{4} =$ دامنه پله $\times$ بهره dc

بهره dc $= G(0) = \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \rightarrow k = 4$

$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \omega_n = 2$

$2\zeta \times 2 = 1$

۱۰۹- در سیستم کنترلی زیر، مقدار k_1 و k_2 چقدر باشد تا نسبت میرایی سیستم حلقه‌بسته برابر ۰/۵ و زمان استقرار سیستم (با معیار ۵٪) برابر ۲ ثانیه شود؟



۱) $k_1 = ۴$ و $k_2 = ۳$

۲) $k_1 = ۱۶$ و $k_2 = ۳$

۳) $k_1 = ۹$ و $k_2 = ۲$

۴) $k_1 = ۳$ و $k_2 = ۲$

$\xi = \frac{1}{2}$

$T_s = \frac{3}{\xi \omega_n} = 2 \rightarrow \xi \omega_n = \frac{3}{2} \rightarrow \omega_n = 3$

$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \\ \omega_n = 3 \end{cases}$ $\Delta(s) = s^2 + 3s + 9$ مطلوب

$l_1 = -\frac{k_2}{s+1}$ $\quad l_2 = \frac{-k_1}{s(s+1)}$

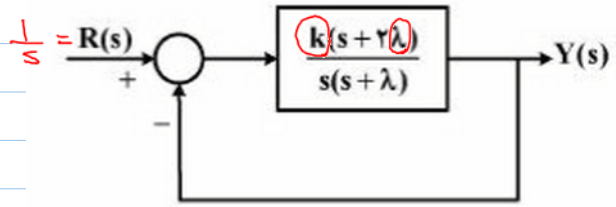
$\Delta(s) = 1 + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_1}{s(s+1)} = 0$

$\Delta(s) = s^2 + (1+k_2)s + k_1 = 0$

مطلوب $= s^2 + 3s + 9 = 0$ $\rightarrow \begin{cases} k_1 = 9 \\ k_2 = 2 \end{cases}$

$\frac{4}{5\omega_n}$

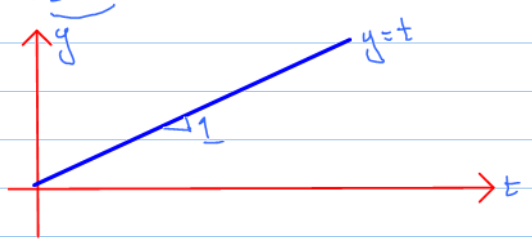
۹۲- در سیستم زیر شیب پاسخ پلهٔ واحد در $t = 0$ برابر ۲ و مقدار λ به گونه‌ای است که کمترین ضریب میرایی (ζ) حاصل می‌شود. در این صورت زمان نشست تقریبی پاسخ پلهٔ سیستم با معیار ۲٪ چند ثانیه است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) $\frac{8}{3}$

$y(t)$ = پاسخ پله واحد $\frac{dy}{dt}$ = شیب پاسخ پله واحد

$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2$ در حوزه زمان ← در حوزه فرکانس؟



$y = t$ $\frac{dy}{dt} = 1$

$x(t) \longrightarrow X(s)$

$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} \longrightarrow sY(s)$

$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{s\to\infty} s(sY(s)) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = 2$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k(s+2\lambda)}{s^2+\lambda s+ks+2k\lambda} \longrightarrow Y(s) = \frac{ks+2k\lambda}{s^3+(\lambda+k)s^2+2k\lambda s}$

$\frac{1}{s}$

$\lim_{s\to\infty} s^2 \frac{ks+2k\lambda}{s^3+(\lambda+k)s^2+2\lambda ks} = \lim_{s\to\infty} \frac{ks^3}{s^3} = k = 2 \longrightarrow k = 2$

$Y(s)$

$\frac{Y}{R} = \frac{2s+4\lambda}{s^2+(2+\lambda)s+4\lambda}$

به ازای چه مقدار λ، ζ کمینه می‌شود؟

$\Delta(s) = s^2+(2+\lambda)s+4\lambda = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$

$\omega_n = 2\sqrt{\lambda}$

$\zeta = \frac{2+\lambda}{4\sqrt{\lambda}} \longrightarrow \frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} = 0 \longrightarrow$ داخلی

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{1 \times 4\sqrt{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \times (2+\lambda)}{16\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = \frac{4\lambda - 4 - 2\lambda}{16\lambda\sqrt{\lambda}} = 0 \rightarrow \quad \lambda = 2$$

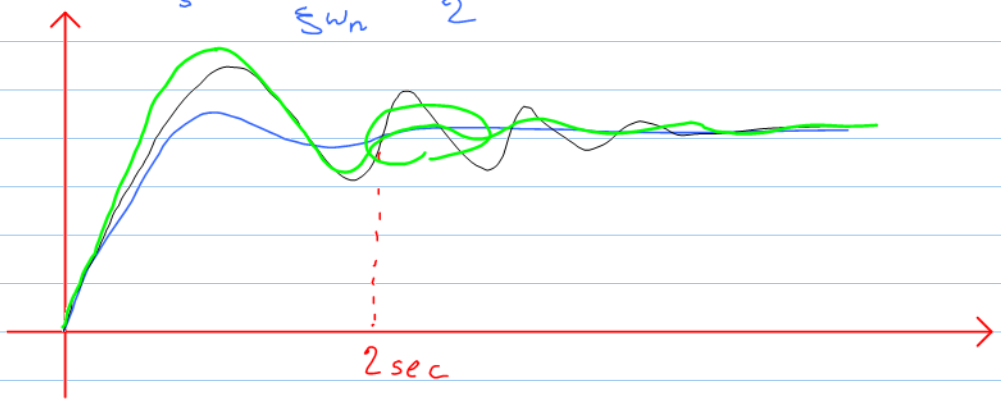
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+8}{s^2+4s+8} \rightarrow = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Delta(s) = s^2+4s+8 = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

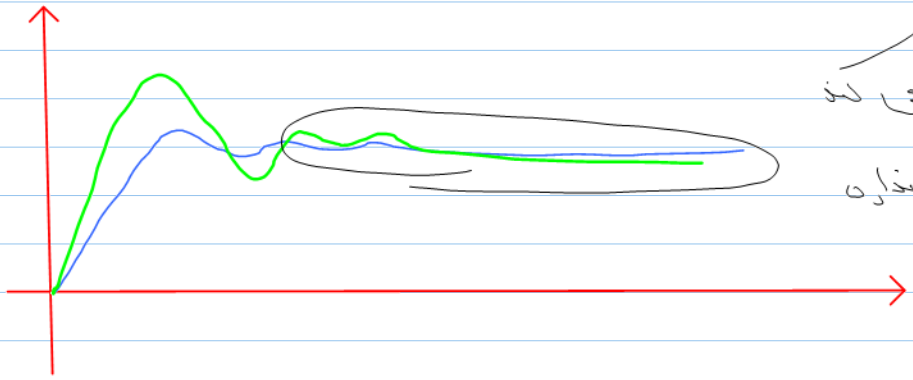
$$\xi\omega_n = 2$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+4s+8}$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{2} = 2\,sec$$



ξ بیشتر زیادی ← ضعف

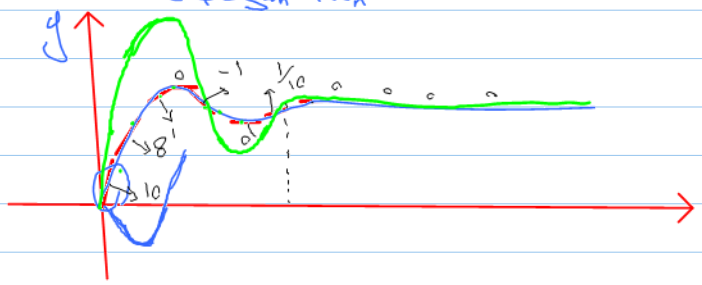


ضعف سرعت سیستم را زیاد می کند

با خروجی کاری ندارد

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{R(s)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$



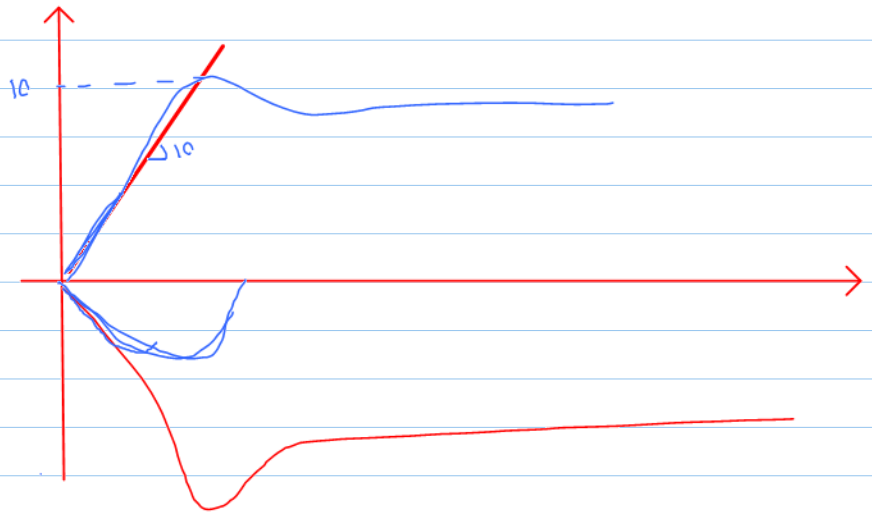
$$\frac{Y'(s)}{R(s)} = \frac{s \mp 1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y'(s) = s\underbrace{\frac{R(s)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}_{Y(s)} \mp \underbrace{\frac{R(s)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}_{Y(s)}$$

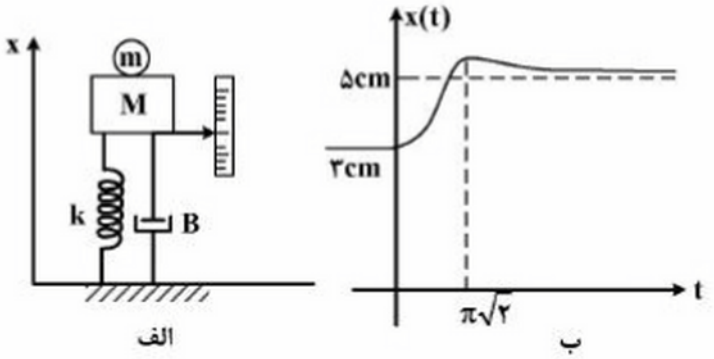
$$y'(t) = \frac{dy}{dt} + y(t)$$

$$y = 10 \qquad \frac{dy}{dt} = 2$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} + (-y(t))$$



۹۱- در سیستم مکانیکی شکل الف که برای مدت طولانی در حالت سکون قرار داشته است، در لحظهٔ $t=0$ جرم $m=0/2kg$ را از روی جرم $M=1kg$ برمی‌داریم. در صورتی‌که $g=10m/s^2$ باشد، مقدار k و B چقدر باشد تا تغییر مکان عقربه در شکل الف، مطابق شکل ب باشد.



الف

ب

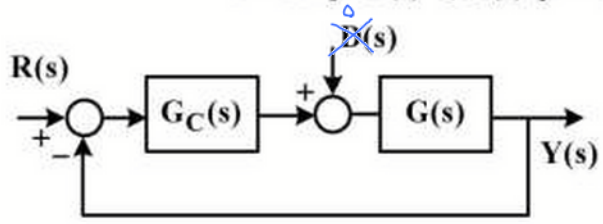
۱) $k=1\ ,\ B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲) $k=1\ ,\ B=\sqrt{2}$

۳) $k=4\ ,\ B=2\sqrt{2}$

۴) $k=2\ ,\ B=\sqrt{14}$

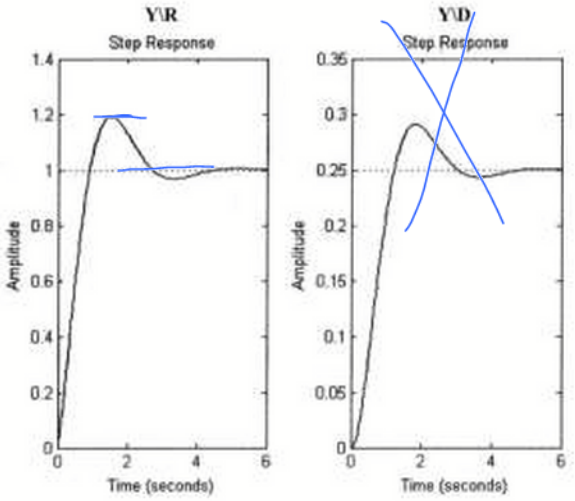
سیستم زیر را درنظر بگیرید. پاسخ سیستم به ورودی پلهٔ واحد $R(s)$ و $D(s)$ به‌صورت مجزا در شکل زیر نشان داده شده است. کدام گزینه در مورد تابع تبدیل حلقه بسته از $R(s)$ به $Y(s)$ درست است؟



$D=0$

$\frac{Y}{R}=?$





$\frac{Y(s)}{R(s)}=?$

$\%OS = \frac{1.2-1}{1}\times 100 = \%20$

$\%OS$

1) $\frac{۴}{s^۲+۲s+۴}$

2) $\frac{s+۴}{s^۲+۲s+۴}$

3) $\frac{(s+۱)(s+۴)}{s^۲+۲s+۴}$

4) $\frac{s+۱}{s^۲+s+۱}$

1, 2, 3) $\rightarrow$ $\Delta(s) = s^2+2\zeta s+\zeta = 0$

$\Delta(s) = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 = 0$

$\omega_n = 2$

$2\zeta\times 2 = 2 \rightarrow \zeta = \frac{1}{2} \rightarrow$ زیر میرا $\%OS = 16\%$

4) $\Delta(s) = s^2+s+1=0 \rightarrow \omega_n = 1$

$\zeta = \frac{1}{2} \rightarrow \%OS = 16\%$

$\%OS$ صفر ← زیر میرا بدون صفر

هوف میرا یا میرای بالای یک صفر

پاسخ پله واحد سیستم داده شده در شکل زیر به ازای کدام k1، k2، k3 به ترتیب است؟

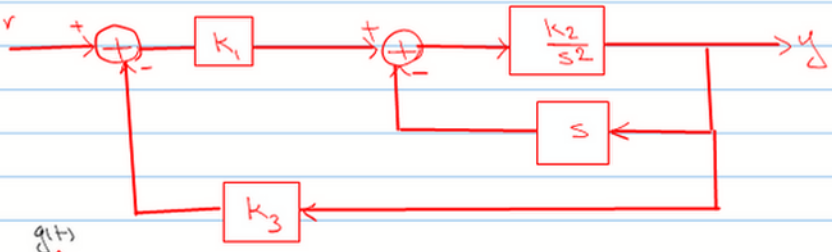
$\sqrt{2} = 1.4$

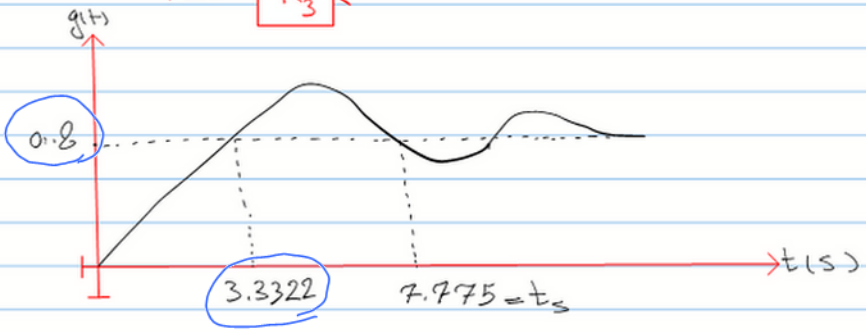
1) $1.25 , 0.4\sqrt{2} , \sqrt{2}$ (0.56)

2) $0.8 , \sqrt{2} , 0.4\sqrt{2}$

3) $0.8 , 0.4\sqrt{2} , \sqrt{2}$

4) ✓ $1.25 , \sqrt{2} , 0.4\sqrt{2}$





$y(\infty) = 0.8 \rightarrow$ بهره dc $= \frac{0.8}{1} = 0.8$

$t_r = 3.33$
$t_s = 7.77$
$\rightarrow \Delta(s) , \xi, \omega_n$

بهره dc $= G(0) = \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{s=0} = \left.\frac{k_1 k_2}{s^2 + k_2 s + k_1 k_2 k_3}\right|_{s=0}$

$2\xi\omega_n \quad \omega_n^2$

$\frac{1}{k_3} = 0.8 \rightarrow k_3 = 1.25$

$2\xi\omega_n = k_2 \qquad \xi\omega_n = \frac{k_2}{2}$

$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\frac{k_2}{2}} = \frac{8}{k_2}$

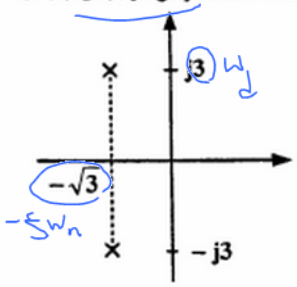
$\frac{8}{k_2} = 7.775 \rightarrow \boxed{k_2 = \sqrt{2}}$

$k_2 = 2 \frac{8}{7.775}$ ✓1

www.Prozheha

۸- محل قطب‌های حلقه بسته یک سیستم مرتبه دوم در شکل مقابل داده شده‌اند. زمان فراجهش و زمان مستقر شدن سیستم به ترتیب کدام است؟





$t_{p_1} = \frac{1\times\pi}{\omega_d}$

$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$

۱) ۲٫۳ ، $\frac{\pi}{3}$ ✓

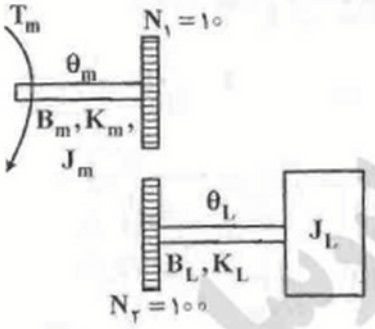
۲) ۳٫۰ ، $\frac{\pi}{3}$

۳) ۲٫۳ ، $\frac{\pi}{2}$

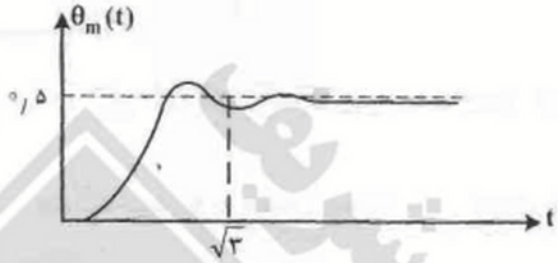
۴) ۴٫۶ ، $\frac{\pi}{2}$

$t_{p_1} = \frac{1\times\pi}{3}$ $\quad t_s = \frac{4}{\sqrt{3}} < 4$

سیستم شکل الف شفت یک موتور DC را که توسط جعبه دنده به بار مکانیکی J_L متصل شده است، نشان می‌دهد. شکل ب، پاسخ زاویهٔ شفت موتور $(\theta_m(s))$ را به ورودی پله واحد $(T_m(s)=\frac{1}{5})$ نشان می‌دهد، در صورتی‌که $K_L=100$ بوده و بدانیم زاویهٔ قطب‌های سیستم با محور حقیقی برابر ۶۰ درجه است، مقادیر ω_n (فرکانس طبیعی سیستم) و k_m به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



شکل الف



شکل ب

۱) $1, \frac{2\pi}{3}$

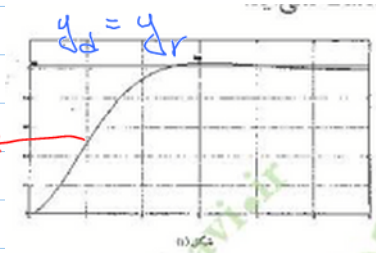
۲) $2, \frac{4\pi}{3}$

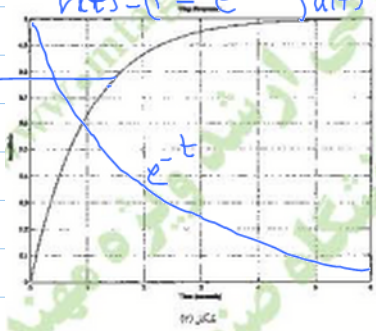
۳) $1, \frac{4\pi}{3}$

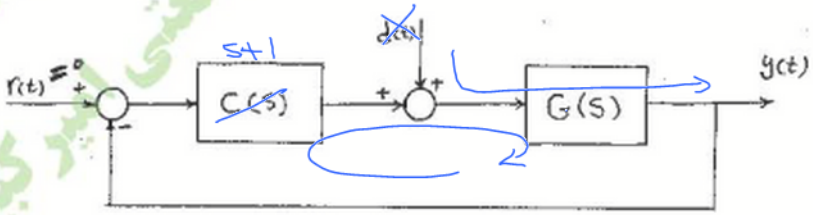
۴) $2, \frac{2\pi}{3}$

سیستم فیدبک زیر را در نظر بگیرید.

$C(s)$ یک کنترل‌کنندهٔ دینامیکی است.







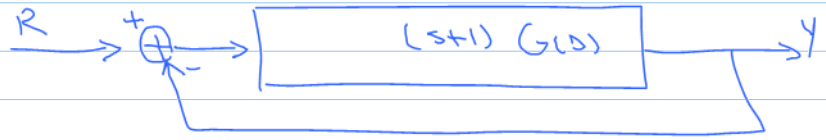
پاسخ سیستم به ازاء ورودی پله واحد $\mathbf{d(t)}$ و $\mathbf{r(t)=0}$ در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین پاسخ سیستم به ازاء $\mathbf{d(t)=0}$ و $\mathbf{r(t)}$ به صورت سیگنال نشان داده شده در شکل ۲ نیز مشابه شکل ۱ می‌باشد. تابع تبدیل $\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{R}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲(s+۱)}{s^۲+s+۱}$

۲) $\frac{۲(s+۱)}{s^۲+۲s+۲}$

۳) $\frac{۲(s+۲)}{s^۲+۲s+۲}$

۴) $\frac{۲}{s^۲+۲s+۲}$



$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$

$\Delta(s) = 1 + (s+1)G(s) = 0$

1) $\Delta(s) = s^2 + s + 1 \longrightarrow \xi = \frac{1}{2}$ زیرمیرا

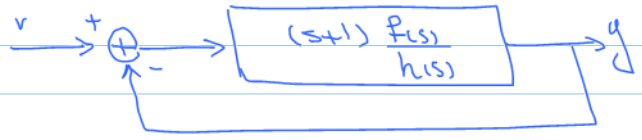
2,3,4) $\Delta(s) = s^2 + 2s + 2 \longrightarrow \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ زیرمیرا

1) $\frac{Y_d(s)}{D(s)} = \frac{f(s)}{s^2+s+1} = \frac{1}{s^2+s+1}$ زیرمیرا

2,3,4) $\frac{Y}{D} = \frac{f(s)}{s^2+2s+2}$ زیرمیرا

$C(s) = s+1 \longrightarrow$ ~~$\frac{d}{dt}$~~

$C(s) = s+1$



$\frac{y}{R} = ?$ $\frac{(s+1)f(s)}{s^2+2s+2}$

صفرهای حلقه‌باز باحلقه‌بسته یکسان است.

$y(\infty) = 1$

$r(\infty) = 1$

$\frac{y(\infty)}{r(\infty)} = 1 \longrightarrow \frac{1 \times f(0)}{2} = 1 \longrightarrow f(0) = 2$

1) بهره dc $= 2$

2) ~ ~ $= 1$ ✓

$\zeta = 1$

برق ۷۹. دستگاه زیر با فرض انتخاب k به نحوی که سریعترین پاسخ بدون فراجهش را داشته باشیم زمان مستقر شدن با معیار ۲٪ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ ۱ ۲ ۴



$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{2} = 2\,sec$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2k}{s^2 + 4s + 2k} \qquad \zeta\omega_n = 2$$

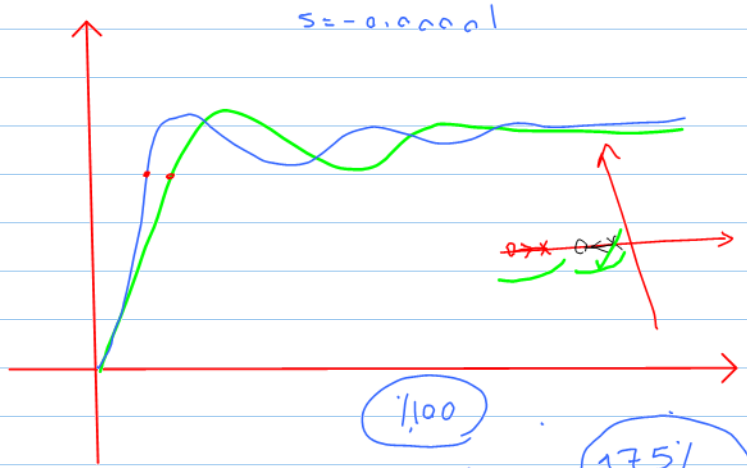
$4 = 2\zeta\omega_n$

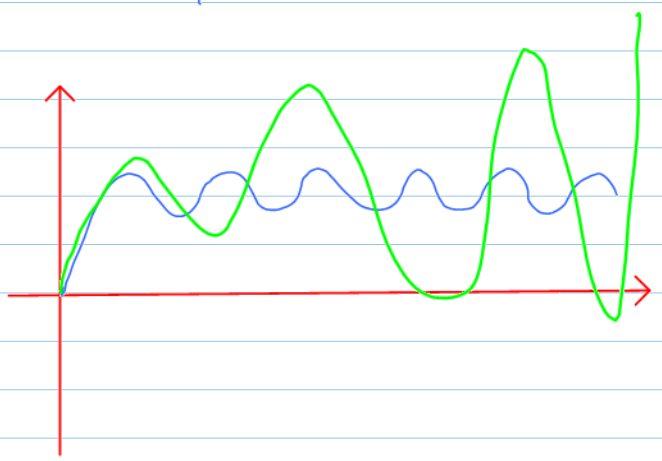
$t_r \downarrow \quad t_s \uparrow \quad \%OS \uparrow$ | سرعت ↑ پایداری ↓

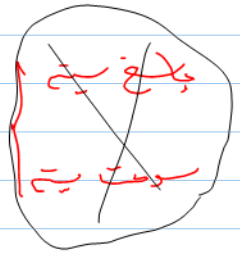
$t_r \uparrow \quad t_s \downarrow$

$s = -0.0001$

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 5}$$







پایداری → t_s

سرعت → t_r



جلسه ۲۵ کنترل خطی

فصل چهارم: تحلیل حالت ماندگار

یادآوری: قضیه مقدار نهایی

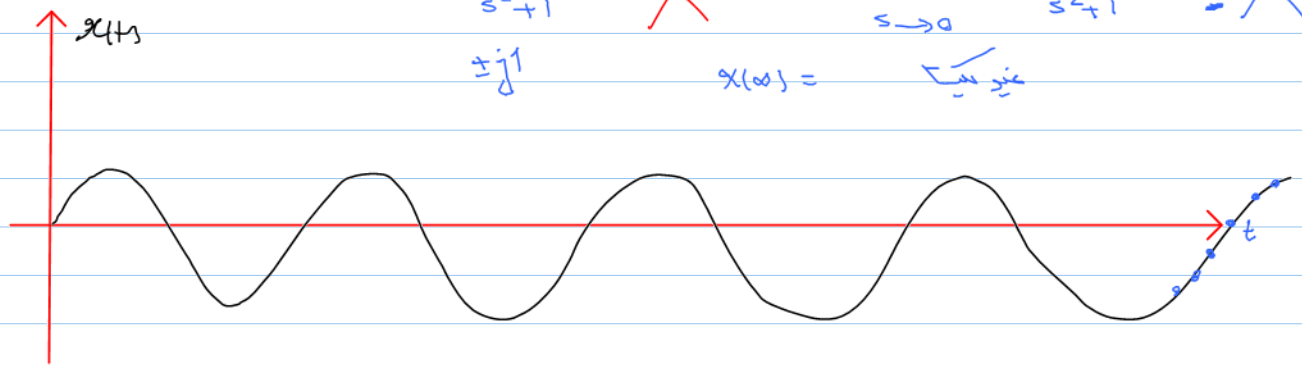
اگر $x(t)$ سیگنال پوسانی یا ناپایدار نباشد آنگاه داریم:

$$x(t)\Big|_{t=\infty} = \lim_{s\to 0} s\,X(s)$$

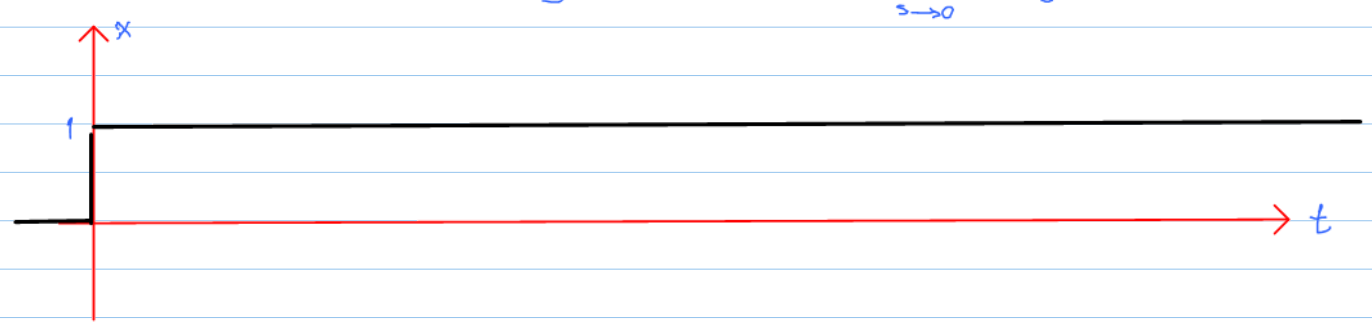
$x(t)$ $\quad x(\infty)$ $\quad X(s)$

$x(t) = \sin(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s^2+1}$ $\quad \pm j1$ $\quad$ ✗ $\quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2+1} = 0$ ✗

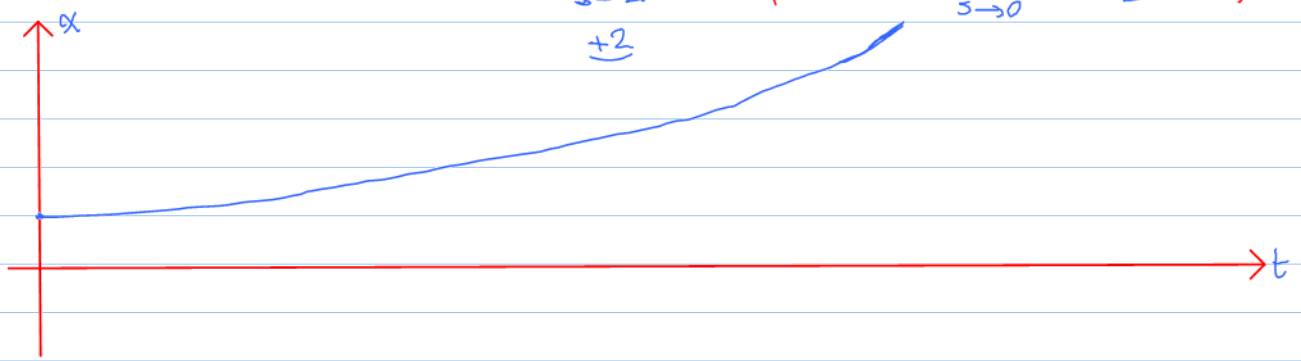
$x(\infty) =$ غیر ممکن

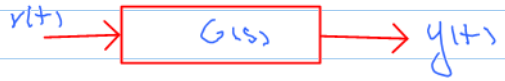


$x(t) = u(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s}$ $\quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s} = 1$ ✓

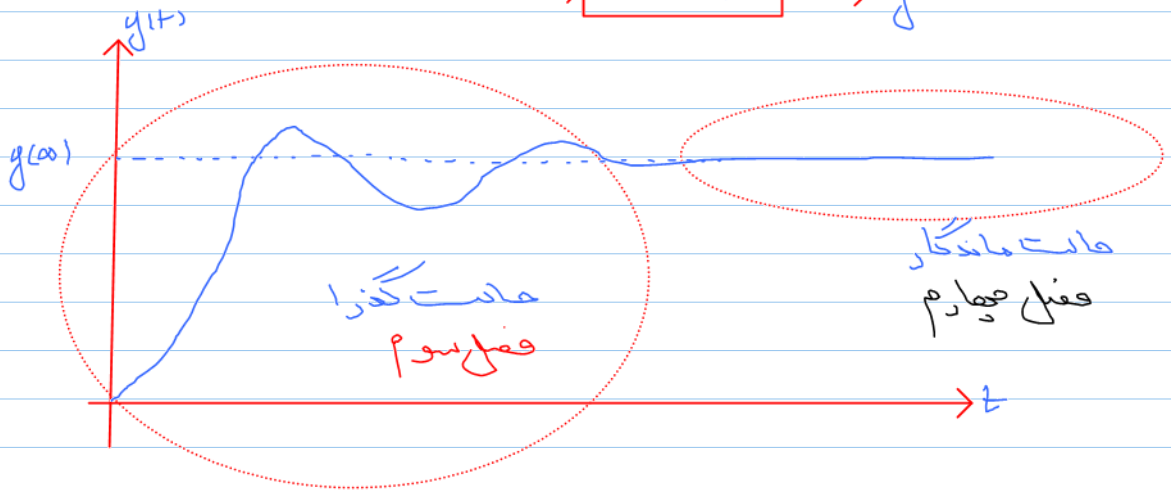


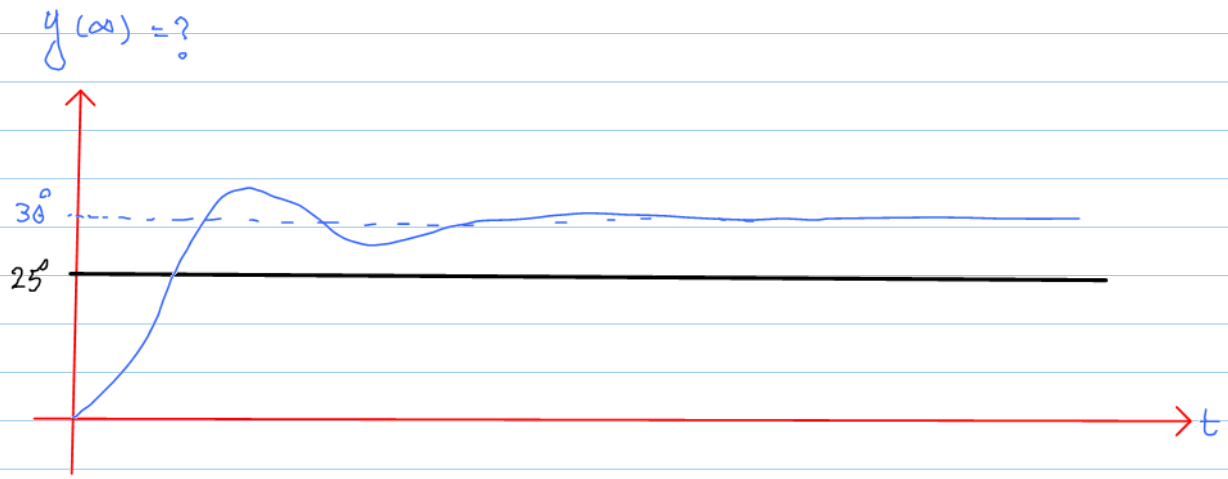
$x(t) = e^{2t}u(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s-2}$ $\quad +2$ $\quad$ ✗ $\quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s-2} = 0$ ✗





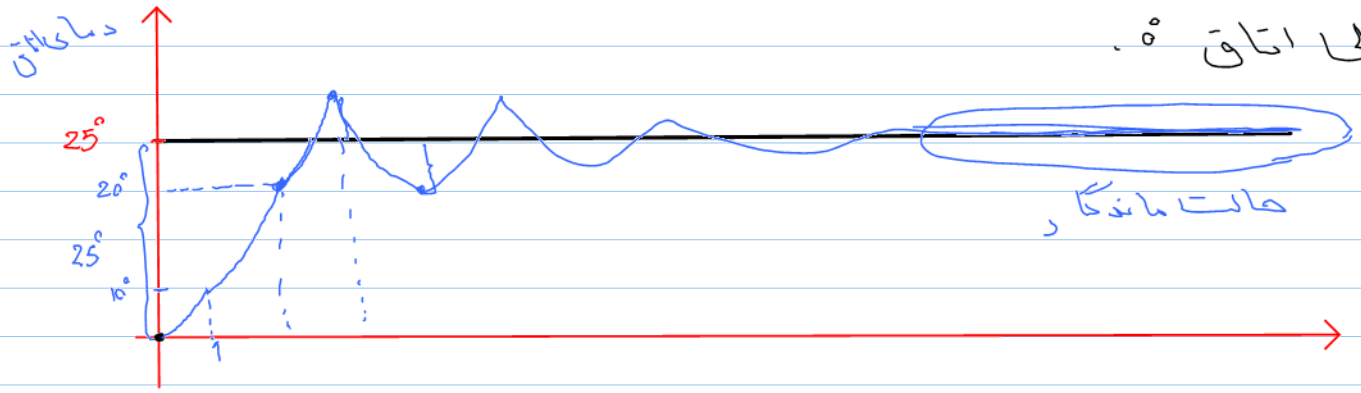
حالت ماندگار

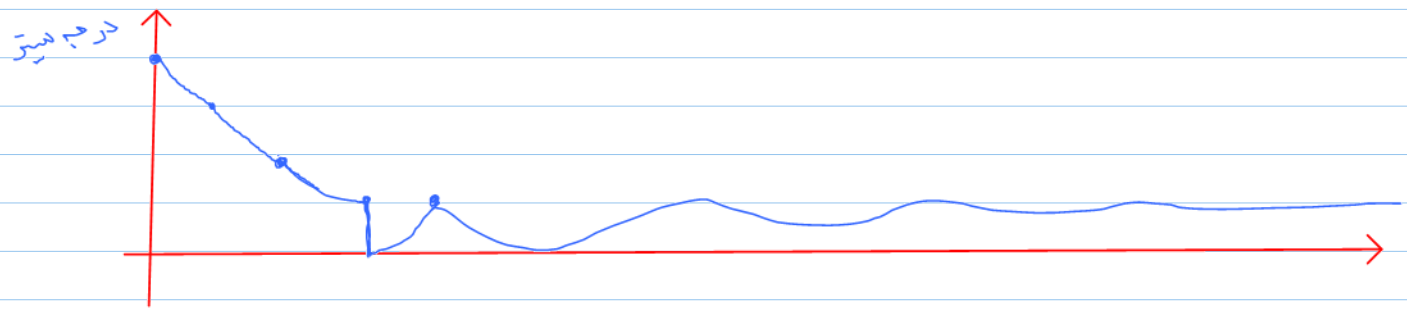


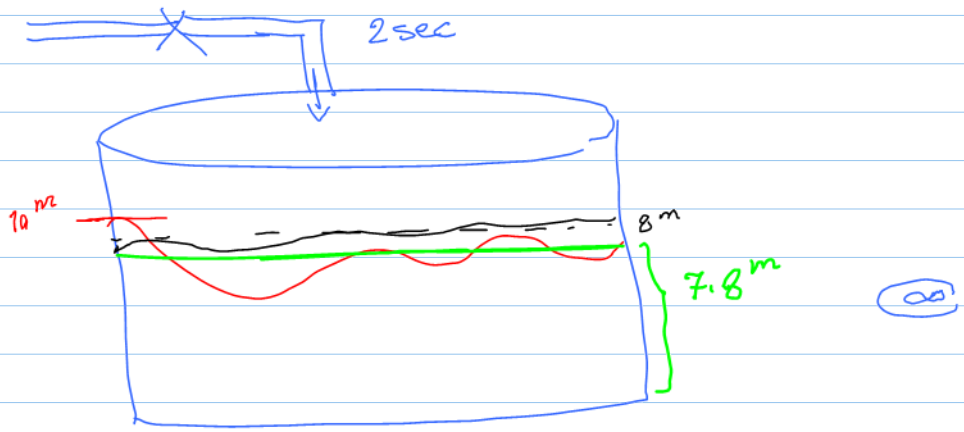


هدف: بارو شن کردن میز فضای اتاق را به دمای 25° برسانیم.

دمای فضای اتاق 0°.





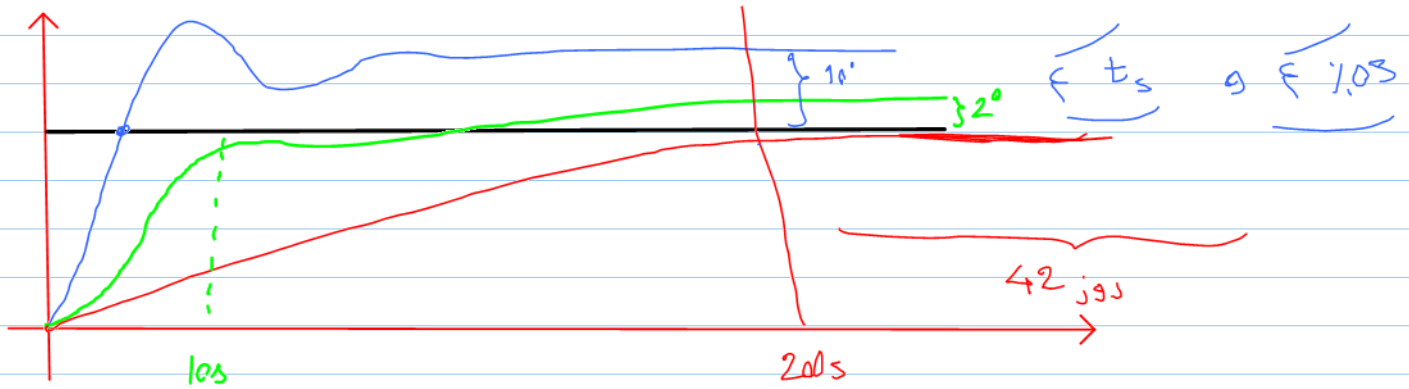


در کنترل حلقه باز حالت ماندگار را با $t=\infty$ نشان می‌دهیم.

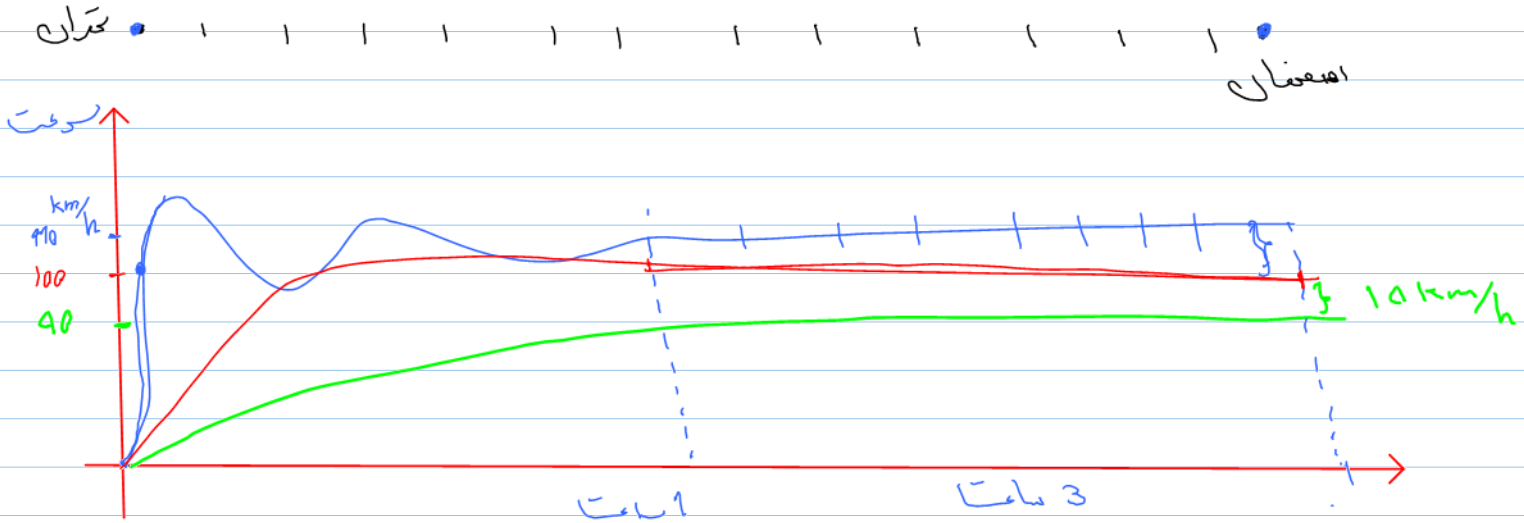
هدف اول کنترل دمایی پاسخ در حالت ماندگار به ورودی مطلوب است.

مثال: می‌خواهیم سه دما را کنترل کنیم.

$T=27^\circ C$ عالی $T=30^\circ$ خوب ولی بد $T=23^\circ C$ خوب ولی بد

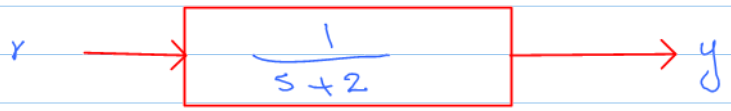


مثال: راننده یک اتوبان با حداکثر سرعت مجاز 100km/h



جامع حالت ماندگار – ورودی پله‌ای = خطای ماندگار

$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad e(\infty) = e_{ss}$

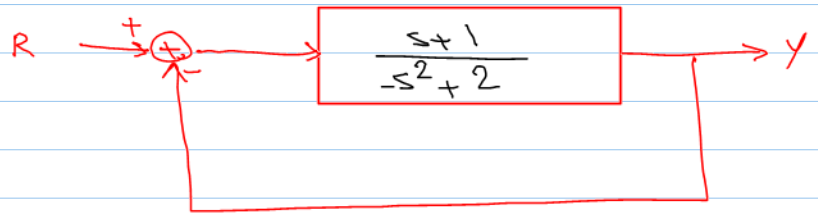


$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad e_{ss} = ?$ $\qquad r(t) = u(t)$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - R(s)\frac{1}{s+2}$$

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s+1}{s+2}\right) \rightarrow \text{قطب‌ها} \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\,\frac{s+1}{s+2} = \frac{1}{2}$$



$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad e_{ss} = ?$

$$E(s) = R(s) - Y(s) \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{-s^2+s+3}$$

$$E(s) = R(s) - R(s)\frac{s+1}{-s^2+s+3}$$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{-s^2+2}{-s^2+s+3}\right)$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\,\frac{-s^2+2}{-s^2+s+3} = \frac{2}{3}$$

$E(s)$ قطب‌ها : $\Delta(s) = -s^3 + s^2 + 3s = 0$

وقتی $E(s)$ قطب سمت راست دارد ← ناپایدار ← $e(\infty) = \infty$

نکات خیلی مهم:

① اگر سیستم ناپایدار باشد پاسخ حالت دائمی و خطای ماندگار به هر ورودی ای ∞ است.

اگر در گزینه ها ، ∞ دیدید اول پایداری سپس حلقه بسته را چک کنید (یا روش R-H)

② به خطای تعریف شده در صورت سؤال دقت کنید.

اگر در صورت سؤال خطا را تعریف نکند ، $e(t) = r - y$ منظور بود.

③ برای محاسبه e_{ss} ، اول خطای تعریفی در صورت سؤال را مشخص کنید

و سپس خطای شکل را هم تعیین کنید.

روش حلقه باز → خطای شکل = خطای تعریفی

" حلقه بسته → " " ≠ "

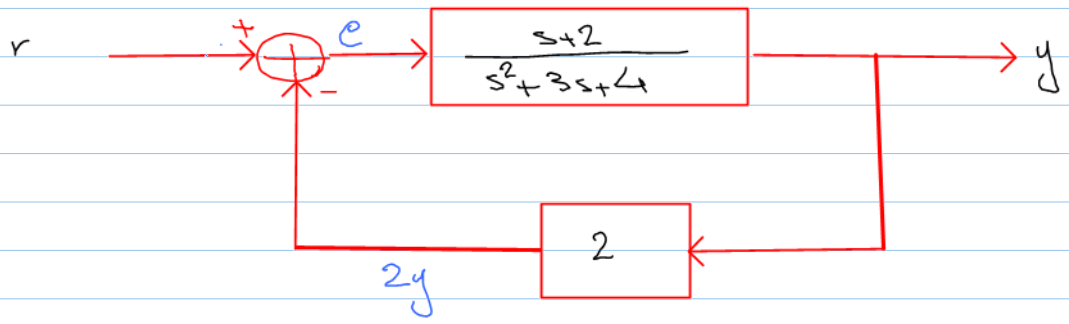
روش محاسبه خطای حالت ماندگار

① روش حلقه بسته ← از این روش فقط وقتی که خطای تعریفی ≠ خطای شکل باشد استفاده می کنیم.

خطای تعریفی ← $e(t)$

تبدیل لاپلاس ← $E(s)$ ← برحسب ورودی

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s E(s)$$



در سیستم فوق خطای ماندگار چقدر است؟

① بررسی پایداری → $\Delta(s) = 1 + 2\,\frac{s+2}{s^2+3s+4} = 0$

$\Delta(s) = s^2 + 5s + 8 = 0$

$\Delta(s)$ پایدار ✓

② خطای تعریفی $= r - y$

≠

خطای واقعی $= r - 2y$ → روش حلقه بسته

③ $e(t) = r(t) - y(t)$

$E(s) = R(s) - Y(s)$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{s^2+5s+8}$

$E(s) = R(s) - R(s)\,\frac{s+2}{s^2+5s+8}$ $\qquad r(t) = u(t)$

$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{s+2}{s^2+5s+8}\right)$

$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\left(1 - \frac{s+2}{s^2+5s+8}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

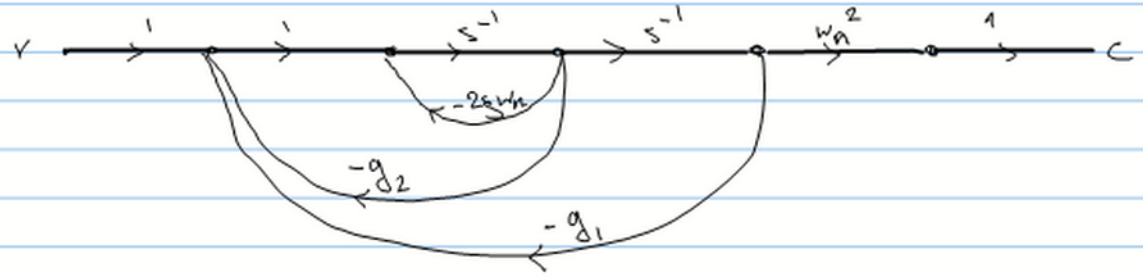
سوال ۷۸. در سیستم مرتبه دوم زیر، به ازای کدام مقادیر g_1 و g_2 خطای حالت ماندگی به ورودی شیب واحد برابر صفر می شود؟

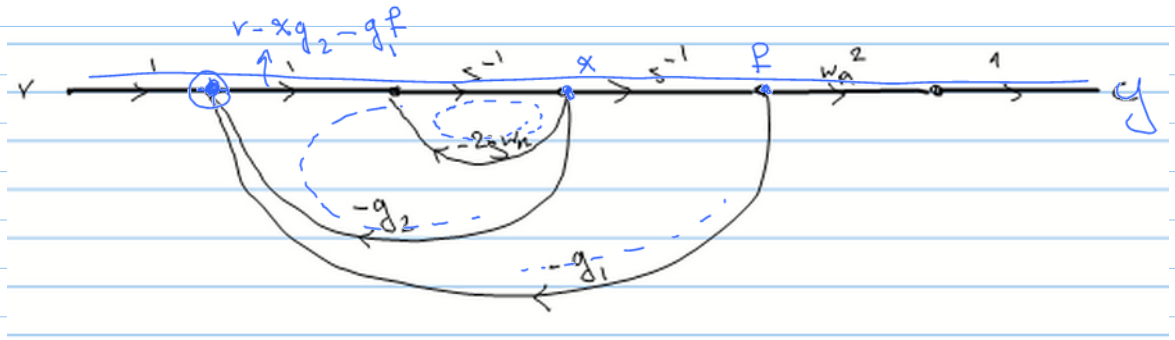
1) $g_1 = g_2 = \omega_n^2$

2) $g_1 = \omega_n^2 \quad , \quad g_2 = \frac{\omega_n}{2\xi}$

3) $g_1 = \omega_n^2 \quad , \quad g_2 = \frac{2\xi}{\omega_n}$

4) هیچ مقداری صفر نمی شود.





① $\Delta(s) = ?$

$$\Delta(s) = 1 - \left(-2\xi w_n \frac{1}{s} + -g_2 \times 1 \times \frac{1}{s} + -g_1 \times 1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}\right)$$

$$\Delta = 1 + \frac{2\xi w_n}{s} + \frac{g_2}{s} + \frac{g_1}{s^2} = 0$$

$$= s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1 = 0$$

بشرط $g_1 > 0$ ، $g_2 + 2\xi w_n > 0$ سیستم پایدار است. ✓

② حطای تقریبی $= r - y$

$\neq$

حطای شکل $= r - g_2 x - g_1 f$ ← حالت بسته

③ $e(t) = r - y$ $\qquad E(s) = R(s) - Y(s)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$$

$$P_1 = 1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times w_n^2 \times 1 = \frac{w_n^2}{s^2} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{w_n^2}{s^2} \times 1}{\frac{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}{s^2}} = \frac{w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}$$

$$E(s) = R(s) - R(s) \frac{w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}$$

$R(s) = \frac{1}{s^2}$ $\quad r(t) = t u(t) \quad$ = ورودی

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}\right) =$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1 - w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}\right)$$

حدّ : $e_{ss} = 0 \qquad g_1 = w_n^2$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}\right) = \frac{g_2 + 2\xi w_n}{w_n^2}$$

w_n^2

$e_{ss} = 0 \longrightarrow \boxed{g_2 = -2\xi w_n}$

$\left.\begin{array}{l} g_1 = w_n^2 \\ g_2 = -2\xi w_n \end{array}\right\} \longrightarrow$ ~~$e_{ss} = 0$~~ $\qquad \boxed{e_{ss} = \infty}$

شرط پایداری : $\left\{\begin{array}{l} g_1 > 0 \\ g_2 > -2\xi w_n \end{array}\right.$

اگر بخواهیم خطا صفر شود باید $g_1 = w_n^2$ و $g_2 = -2\xi w_n$ شود ولی

این مقادیر سیستم را از پایداری خارج کرده و خطا غیر صفر می‌شود.

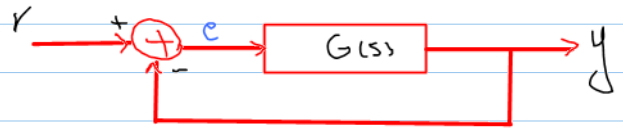
ناپایدار $\longrightarrow e_{ss} = \infty$

پایدار $\longrightarrow$ یا $e_{ss} =$ غیر صفر

جلسه ۲۱ کنترل خطی

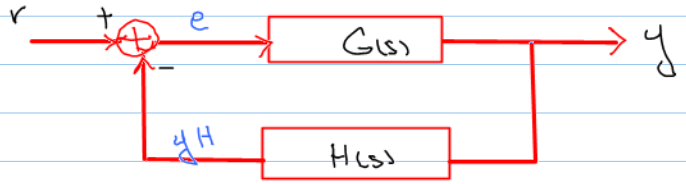
فصل چهارم

محاسبه خطای حالت ماندگار با استفاده از روش حلقه باز:



خطای تعریفی = خطای سنسور

$r - y = r - y$



$r - H(s)y = r - Hy(s)$

حالت دوم:

$e_{ss} = e(\infty)$

$e = r - Hy$

$E(s) = R(s) - H(s)y(s)$

$E(s) = R(s)\left(1 - H(s)\frac{y(s)}{R(s)}\right)$

$\frac{y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}$

$E(s) = R(s)\left(1 - H(s)\frac{G(s)}{1 + GH(s)}\right)$

$E(s) = R(s)\frac{1}{1 + G(s)H(s)}$

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s R(s)\frac{1}{1 + G(s)H(s)}$

$r(t) = u(t) \rightarrow R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0}\frac{1}{1 + G(s)H(s)}$

$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + k_p}$

k_p

روش خطای حالت پایا:

$r(t) = u(t) \rightarrow \begin{cases} k_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s) \\ e_{ss} = \dfrac{1}{1+k_p} \end{cases}$

محاسبه خطای ماندگار با روش خطای حالت پایا:

1. ابتدا باید چک کنیم که خطای سیستم با خطای تعریف شده سیگنال باشد.
2. نوع ورودی را تعیین کنید.

نوع ورودی	ورودی
0	پله
1	شیب
2	شتاب
⋮	⋮

توان t در ورودی = نوع ورودی

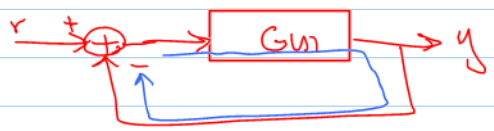
$r(t) = u(t) = \begin{cases} 1 \times t^0 & t \geq 0 \\ 0 \times t^0 & t < 0 \end{cases}$

$r(t) = t^1 u(t)$

$r(t) = t^2 u(t)$

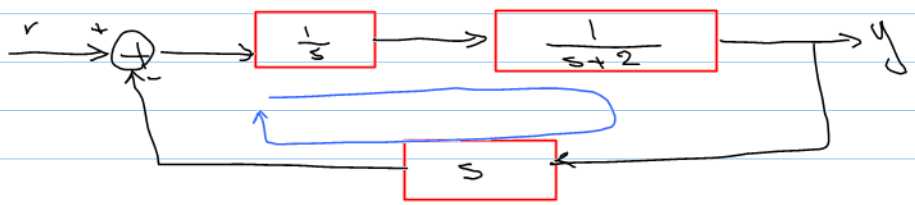
3. نوع سیستم را مشخص کنید.

نوع سیستم: تعداد قطب‌های دربدا خارج بهره حلقه سیستم



$l(s) = G(s)$

$G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$



$$L(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s+2} \times s = \frac{1}{s+2} \rightarrow \text{نوع سیستم} = 0$$

(3) اگر سیستم پایدار باشد طبق قاعده زیر عمل میکنیم.

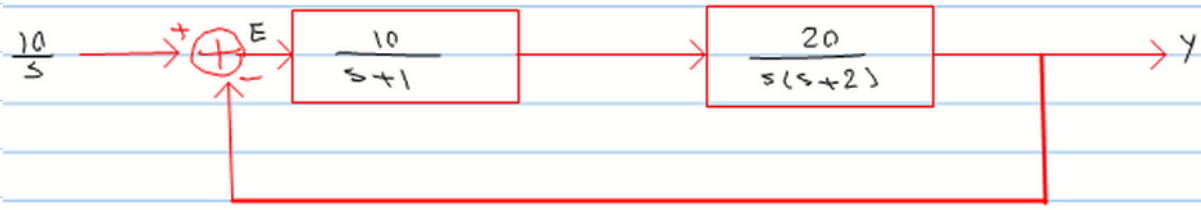
- نوع ورودی < نوع سیستم $\rightarrow e_{ss} = \infty$
- نوع ورودی = نوع سیستم $\rightarrow e_{ss} =$ عدد محدود و غیر صفر
- نوع ورودی > نوع سیستم $\rightarrow e_{ss} = 0$

(4) با توجه به نوع ورودی و طبق جدول زیر ثابت خطای معادل را بیابید و خطای ماندگار را حساب کنید.

ورودی	ثابت خطا	عنوان ثابت خطا	نحوه محاسبه	خطای ماندگار
پله	K_p	ثابت خطای موقعیت	$K_p = \lim_{s\to 0} L(s)$	$e_{ss} = \frac{a}{1+K_p}$
شیب	K_v	~ ~ سرعت ~	$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s)$	$e_{ss} = \frac{a}{K_v}$
شتاب	K_a	~ ~ شتاب ~	$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 L(s)$	$e_{ss} = \frac{2a}{K_a}$

a: دامنه ورودی

تست ۸۵. دو سیستم زیر پاسخ حالت دائمی و خطای حالت ماندگار به ترتیب کدام است؟

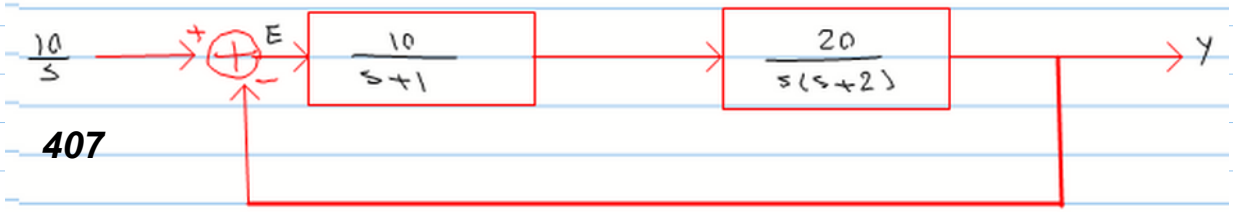


۱) ۰٫۱۰ ، ۰

۲) ۰٫۰۹۷۵ ، ۰٫۰۵

۳) ۱۰۰۵ ، ۰٫۱۰

۴) ∞ ، ∞



e_{ss} ، $y(\infty)$

چون درگذشته ما ∞ داریم ← ناپایدار !

$$\Delta(s) = 1 + \frac{10}{s+1} \times \frac{20}{s(s+2)} = 0 \qquad \times s(s+2)(s+1)$$

$$= s(s+1)(s+2) + 200 = 0$$

$$= s^3 + 3s^2 + 2s + 200 = 0$$

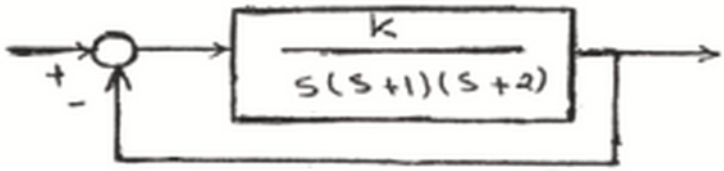
$3 \times 2 < 1 \times 200 \longrightarrow$ ناپایدار $\rightarrow e_{ss} = \infty$

$$e(t) = r(t) - y(t) \qquad e_{ss} = r(\infty) - y(\infty)$$

$$\infty = 10 - y(\infty) \rightarrow y(\infty) = 10 - \infty = -\infty$$

$$R(s) = \frac{10}{s} \rightarrow r(t) = 10\,u(t)$$

۶۱- در سیستم حلقه بسته شکل به ازای چه مقادیری از k خطای حالت دائمی نسبت به پله واحد صفر است؟

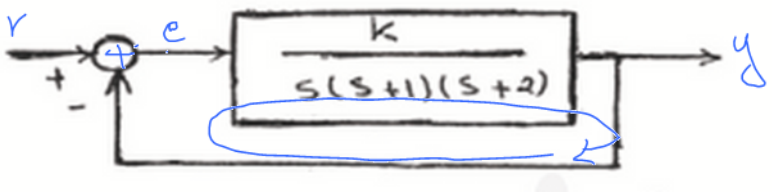


۱) $k > 0$

۲) $k \neq 0$

۳) $k < 0$

۴) $0 < k < 6$



هدف: k را طوری بیابید که e_{ss} در پاسخ به ورودی پله واحد صفر شود.

① خطای تعریفی $= r - y$

خطای شکل $= r - y$ ← روش حلقه باز

② $r(t) =$ پله واحد ← نوع ورودی $= 0$

③ نوع سیستم $L(s) = \dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}$ ← $\begin{cases} s=0 \\ s=-1 \\ s=-2 \end{cases}$

نوع سیستم $= 1$

④ $e_{ss} = 0$ ← نوع ورودی < نوع سیستم

صفا حاتمی‌نیا: $e_{ss} \neq 0$ مانند این است که سیستم ناپایدار باشد.

اگر سیستم پایدار باشد قطعاً "بازای هر مقدار k، خطا صفر است.

؟

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

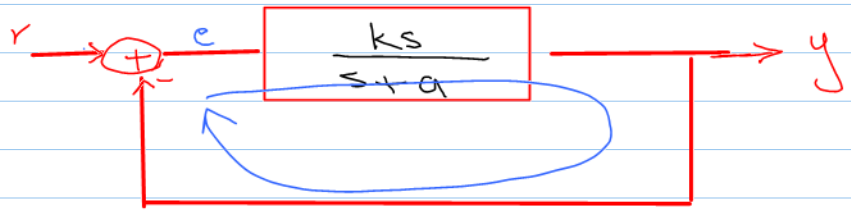
$$= s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ 3 \times 2 > 1 \times k \end{cases} \rightarrow 0 < k < 6 \rightarrow \text{سیستم پایدار}$$

اگر $0 < k < 6$ باشد قطعاً "$e_{ss} = 0$

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با پس‌خور منفی واحد به صورت $G(s)=\frac{ks}{s+a}$ است. به ازای کدام مقادیر a و k خطای حالت دایمی سیستم به ورودی پله واحد برابر صفر خواهد بود؟

۱) $k=۲, a=۱$ ۲) $k=۱, a=۲$ ۳) $k=۲, a=۲$ ۴) هیچ مقدار a و هیچ مقدار k



وقتی ویژگی‌های حلقه بسته شرط اول پایداری است.

① $\Delta(s) = 1 + \frac{ks}{s+a} = 0 \rightarrow$

$\Delta(s) = (k+1)s + a = 0 \rightarrow (k+1)s = -a \rightarrow s = -\frac{a}{k+1}$

شرط پایداری $\frac{a}{k+1} > 0$

---

① خطای تقریبی $= r - y \rightarrow$ حلقه باز

خطای دقیق $= r - y$

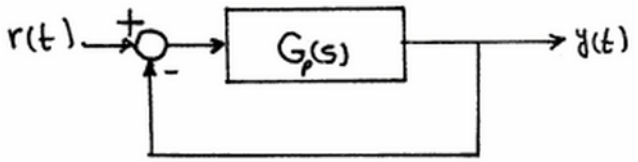
② نوع ورودی $= 0$ بله

③ سیستم $\sim = 0$ $\quad L(s) = \frac{ks}{s+a}$

④ نوع ورودی = نوع سیستم $\rightarrow$ عددی محدود و غیرصفر $= e_{ss}$

۸۹

سیستم کنترل حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید که در آن تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارتست از $G(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$. برای این سیستم حلقه بسته ثابت خطای استاتیکی به ورودی شیب واحد $r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ عبارتست از:

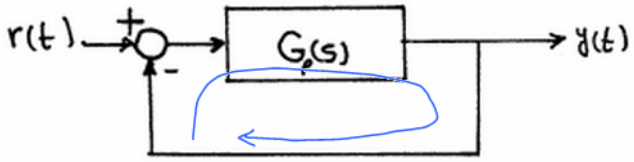


۱) $K_v = \frac{3}{10}$

۲) $K_v = \frac{5}{12}$

۳) $K_v = \frac{5}{24}$

۴) $K_v = \frac{6}{10}$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$k_v = ?$

$$L(s) = G_p(s)$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s\,L(s) = \lim_{s \to 0} s\,G_p(s)$$

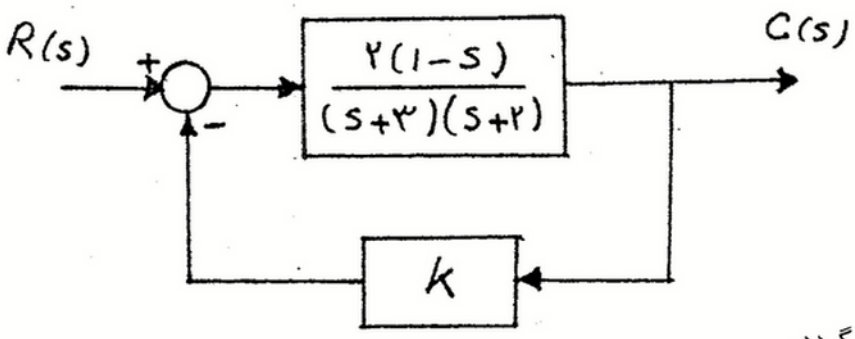
$$G_p(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)(s+3) - (s+6)} = \frac{s+6}{s^3+6s^2+11s+6-(s+6)} = \frac{s+6}{s^3+6s^2+10s}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s \frac{s+6}{s(s^2+6s+10)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

اشتباه رایج ←

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{6}{5}$$

در سیستم شکل زیر اگر بخواهیم خطای حالت دائم $e(t) = r(t) - c(t)$ برای ورودی پله واحد صفر گردد، چه کار باید کرد؟

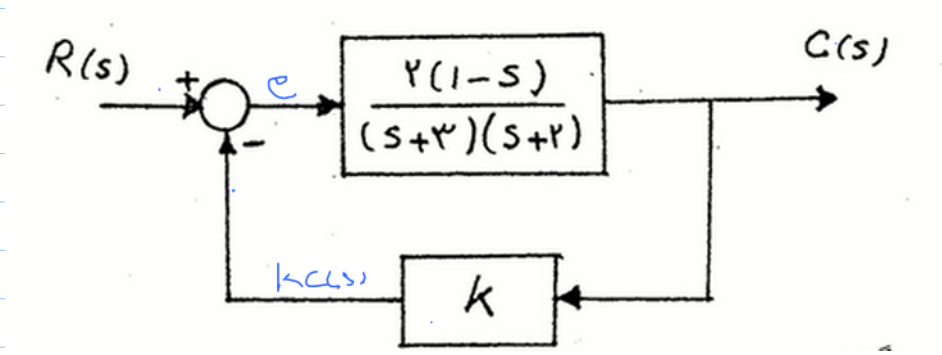


۱) با انتخاب $k = -۲$ خطای دائم خروجی صفر می‌گردد.

۲) برای $k \to \infty$ خطای دائم ورودی پله صفر می‌گردد.

۳) اگر یک انتگرال‌گیر در مسیر پیشرو قرار دهیم، خطای حالت دائم صفر می‌گردد.

۴) در این سیستم چون نوع سیستم صفر است نمی‌توان خطای دائمی ورودی پله را صفر نمود!



$e(t) = r(t) - C(t)$

استباه رایج ؛ ورودی = پله

② نوع ورودی = 0 ③ نوع سیستم = 0 $L(s) = \frac{2(1-s)}{(s+3)(s+2)} \times k$

④ نوع ورودی = نوع سیستم ← e_{ss} = مقدار ثابت غیر صفر

---

① خطای تعریفی = $e(t) = r(t) - C(t)$

≠

خطای مثال = $r(t) - kC(t)$

حالت بسته

$e(t) = r(t) - C(t)$

$E(s) = R(s) - C(s) = R(s)\left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right)$

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2(1-s)}{(s+2)(s+3) + k \times 2(1-s)} = \frac{2(1-s)}{s^2 + (5-2k)s + 6 + 2k}$

$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{2(1-s)}{s^2 + (5-2k)s + 6 + 2k}\right)$

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s}\left(1 - \frac{2(1-s)}{s^2 + (5-2k)s + 6 + 2k}\right) =$

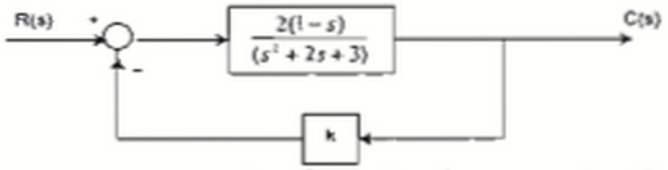
$e_{ss} = 1 - \frac{2}{6+2k} = 0 \rightarrow 6 + 2k = 2$

$2k = -4$

$k = -2$

۸۹

در سیستم شکل مقابل در چه حالتی خطای دائم سیستم $(e_{ss}(t) = \lim_{t\to\infty}(r(t)-c(t))$ برای ورودی پله صفر می‌گردد؟



۱) چون نوع سیستم صفر است، خطای دائم برای ورودی پله صفر نمی‌گردد!

۲) با انتخاب $k = -1$

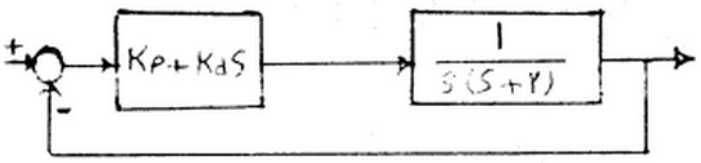
۳) با انتخاب $k = -\frac{1}{2}$

۴) چون سیستم غیرمینیمم فاز است همواره دارای خطای حالت دائم خواهد بود.

تمرین

۹۱

در سیستم کنترل شکل مقابل مقادیر $k_p \geq 0$ و $k_d \geq 0$ چقدر باشند تا خطای ماندگار سیستم به ورودی شیب واحد برابر ۰/۵ و رژیم‌گذرای سیستم میرای بحرانی باشد.؟

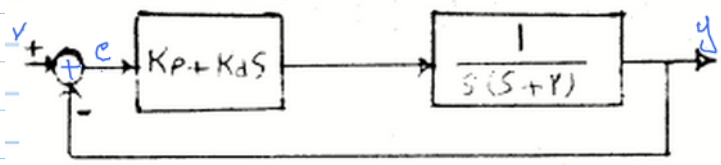


۱) $k_p = ۴, k_d = ۲$

۲) $k_p = ۱, k_d = ۰$

۳) $k_p = k_d = ۴$

۴) چنین کنترل کننده‌ای نمی‌توان طراحی کرد.



هدف: سیستم میرای بحرانی

ورودی = $1(t)u(t)$ $\quad e_{ss} = \frac{1}{2}$

اول: حالت ماندگار؛

شرط اول: پایداری ✓

$$\Delta(s) = 1 + (k_p + k_d s)\frac{1}{s(s+2)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + (2+k_d)s + k_p = 0$$

شرط پایداری:
- $k_p > 0$ ✓
- $k_d + 2 > 0$ ✓

---

① خطای تعریفی $= r - y$

خطای کنترلی $= r - y$ $\rightarrow$ حلقه باز

② نوع ورودی $= 1$

③ نوع سیستم $= 1$ $\quad L(s) = \frac{k_p + k_d s}{s(s+2)}$

④ نوع ورودی $=$ نوع سیستم $\rightarrow$ $e_{ss} =$ عددی محدود و غیرصفر

هدف $\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{2}$

⑤ $k_v = \lim_{s\to 0} s\,L(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{k_p + k_d s}{s(s+2)} = \frac{k_p}{2}$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\frac{k_p}{2}} = \frac{2}{k_p} = \frac{1}{2} \rightarrow k_p = 4$$

سیستم میرای بحرانی $\leftarrow \zeta = 1$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4 + k_d s}{s^2 + (k_d+2)s + \frac{k_p}{4}} = \frac{}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$w_n^2 = 4 \rightarrow w_n = 2$

$2\xi w_n = k_d + 2 \rightarrow 2 \times 1 \times 2 = k_d + 2 \rightarrow k_d = 2$

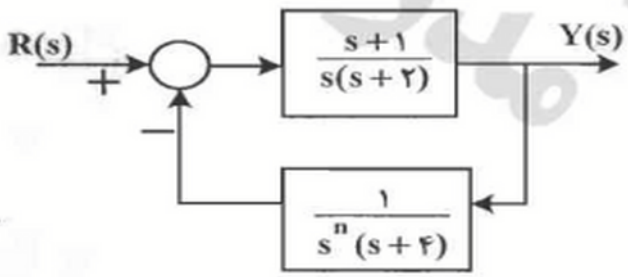
$k_p = 4 \quad , \quad k_d = 2$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+4}{s^2+4s+4} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2} = \frac{2}{s+2}$$

به دلیل ساده شدن صفر و قطب سیستم به یک سیستم مرتبه اول همواره پایدار است.

۹۴

در سیستم شکل زیر، برای $n \geq 0$ و ورودی پله واحد، با توجه به تعریف خطای دائم سیستم به صورت $e_{ss} = \lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t))$، گزینهٔ صحیح کدام است؟

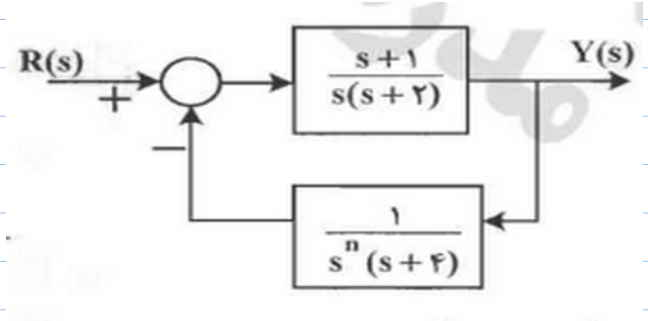


۱) برای $n > 2$ سیستم ناپایدار است.

۲) برای $n \geq 0$ خطای حالت دائم سیستم صفر است.

۳) برای $n = 0$ خطای حالت دائم پاسخ پله سیستم $e_{ss} = -3$ است.

۴) هر دو گزینهٔ ۱ و ۳ صحیح است.



$e(t) = r(t) - y(t)$

$r(t) = 1\,u(t)$

در گزینه ها صحبت از ناپایداری داریم ← بررسی پایداری

$$\Delta(s) = 1 + \frac{s+1}{s(s+2)} \times \frac{1}{s^n(s+4)} = 0$$

$$= \frac{s(s+2)s^n(s+4) + s+1}{s(s+2)s^n(s+4)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^{n+3} + 6s^{n+2} + 8s^{n+1} + s + 1 = 0$$

گزینه ۱ ✓ ← $n>2$ ← $n=3$

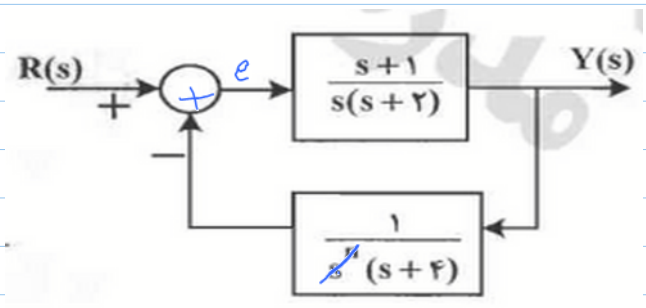
$$\Delta(s) = s^6 + 6s^5 + 8s^4 + s + 1 = 0$$

چون $\Delta(s)$ عاری توانهای s را ندارد قطعاً $\Delta(s)$ ناپایدار است.

۱) برای $n > 2$ سیستم ناپایدار است. ✓
۲) برای $n \geq 0$ خطای حالت دائم سیستم صفر است. ←
۳) برای $n = 0$ خطای حالت دائم پاسخ پله سیستم $e_{ss} = -3$ است.
۴) هر دو گزینهٔ ۱ و ۳ صحیح است.

$n>2 \rightarrow e_{ss} = \infty$

$n=0 \rightarrow e_{ss} = -3$ ← گزینه 3



$e(t) = r(t) - y(t)$

$r(t) = 1\,u(t)$

خطای مقرونا $= r - y$ ≠ خطای حقیقی $= r - \frac{1}{s+4}y$

حلقة بسيطة

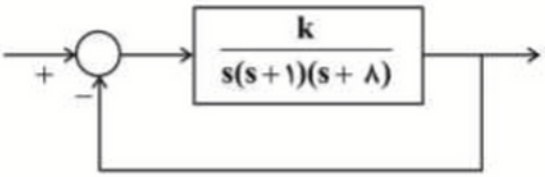
$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{s+1}{s(s+2)}}{1 + \frac{s+1}{s(s+2)}\,\frac{1}{s+4}} = \frac{(s+1)(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 9s + 1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\,E(s) = \lim_{s \to 0} s\,\frac{1}{s}\left(1 - \frac{(s+1)(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 9s + 1}\right) = 1 - 4 = \underline{-3}$$

۹۷

در سیستم حلقه‌بستهٔ زیر، برای تابع تبدیل حلقه‌باز از تقریب مرتبهٔ ۲ (با صرف‌نظر از قطب دورتر) استفاده کرده‌ایم؛ و در سیستم تقلیل‌مرتبه‌یافته، مقدار بهرهٔ k را به‌گونه‌ای محاسبه کرده‌ایم که ضریب میرایی سیستم حلقه‌بستهٔ تقلیل‌مرتبه‌یافته $\zeta = \frac{۱}{۷}$ باشد. خطای حالت دائم به ورودی شیب واحد برای سیستم حلقه‌بستهٔ مرتبهٔ ۳ به ازای این مقدار بهرهٔ k، چقدر است؟

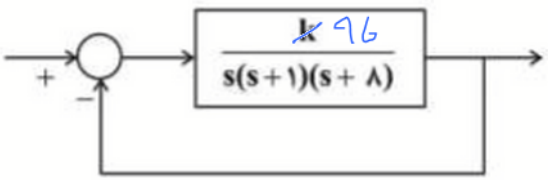


۱) $-\frac{۴}{۴۹}$

۲) $\frac{۴}{۴۹}$

۳) $\frac{۳۲}{۴۹}$

۴) بی‌نهایت



$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+8)}$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{k}{s(s+1)\times 8}$$

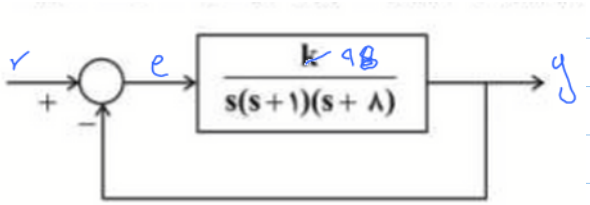


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{8s^2 + 8s + k} \qquad \xi = \frac{1}{7} \rightarrow k = ?$$

$$\frac{k}{8s^2+8s+k} = \frac{\frac{k}{8}}{s^2 + s + \frac{k}{8}} = \frac{}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{k}{8} \end{cases} \qquad \xi = \frac{1}{7} \rightarrow 2\times\frac{1}{7}\omega_n = 1 \rightarrow \omega_n = \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow \frac{49}{4} = \frac{k}{8} \rightarrow \underline{k = 98}$$



خطای ماندگار به ورودی شیب واحد = ؟

۱) بررسی پایداری $\rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{98}{s(s+1)(s+8)} = 0$

$$\Delta(s) = s^3 + 9s^2 + 8s + 98 = 0$$

$9\times 8 < 1\times 98 \rightarrow$ ناپایدار $\rightarrow \underline{e_{ss} = \infty}$

استباه رایج :

① خطای مکان = $r - y$

تعریف $= r - y \rightarrow$ حلقه باز

② نوع ورودی = 1 ③ نوع سیستم = 1 $\qquad L(s) = \frac{98}{s(s+1)(s+8)}$

④ " " = نوع سیستم $\rightarrow$ عددی محدود و غیرصفر $= e_{ss}$

گزینه ۴ صحیح است ← خطا عددی ندارد

(5) $K_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{98}{8}$

$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{8}{98} = \frac{4}{49}$

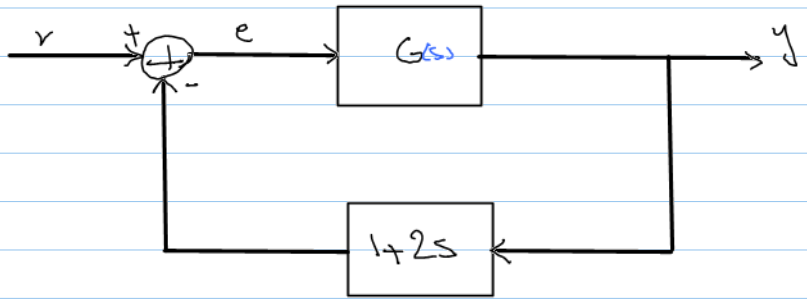
مکانیک ۹۲. در سیستم زیر $G(s)$ از مرتبه دوم است و زمان نشست 2% آن تحت تأثیر ورودی پله واحد برابر یک ثانیه است، همچنین زمان پیک آن $\frac{\pi}{3}$ ثانیه و خطای ماندگار صفر است. G کدام است؟

۱) $\frac{5}{(s+1)(s+5)}$

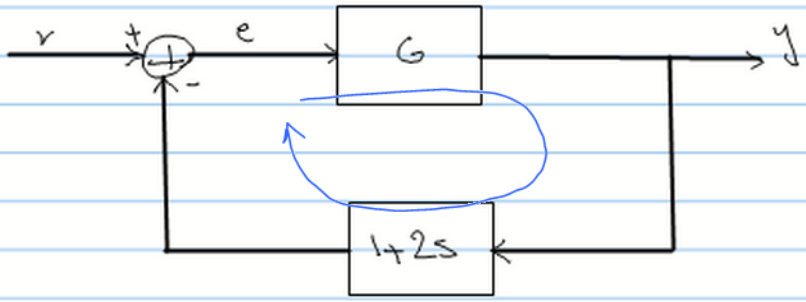
۲) $\frac{25}{(s+1)(s+25)}$

۳) $\frac{25}{(s-1)(s+25)}$

۴) $\frac{25}{s(s-42)}$



(1) $\frac{5}{(s+1)(s+5)}$ (2) $\frac{25}{(s+1)(s+25)}$ (3) $\frac{25}{(s-1)(s+25)}$ (4✓) $\frac{25}{s(s-42)}$



هدف: پاسخ پله واحد ← اول حالت ماندگار $\begin{cases} t_s = 1\ s \\ t_p = \pi/3\ s \end{cases}$ ← زمان بد.

حالت ماندگار $e_{ss} = 0$

شرط ۱: پایداری ← زمان بد.

② خطا تقریبی $= r - y$

خطا کل $= r - (1+2s)\,y$ → حلقه بسته

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + (1+2s)G(s)}$$

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{G(s)}{1 + (1+2s)G(s)}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1 + 2sG(s)}{1 + G(s) + 2sG(s)}\right) = 0$$

$$G(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1 + 2s\frac{k}{(s+a)(s+b)}}{1 + \frac{k}{(s+a)(s+b)} + 2s\frac{k}{(s+a)(s+b)}} = \frac{1}{1 + \frac{k}{ab}} \neq 0$$

طراح سؤال ← خطای حالت ماندگار $E(s) = r - (1+2s)\,Y(s)$

خطای نهایی $= -2 \quad (1+2s)\,y$ → حلقه باز

$\sim \quad \sim = -2\,(1+2s)\,y$

خطای ماندگار صفر ⟸ نوع سیستم $>$ نوع ورودی $= 0$

→ نوع سیستم $= 0$ یا 1 یا 2 یا ....

$$L(s) = \underline{G(s)} \times (1+2s) = \frac{k \times (1+2s)}{\underline{(s+a)}\underline{(s+b)}}$$

a یا b باید صفر باشد.

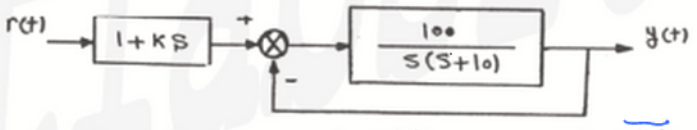
گزینه 4 ⟸ $G(s) = \dfrac{k}{s(s+b)}$

$$G(s) = \frac{25}{s(s-42)}$$

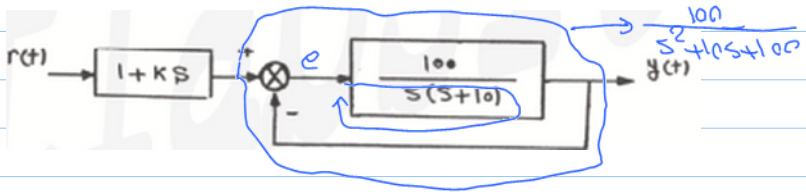
$$\Delta(s) = 1 + \frac{25\,(1+2s)}{s(s-42)} = 0$$

$$= s^2 + 8s + 25 = 0 \rightarrow$$ پایدار است

در سیستم زیر مقدار k را طوری بیابید که خطای حالت دایمی به ورودی $10\,tu(t)$ (10 تا شیب واحد) صفر گردد.



۱) $k = 0/1$ ۲) $k = 0/2$ ۳) $k = 0/5$ ۴) جمیع مقادیر k



$e_{ss} = 0$ $\qquad r(t) = 10t\,u(t)$

۱- شرط اول: پایداری ← $\Delta(s) = 1 + \frac{100}{s(s+10)} = 0$

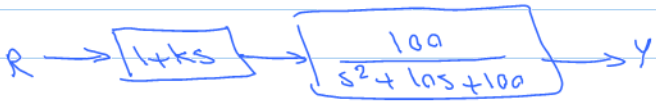
$\Delta(s) = s^2 + 10s + 100 = 0$ پایدار است ، مستقل از k

② خطای مثبتی $= (1+ks)r - y$ $\longrightarrow$ حالت بست

خطای تعریفی $= r - y$

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100(1+ks)}{s^2+10s+100}$$



$$E(s) = \frac{10}{s^2}\left(1 - \frac{100+100ks}{s^2+10s+100}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{10}{s^2}\left(\frac{s^2+(-100k+10)s}{s^2+10s+100}\right)$$

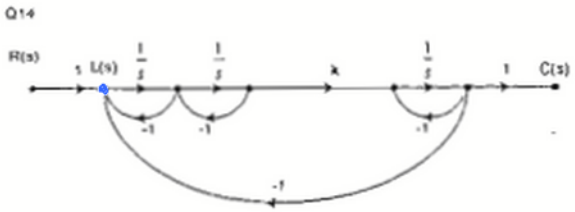
$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{10}{\cancel{s^2}}\left(\frac{\cancel{s}(s+10-100k)}{s^2+10s+100}\right)$$

$$e_{ss} = \frac{10(10-100k)}{100} = 1 - 10k$$

$$e_{ss} = 0 \longrightarrow \quad k = \frac{1}{10}$$

برق ۸۹

در نمودار گذر سیگنال (SFG) مقابل چنانچه $E(s) = R(s) - C(s)$ و ورودی شیب واحد باشد، کدام مورد صحیح است؟



۱) $E(s) = L(s)$ و با $0 < k < 6$ داریم $e_{ss} = \frac{2}{k}$

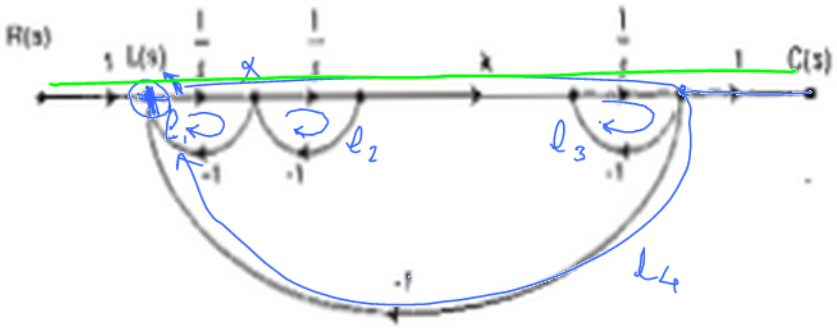
۲) $E(s) \neq L(s)$ و با $k > 0$ داریم $e_{ss} = \frac{1}{k}$

۳) $E(s) = L(s)$ و با $k > 0$ داریم $e_{ss} = \frac{1}{k}$

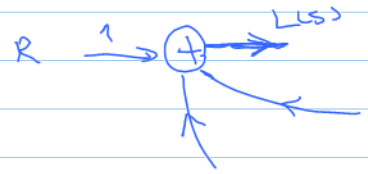
۴) $E(s) \neq L(s)$ و با $0 < k < 6$ داریم $e_{ss} = \frac{2}{k}$

$E(s) = R(s) - C(s)$

Q14



$L(s) = R(s) - C(s) - X(s)$



$E(s) \neq L(s)$

$\Delta(s) = ?$

① شرط روی k ← شرط پایداری

$l_1 = -\frac{1}{s}$ $\quad l_2 = -\frac{1}{s}$ $\quad l_3 = -\frac{1}{s}$ $\quad l_4 = -\frac{k}{s^3}$

مستقل $\begin{cases} l_3 \text{ , } l_1 \\ l_3 \text{ , } l_2 \end{cases}$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s} - \frac{k}{s^3}\right) + \left(-\frac{1}{s} \times -\frac{1}{s} + -\frac{1}{s} \times -\frac{1}{s}\right)$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{3}{s} + \frac{k}{s^3} + \frac{2}{s^2} = 0$$

$$= s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

شرط پایداری: $\begin{cases} k > 0 \\ 3 \times 2 > 1 \times k \end{cases} \rightarrow \underline{0 < k < 6}$ شرط پایداری

$0 < k < 6 \rightarrow e_{ss} =$ می‌توانند هذوبیاشد

$E(s) = R(s) - C(s)$

$\rightarrow \quad E(s) \neq L(s) \rightarrow$ خطأ يسبب

خطأ نتيجة $= L(s)$

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum \Delta_i P_i}{\Delta} \qquad \Delta(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + k}{s^3}$$

$$P_1 = \frac{k}{s^3} \qquad \Delta_1 = 1$$

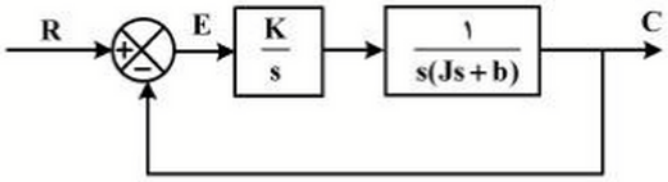
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s^3}}{\frac{s^3 + 3s^2 + 2s + k}{s^3}} = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s + k}$$

$$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s + k}\right) = R(s)\left(\frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + 2s + k}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\,E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s^2}\left(\frac{s(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + k}\right) = \frac{2}{k}$$

۹۷

نمودار جعبه‌ای یک سیستم به شکل زیر است. تابع تبدیل حلقه‌بستهٔ این سیستم و خطای حالت ماندگار آن به ورودی شیب $R(s)=\frac{۱}{s^۲}$، کدام است؟

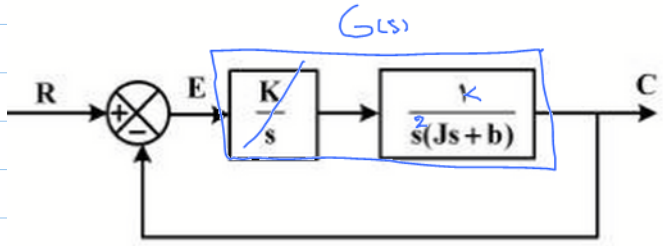


۱) $\frac{K}{s^۲(Js+b)-K}$ - صفر

۲) $\frac{K}{s^۲(Js+b)+K}$ - صفر

۳) $\frac{K}{s^۲(Js+b)-K}$ - بی‌نهایت

۴) $\frac{K}{s^۲(Js+b)+K}$ - بی‌نهایت



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^3+bs^2+k}$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2(Js+b)}$$

$$\Delta(s) = Js^3+bs^2+k = 0$$

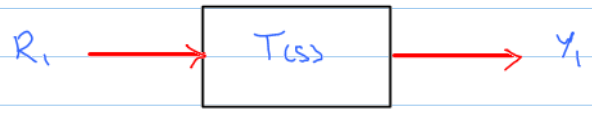
درجه نوع ۲ ← پایداری دارد ← $e_{ss}=0$

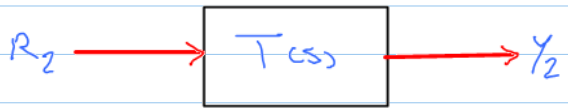
ضریب k را ندارد ← ناپایدار ← $e_{ss}=\infty$

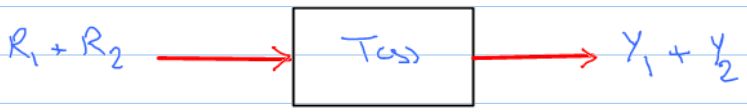
جلسه ۲۳ کنترل خطی

خطای حالت ماندگار در پاسخ به ورودی های استاندارد:

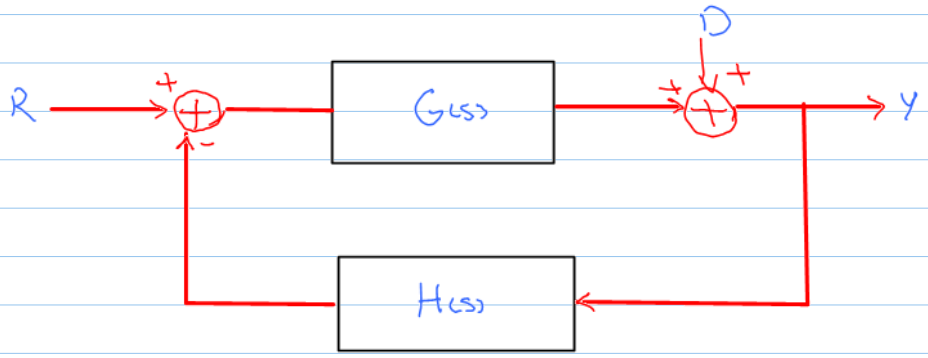
مقدمه: مفهوم سیستم LTI:







جمع آثار

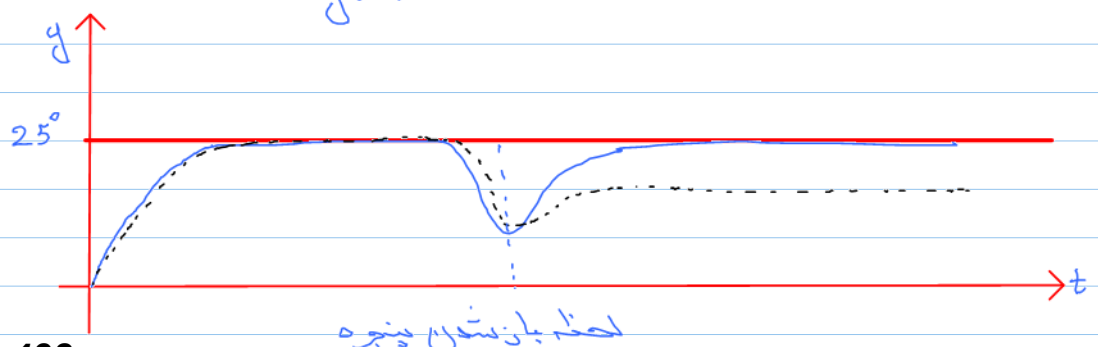


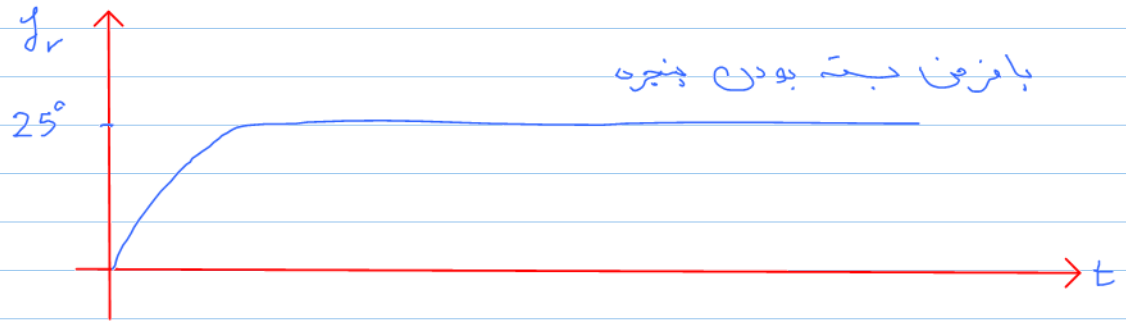
$$y(t) = y_r(t) + y_D(t)$$

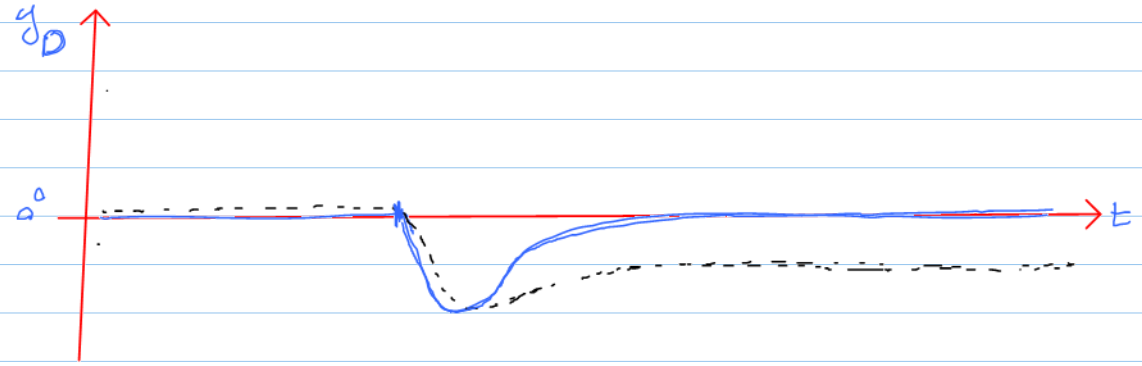
y_r : پاسخ سیستم با فرض $D=0$

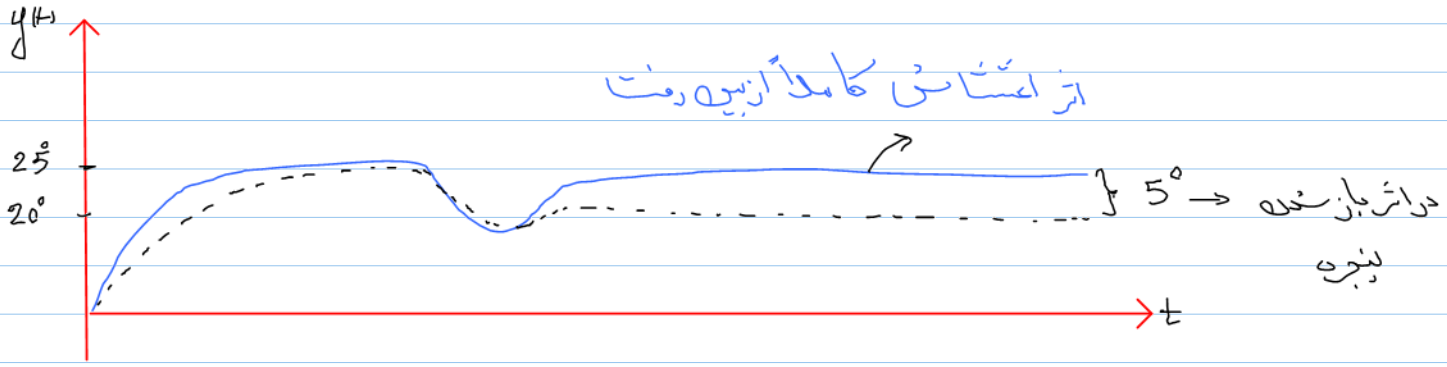
y_D : ~ ~ ~ ~ $R=0$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$









مقدار خروجی − مقدار مطلوب = خطا

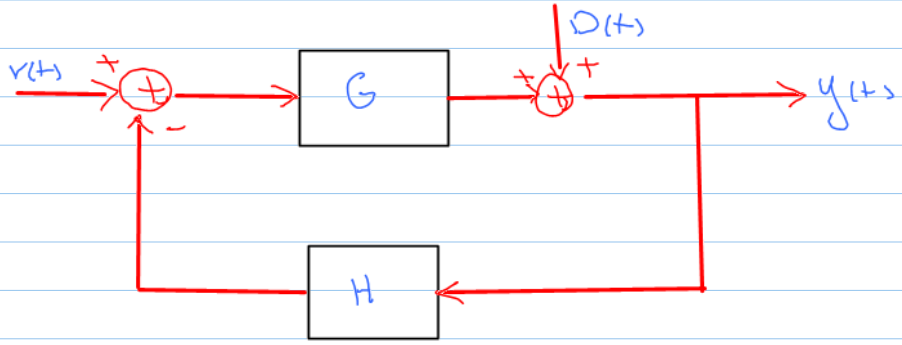
$e = r(t) - y(t)$

اغتشاش: سیگنال ناخواسته ← دوست داریم اثر آن حذف شود.

$e_D = 0 - y_D$

$e_D = -y_D(t)$

پس خطای ناشی از اغتشاش = منفی مقدار خروجی ناشی از اغتشاش



$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$e(t) = r(t) - \left(y_r(t) + y_D(t) \right)$$

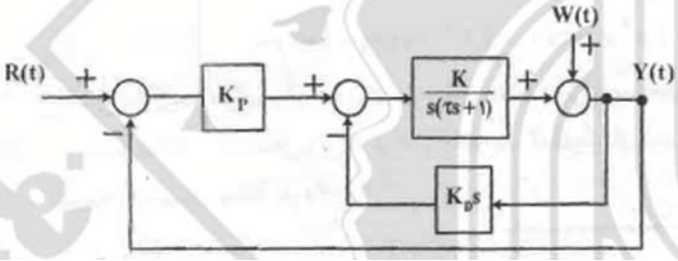
$$e(t) = r(t) - y_r(t) - y_D(t)$$

$$e(t) = e_r(t) + e_D(t)$$

برای محاسبه خطای استاتیک همواره از روش حالت بسته استفاده می‌کنیم.

برق ۹۶

سیستم زیر را درنظر بگیرید. اگر سیگنال‌های $W(t)$ و $R(t)$ پله واحد باشند، خطای حالت دائم ناشی از $R(t)$ و $W(t)$ به ترتیب چگونه خواهد بود؟

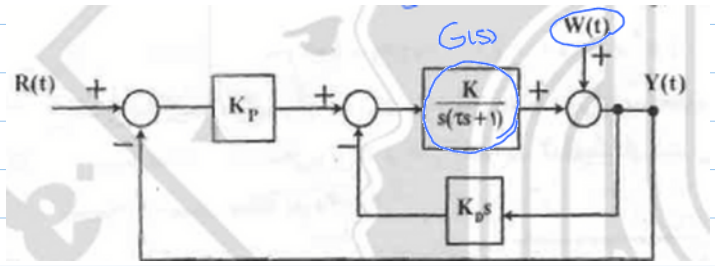


۱) صفر ـ صفر

۲) غیر صفر محدود ـ نامحدود

۳) غیر صفر محدود ـ صفر

۴) صفر ـ نامحدود



$G(s) = \frac{K}{s(\tau s+1)}$ دو تا حلقه بسته

در این حالت $\Delta(s) \to 0$ ← پایداری ← ربطی به ورودی ندارد ←

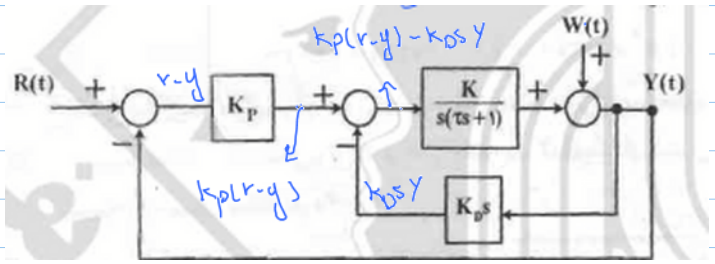
پایدار

ناپایدار ← هر دو حالت e_r, e_D دارد

∞ تابع از ناپایداری ندارد ← بازی به بررسی پایداری ندارد.

$e(t) = r(t) - y(t)$

$E(s) = R(s) - Y(s)$; $Y(s) = ?$



$Y(s) = W(s) + G(s)(k_p r - k_p y - k_D s Y)$

$Y(s)[1 + k_p G(s) + k_D s G(s)] = W + k_p G(s) r(s)$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + k_p G + k_D s G} + \frac{k_p G\, r}{1 + k_p G + k_D s G}$$

$$E(s) = R(s) - \frac{W(s)}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)} - \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G + k_D s G} R(s)$$

e_r , e_D

$$E(s) = \underbrace{\frac{1 + k_D s G(s)}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)} R(s)}_{e_r} - \underbrace{\frac{W(s)}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)}}_{e_D}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s E(s) = \lim_{s \to 0} \left(\not{s} \frac{1}{\not{s}} \times \frac{1 + k_D s G(s)}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)} - \not{s} \frac{1}{\not{s}} \frac{1}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)} \right)$$

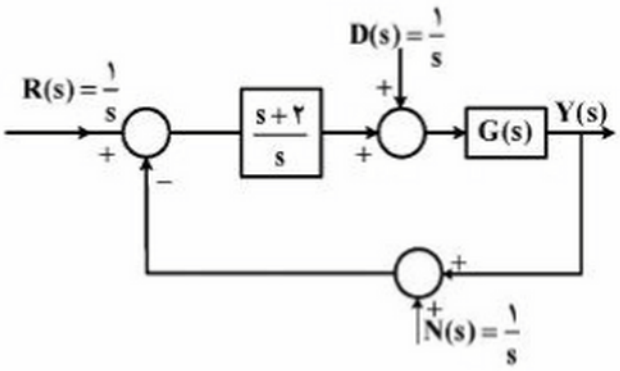
$$= \underbrace{\lim_{s \to 0} \frac{1 + k_D s G(s)}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)}}_{e_r} - \underbrace{\lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + k_p G(s) + k_D s G(s)}}_{e_w}$$

$$G(s) = \frac{k}{s(2s+1)}$$

$$e_{ss} = \underbrace{0}_{e_2} - \underbrace{0}_{e_1}$$

برق ۹۶

خطای حالت دائم سیستم زیر به ورودی پلّه چقدر است؟ (با فرض پایداری سیستم حلقه بسته)

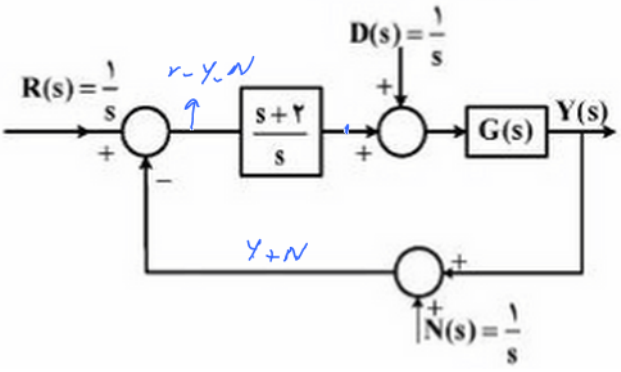


۱) ۱−

۲) ۰

۳) ۱+

۴) ۲



② روش حلقه بسته

$e(t) = r(t) - y(t)$

$E(s) = R(s) - Y(s)$, $Y(s) = ?$

$$Y(s) = G(s) \times \left(D + \frac{s+2}{s}(r - N - y) \right)$$

$$Y(s)\left[1 + \frac{s+2}{s} G\right] = GD + \frac{s+2}{s} Gr - \frac{s+2}{s} GN$$

$$Y(s)\left(s + (s+2)G\right) = sGD + (s+2)Gr - (s+2)GN$$

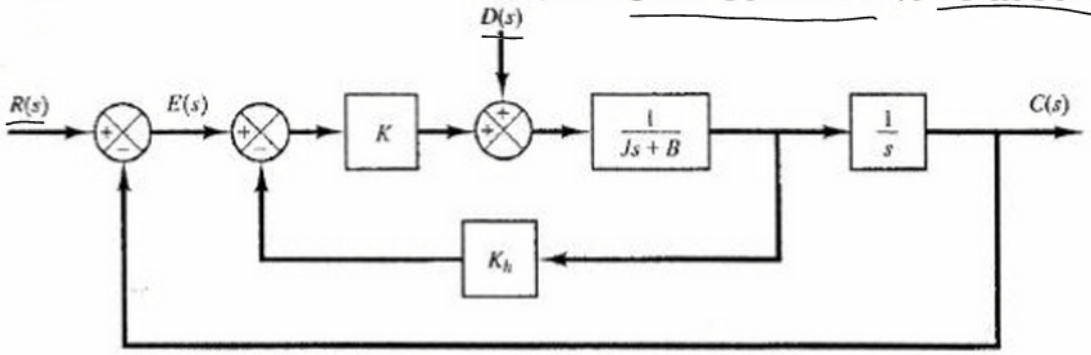
$$Y = \frac{sG(s)D(s)}{s+(s+2)G(s)} + \frac{(s+2)G(s)R(s)}{s+(s+2)G(s)} - \frac{(s+2)G(s)}{s+(s+2)G(s)} N(s)$$

$$E(s) = R(s) - \left(\frac{sG(s)}{s + sG(s) + 2G(s)} D(s) + \frac{(s+2)G(s)}{s + sG(s) + 2G} \left(R(s) - N(s)\right) \right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{s} - \left(\frac{sG(s)}{s + sG(s) + 2G(s)} \frac{1}{s} + \frac{(s+2)G(s)}{s + sG(s) + 2G(s)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \right) \right) \right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \left(1 - \frac{sG(s)}{s + sG(s) + 2G(s)} \right) = 1$$

در حضور ورودی مرجع $R(s)$ و اغتشاش $D(s)$، مقدار خطای ماندگار سیستم حلقه بستهٔ زیر با ورودی شیب واحد برای ورودی R و پله با دامنهٔ d برای اغتشاش D، کدام است؟

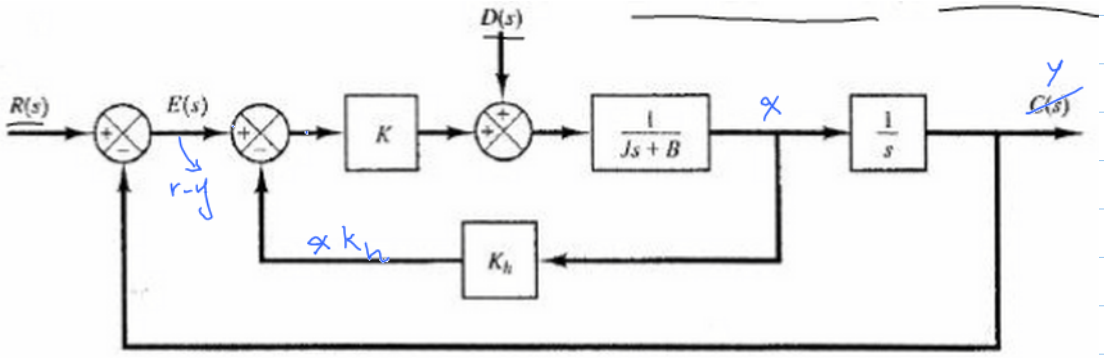


۱) $\frac{d+kk_h}{k}-\frac{B}{k}$

۲) $\frac{B+kk_h}{k_h}-\frac{d}{k_h}$

۳) $\frac{Bk}{k_h}-\frac{d}{k}$

۴) $\frac{B+kk_h}{k}-\frac{d}{k}$



$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad E(s) = R(s) - Y(s)$

$Y(s) = ?$

$Y(s) = \frac{1}{s} X(s) \rightarrow X(s) = s\,Y(s)$

$$X(s) = \frac{1}{Js+B}\left(D + k(r - y - k_h X)\right)$$

$$sY(s) = \frac{1}{Js+B}\left(D + kr - ky - k_h s\,Y(s)\right)$$

$$Y(s)\left(s + \frac{k}{Js+B} + \frac{k_h s}{Js+B}\right) = \frac{D}{Js+B} + \frac{kr}{Js+B}$$

$$Y(s)\left(Js^2 + Bs + k + k_h s\right) = D + kR$$

$$Y(s) = \frac{D(s)}{Js^2 + (B+k_h)s + k} + \frac{k}{Js^2 + (B+k_h)s + k} R(s)$$

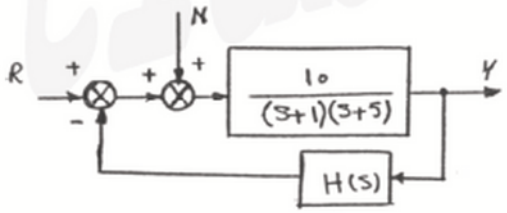
$$E(s) = R(s) - \frac{k}{Js^2 + (B+k_h)s + k} R(s) - \frac{D(s)}{Js^2 + (B+k_h)s + k}$$

$$E(s) = \frac{Js^2 + (B+k_h)s}{Js^2 + (B+k_h)s + k} R(s) - \frac{D(s)}{Js^2 + (B+k_h)s + k}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{(Js + B + k_h)s}{Js^2 + (B+k_h)s + k}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{Js^2 + (B+k_h)s + k}\frac{d}{s}\right)$$

$$e_{ss} = \frac{B + kh}{k} - \frac{d}{k}$$

در سیستم کنترل شکل مقابل $H(s)$ را چگونه انتخاب کنیم تا خطای حالت دایمی ناشی از اغتشاش پله N برابر صفر باشد.

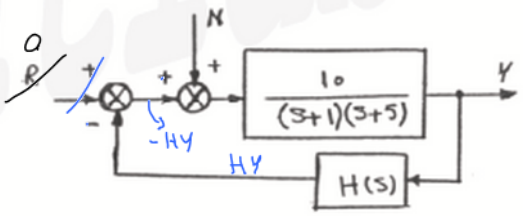


۱) $\frac{0/5}{s(s+1)}$

۲) $\frac{1/55}{s+2}$

۳) $\frac{0/5}{(s+1)(s+10)}$

۴) $\frac{1/5(s+1)}{s+2}$



$e_N = 0$ حدوث

$e_N = -y_N$

$$\frac{Y_{(S)}}{N} = \frac{10}{(S+1)(S+5)} \left(N(S) + (-H(S)\, Y(S)) \right)$$

$$\frac{Y_{(S)}}{N} = \frac{\frac{10}{(S+1)(S+5)} N(S)}{1 + \frac{10}{(S+1)(S+5)} H(S)} = \frac{10}{(S+1)(S+5) + 10\, H(S)} N(S)$$

$$e_{ss} = -y_N(\infty) = -\lim_{S \to 0} S\, Y_N(S) = -\lim_{S \to 0} S \frac{10}{(S+1)(S+5) + 10\, H(S)} \frac{1}{S}$$

$$e_{ssN} = \frac{-10}{5 + 10\, H(S)_{\infty}} = 0$$

$5 + 10\, H(S) = \infty$

$H(S) = \infty$

خطای حالت ماندگار در فضای حالت:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

(1) بررسی پایداری $\Delta(s) = \det(sI - A)$

$$e(t) = u(t) - y(t)$$

(2)

ورودی پله واحد $\rightarrow$ $e_{ss} = 1 + CA^{-1}B - D$

ورودی شیب واحد $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} (1 + CA^{-1}B - D)t + CA^{-2}B$

ورودی سهمی $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} (1 + CA^{-1}B - D)\frac{t^2}{2} + CA^{-2}Bt + CA^{-3}B$

(2) $e(t) \neq u(t) - y(t)$ $\qquad e(t) = u(t) - 2y(t)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

↓

محاسبه تبدیل لاپلاس خطای خواسته شده

↓

محاسبه e_{ss} از قضیه مقدار نهایی

برق ۸۳، ۸۶ و ۸۹

معادلات دینامیکی حالت در سیستمی بصورت زیر است

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - \alpha x_2 + 2u$$

$$y = x_1$$

که در آن u و y به ترتیب ورودی و خروجی سیستم و $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ بردار حالت است. خطای ماندگار سیستم $u(t) - y(t)$ به ورودی شیب واحد کدام است؟

۱) $-\frac{\alpha}{2}$ اگر α منفی باشد. ۲) به هر حال ∞ است. ۳) صفر اگر α مثبت باشد. ۴) $\frac{+\alpha}{2}$ اگر α مثبت باشد.

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_1 - \alpha x_2 + 2u$

$y = x_1$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\alpha \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$

① $\Delta(s) = \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\alpha \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+\alpha \end{bmatrix} \right)$

$\Delta(s) = s^2 + \alpha s + 2$

$\alpha > 0$ پایدار $\rightarrow e_{ss}$

$\alpha < 0$ ناپایدار $\rightarrow e_{ss} = \infty$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + CA^{-1}B - D \right) t + CA^{-2}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\alpha & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{4} - \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{4} \\ -\frac{\alpha}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$CA^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$CA^{-2}B = \frac{\alpha}{2}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \cancel{t + t} \overset{0}{\cancel{-0}} \right) t + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \leftarrow \quad \alpha > 0$$

$\alpha > 0 \rightarrow e_{ss} = \alpha/2$

$\alpha < 0 \rightarrow e_{ss} = \infty$

$r(t) = (a + bt + ct^2 + \cdots)u(t)$

خطای حالت ماندگار به ورودی های ترکیبی:

هرگاه ورودی ترکیبی بود، بزرگترین توان t را به عنوان ورودی در نظر گرفته و بقیه قسمتهای ورودی را حذف کنید.

حذف

$r(t) = \cancel{a\hat{t}u(t)} + b\overset{1}{t}u(t)$

$r(t) = btu(t)$

بود ۸۶.

در یک سیستم با فیدبک واحد منفی $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+3)}$ است. k را طوری انتخاب می‌کنیم که در معرفی فضای حالت سیستم مقدار ویژه‌ای در ۳/۵- داشته باشیم. در این صورت خطای ماندگار سیستم به ورودی $(0/5 + 2t)u(t)$ چقدر است؟

۱) $\frac{35}{48}$ ۲) $\frac{48}{35}$ ۳) صفر ۴) ∞

$r(t) = (2t + 0.5)\,u(t)$

$r(t) = 2t\,u(t)$ $\quad$ خطای $e_{ss} = ?$



$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+3)}$$

① بررسی پایداری:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + k = 0$$

چند ریشه بین صفر و یک مقدار ویژه در -3.5 دارد. $\leftarrow$ ریشه‌ها $\rightarrow \det(sI - A) = 0$

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0$$

$$\Delta(-3.5) = (-3.5)^3 + 4(-3.5)^2 + 3 \times -3.5 + k = 0$$

$$\rightarrow k = \frac{35}{8}$$

$$G(s) = \frac{35/8}{s(s+1)(s+3)} \qquad e_{ss} = ? \qquad r(t) = 2t\,u(t)$$

① $\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + \frac{35}{8} = 0$

$4 \times 3 > 1 \times \frac{35}{8}$ ✓ $\rightarrow$ پایدار

② خطای تعریفی $= r - y$ $\rightarrow$ حلقه باز

خطای سنسور $= r - y$

③ نوع ورودی $= 1$ $=$ نوع سیستم $= 1$ $\qquad L(s) = \frac{35/8}{s(s+1)(s+3)}$

e_{ss} = عکس ضریب ثابت ورودی

④ ورودی: شیب $\rightarrow$ $k_v = \lim_{s \to 0} sL(s) = \frac{35}{24}$

(5) $e_{ss} = \frac{2}{k_v} = \frac{2}{\frac{35}{24}} = \frac{48}{35}$

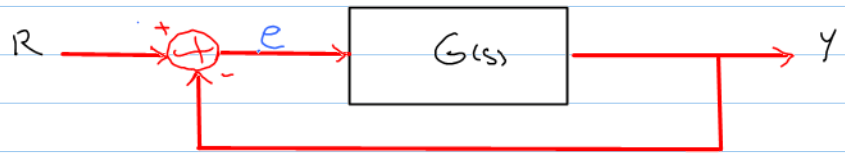
برق ۷۷ و مکانیک ۸۳

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم با بیشخور واحد منفی به صورت زیر است:

$$M(s) = \frac{4s+4}{s^3+2s^2+4s+4}$$

خطای ماندگار به ورودی $r(t) = (3 - t + \frac{t^2}{4})u(t)$ کدام است؟

۰ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$



$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4s+4}{s^3+2s^2+4s+4}$ $\quad r(t) = (3 - t + \frac{t^2}{4})u(t)$ $\quad e_{ss} = ?$

$r(t) = \frac{1}{4}t^2 u(t)$

(1) ✓

(2) خطای تعریفی $= r - y$ $\rightarrow$ حلقه باز

خطای $= r - y$ ✓

(3) مرحله سوم: برای تعیین e_{ss} بود، عدد عدد یا ∞ بودن

نوع ورودی $= 2$

$L(s) = G(s) \rightarrow G(s) = \frac{4s+4}{s^3+2s^2}$

$L(s) = \frac{4s+4}{s^2(s+2)}$

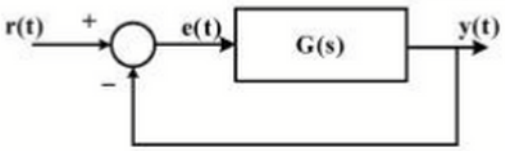
نوع سیستم $= 2$ $=$ نوع ورودی $\rightarrow$ e_{ss} = عدی عدد و غیر صفر

(4) ورودی: سهمی $\rightarrow$ $k_a = \lim_{s\to 0} s^2 L(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{4s+4}{s^2(s+2)} = 2$

(5) $e_{ss} = \frac{2 \times 1/4}{k_a} = \frac{2 \times 1/4}{2} = 1/4$ ✓

برق ۹۵

بلوک دیاگرام زیر را در نظر بگیرید. دسته دوم



در صورتی که تابع تبدیل به صورت $G(s)=\frac{۲}{s^۲+as+۲}$ باشد، خطای $(e(t))$ حالت ماندگار سیستم به ورودی $r(t)=u(t)+۲tu(t)$، کدام است؟

۱) صفر
۲) بستگی به مقدار a دارد
۳) ۲a
۴) بی‌نهایت



$G(s) = \frac{2}{s^2+as+2}$, $r(t) = u(t) + 2tu(t)$

$r(t) = 2tu(t)$

① $\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$

$\Delta = 1 + \frac{2}{s^2+as+2} = 0$

$\Delta = s^2 + as + 4 = 0$

$a > 0$ پایدار $\rightarrow e_{ss} = ? \infty$

$a < 0$ ناپایدار $\rightarrow e_{ss} = \infty$

$a > 0$ ↓

② خطای شکل $= r - y$ $\rightarrow$ حلقه باز

خطای تقریبی $= r - y$

③ نوع ورودی $= 1$ $>$ نوع سیستم $= 0 \rightarrow e_{ss} = \infty$

$L(s) = G(s) = \frac{2}{s^2+as+2}$

جلسه ۲۴ کنترل خطا

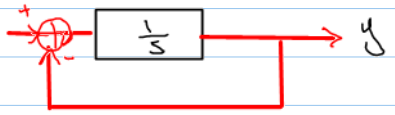
محاسبه شاخص خطا:

$$e_{ss} = e(t)\Big|_{t=\infty} = e(\infty)$$

$$J = \int_0^\infty e(t)\,dt \quad \text{یا} \quad J = \int_0^\infty e(t)\,e^{j\omega t}\,dt$$

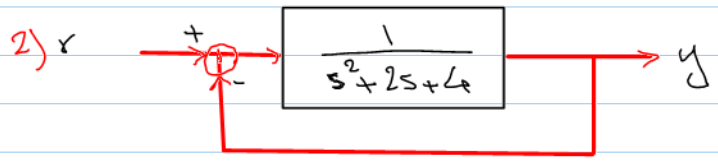
① اگر خطا $e(t)$ به صورت تابعی از زمان ساده باشد، $e(t)$ را محاسبه می‌کنیم و سپس J را محاسبه می‌کنیم.

② اگر خطا $e(t)$ ساده نباشد، سعی کنید J را با تعریف تبدیل لاپلاس معادل کنید.

1) 

$r(t) = u(t)$

$$J = \int_0^\infty e(t)\,dt = ?$$

2) 

$$J = \int_0^\infty t\,e(t)\,dt = ?$$

1) $e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s+1}$$

$$E(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow \underline{e(t) = e^{-1t}}$$

$$J = \int_0^\infty e(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \frac{1}{-1}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right) = 1$$

2) $e(t) = R(t) - y(t) \rightarrow E(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s^2+2s+5}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2+2s+4}{s^2+2s+5}\right)$$

$e(t) = ?$

$f(t) \rightarrow F(s)$ $\qquad F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

$$E(s) = \int_0^\infty e(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$J = \int_0^\infty t\, e(t)\, dt \rightarrow E(s)$$

$$\frac{dE(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e(t)\, e^{-st}\, dt\right)$$

$$= \int_0^\infty e(t)\, \frac{d}{ds}\left(e^{-st}\right) dt$$

$$-1\,\frac{dE(s)}{ds} = -1\int_0^\infty e(t)\left(-te^{-st}\right) dt$$

$$-\frac{dE}{ds} = \int_0^\infty t\, e(t)\, \underbrace{e^{-st}}_{1}\, dt$$

$$J = \int_0^\infty t\, e(t) \times 1\, dt$$

$e^{-st} = 1 \qquad s = ?$ $\qquad e^{-0\times t} = e^0 = 1$

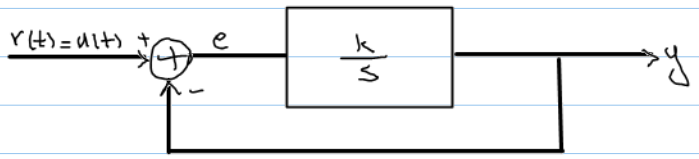
$$\left.\frac{dE}{ds}\right|_{s=0} = \int_0^\infty t\, e(t)\, dt = J$$

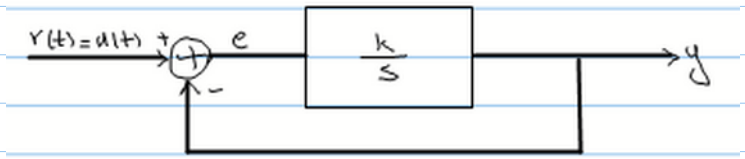
$$E(s) = \frac{s^2+2s+4}{s^3+2s^2+5s} \qquad \frac{dE}{ds} = ?$$

$$\frac{dE}{ds} = \frac{(2s+2)(s^3+2s^2+5s) - (3s^2+4s+5)(s^2+2s+4)}{(s^3+2s^2+5s)^2}$$

کنکوری ۹۲

در سیستم زیر k را به نحوی تعیین کنید که معیار خطای $\int_0^{\infty} t\,e^2(t)\,dt$ کمتر یا مساوی 100 باشد.





$$J = \int_0^\infty t\, e^2(t)\, dt \le \frac{1}{100}$$

$$e(t) = R(t) - y(t) \qquad E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{k}{s+k}\right) = \frac{1}{s+k}$$

$$E(s) = \frac{1}{s+k} \qquad e(t) = ? \qquad e(t) = e^{-kt}$$

$$J = \int_0^\infty t\,(e^{-kt})^2\, dt = \int_0^\infty t\, e^{-2kt}\, dt$$

$$\frac{1}{s^2} = F(s) = \int_0^\infty \underbrace{t}_{f(t)}\, e^{-\overset{2k}{\cancel{s}}t}\, dt$$

$$\frac{1}{2k\,s^2} = \int_0^\infty t\, e^{-\overset{2k}{s}t}\, dt$$

$$\frac{1}{4k^2} = \int_0^\infty t\, e^{-2kt}\, dt = J \qquad J = \frac{1}{4k^2} \le \frac{1}{100}$$

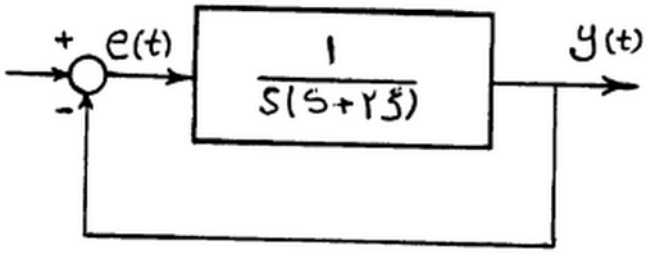
$$4k^2 \ge 100 \rightarrow \qquad k^2 \ge 25 \rightarrow \begin{cases} k > 5 \ \checkmark \\ k < -5 \rightarrow \text{ناپایدار} \end{cases}$$

پایداری : $\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s} = 0 \rightarrow \Delta = s + k = 0$

← شرط پایداری : $k > 0 \rightarrow$

$k < 0 \rightarrow \qquad e(t) = \infty \qquad J = \int_0^\infty t \times \infty^2\, dt = \infty$

در سیستم کنترل زیر، $\zeta \geq 1$ و $y(t)$ پاسخ پلهٔ سیستم می‌باشد. اگر $e(t) = 1 - y(t)$ بیانگر خطای پاسخ پلـه سیـستم باشد، در این صورت مقدار شاخص $J = \int_0^{\infty} t\,|\dot{e}(t)|\,dt$، کدام است؟

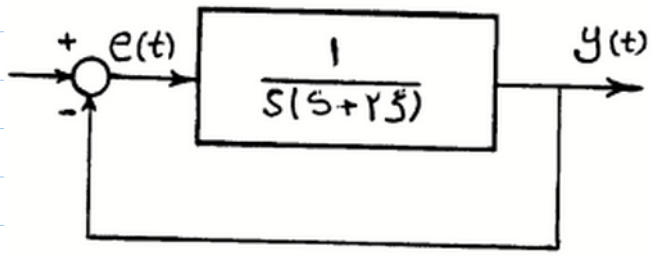


۱) 2ζ

۲) ζ

۳) ۱

۴) ۲



$r(t)$ = واحد بله $\xi \geq 1$

$y(t)$ = جابجایی $J = \int_0^\infty t\,|\dot{e}(t)|\,dt = ?$

$e(t) = 1 - y(t)$

$$E(s) = \frac{1}{s} - Y(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s^2+2\xi s+1}\right) = \frac{s+2\xi}{s^2+2\xi s+1}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}\{t\,|\dot{e}(t)|\} = \int_0^\infty t\,|\dot{e}(t)| \times 1\, dt \Big|_{s=0}$$

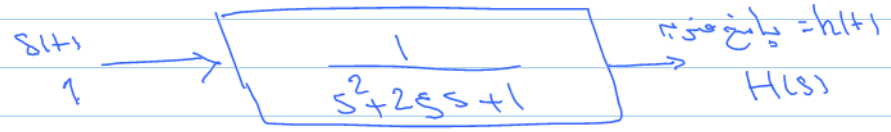
$$e(t) = 1 - y(t)$$

$$\dot{e}(t) = 0 - \dot{y}(t) = -\dot{y}(t)$$

$y(t)$: جابجایی

$\dot{y}(t)$: جابجایی سرعت

$$\dot{y}(t) = h(t)$$



$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = ?$$

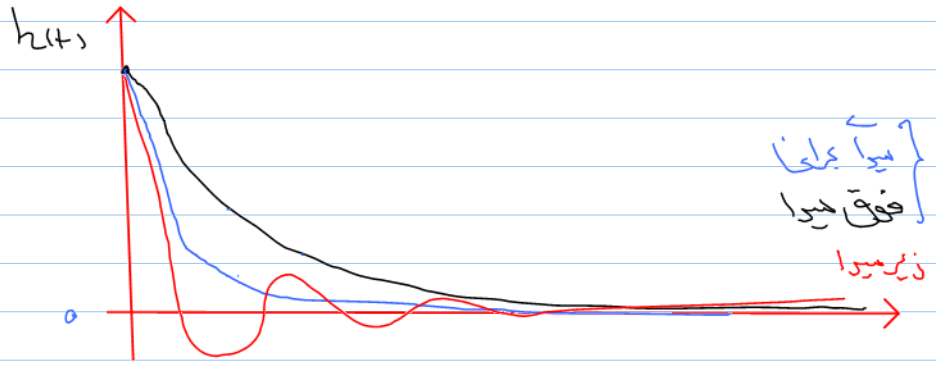
$$H(s) = 1 \times \frac{1}{s^2+2\xi s+1}$$

$$\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) = -h(t) \qquad -\dot{e}(t) = h(t)$$

$$\mathcal{L}\{\overbrace{-\dot{e}(t)}^{h(t)}\} = \frac{1}{s^2+2\xi s+1}$$

$$\mathcal{L}\{t\,|\dot{e}(t)|\} = ?$$

$$\dot{e}(t) = -h(t) \qquad |\dot{e}(t)| = |-h(t)| = |h(t)|$$



فوق میرا $\rightarrow \xi \geq 1$

یا میرای بحرانی

$h(t)$ در سیستم فوق میرا و میرای بحرانی همواره مثبت است.

$$|2| = 2 \qquad |h(t)| = h(t)$$

$$|\dot{e}(t)| = h(t)$$

$$\mathcal{L}\{|\dot{e}(t)|\} = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s^2+2\xi s+1} = H(s)$$

$$\mathcal{L}\{t\,|\dot{e}(t)|\} = \mathcal{L}\{t\,h(t)\} = ?$$

$$h(t) \longrightarrow H(s) \qquad x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$t\,h(t) \longrightarrow -\frac{dH(s)}{ds} \qquad t\,x(t) \longrightarrow -\frac{dX(s)}{ds}$$

$$\mathcal{L}\{t\,|\dot{e}(t)|\} = -\frac{dH(s)}{ds} = -\left(\frac{0-(2s+2\xi)\times 1}{(s^2+2\xi s+1)^2}\right)$$

$$\mathcal{L}\{t\,|\dot{e}(t)|\} = \frac{2s+2\xi}{(s^2+2\xi s+1)^2}$$

$$J = \int_0^\infty t\,|\dot{e}(t)|\,dt = ?$$

تعريف لابلاس

$$\frac{2s+2\xi}{(s^2+2\xi s+1)^2} = \int_0^\infty t\,|\dot{e}(t)|\,e^{-st}\,dt$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$e^{-st} = 1 \rightarrow s=0$$

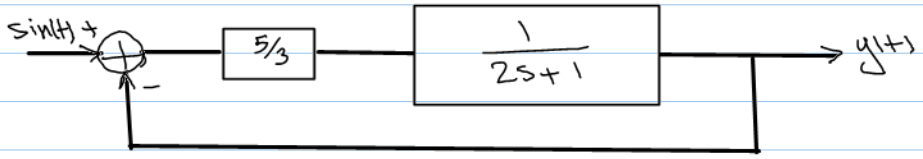
$$\frac{2\times 0 + 2\xi}{(0^2 + 2\xi\times 0 + 1)^2} = \int_0^\infty t\,|\dot{e}(t)|\times 1\,dt = J$$

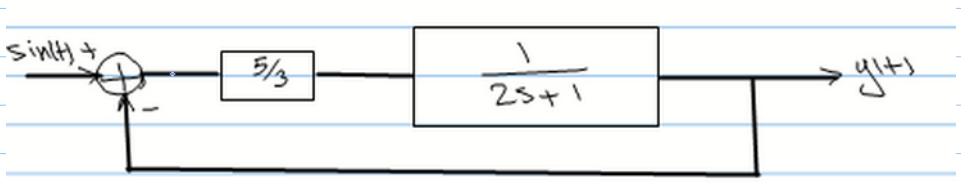
$$\boxed{2\xi = J}$$

هستهای ۷۴.

در سیستم زیر، خطای حالت ماندگار و بیشترین مقدار جایز حالت دائمی کدام است؟

۱) ۰٫۵ و ۱ ۲) ۰٫۵ و ۰٫۵ ۳) ∞ و ۰٫۵ ۴) غیرممکن و ۰٫۵





راه حل اشتباه:

1) پایداری

$$\Delta(s) = 1 + \frac{5}{3} \times \frac{1}{2s+1} = 0$$

$$\Delta(s) = 6s + 8 = 0 \longrightarrow$$ پایدار

2) خطای دائمی = $r(t) - y(t)$

$\longrightarrow$ حالت ماندگار

خطای تقریبی $\sim = r(t) - y(t)$

3) نوع ورودی = ? X $\qquad r(t) = \sin(1t)$

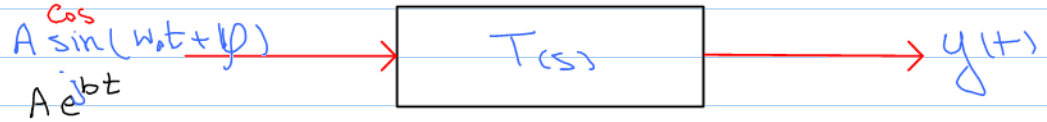
حالت بسته $\longrightarrow$ $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$

$$E(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(1 - \frac{5/3}{2s+8/3}\right)$$

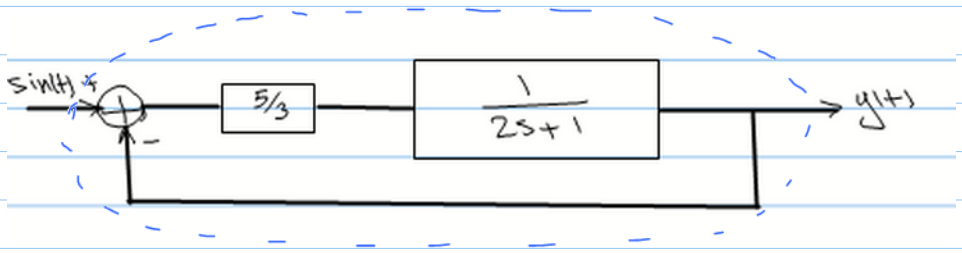
$$E(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(1 - \frac{5}{6s+8}\right) = \frac{1}{s^2+1} \times \frac{6s+3}{6s+8}$$

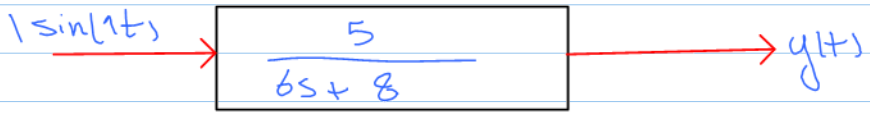
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s^2+1} \frac{6s+3}{6s+8} = 0$$

$r(t) = \sin(t)$



$$\begin{cases} y(t) = A\,|T(jw_0)| \overset{\cos}{\sin}(w_0 t + \varphi + \angle T(jw_0)) \\ y(t) = A\,|T(jb)|\, e^{j(bt + \angle T(jb))} \end{cases}$$



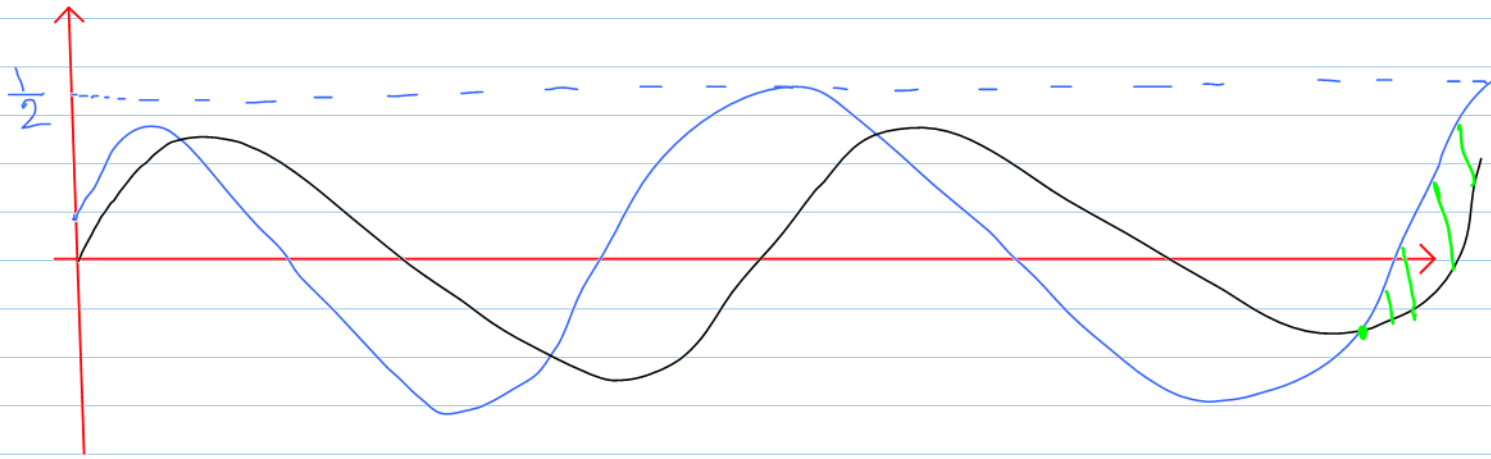


$y(t) = ?$ $\quad y(t) = 1 \left| \frac{5}{6(j1)+8} \right| \sin\left(1t + \angle \frac{5}{6j1+8}\right)$

$$\left| \frac{5}{j6+8} \right| = \frac{5}{\sqrt{36+64}} = \frac{1}{2}$$

$$\angle \frac{5}{j6+8} = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin\left(t - \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \qquad y_{max} = \frac{1}{2}$$



e_{ss} = حالت دائمی یا پایدار

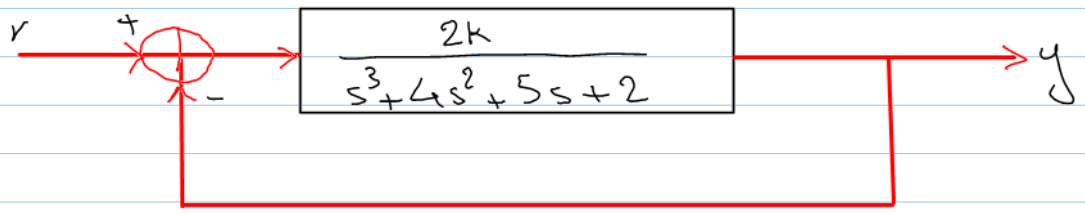
کمترین مقدار خطای ماندگار ۰ ← شرط پایداری

برق ۷۵. تابع تبدیل حلقه‌باز یک سیستم حلقه‌بسته با فیدبک واحد منفی به صورت $G(s)$ است.

$$G(s) = \frac{2k}{s^3+4s^2+5s+2}$$

حداقل مقدار حالت ماندگار سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد کدام است؟

۱) ۰.۵ ۲) ۱ ۳) ∞



① $\Delta(s) = 1 + \frac{2k}{s^3+4s^2+5s+2} = 0$

$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 + 2k = 0$

شرط پایداری:
$2+2k>0 \rightarrow k>-1$
$4\times5 > 1\times(2+2k) \rightarrow k<9$

2) خطای سنگی $= r - y$ → حلقه باز

تعریف نشده $= r - y$

3) نوع ورودی $= 0$ $\quad r(t) = 1\,u(t)$

نوع سیستم $= 0$ $\quad L(s) = \frac{2k}{s^3+4s^2+5s+2}$

نوع سیستم = نوع ورودی → e_{ss} = عدد و غیر صفر

4) $r(t) = 1u(t) \longrightarrow kp = \lim_{s\to0} L(s) = k$

5) $e_{ss} = \frac{1}{1+kp} = \frac{1}{1+k}$

هر چه k بزرگتر ← e_{ss} کوچکتر

حداکثر مقدار مجاز k برای پایداری: $k = 9 \rightarrow e_{ss\,min} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$

حداقل خطا

↓

e_{ss} برحسب K

↓

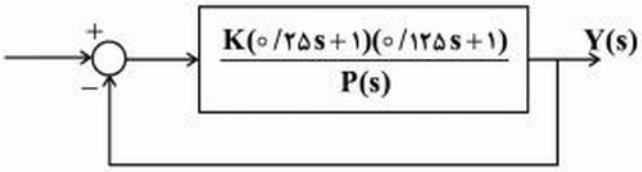
مقدار مجاز K برای پایداری

↓

$e_{ssmin} \Rightarrow$ K_{max}

در سیستم حلقه بستهٔ زیر، جدول راث نسبت به خط $s=-1$ برای چند جمله‌ای $P(s)$ مطابق جدول زیر حاصل شده است. خطای حالت دائم سیستم حلقه بسته به ورودی پله کدام است؟ ضرایب سطر s^1 ابتدا همگی صفر بوده‌اند.

s^4	۱	۲۸	−۲۹
s^3	۱۰	−۱۰	۰
s^2	۲۹	−۲۹	۰
s^1	+۵۸	۰	۰
s^0	−۲۹	۰	۰



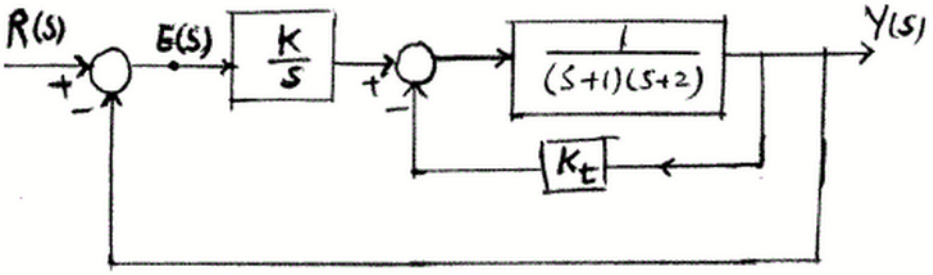
۱) چون سیستم حلقه باز ناپایدار است، خطای حالت دائم، قابل محاسبه نیست.

۲) با توجه به اینکه محل قطب‌های تابع تبدیل حلقه بسته نامشخص است، نمی‌توان نظر داد.

۳) خطای حالت دائم ورودی پله، صفر است.

۴) خطای حالت دائم ورودی پله سیستم حلقه بسته برابر $(\frac{۱}{۱+k})$ است.

سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید حداقل خطای حالت دائم سیستم بـه ورودی شیب واحد کدام است؟



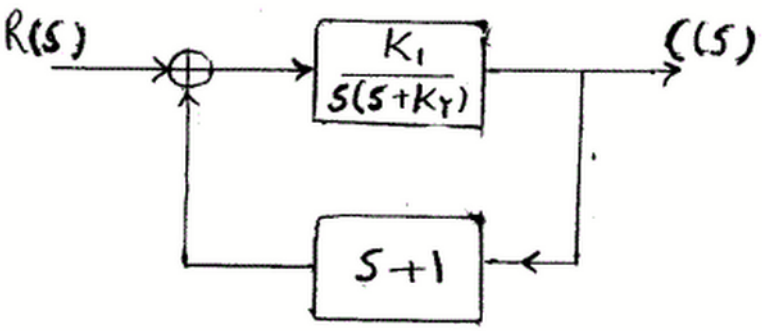
۱) ۰

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ∞

۴) به مقادیر K و K_t بستگی دارد و قابل محاسبه نیست.

نوع سیستم و خطای حالت دائم به ورودی شیب واحد سیستم زیر در کدام گزینه آمده است؟



۱) ۱ و $e_{ss}=\frac{۱}{K_۲}$

۲) ۲ و $e_{ss}=۰$

۳) ۰ و $e_{ss}=\infty$

۴) ۱ و $e_{ss}=۱+\frac{K_۲}{K_۱}$

در یک سیستم کنترل با فیدبک منفی واحد و تابع تبدیل پیشرو $G(s)=\frac{K}{s}$، مقدار K را طوری بیابید که معیار عملکرد $ITSE=\int_{0}^{+\infty} te^{2}(t)\,dt$ با ورودی پله واحد، کوچک‌تر یا مساوی ۰/۰۱ شود.

۱) $K \geq 1$

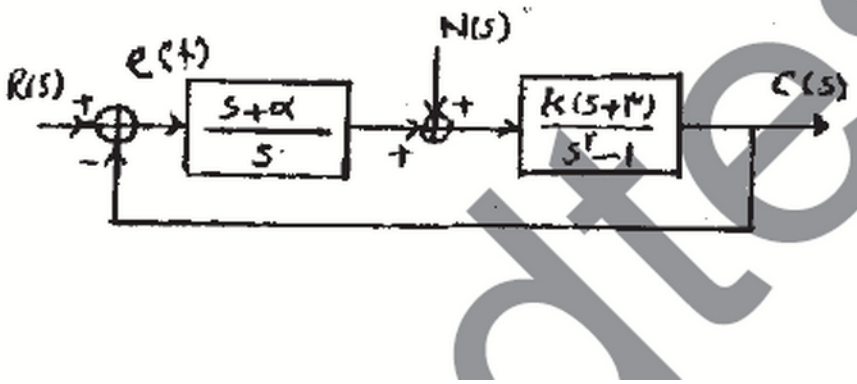
۲) $K \geq 5$

۳) $K \geq 10$

۴) $K \geq 50$

مقدار خطای حالت دائم e_{ss} سیستم حلقه بستهٔ زیر به ازای ورودی مبنا و اغتشاش شیب $r(t)=tu(t)$ و $n(t)=tu(t)$

کدام گزینه است؟



۱) $\alpha=0/2\ ,\ K=1\ ,\ e_{ss}=-\frac{5}{3}$

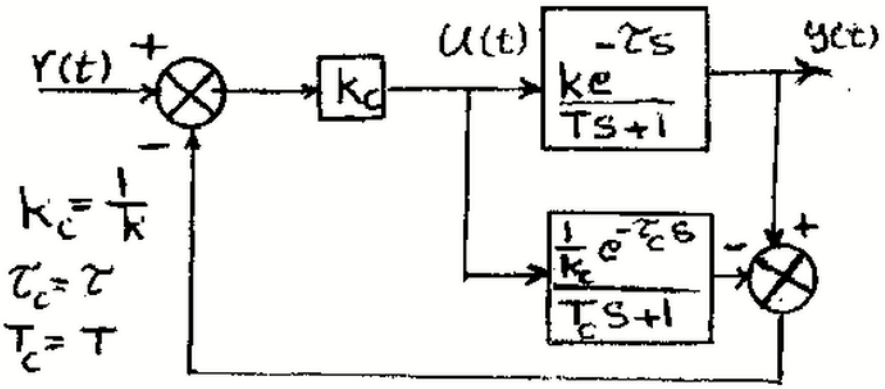
۲) $\alpha=0/5\ ,\ K=0/5\ ,\ e_{ss}=-\frac{4}{3}$

۳) $\alpha=1\ ,\ K=0/5\ ,\ e_{ss}=-\frac{2}{3}$

۴) $\alpha=0/2\ ,\ K=1\ ,\ e_{ss}=\frac{35}{6}$

ctest

در سیستم داده شده خطای ماندگار به ازای چه ورودی صفر خواهد بود؟



۱) سینوسی

۲) شیب

۳) پله

۴) به ازای تمام ورودی‌ها خطای ماندگار غیرصفر خواهد بود.

در سیستمی حلقه بسته با تابع تبدیل مسیر پیشرو $G(s)=\frac{۲(۱-s)}{(s+۳)(s+۲)}$ و فیدبک $H(s)=k\ (k\in R)$ و فیدبک منفی، آیا می‌توان خطای حالت دائمی خروجی را برای ورودی پله واحد صفر نمود؟

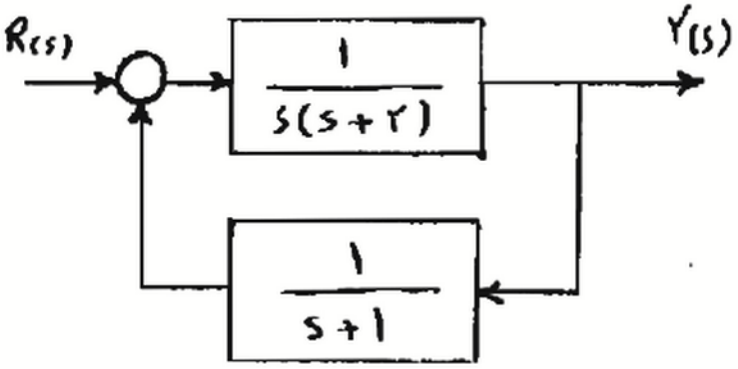
۱) چون نوع (type) سیستم صفر است، نمی‌توان خطای حالت دائم را برای ورودی پله صفر نمود.

۲) به ازای $k\to\infty$ خطای دائم ورودی پله سیستم صفر شود.

۳) برای $k=-۲$ خطای دائم خروجی سیستم صفر می‌گردد.

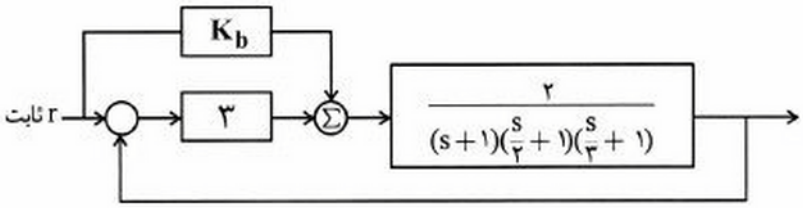
۴) اگر یک کنترل کننده انتگرالی در مسیر پیشرو قرار دهیم ($C(s)=\frac{۱}{s}$ تا نوع سیستم ۱ گردد) خطای حالت دائم سیستم به ورودی پله صفر خواهد شد.

خطای حالت ماندگار $E(s) = R(s) - Y(s)$ سامانه زیر برای ورودی سرعت (شیب) واحد برابر است با:



الف) بی‌نهایت　　ب) یک　　ج) دو　　د) صفر

در سیستم کنترلی زیر به ازای کدام بهرهٔ پیشخور (K_b)، خطای حالت ماندگار صفر است؟



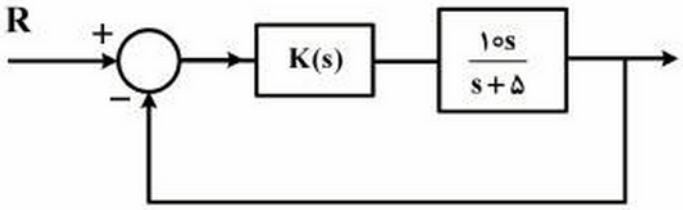
۱) $K_b = -۲$

۲) $K_b = -۰/۵$

۳) $K_b = ۰/۵$

۴) $K_b = ۲$

سیستم کنترل زیر را درنظربگیرید. هدف طراحی جبران‌ساز $k(s)$ به‌گونه‌ای است که خروجی سیستم به ورودی پله واحد را بدون خطای حالت گذرا دنبال نماید. کدام گزینه در مورد $k(s)$ ، درست است؟



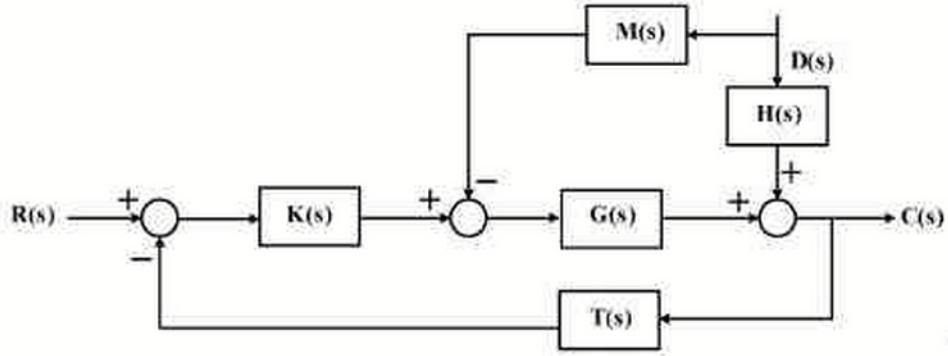
۱) $k(s)=\frac{۱۰}{s^۲}$

۲) $k(s)=\frac{۵}{s^۲}$

۳) $k(s)=\frac{۱}{s^۲}$

۴) هیچ نوع $k(s)$ وجود ندارد.

برای خنثی کردن اثر اغتشاش $D(s)$ در خروجی $C(s)$، تابع تبدیل $M(s)$، کدام است؟



۱) $\frac{H(s)}{G(s)}$

۲) $\frac{G(s)H(s)}{۱+K(s)G(s)H(s)}$

۳) $\frac{K(s)G(s)}{۱+K(s)G(s)T(s)}$

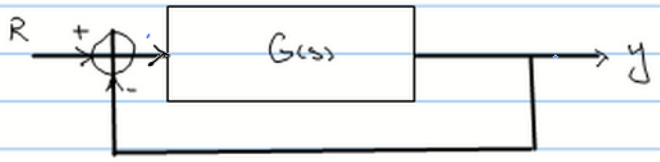
۴) $\frac{K(s)G(s)}{۱+H(s)+K(s)G(s)T(s)}$

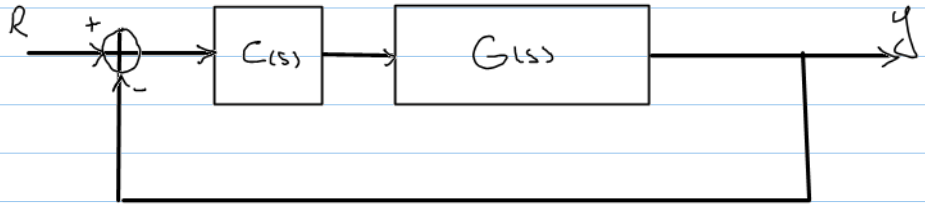
جلسه ۲۵ کنترل خطی

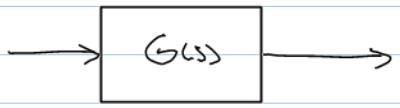
«مکان هندسی ریشه ها»

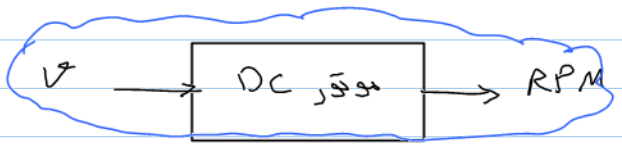
سؤال: مکان هندسی چیست و چرا باید یاد بگیریم؟

در مکان هندسی هدف نهایی از رسم شکل عجیب چیست؟

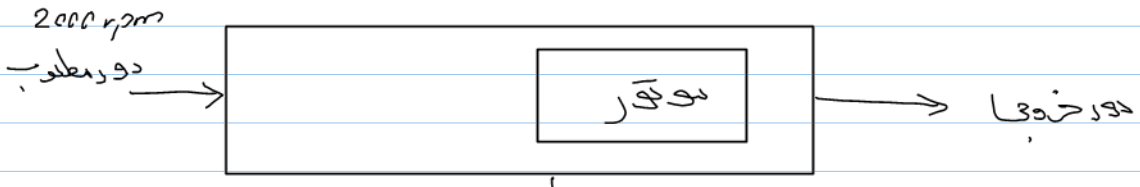




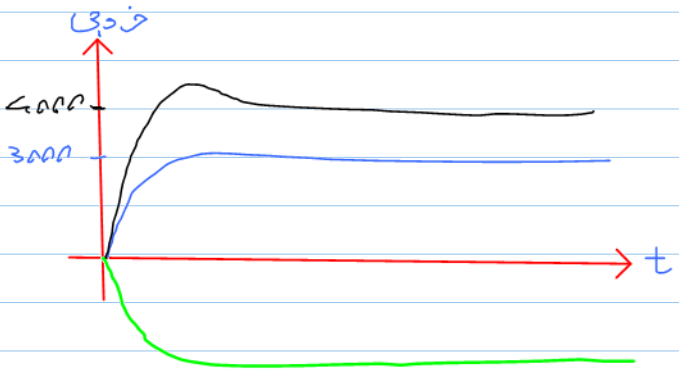


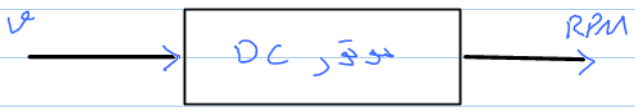


هدف: می خواهیم دور موتور را کنترل کنیم.



هدف: طراحی سیستم کنترل دور موتور





$V_a = 12\ V$

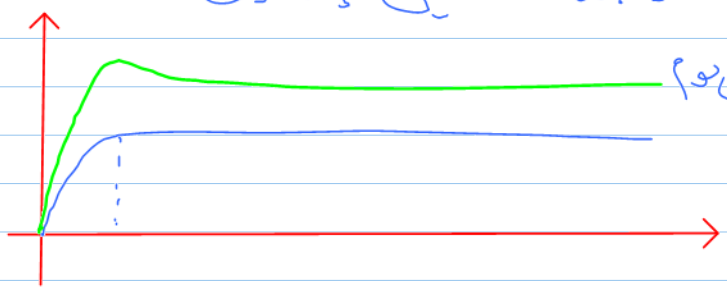
$V_a = 20$

$V_a = -12$

موتور DC با عمل بیت حلقه باز ← تحلیل

① وتأثیر اعمال ضربه که موتور نشود ← تحلیل پایداری ← RH

② تحلیل حالت گذرا ← مقدار بهره



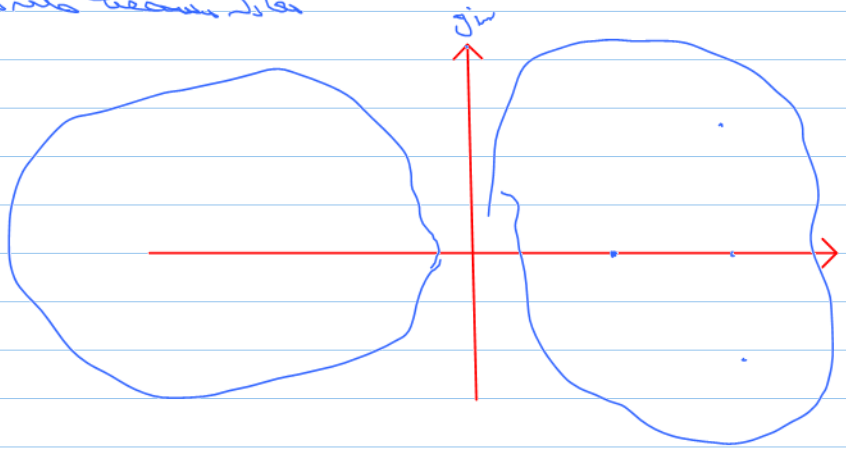
③ تحلیل حالت ماندگار ← مقدار k_p



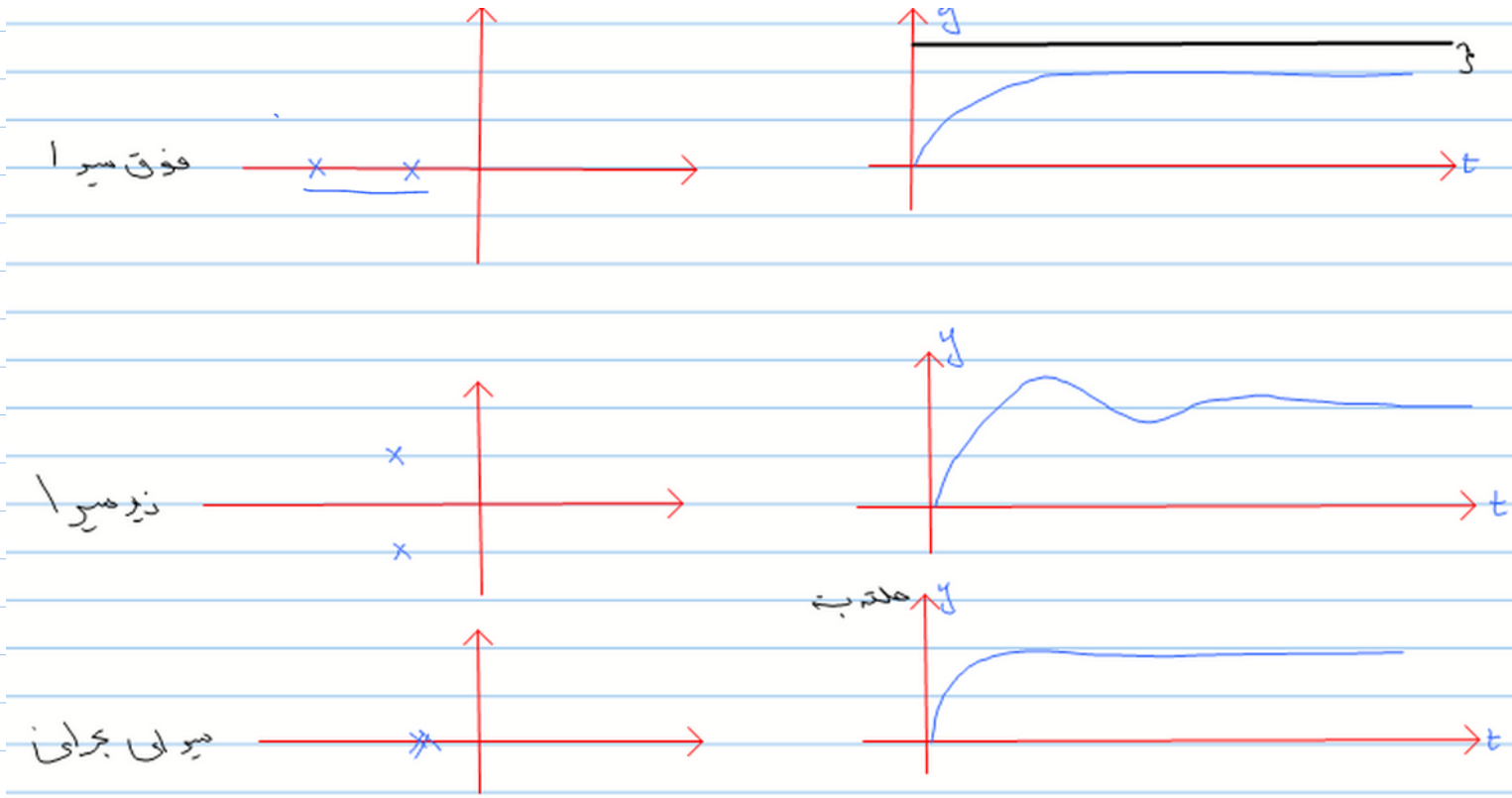
$w_{in} = 3000$ rpm

① تحلیل پایداری ← محل ریشه‌های حلقه بسته از روی تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$

$\Delta(s)$ ← معادله مشخصه حلقه بسته



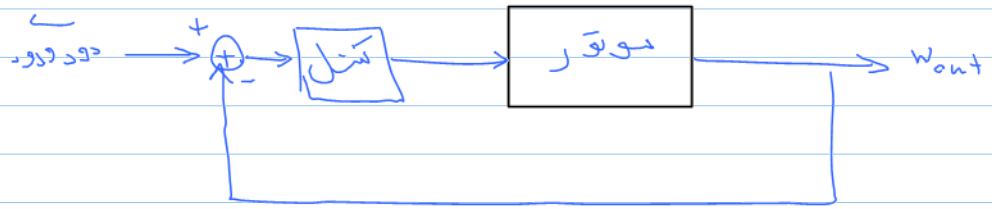
② مقدار سوم ← رفتار حالت گذرا ← محل قطب‌ها



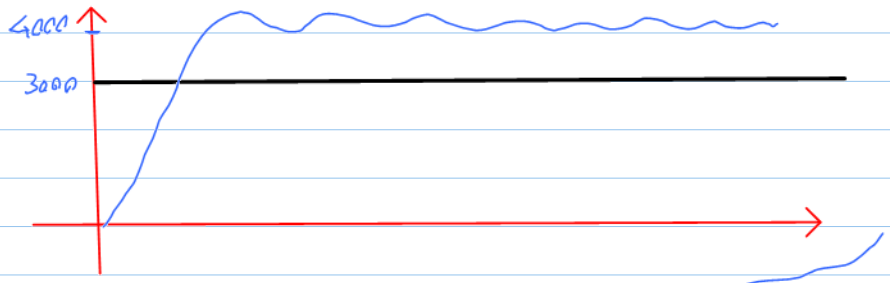
رفتار حالت گذرا ← از روی قطبهای حلقه بسته ← قبل دقیق

② مثل 4 ← خطای حالت ماندگار ← نوع سیستم ←

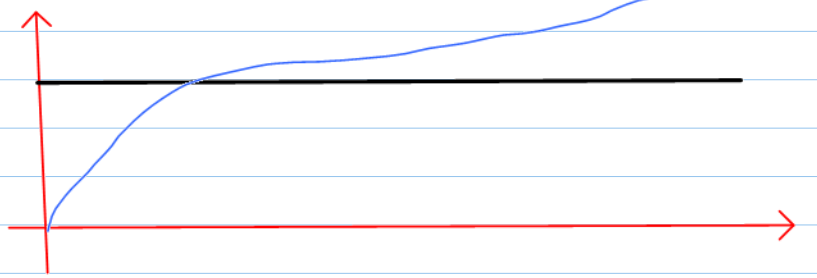
رفتار سیستم حلقه بسته از روی حلقه باز ←

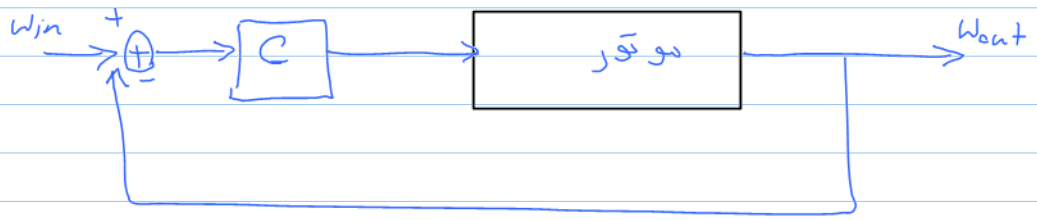


کنترل = 20



کنترل = ۱۰





$$\Delta(s) = Js^2 + Bs + C = 0$$

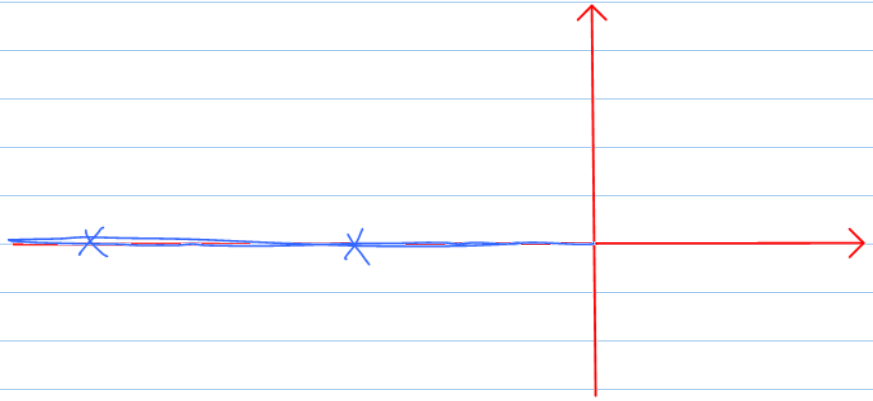
$$\Delta(s) = 10s^2 + 0.001s + C = 0$$

ناپایدار $\rightarrow C > 0$ می‌شود.

$\%OS \rightarrow \Delta(s) = 10s^2 + 0.001s + C = 0 \rightarrow C < 10$ ✓

$t_s < 2s \quad \Delta(s) = \quad " \quad = 0 \rightarrow C < 8$

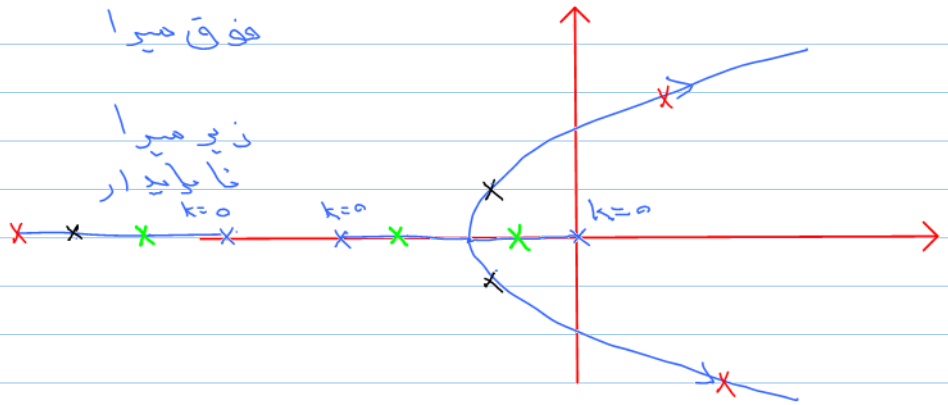
⋮



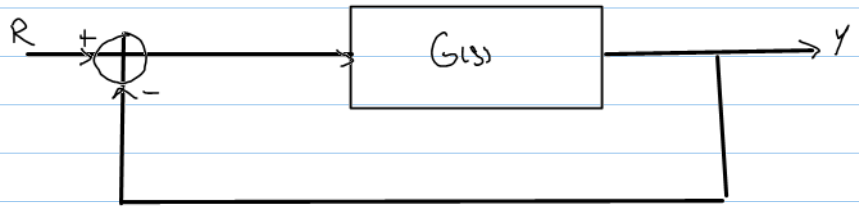
ابزاری ← { پایداری ، حالت گذرا } ← ساده‌ترین قطب‌های حلقه بسته

ابزاری برای یافتن محل قطب‌های حلقه بسته از روی تابع تبدیل حلقه باز با توجه به ضرایب کنترلی ← مکان هندسی ریشه‌ها

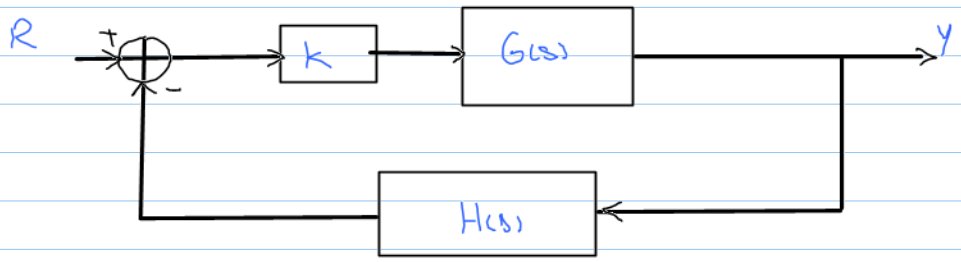
مکان هندسی:



$$G(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 11s} \qquad k: 0 \to \infty$$



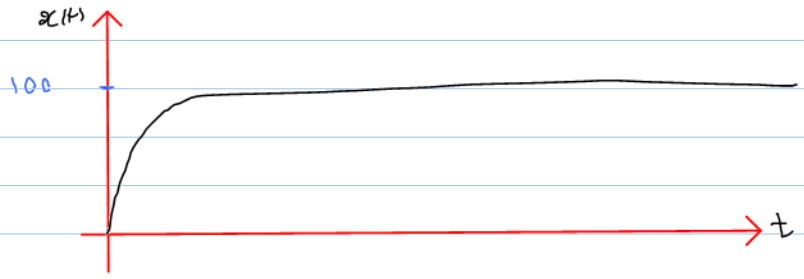
مکان هندسی: حفظ مکان هندسی با تغییر کل قطبهای حلقه بسته با زای تغییرات پارامتر k است.



قطبهای حلقه بسته: ریشه های حلقه بسته $\Delta(s) = 1 + k\,G(s)H(s) = 0$

$s=a \leftarrow$ قطب حلقه بسته $\rightarrow \Delta(a) = 0 \rightarrow s=a$

مثال: یک موتور آسنکرون با مغناطیس دائمی $R=2$ دارد. این موتور با یک بار $J=100$ به برق استاندارد ایزوله می‌شود. آیا می‌توانید کنترل کننده‌ای طراحی کنید که فقط با تغییر k باعث حرکت چپ‌گرد موتور به شکل زیر باشد؟



$T(s) = ?$

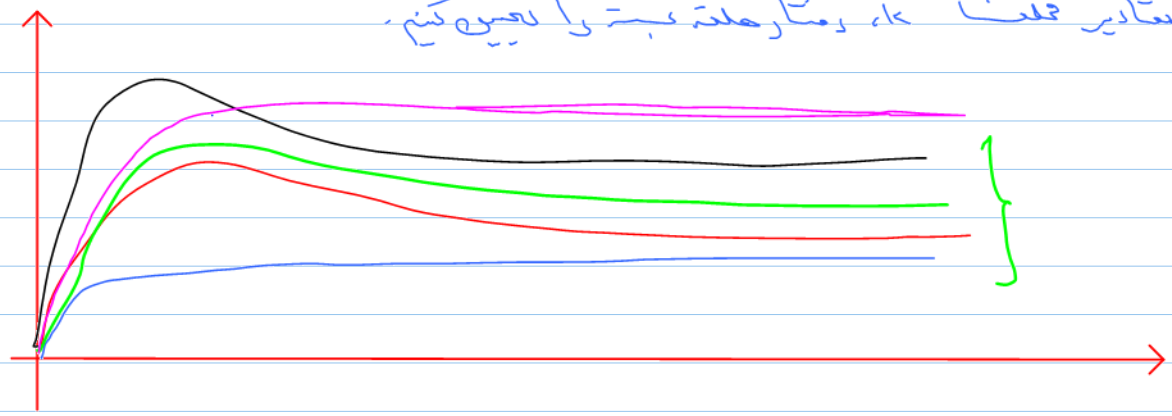
سیستم دو قطبی + یک صفر ← $\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{1}{100s^3 + 2s^2 + 15s + 10} = G(s)$



$k = 1 \quad k = 2 \quad \dots \quad k = \infty$

$$T(s) = \frac{k}{100s^3 + 2s^2 + 5s + 10 + k}$$

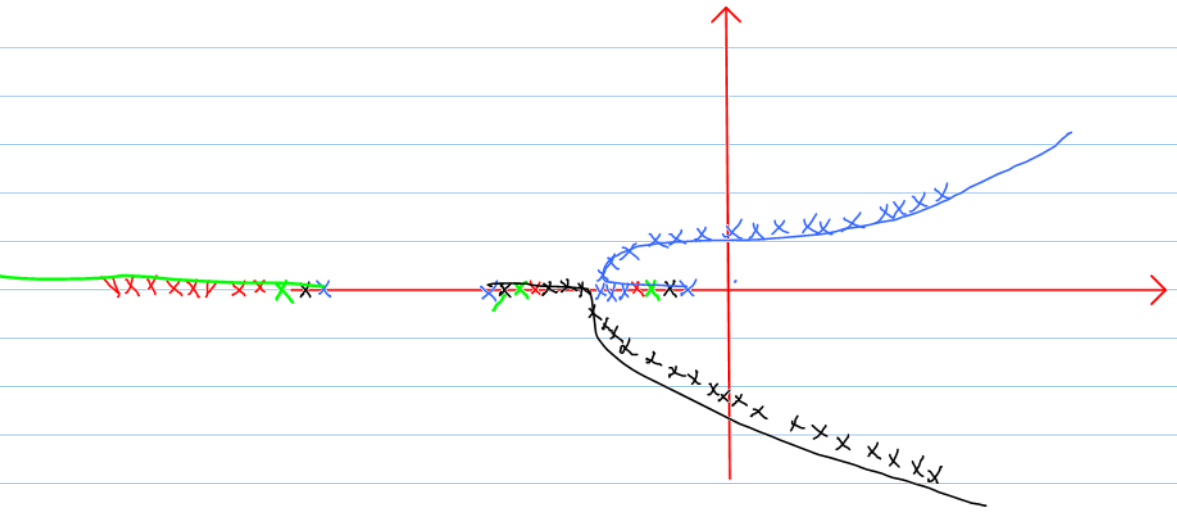
به ازای مقادیر مختلف k، رفتار حلقه بسته را بررسی کنیم.



شبیه سازی ← بار 1000

رفتار سیستم تحت تأثیر قطبها

رفتار خواسته شده ← معادل میرای بزرگ



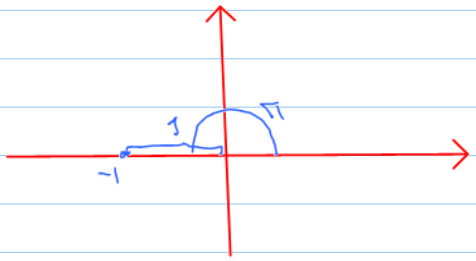
$k=0 \longrightarrow \Delta(s)=0 \longrightarrow$

$k=0.01$ ~

اگر $s=a$ بخواهد قطب حلقه بسته شود باید $\Delta(a)=0$ شود.

$$\Delta(a) = 1 + \overset{?}{k}\, G(a)H(a) \overset{?}{=} 0 \qquad k>0$$

آیا k مثبتی وجود دارد که $\Delta(a)=0$ ؟

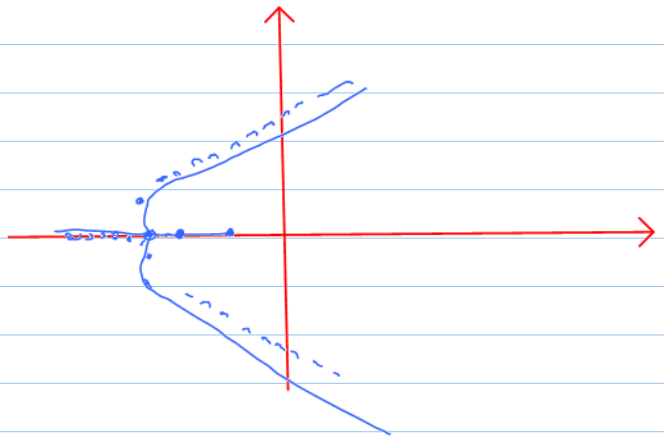


$$\Delta(s) = 1 + kG(s)H(s) = 0$$

$$kG(s)H(s) = -1 = |1| \angle \pi$$

$$kG(s)H(s) = |1| \angle \pi$$

$$\begin{cases} |kG(s)H(s)| = 1 \\ \angle kG(s)H(s) = \pi \end{cases}$$



$k=1$

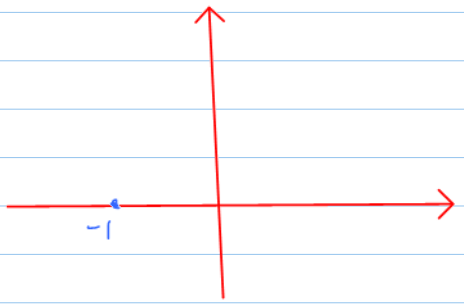
$1 + x e^{j\pi/2} = 0 \longrightarrow \quad x = ?$

$x e^{j\pi/2} = -1$

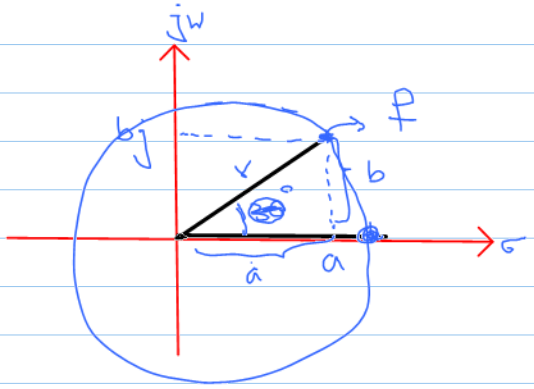
$-1 = 1 e^{j\pi}$

$x = \frac{-1}{e^{j\pi/2}} = -1\, e^{-j\pi/2} = 1 e^{j\pi/2}$

$x e^{j\pi/2} = -1$



$f = a + bj$



$f = r \angle 30^\circ = r e^{j30^\circ}$

$a + bj = r e^{j\theta}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} \longrightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

$1 + x e^{j\pi/2} = 0$

$x e^{j\pi/2} = (-1) \longrightarrow$ عددی با اندازه 1 و فاز π

x ↓

عددی با اندازه x و فاز $\frac{\pi}{2}$

$x e^{j\pi/2} = 1 e^{j\pi}$

$|x| e^{j\theta} e^{j\pi/2} = 1 e^{j\pi}$

$x = |x| e^{j\theta}$

$|x| e^{j(\theta + \pi/2)} = 1 e^{j\pi}$

$$\begin{cases} |x| = 1 \\ \theta + \pi/2 = \pi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$$

$x = 1 e^{j\pi/2}$

509

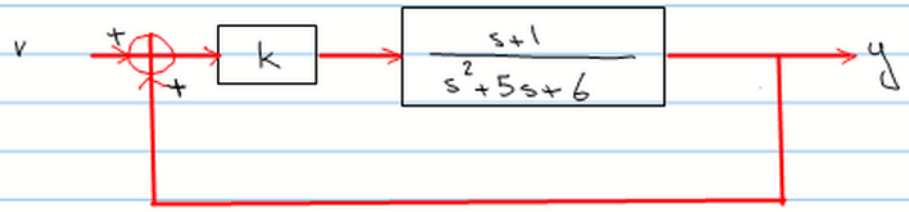
$$\Delta(s) = 1 + k\,G(s)H(s) = 0$$

قطبهای حلقه بسته در واقع جواب $\begin{cases} |k\,G(s)H(s)| = 1 \\ \angle k\,G(s)H(s) = \pi \end{cases}$ است

مثال: در مکان هندسی ریشه های سیستم زیر، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

1) آیا برای $k<0$ ، $s=-2+j$ جزو مکان ریشه های سیستم است؟

2) به ازای چه مقدار k، یکی از قطبهای حلقه بسته در $s=j$ خواهد بود؟



$s=-2+j$ $\quad \Delta(-2+j)=0$ ؟

آیا $k<0$ ای وجود دارد که $\Delta(-2+j)=0$ شود؟

$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{k(s+1)}{s^2+5s+6}\right) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 - \frac{k(s+1)}{s^2+5s+6} = 0 \rightarrow \frac{k(s+1)}{s^2+5s+6} = 1 = |1|\angle 0$$

$$\Delta(-2+j) = 1 - \frac{k(-1+j)}{(-2+j)^2+5(-2+j)+6} = 0 \rightarrow k = ?$$

آیا $k<0$ ای وجود دارد که $s=-2+j$ در $\begin{cases} \left|\frac{k(s+1)}{s^2+5s+6}\right| = 1 \\ \angle \frac{k(s+1)}{s^2+5s+6} = 0 \end{cases}$

جلسه ۲۴ کنترل خطی

مکان هندسی ریشه ها

مکان هندسی بیانگر قطبهای حلقه بسته بازای مقادیر پارامتر k.

$\Delta(s)=0 \rightarrow$ قطبهای حلقه بسته

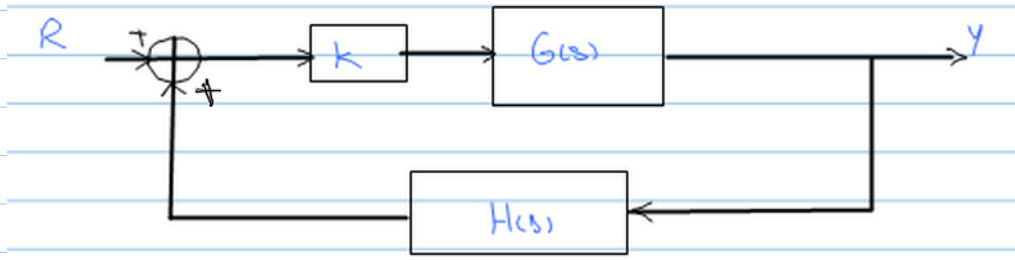
$\Delta(s)=0$



$$\Delta(s)=1+kG(s)H(s)=0 \rightarrow \begin{cases} |kG(s)H(s)|=1 \\ \angle kG(s)H(s)=(2m+1)\pi \end{cases}$$

$\Delta(s)=1-kG(s)H(s)=0$

$$\begin{cases} |kG(s)H(s)|=1 \\ \angle kG(s)H(s)=2m\pi \end{cases}$$



برای بررسی اینکه نقطه $s=s_0$ جزء مکان هست؟

برای بررسی اینکه s_0 جزء مکان هندسی است یا نه از شرط زاویه استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \angle kG(s_0)H(s_0)=(2m+1)\pi & \text{فیدبک منفی} \\ \angle kG(s_0)H(s_0)=2m\pi & \text{〃 مثبت} \end{cases}$$

بازای چه مقدار k، نقطه s_0 جزء قطبهای حلقه بسته است؟

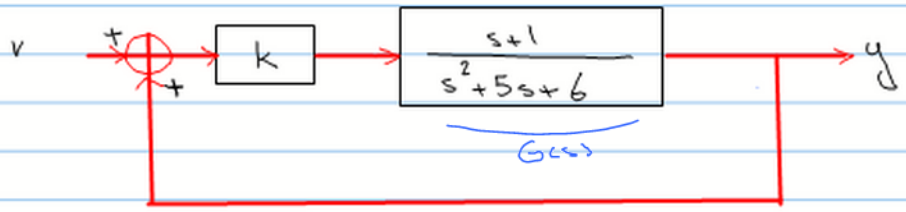
از شرط اندازه استفاده می‌شود.

$|k| = \dfrac{\text{حاصلضرب فاصله قطبهای } G \text{ و } H \text{ از } s_0}{\text{〃 〃 〃 صفرهای 〃 〃 〃}}$

مثال: در مکان هندسی ریشه های سیستم زیر، به سوالات زیر پاسخ دهید.

1) آیا برای $k<0$ ، $s=-2+j$ جزو مکان ریشه های سیستم است؟

2) به ازای چه مقدار k، یکی از قطبهای حلقه بسته در $j+s$ خواهد بود؟



$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$s_0 = -2+j$ ← هندسی است ← $\angle k\,G(s_0) = 2m\pi$

$$\angle k\,G(s_0) = \angle k + \angle G(s_0) = \pi + \angle \frac{-1+j}{(-2+j+2)(-2+j+3)}$$

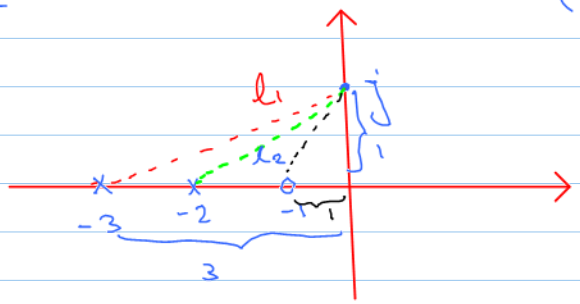
$$\angle \frac{-1+j}{(j)(1+j)} = \angle -1+j - \angle(-1+j) = 0$$

شرط زاویه: $\angle k\,G(s_0) = \pi + 0 = \pi \neq 2m\pi$

s_0 جزو مکان ریشه ها نیست.

2)

$$|k| = \frac{\text{حاصلضرب فاصله } j+s \text{ از قطبهای } G}{\text{صفرهای } G}$$



$$l_1 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$l_2 = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$l_3 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$|k| = \frac{l_1 \times l_2}{l_3} = \frac{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 5$$

k حاصلضرب ← $k=-5$

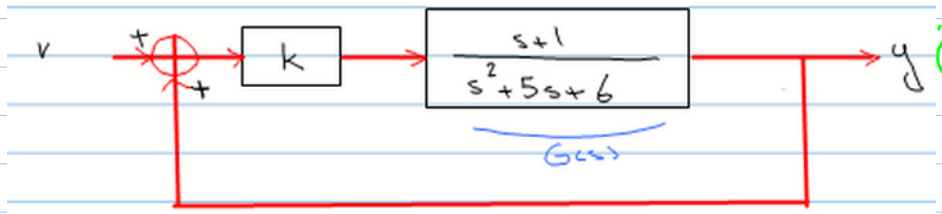
برای رسم مکان هندسی ریشه ها از قواعد مشخصی استفاده می‌کنیم.

(۱) $\Delta(s)$ را به فرم استاندارد بنویسیم.

$$\Delta(s) = 1 + \text{متغیر} \times \underbrace{\text{تابع تبدیل}} = 0$$

حلقه باز

$k<0$



علامت سگنال = + × + = +

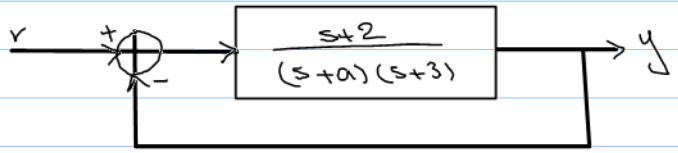
$$\Delta(s) = 1 - \left(k \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \right) = 1 \ominus k \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = 0$$

$$= 1 \oplus \text{متغیر} \times \text{تابع تبدیل} = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + (-k) \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + k' \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = 0$$

$$\begin{cases} k' = -k \\ G_{OL}(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)} \end{cases}$$



متغیر $a: 0 \to \infty$

علامت سگنال = − × + = −

$$\Delta(s) = 1 + \frac{s+2}{(s+a)(s+3)} = 0$$

$$= 1 + \text{متغیر} \times G_{OL}(s) = 0$$

$$\Delta(s) = (s+a)(s+3) + s + 2 = 0$$

$$= s^2 + as + 3s + 3a + s + 2 = 0$$

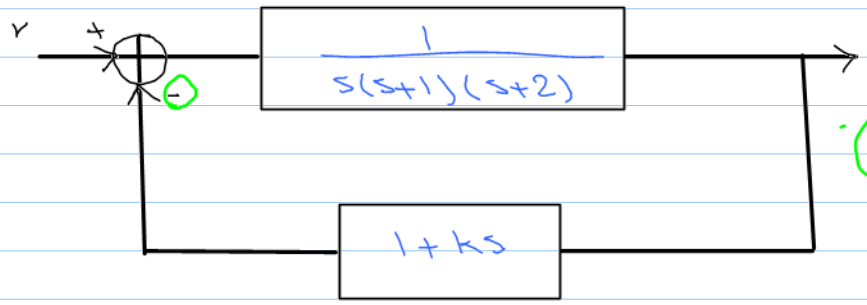
$$= s^2 + 4s + 2 + as + 3a = 0$$

$$\Delta(s) = \underbrace{s^2 + 4s + 2} + \underbrace{a(s+3)} = 0$$

$$\Delta(s) = \frac{s^2+4s+2 + a(s+3)}{s^2+4s+2} = 0$$

$$= 1 + a\,\frac{s+3}{s^2+4s+2} = 0 \qquad G_{OL}(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+2}$$

$$= 1 + \text{سنسور} \times G_{OL}(s) = 0$$



$K>0$

(علامت سنسور: - x - = +)

$$\Delta(s) = \left(1 + \frac{1+ks}{s(s+1)(s+2)} = 0\right) \times \left(s(s+1)(s+2)\right)$$

$$= 1 + \text{سنسور} \times G_{OL}(s) = 0$$

$$\Delta(s) = s(s+1)(s+2) + 1+ks = 0$$

$$= \underbrace{s(s+1)(s+2)+1} + \underbrace{ks} = 0$$

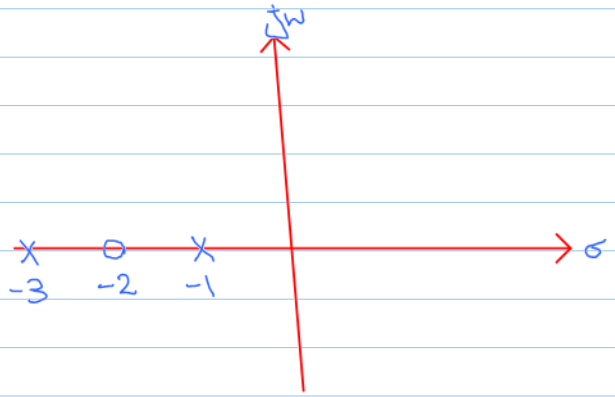
$$\Delta(s) = 1 + \underbrace{k}_{\text{سنسور}}\ \underbrace{\frac{s}{s(s+1)(s+2)+1}}_{G_{OL}(s)} = 0$$

② علامت مکان را تعیین کنید.

علامت سنسور استاندارد × علامت فیدبک = علامت مکان

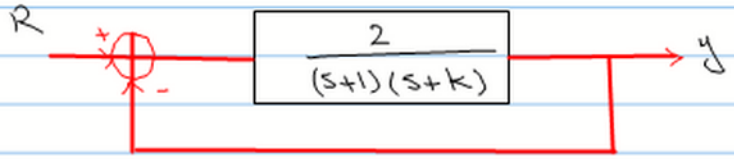
③ صفرهای $G_{OL}(s)$ را با دایره و قطبهای $G_{OL}(s)$ را با x روی صفحه مختلط به عنوان صفرها و قطبهای حلقه باز تعیین می‌کنیم.

$$\Delta(s) = 1 + k \underbrace{\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}}_{G_{OL}(s)} = 0$$

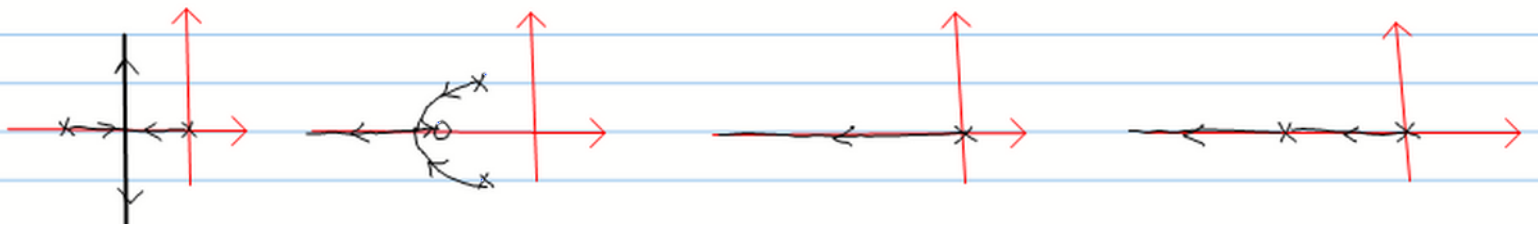


بحث ۸۵.

مکان ریشه های سیستم حلقه بسته زیر به ازای تغییر چاراستر k از صفر تا ∞ کدام است؟



$k>0$



$$\Delta(s) = 1 + \frac{2}{(s+1)(s+k)} = 0$$

فرم استاندارد میشه

$$\Delta(s) = (s+1)(s+k) + 2 = 0$$

$$= s^2 + s + ks + k + 2 = 0$$

$$\Delta(s) = \underbrace{s^2+s+2} + k(s+1) = 0$$

$$= \frac{s^2+s+2 + k(s+1)}{s^2+s+2} = 0$$

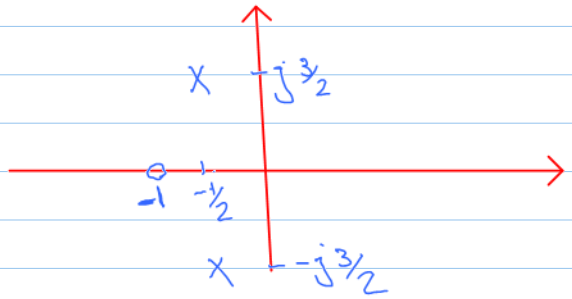
$$= 1 + k\frac{(s+1)}{s^2+s+2} = 0$$

$$= 1 + \text{مقدار ثابت} \times G_{OL}(s) = 0$$

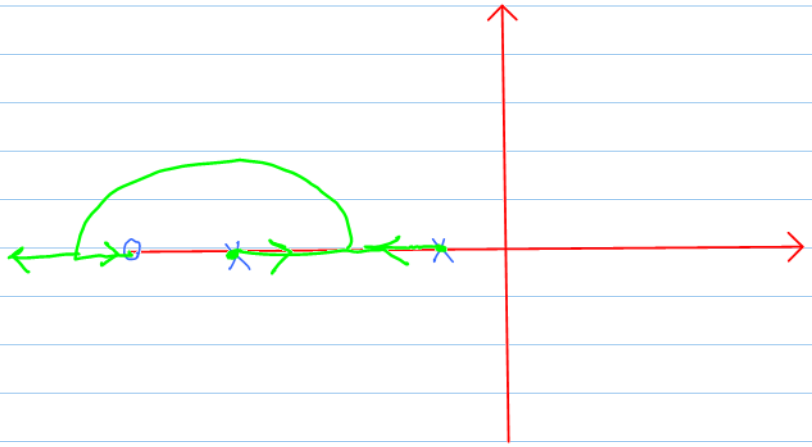
$$G_{OL}(s) = \frac{s+1}{s^2+s+2}$$

$s^2 + s + 2 = 0$

$s = -\frac{1}{2} \mp j\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \mp j\frac{3}{2}$



③ مکان هندسی ریشه ها از قطبهای حلقه باز شروع شده و به صفرهای حلقه باز ختم می‌شود.

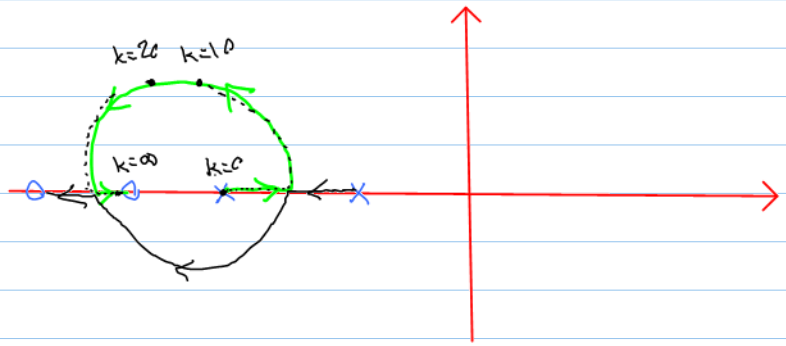


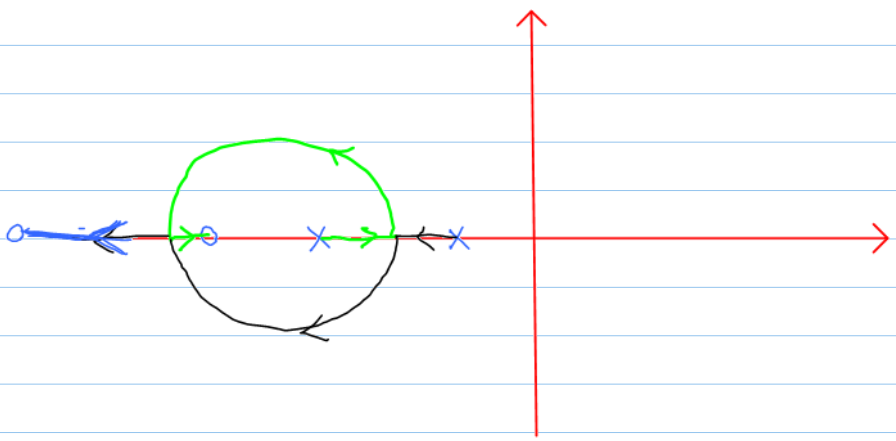
متغیر: $k: 0 \to \infty$

یعنی به ازای متغیر $= 0$ ، قطبهای حلقه بسته روی قطبهای حلقه باز قرار دارند

و ~ ~ ~ $= \pm\infty$ ~ ~ ~ ~ صفرهای ~ ~ .

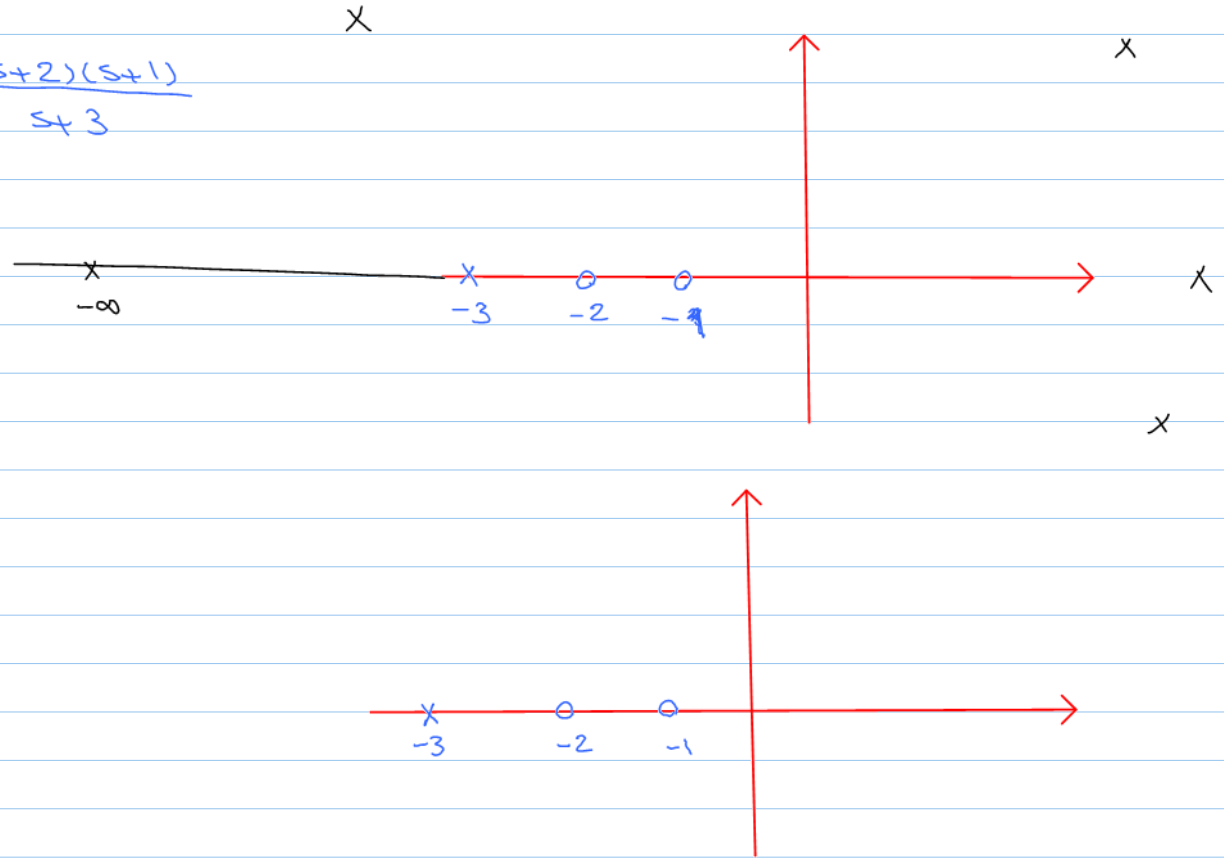
نکته. از هر قطب حلقه باز یک شاخه مکان هندسی خارج می‌شود و به یک صفر حلقه باز ختم می‌شود.





اگر تعداد قطبها و صفرهای حلقه باز برابر نباشد، صفر یا قطب در ∞ طوری فرض می‌کنیم که تعداد قطبها و صفرهای حلقه باز برابر شود.

$$G_{OL}(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s+3}$$



تعداد شاخه‌ها = max{ تعداد قطبهای حلقه باز (قطب)، تعداد صفرهای حلقه باز (صفر) }

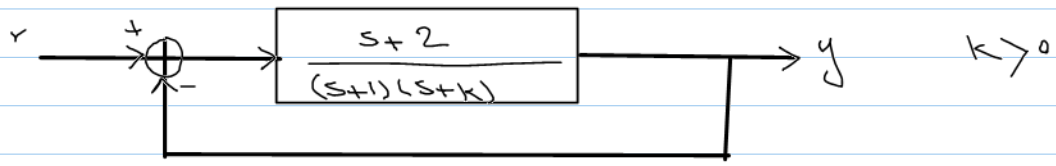
$$G_{OL}(s) = \frac{s^2+1}{s^3+1+2s}$$

تعداد شاخه‌ها = max{2, 3} = 3

(5) بحث از هر حدی که جزء مکان است را بیان کنید.

علامت مکان منفی: بحث از هر حدی که جزء مکان است تعداد فرد صفر و قطب قرار گیرد.

" مثبت: " زوج "



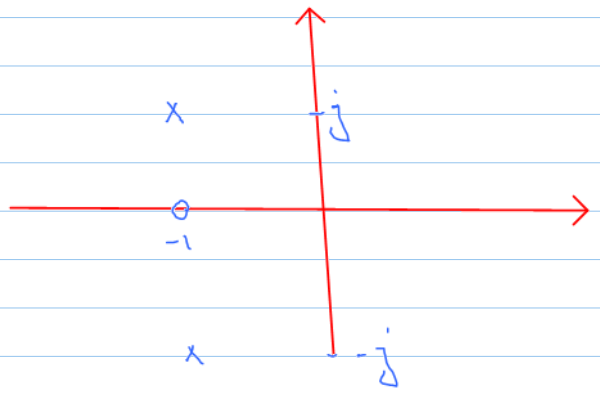
① $\Delta(s) = 1 + \dfrac{s+2}{(s+1)(s+k)} = 0$

$\Delta(s) = (s+1)(s+k) + s+2 = 0$

$= s^2 + s + ks + k + s + 2 = 0$

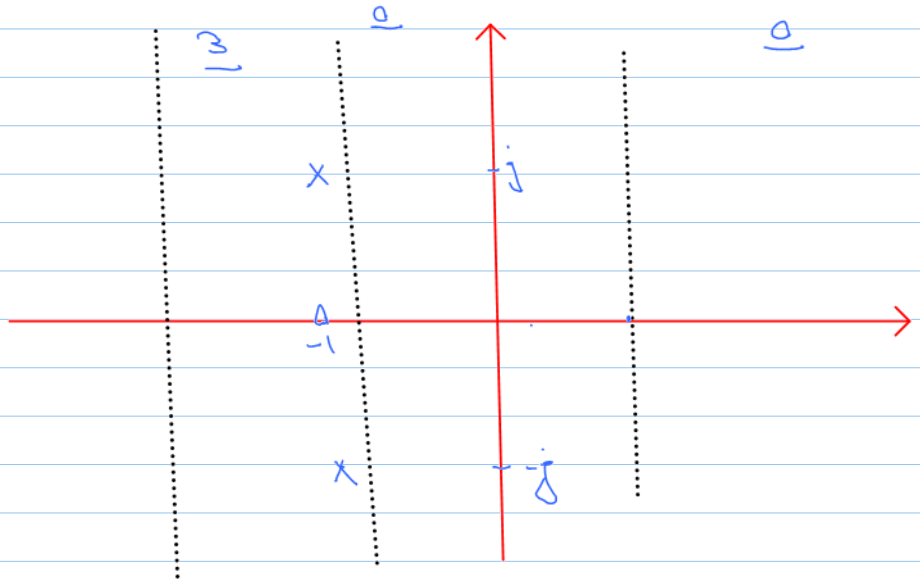
$\Delta(s) = \underbrace{s^2+2s+2} + k(s+1) = 0$

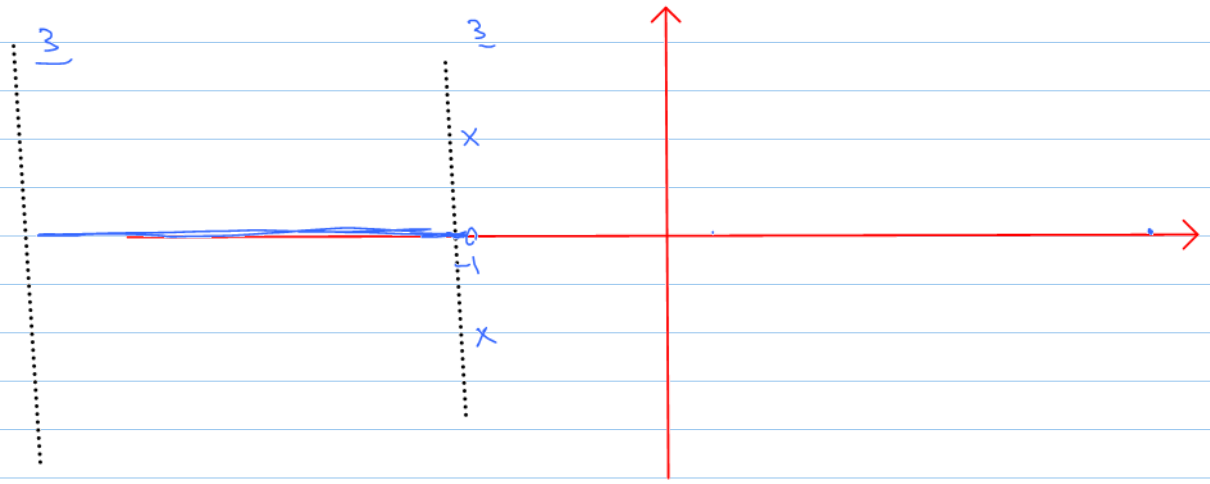
$\Delta(s) = 1 + \underbrace{k}_{\text{مستقر}} \underbrace{\dfrac{s+1}{s^2+2s+2}}_{G_{OL}(s)} = 0$

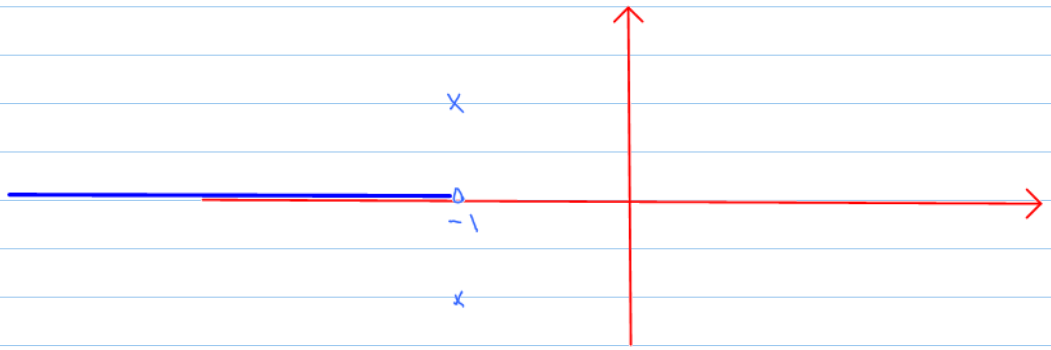
② 

③ عدد الأقطاب = 2 - 0 = 2

④ رتبة النظام = $\max\{1, 2\} = 2$

⑤ 

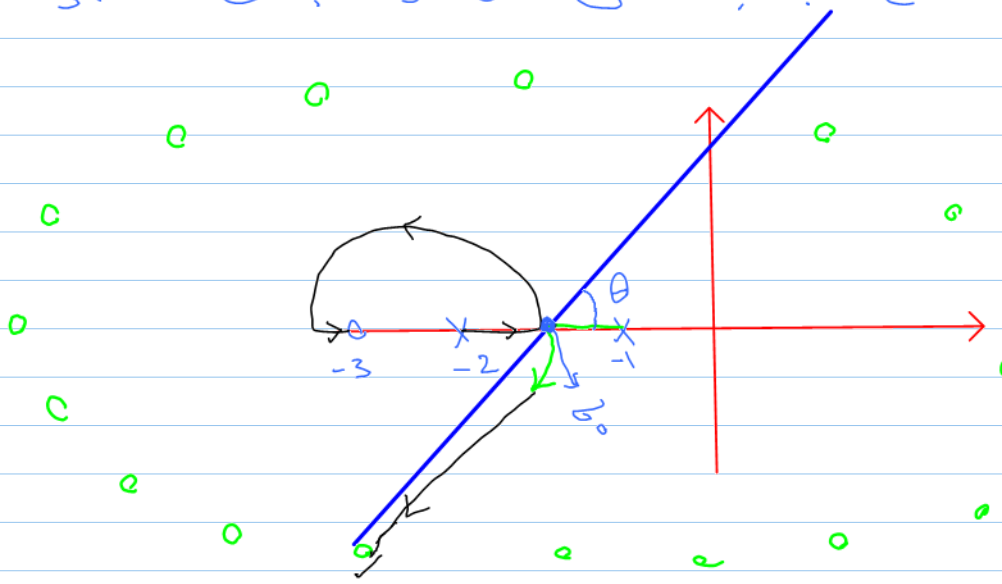




⑥ مجانبها:

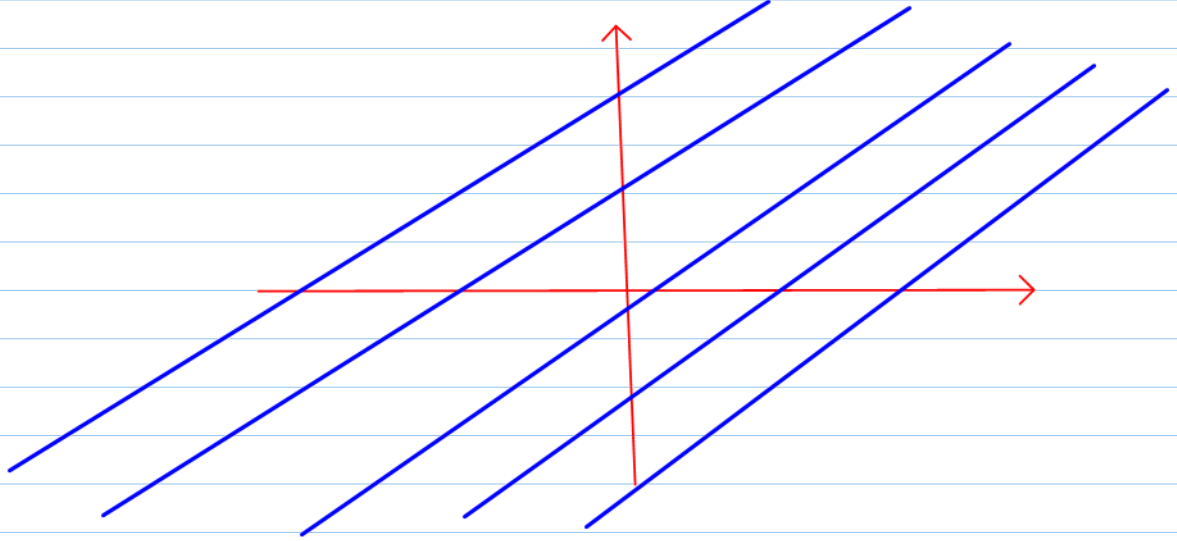
مجانب یعنی جایی که شکل هندسی ما به بینهایت می‌رود.

در توابع مجانب حل من حاو قطبهای حالتی که در ∞ هستند را مشخص می‌کند.

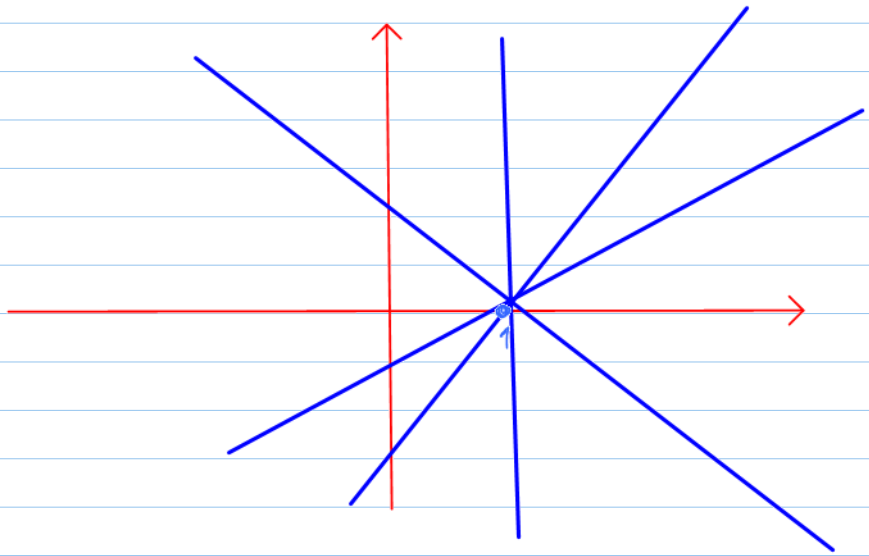


مجانبها توسط زاویه و حل تقاطع با محور حقیقی مشخص می‌شوند.

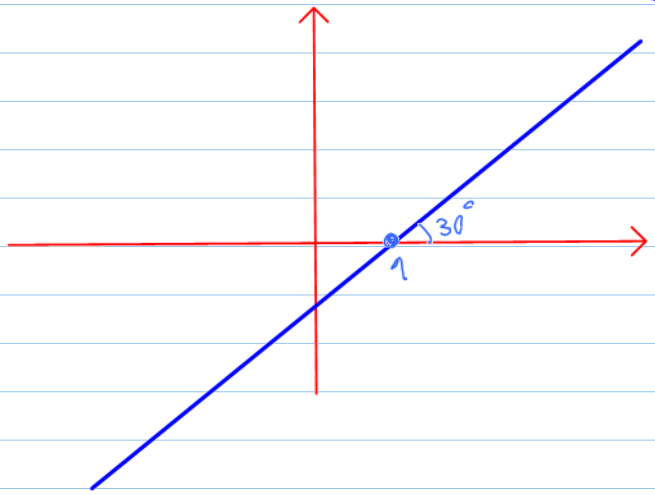
$\theta = 30^\circ$



$\sigma_0 = 1$



$\theta = 30^\circ$ ، $\sigma_0 = 1$



تعداد جابتها = | درجه صورت G_{0L} − درجه مخرج $G_{0L}(s)$ |

علت مکان ستد

زاویه جابتها = $\begin{cases} \frac{2m\pi}{\text{تعداد جابتها}} \\ \frac{(2m+1)\pi}{\text{تعداد جابتها}} \end{cases}$ ستد ، ستد

m اعداد صحیح است و به این ترتیب عدد داده می‌شود تا به مقدار جانبها زاویه

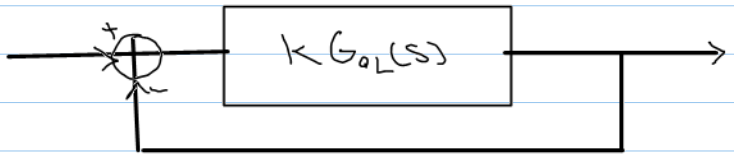
$m = 0 \to +1 \to -1 \to 2 \to -2 \to \cdots$ تعیین شود.

$$\sigma_0 = \frac{\sum_i Re(P_i) - Re(Z_i)}{\text{تعداد جانبها}}$$

P_i: قطب حلقه باز

Z_i: صفر حلقه باز

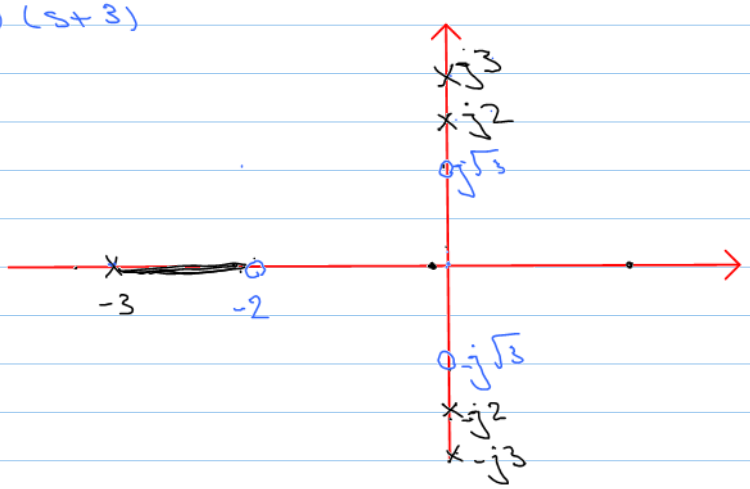
$$G_{OL}(s) = \frac{(s+2)(s^2+3)}{(s^2+4)(s^2+9)(s+3)}$$



$k > 0$

① $\Delta(s) = 1 + k \dfrac{(s+2)(s^2+3)}{(s^2+4)(s^2+9)(s+3)} = 0$

②



③ تعداد شاخه‌ها $= \max\{3, 5\} = \underline{5}$

④ تقارن $=$ حقیقی $= -x+ = -$

⑤ ✓

⑥ جانبها

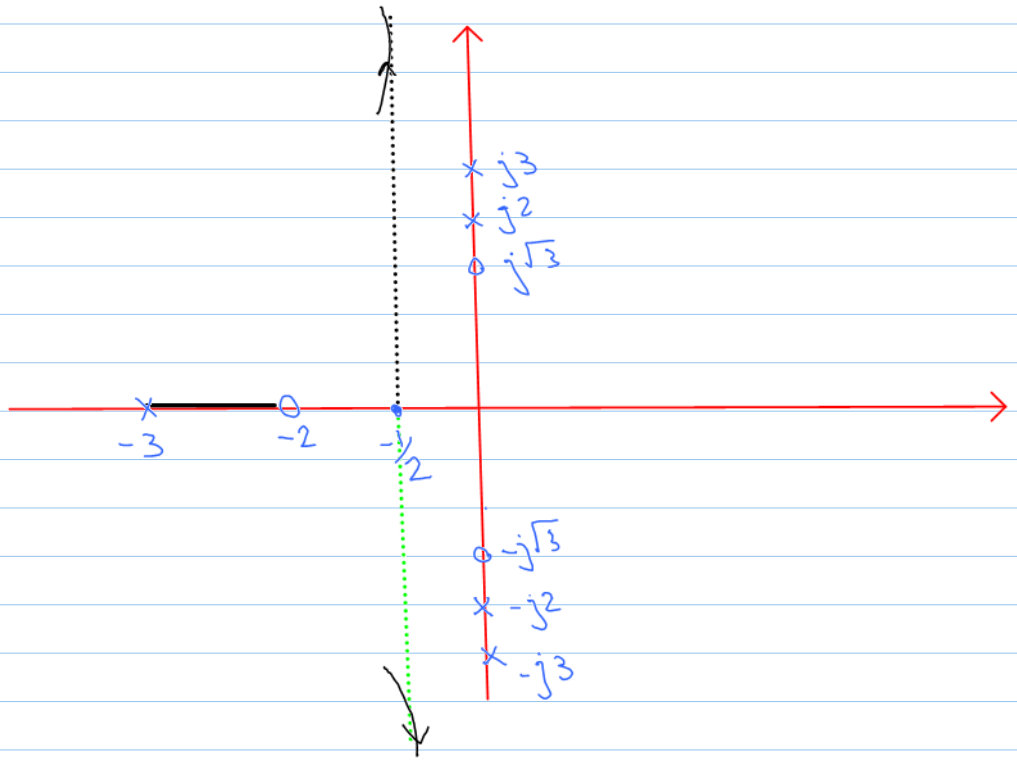
تعداد $= |3 - 5| = \underline{2}$

زاویه: $\theta = \frac{(2m+1)\pi}{2}$ — مجانب‌های مکان

$m=0 \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad m=+1 \rightarrow \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\sigma_0 = \frac{0+0+0+0+-3-(0+0+-2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$P_i = \begin{cases} j2, -j2 \\ j3, -j3 \\ -3 \end{cases} \qquad Z_i = \begin{cases} j\sqrt{3}, -j\sqrt{3} \\ -2 \end{cases}$$



⑦ نقطه شکست

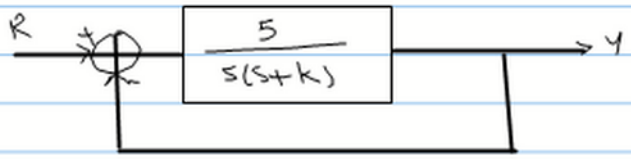
⑧ زاویه خروج و ورود به صفرها و قطب‌های حلقه باز

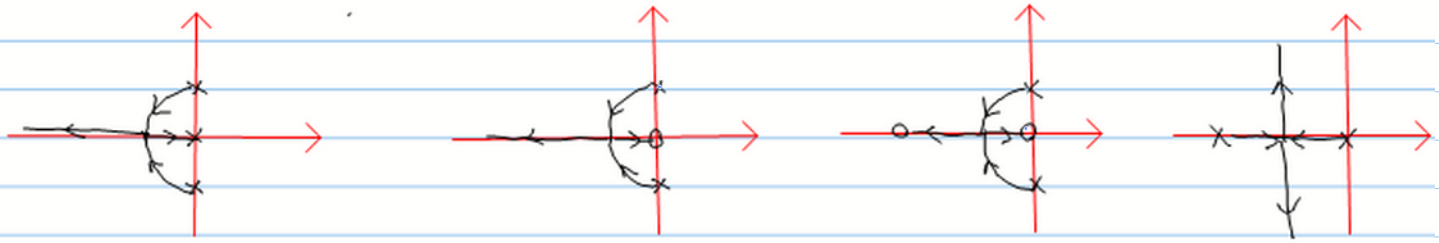
① استاندارد سازی داده ها ② رسم صفرها و قطبهای $G_{OL}(s)$ ③ علامت کفایت

④ تعیین بحرانی از هر حیثی که جزء مکان است ⑤ مجانبها

مکانیک ۸۷

مکان هندسی ریشه های سیستم مقابل به ازای مقادیر مثبت پارامتر k کدام است؟





(1) $\Delta(s) = 1 + \frac{5}{s(s+k)} = 0$

$\Delta = 1 + \text{متغير} \times G_{OL}(s) = 0$

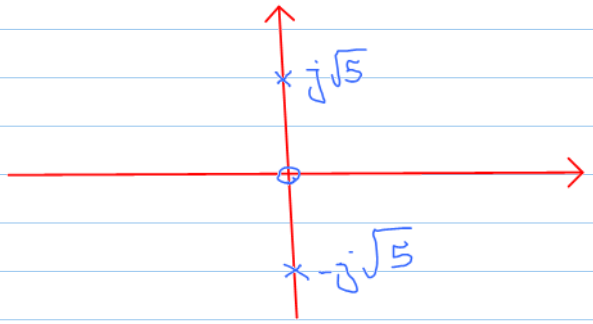
$\Delta(s) = s(s+k) + 5 = 0$

$\Delta(s) = \frac{s^2+5}{s^2+5} + \frac{ks}{s^2+5} = 0$

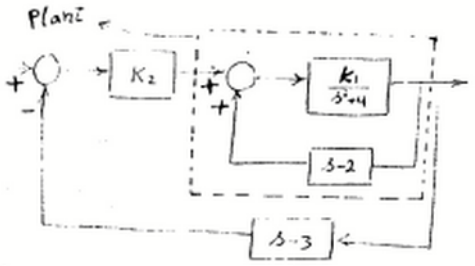
$\Delta(s) = 1 + k\,\frac{s}{s^2+5} = 0$

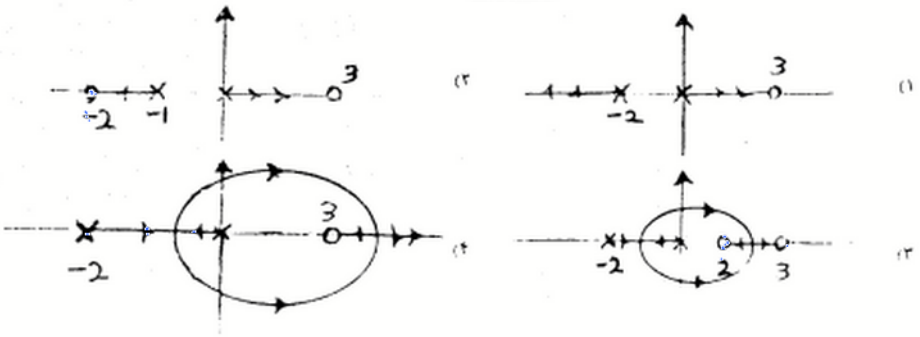
$G_{OL}(s) = \frac{s}{s^2+5}$

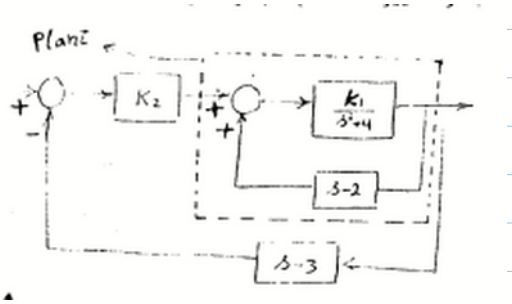
(2)

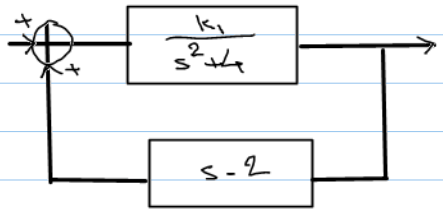


در سیستم شکل زیر در صورتی که k_1 به گونه‌ای انتخاب شده باشد که plant اصلی در مرز پایداری باشد، مکان هندسی ریشه‌های سیستم حلقه بسته به ازاء تغییرات $k_2 \geq 0$ چگونه خواهد بود؟







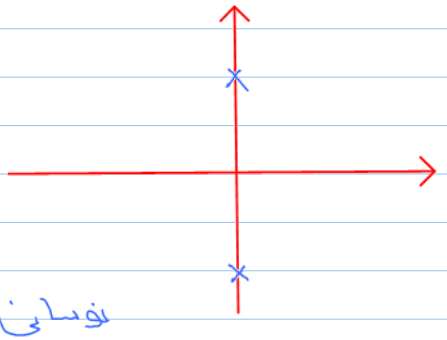


k_1 را طوری بیابید که سیستم فوق دارای پایداری باشد.

$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{k_1}{s^2+4} \times (s-2) \right) = 0$$

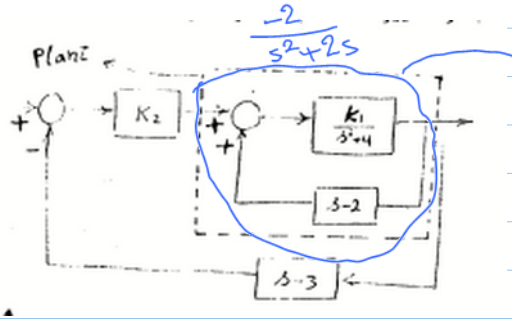
$$\Delta(s) = s^2 + 4 - k_1(s-2) = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 - k_1 s + 4 + 2k_1 = 0$$

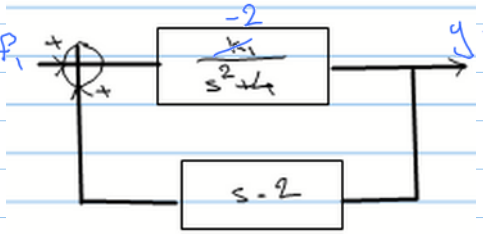


$k_1 = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^2 + 4 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm j2$ نوسانی

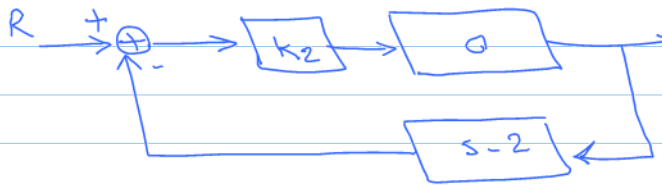
$k_1 = -2 \rightarrow \Delta(s) = s^2 + 2s = 0 \rightarrow s_{1,2} = 0, -2$



$$T_1(s) = \frac{\frac{k_1}{s^2+4}}{1 - \frac{k_1}{s^2+4}(s-2)}$$



$$\frac{Y(s)}{F_1(s)} = 0$$

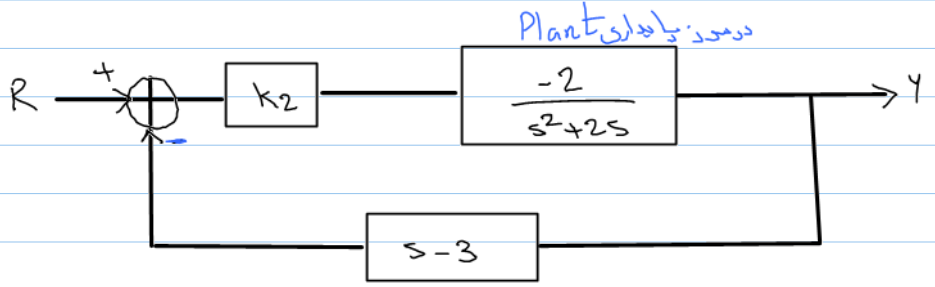


$\frac{Y}{R} = 0$

بنابراین فوق

$k_1 = -2$ به ازای فوق

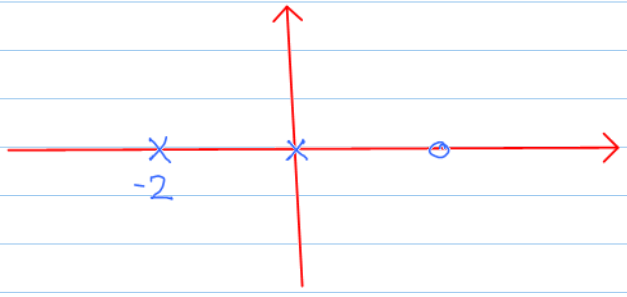
$$\frac{Y(s)}{F_1(s)} = \frac{\frac{-2}{s^2+4}}{1 - \frac{-2}{s^2+4}(s-2)} = \frac{-2}{s^2+2s}$$



$k_2 > 0$

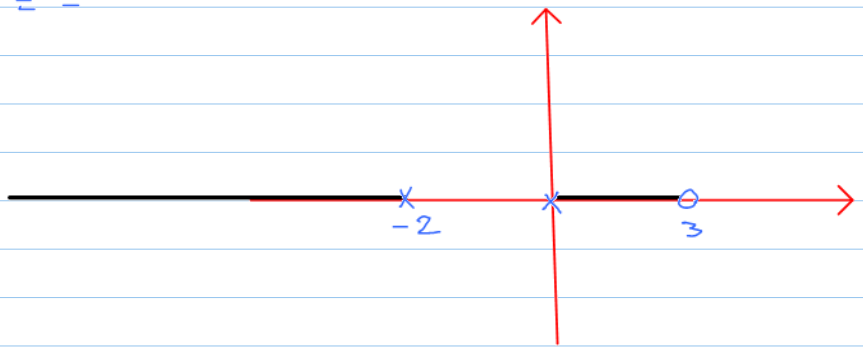
① $\Delta(s) = 1 + k_2 \left(\frac{-2}{s^2+2s} (s-3) \right) = 0$ $\quad G_{OL}(s) = \frac{-2(s-3)}{s^2+2s}$

②



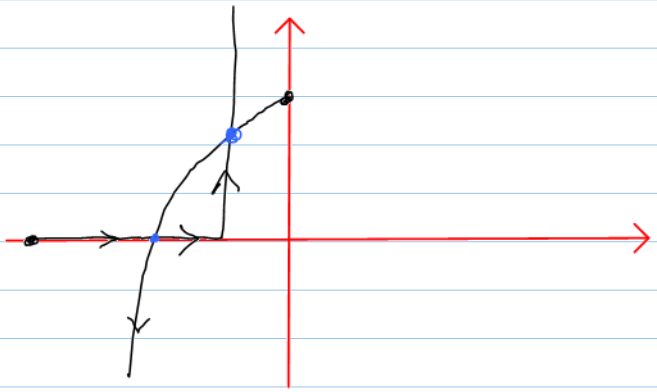
③ (علامت سما) / علامت = − × + = −

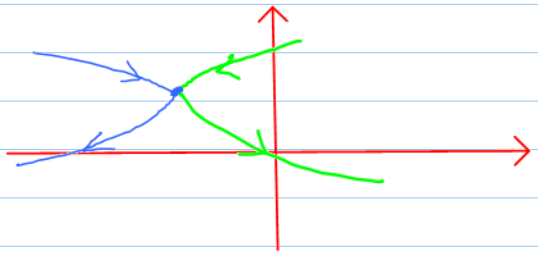
④

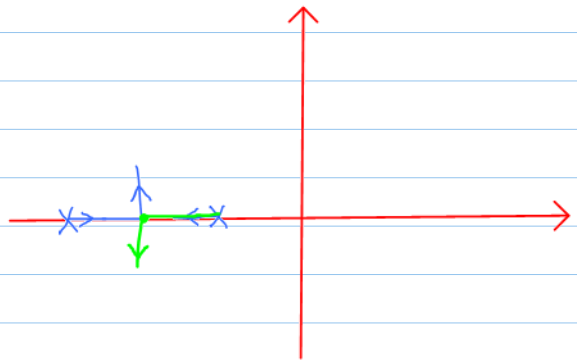


نقطه شکست :

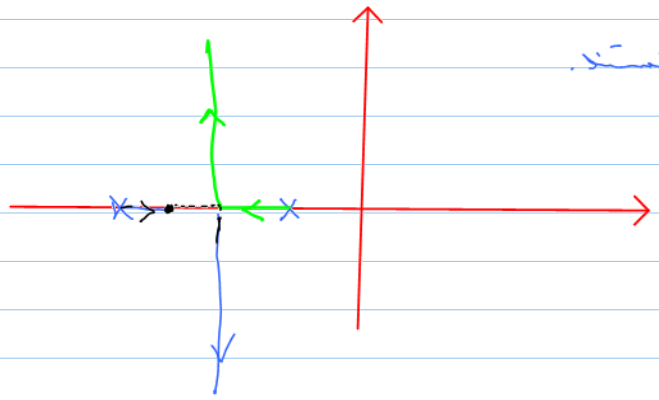
* روشهای هندسی ساده‌ها هرگز همدیگر را قطع نمی‌کنند مگر اینکه وقتی به هم می‌رسند شکست ایجاد شود.







* شاخه‌های مکان هواره زوج هستند.



تعریف نقطه شکست: در مکان هندسی جایی که دو یا چند شاخه به هم برخورد و تغییر مسیر دهند را نقطه شکست گوییم.

تعیین نقاط شکست

① از $\Delta(s)$ به فرم استاندارد، متغیر را بدست آورید. $\Delta = 1 + k\,G_{OL}(s) = 0$

$$k = \frac{-1}{G_{OL}(s)}$$

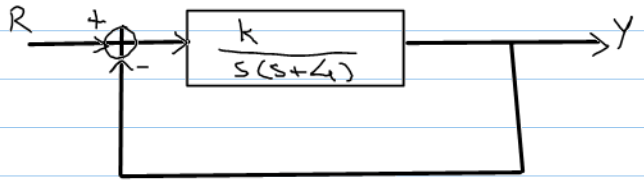
② ریشه‌های $\frac{dk}{ds} = 0$ را بدست آورید. این نقاط، کاندیدای نقطه شکست هستند.

③ از بین ریشه‌های $\frac{dk}{ds} = 0$، نقاطی که روی مکان هست حذف نشود.

④ بقیه نقاط باقیمانده، نقاطی نقطه شکست هستند که اگر k را در آن نقاط بدست آوریم اولاً حتماً باید و ثانیاً علامت k با مورد سؤال همخوانی داشته باشد.

$$k = \frac{-1}{G_{OL}(s)} \longrightarrow \text{حتماً}$$

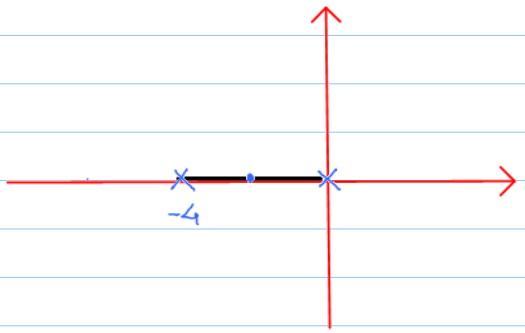
مثال. مکان هندسی سیستم زیر را یک بار برای $k>0$ و یک بار برای $k<0$ بدست آورید.



1) $k>0$ ① $\Delta(s) = 1 + k\,\frac{1}{s(s+4)} = 0$ ✓

② ✓

③ محل حقیقی = $-\infty$ تا -4



④ ✓

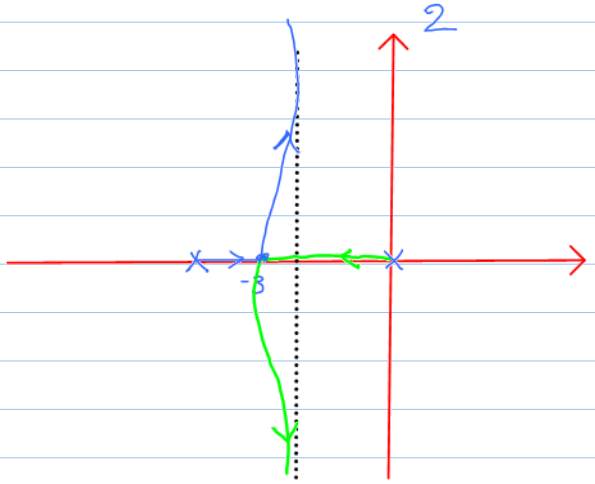
⑤ مجانبها

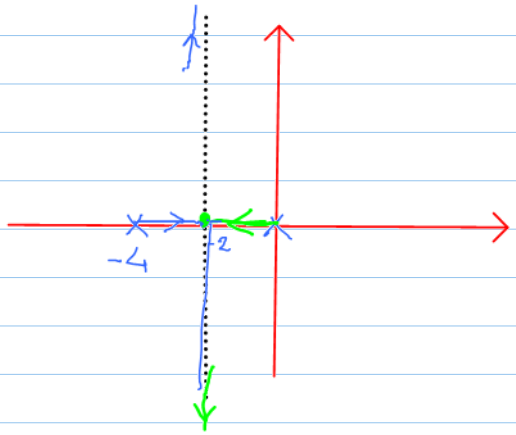
$$\text{تعداد} = |0-2| = 2$$

$$\text{زاویه مجانبها} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \quad ; \quad m=0 \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$m=1 \rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

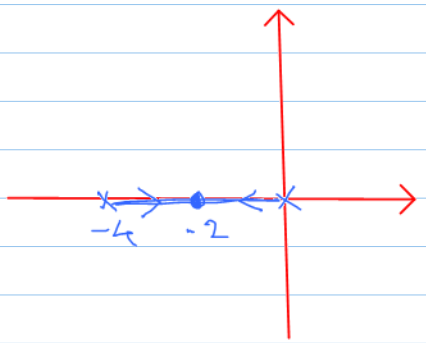
$$\sigma_0 = \frac{0+-4-(0)}{2} = -2$$



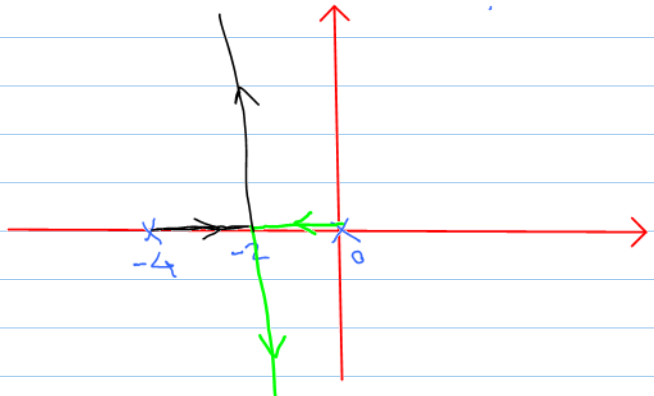


⑥ $$k = \frac{-1}{G_{OL}(s)} = -s(s+4) = -(s^2+4s)$$

$$\frac{dk}{ds} = -(2s+4) = 0 \rightarrow s = -2 \checkmark$$



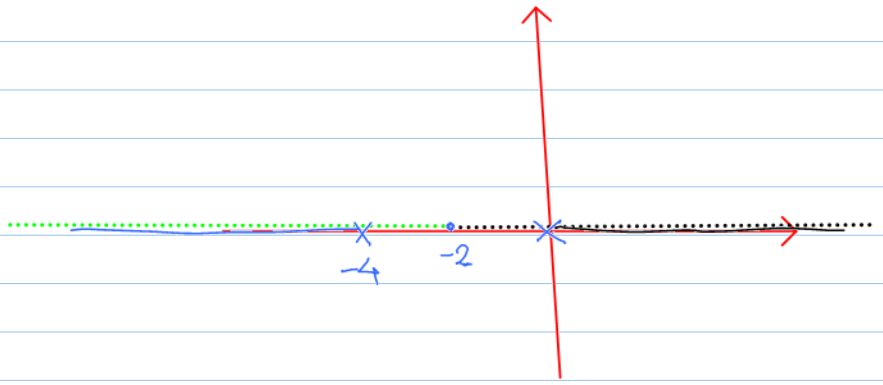
$s=-2 \rightarrow k = -(-2(-2+4)) = 4$ } حدود پایداری



2) $k<0$

③ علامت‌شکن $= -x- = +$

④



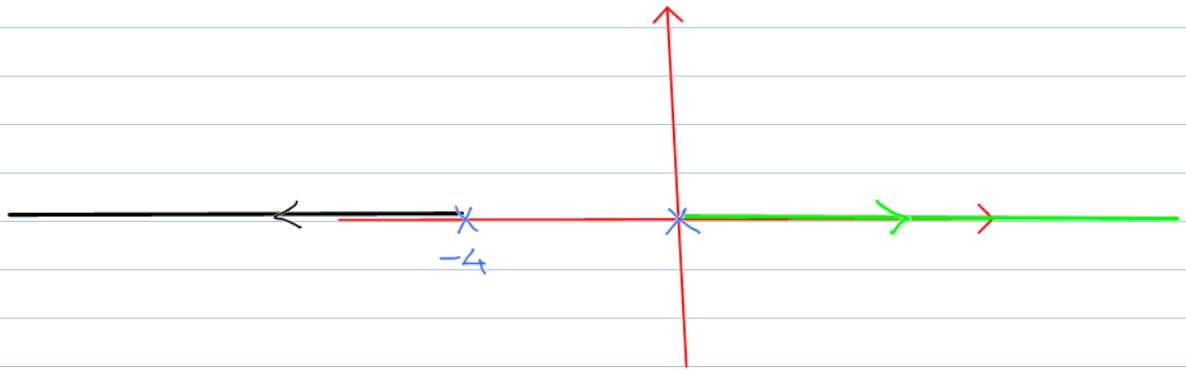
⑤ تعداد $= |0-2| = 2$

زاویه جابجایی $= \frac{2m\pi}{2} \rightarrow m=0 \rightarrow \theta_1 = 0$

$m=1 \rightarrow \theta_2 = \pi$

$\sigma_0 = \frac{-4+0-(0)}{2} = -2$

⑥ نقطه شکست



نکات نقطه شکست:

* نقطه شکست ورودی: یعنی جایی که دو یا چند شاخه از مسیر قبلی وارد هم و هیچی میشوند.

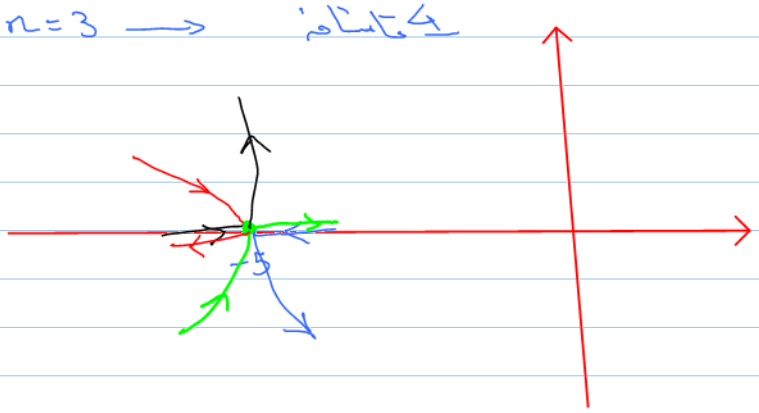
~ ~ خروجی: ~ ~ ~

* بین دو قطب حقیقی اگر جزء مکان باشد قطعاً به مقدار فرد (معمولاً 1) نقطه شکست دارد.

* ~ ~ صفر ~ ~ ~

$\frac{dk}{ds} = (s+5)^3 = 0$ نقطه شکست $s = -5$

$s = \{-5, -5, -5 \} \rightarrow n = 3 \rightarrow$ 4 شاخه



برق ۸۷

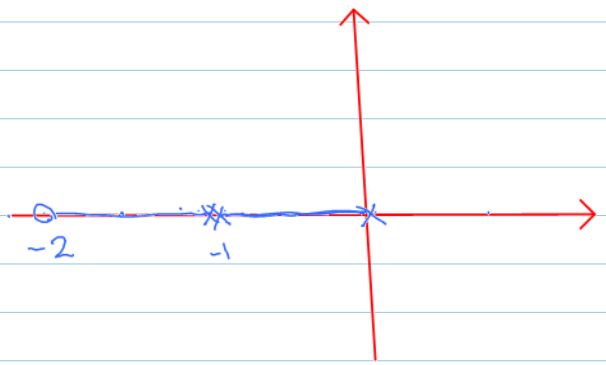
مثال. مکان هندسی ریشه‌ها با $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + s(k+1) + 2k = 0$ و k مثبت و اعداد واقعی را با فرض $k > 0$ رسم کنید.

(1) $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + ks + s + 2k = 0$

$\Delta = s^3 + 2s^2 + s + k(s+2) = 0$

$\Delta(s) = 1 + k\frac{s+2}{s^3+2s^2+s} = 0$ $\quad G_{OL} = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$

(2)



(3) تعداد مجانب‌ها = $-$ − $+$ = $-$

(4)

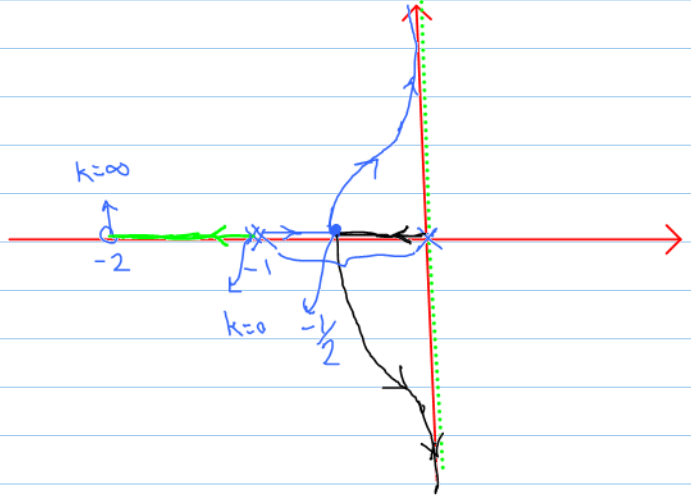
(5) تعداد مجانب = $|1-3| = 2$

زاویه مجانب‌ها = $\frac{(2m+1)\pi}{2}$ $\quad m=0 \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}$

$m=1 \rightarrow \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$

$\sigma_0 = \frac{(0+(-1)+(-1))-(-2)}{2} = 0$

⑤ مکان هندسی ریشه‌ها برای $\zeta = 0.5$



$$\Delta(s) = 1 + k\,\frac{s+2}{s(s+1)^2} = 0$$

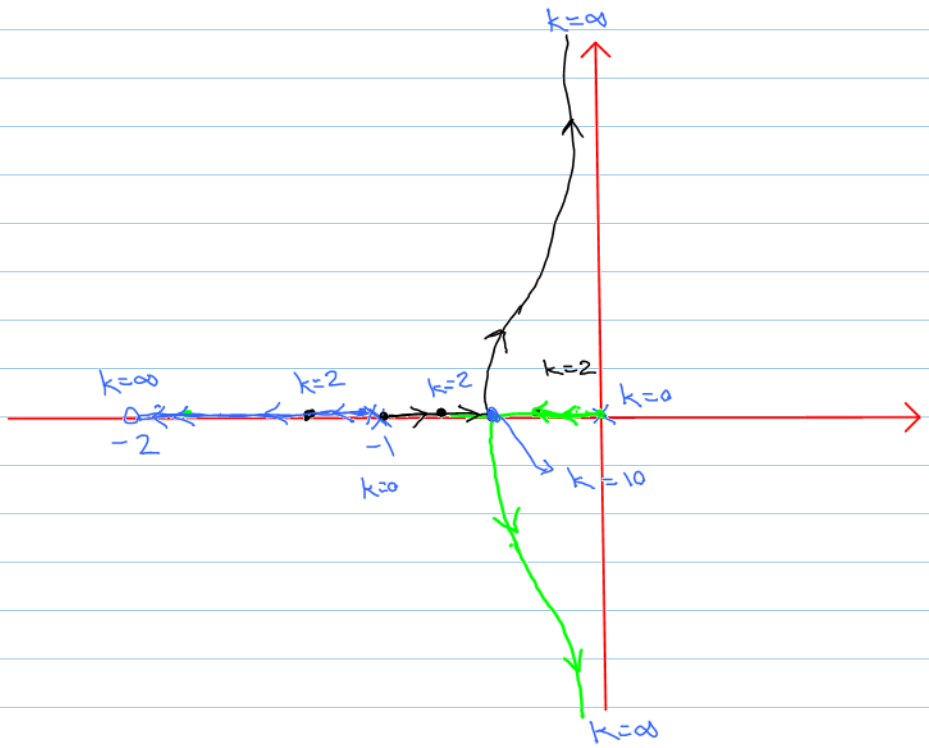
$$k = -\frac{s(s+1)^2}{s+2}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\left(\frac{(3s^2+4s+1)(s+2) - (1)(s^3+2s^2+s)}{(s+2)^2}\right) = 0$$

$$-(3s^3+10s^2+9s+2 - s^3-2s^2-s) = 0$$

$$-(2s^3+8s^2+8s+2) = 0 \rightarrow \underline{s^3+4s^2+4s+1=0}$$

$$s = \begin{cases} -\frac{1}{2} \checkmark \\ \cancel{-2} \\ \cancel{-2} \end{cases}$$



$$\Delta(s) = 1 + k\,\frac{s+2}{s(s+1)^2} = 0 \qquad k: 0 \rightarrow \infty$$

3 قطب حلقه بسته حتما پایدار $\rightarrow$ $k: 0 \rightarrow 10$

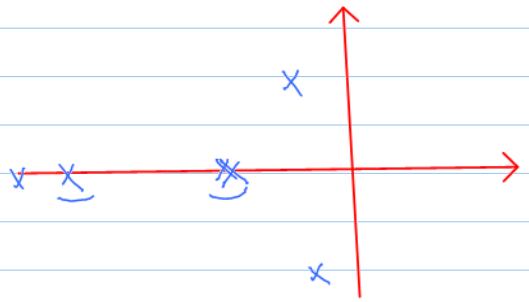
2 قطب مختلط پایدار و یک قطب حتما ناپایدار $\rightarrow$ $k: 10 \rightarrow \infty$

حتما پایدار $\rightarrow$ $k: 0 \rightarrow \infty$

$k: 0 \rightarrow 10$ بیشتر فوق میرا

$k=10 \rightarrow$ 2 قطب حتما ناپایدار مزدوج و یک قطب حتما ناپایدار

$k: 10 \rightarrow \infty$ ناپایدار

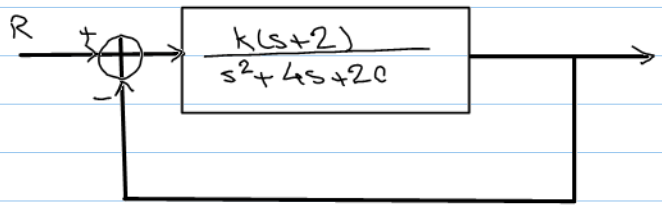


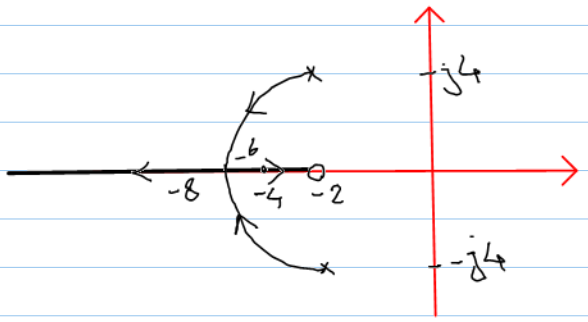
حلسه آینده $\rightarrow$ ورود فضای حالت

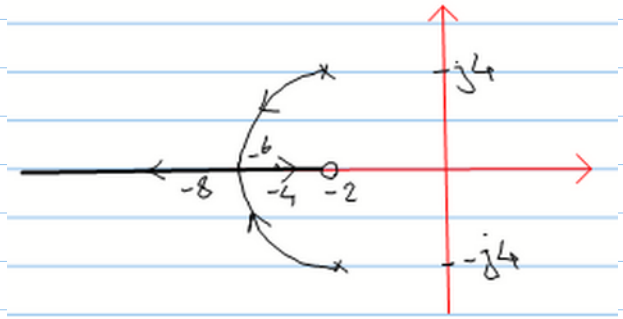
مکانیک ۸۸.

دیاگرام بودی و مکان هندسی ریشه های یک سیستم در شکل داده شده است. مقدار k برای اینکه معادله مشخصه سیستم دارای ریشه مضاعف گردد و نیز مقادیر ریشه ها به ترتیب کدام است؟

۱) ۰ ، $-2\pm j4$ ۲) ۰ و -6 ۳) ∞ ، -2 ۴) $-6,8$





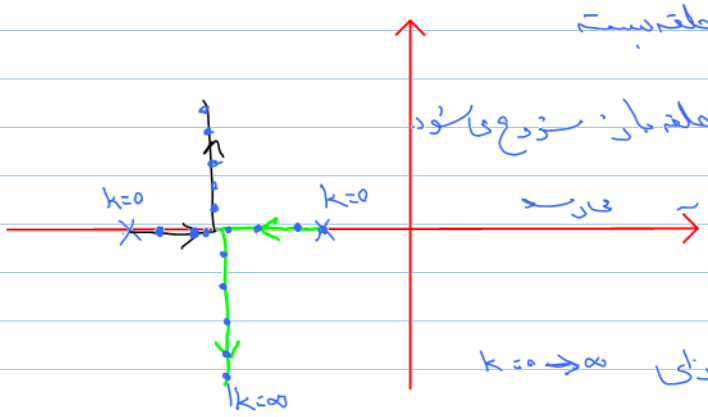


به ازای چه مقدار k سیستم حلقه بسته دارای دو نقطه مضاعف قطبی است؟

شاخه‌های هر خط یک قطب حلقه‌بسته

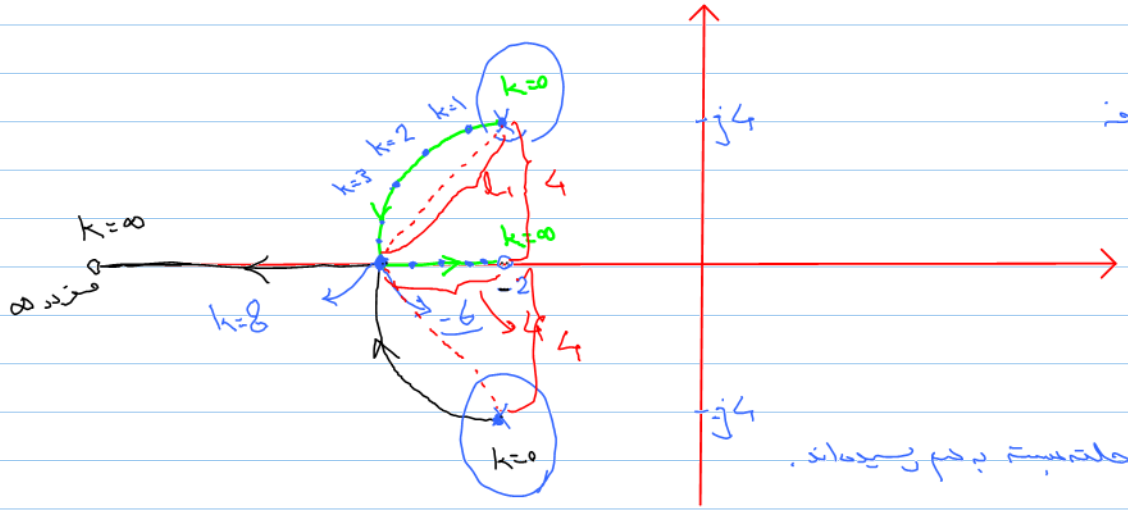
مکان هندسی به ازای $k=0$ از قطبهای حلقه باز شروع و به

$k=\infty$ ـ ـ ـ صفرهای آن ختم می‌شود



هر شاخه در واقع یک قطب حلقه‌بسته با ازای $k=0 \to \infty$

نقطه‌ای که در آن مکان هندسی ریشه‌های مضاعف دارد.



هر قطب یک شاخه

در $s=-6$ هر دو شاخه

به هم می‌رسند.

در $s=-6$ دو تا قطب حلقه‌بسته به هم می‌رسند.

* اگر $s=a$ نقطه شکست مرتبه n ام باشد یعنی $s=a$ قطب مضاعف مرتبه $n+1$ ام

سیستم حلقه‌بسته است.

با ازای چه مقدار k دو قطب حلقه بسته روی $s=-6$ می‌افتد؟

مکان هندسی ـ ـ ـ ـ $s=-6$ ، قطب حلقه بسته است؟

$$|k| = \frac{\text{حاصلضرب فاصله قطبهای حلقه باز تا نقطه}}{\text{ـ ـ ـ صفرهای ـ ـ ـ ـ ـ}} = \frac{l_1 \times l_2}{l_3} = \frac{4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{4} = 8$$

$$l_1 = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2} \qquad l_3 = 4$$

$$l_2 = 4\sqrt{2}$$

* در مکان هندسی برای حل سوالات چین، عمل می‌کنیم:

① $\Delta(s)$ را به فرم استاندارد بنویسید.

② علامت مکان را تعیین کنید.

③ وجه غایز گزینه‌ها را پیدا کنید و وجه غایز را با حل بدست آورید.

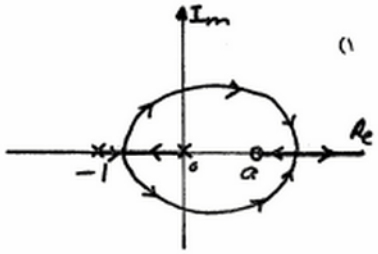
3-1- حل مزماو قطبهای حلقه باز

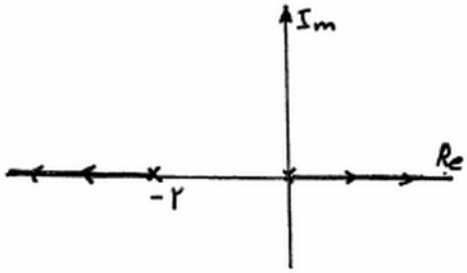
3-2- بخشی از خور حقیقی که جزو مکان است.

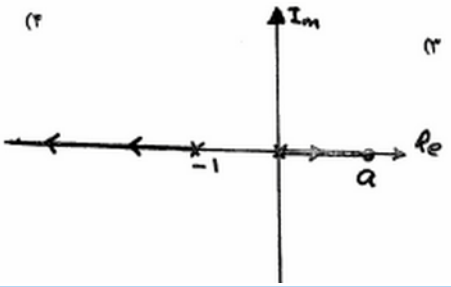
3-3- جابجایی بقداد، زاویه، حل تقاطع مجانبها

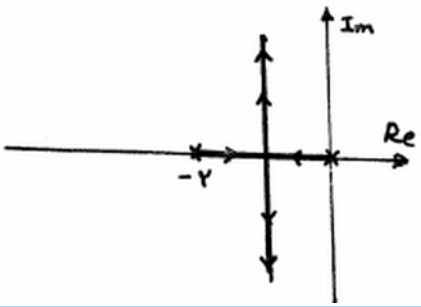
3-4- نقاط شکست

۷ ـ مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی با فیدبک واحد منفی و تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{s-a}{s(s+1)}$ به ازاء تغییرات $a(a \geq 0)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


① $\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$ پارامتر ← a

$\Delta(s) = 1 + \frac{s-a}{s(s+1)} = 0$ $\Delta = 1 +$ متغیر $\times G_{OL}(s) = 0$

$\Delta(s) = s^2 + s + s - a = 0$

$\Delta(s) = s^2 + 2s - a = 0$

$\Delta(s) = \frac{s^2+2s-a}{s^2+2s} = 0 \rightarrow \Delta(s) = 1 - a \times \frac{1}{s^2+2s} = 0$

$k = -a$ $\Delta(s) = 1 + k \frac{1}{s^2+2s} = 0$

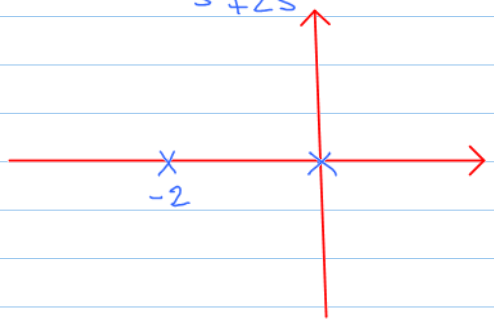
$a > 0$

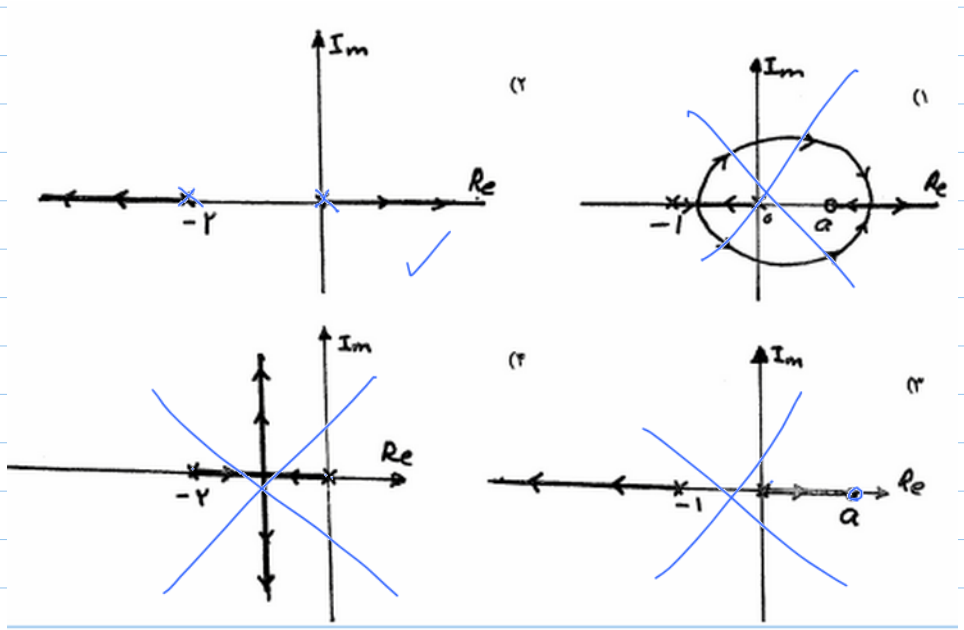
متغیر: $k = -a$ $G_{OL}(s) = \frac{1}{s^2+2s}$

② علامت‌ها: $- \times - = +$

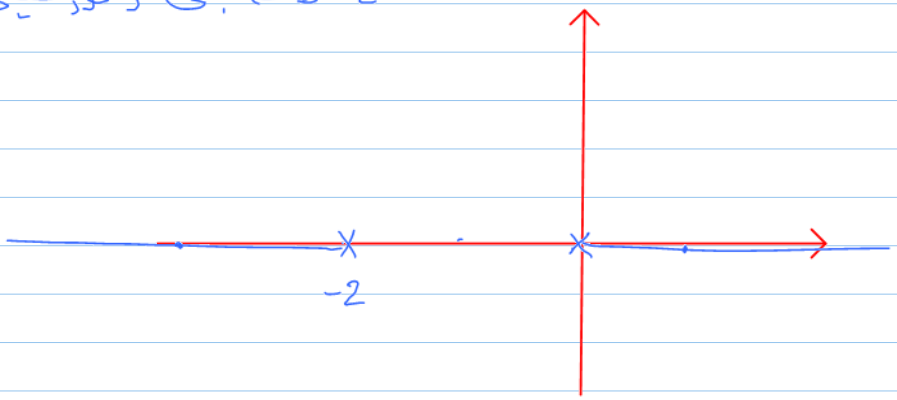
③ صفر و قطب‌های حلقه باز

$G_{OL}(s) = \frac{1}{s^2+2s}$





$-2 \leq$ بیش از حد حلقه‌ها



تست ۸۴.

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی $G(s)H(s)=\frac{k(s+3)}{(s+1)(s+p)}$ است. اگر $k>0$ باشد برای آنکه پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته همواره فوق میرا شود، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $p>1$ ۲) $p<3$ ۳) $0<p<1$ ۴) $0<p<3$

$G(s) = \frac{k(s+3)}{(s+1)(s+p)}$ $\quad k>0$

p کجا باشد تا برای تمام kهای مثبت پایدار باشد؟



حلقه بسته فوق پایدار است؟

↓

یعنی قطبهای حلقه بسته حقیقی منفی باشند؟

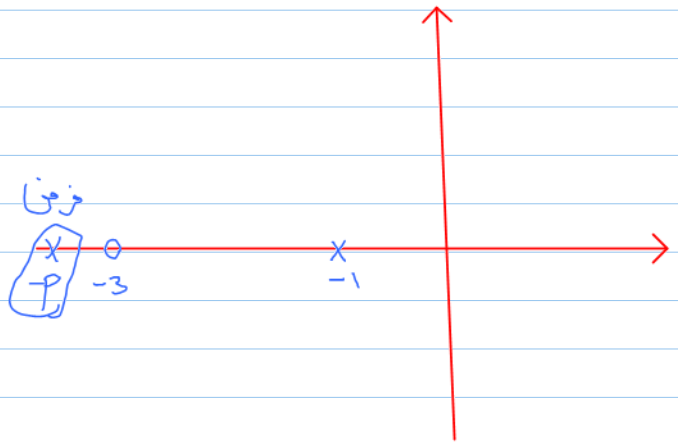
یعنی شاخه‌های مکان هندسی حقیقی منفی باشند؟

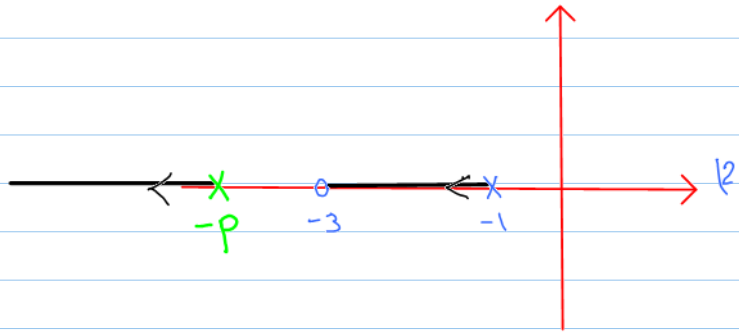
p کجا باشد تا هواره شاخه‌های مکان هندسی روی محور حقیقی منفی باشند؟

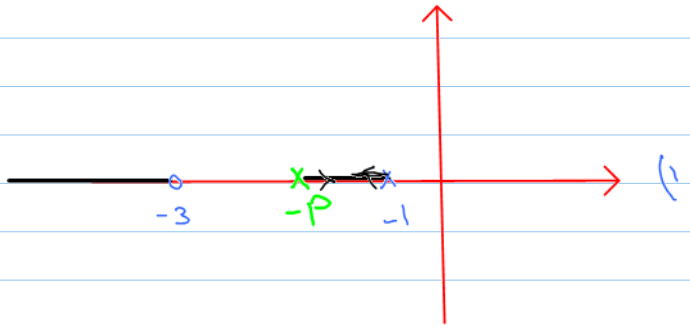
① $\Delta(s) = 1 + \underbrace{\frac{k(s+3)}{(s+1)(s+p)}}_{G_{OL}(s)} = 0$ $\quad$ متغیر k

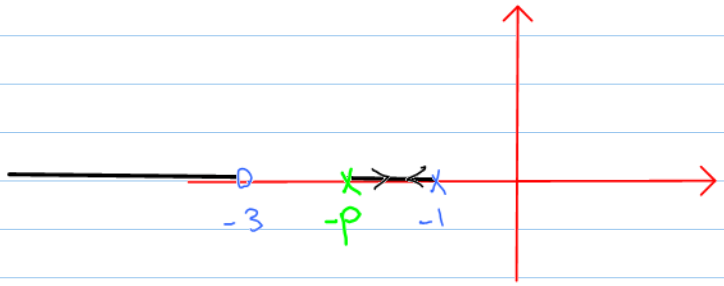
② مجهول

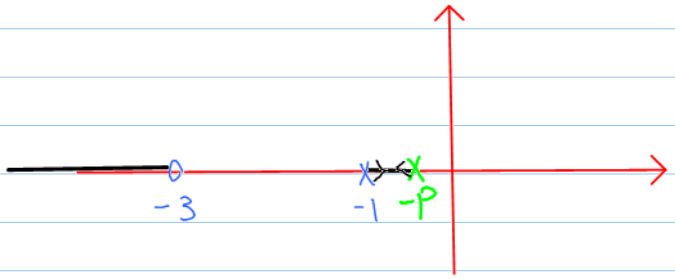
③



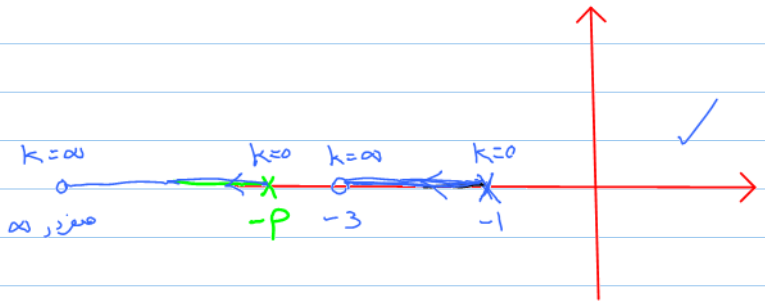


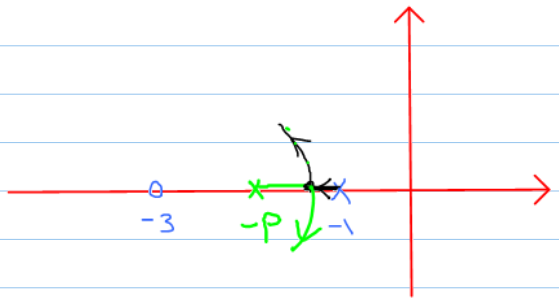


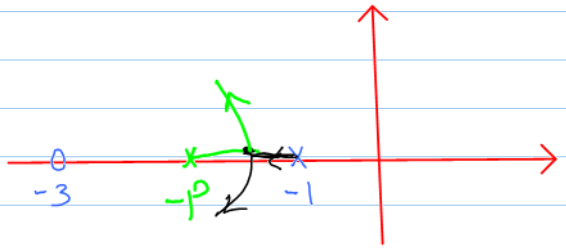


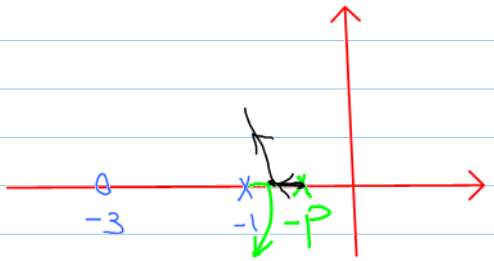


نکته: بین هر دو قطب حقیقی اگر بود مکان باشد حتماً تعداد فرد نقطه مثبت داریم.


k=∞
k=0
k=∞
k=0
صفر در ∞
-p
-3
-1

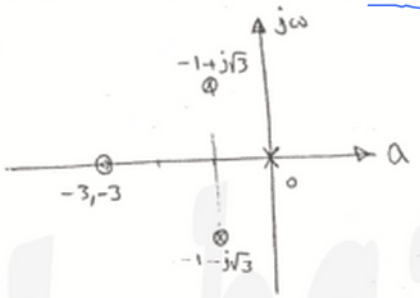

0
-3
-p
-1


0
-3
-p
-1


0
-3
-1
-p

برو تا ۸۴ خیلی خوب

تعدادی از قطب‌ها و صفرهای حلقه باز و حلقه بسته سیستمی در شکل داده شده است. اگر بخواهیم سیستم فوق دارای کمترین درجه باشد آنگاه:

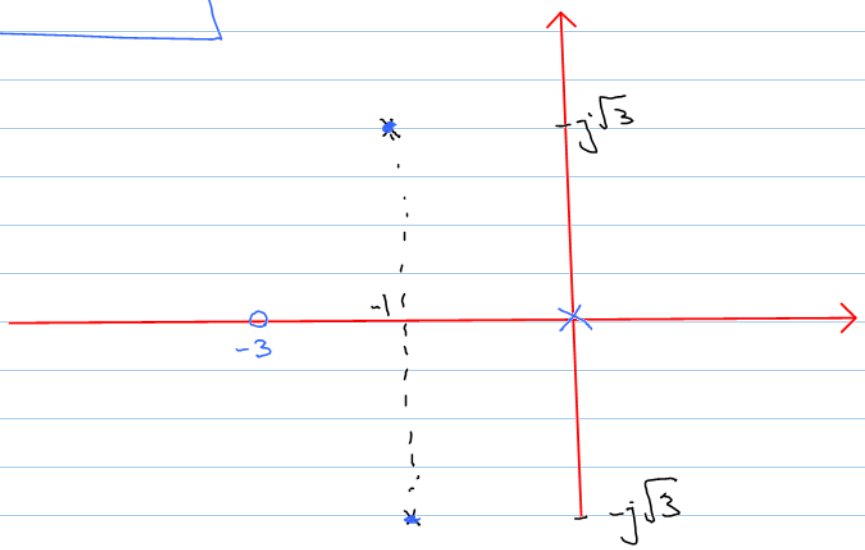


صفر حلقه باز : o
قطب حلقه باز : x
قطب حلقه بسته : ⊗

۱) فقط یک قطب حلقه باز لازم است.
۲) فقط یک صفر حلقه باز لازم است.
۳) فقط دو قطب حلقه باز لازم است.
۴) حداقل یک صفر و یک قطب حلقه باز لازم است.



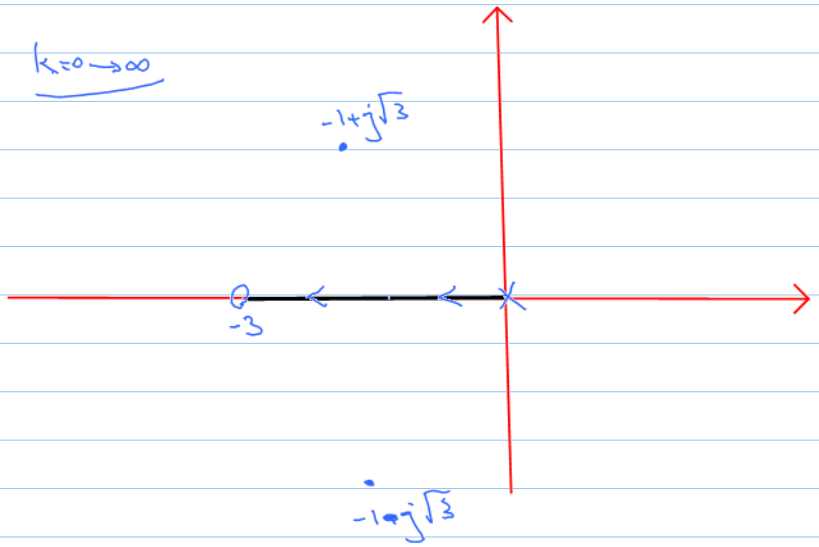
* را طوری انتخاب کردیم که قطبهای حلقه‌بسته در $-1 \pm j\sqrt{3}$ باشند



سیستم حلقه‌باز حداقل چند صفر و قطب حلقه‌باز لازم دارد که مکان هندسی ریشه‌ها از $-1 \pm j\sqrt{3}$ بگذرد.

(علامت‌ها = + × − = −)

$K=0 \to \infty$

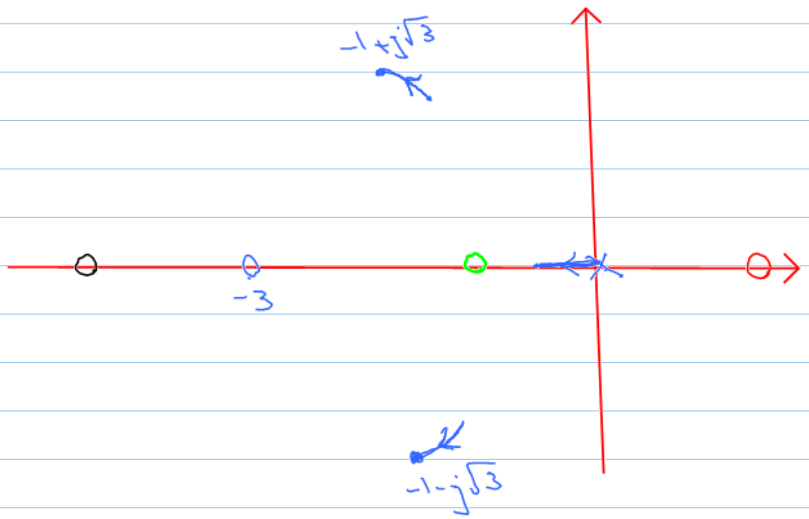


تعداد مناطق = $\max\{1,1\} = 1$

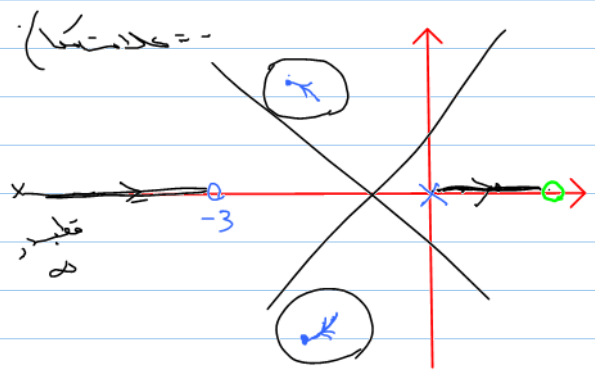
حداقل 1 مناطق نیاز داریم

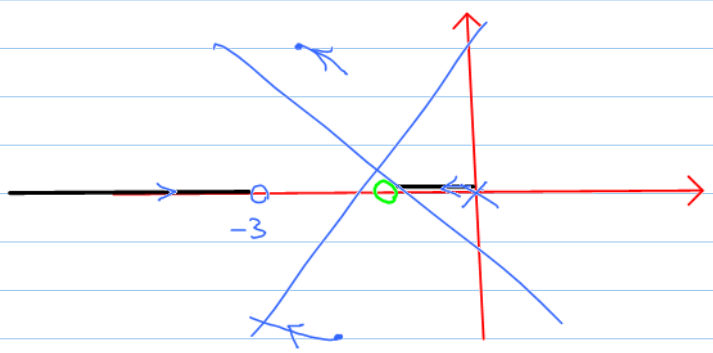
صفر

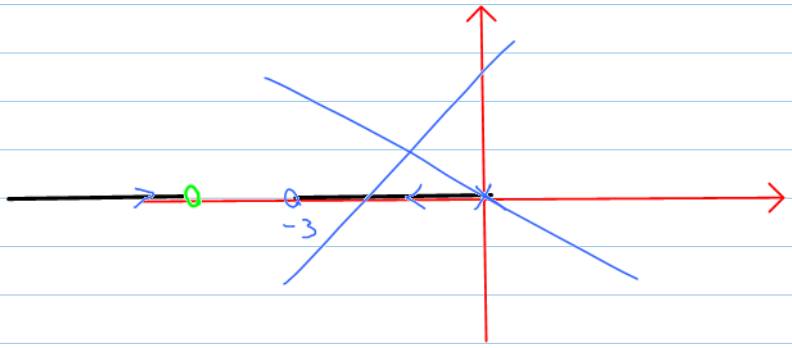
قطب

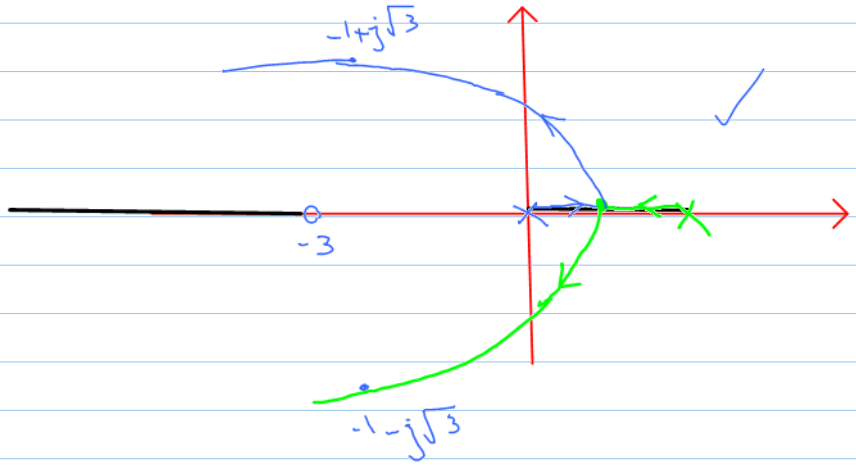


ریشه‌های حلقه‌بسته مزدوج هستند.

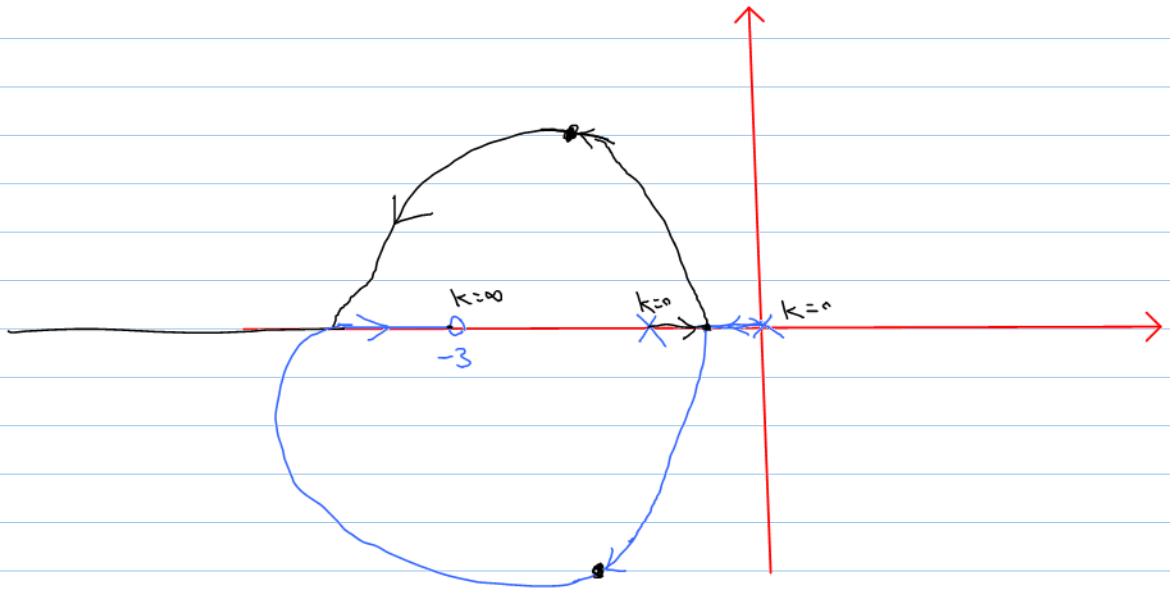


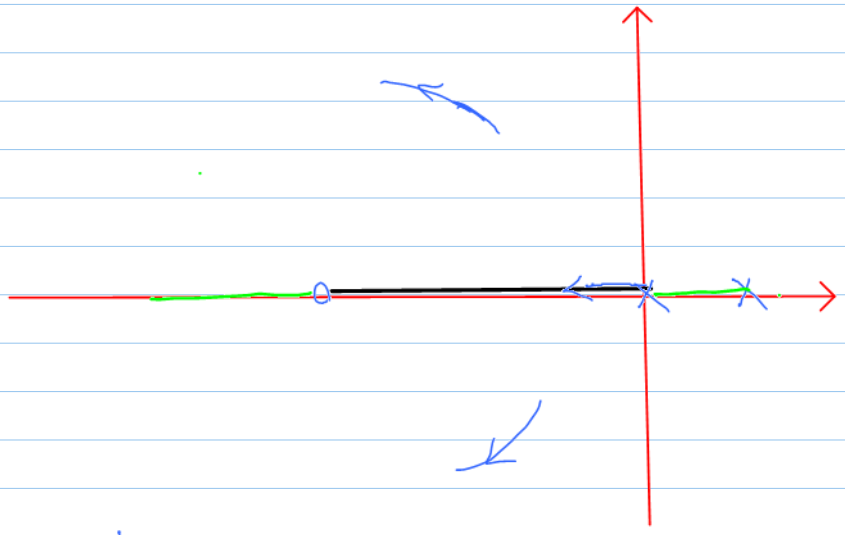






فقط ۱ مقطب حقیقی

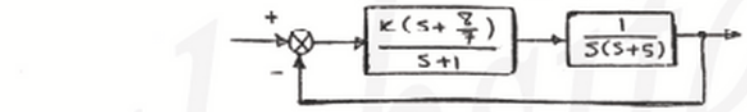




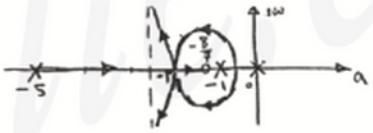
نقطه شکست لازم داریم ← بین دو موضعیتی مزدوج

√ ~ ~ متقابل ~ ~

کدام شکل داده شده، دیاگرام مکان ریشه سیستم حلقه بسته زیر است؟



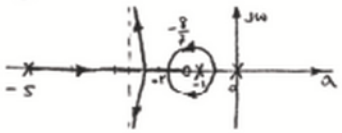
۱)



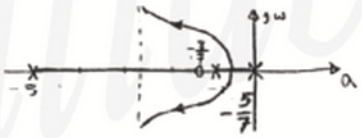
۲)



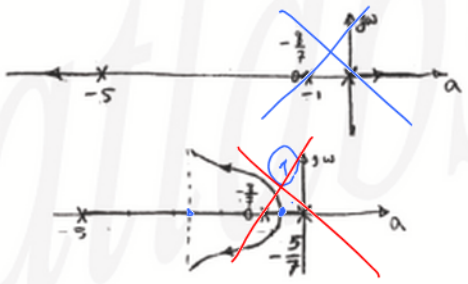
۳)

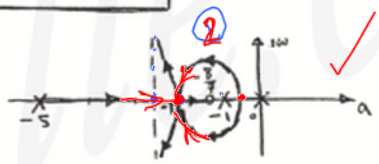


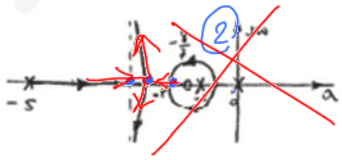
۴)









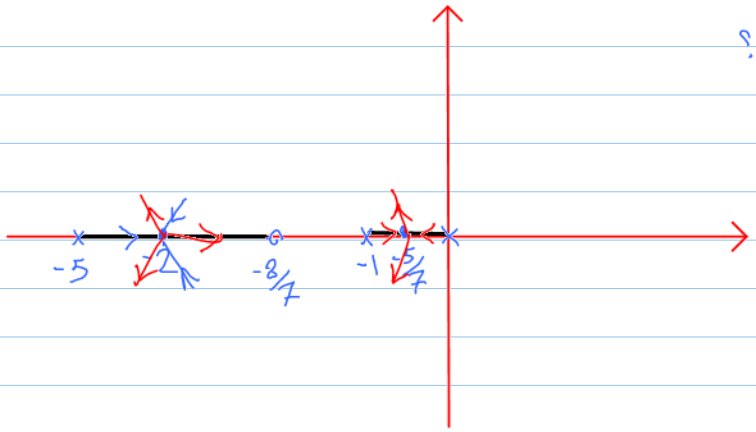


① $\Delta(s) = 1 + k \underbrace{\frac{(s+\frac{8}{7})}{s+1} \times \frac{1}{s(s+5)}}_{G_{OL}(s)} = 0$

② علامت مکان = + × − = −

۳-۱- مسیرهای حلقه‌باز ✓

۳-۲- بخشی از محور حقیقی که بر مکان است؟



۳-۳- جدا شونده ✓ $\left.\begin{matrix} -2 \\ \pm 90^\circ \end{matrix}\right\}$

۳-۴- نقاط شکست؟

$$k = -\frac{1}{G_{OL}(s)} = -\left(\frac{s(s+1)(s+5)}{s+8/7}\right) = -\left(\frac{s^3+6s^2+5s}{s+8/7}\right)$$

$$\frac{dk}{ds} = -\left(\frac{(3s^2+12s+5)(s+8/7) - 1(s^3+6s^2+5s)}{(s+8/7)^2}\right) = 0$$

$\rightarrow s = -2, -2, -5/7 \rightarrow$ جدا شونده $\left\{\begin{matrix} s=-2, -2 \\ s=-5/7 \end{matrix}\right.$

شرط جزء مکان بودن $\begin{cases} s=-2,-2 \checkmark \\ s=-5/7 \checkmark \end{cases}$

$s=-2 \rightarrow k=-\left(\frac{-2\times -1\times 3}{-6/7}\right)=7 \checkmark \qquad k=-\left(\frac{s(s+1)(s+5)}{s+8/7}\right)$

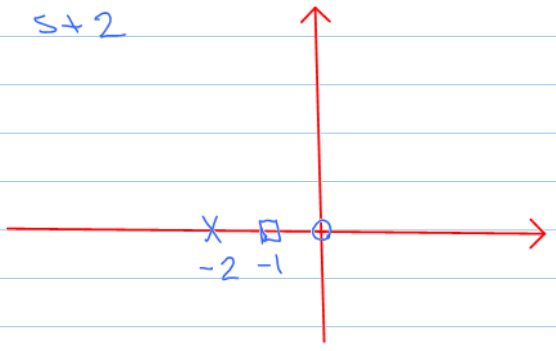
$s=-2,-2$ یک قطب شکست است. از مرتبه 2 ← $2+1$ شاخه به آن وارد و $2+1$ شاخه از آن خارج می‌شود

$k=-\left(\frac{-5/7\,(2/7)\,(30/7)}{3/7}\right)=\frac{100}{49} \checkmark$

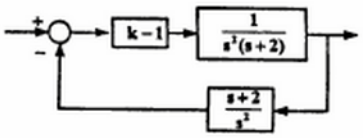
$s=-5/7$ یک قطب شکست مرتبه 1 است ← 2 تا شاخه وارد و 2 تا شاخه خارج

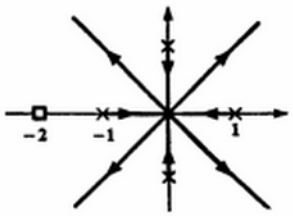
* در مکان هندسی نیز از بدست آوردن $G_{OL}(s)$، صفرها و قطب‌های حذف‌شونده را با علامت ضرب روی مکان نشان می‌دهند ولی هیچ تأثیری روی مکان ندارد.

$G_{OL}(s)=\frac{(s+1)\,s}{(s+1)(s+2)}=\frac{s}{s+2}$

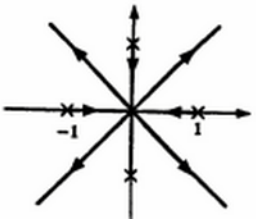


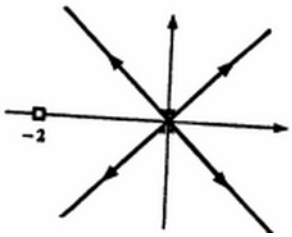
مکان هندسی قطب‌های سیستم حلقه بسته مقابل برای $k > 0$ کدام یک از موارد زیر است؟

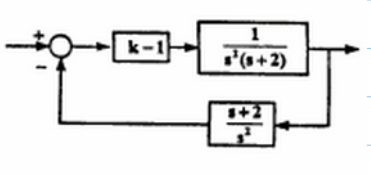


۱)


۲)


۳)


۴)




① $\Delta(s) = 1 + \underline{(k-1)}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right)\left(\frac{s+2}{s^2}\right) = 0$

* در $s=-2$ قطب موجود داریم.

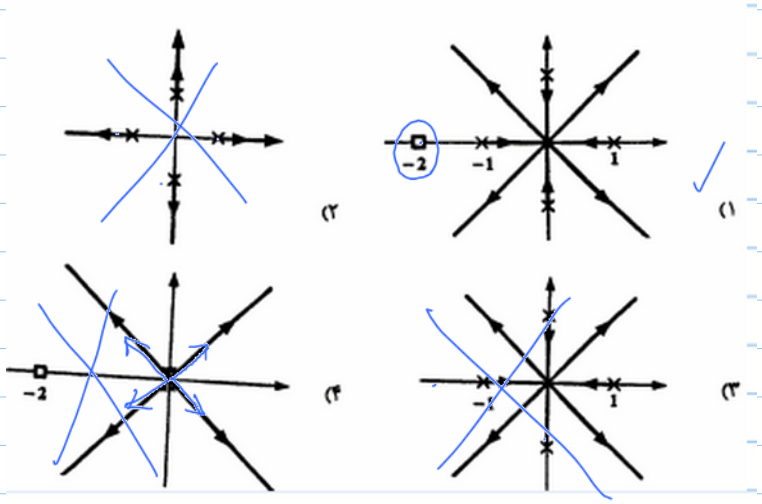
$\Delta(s) = s^4 + k - 1 = 0$

$\Delta(1) = s^4 - 1 + k = 0$

$\Delta(1) = 1 + \underbrace{k}_{\text{بهره}} \underbrace{\frac{1}{s^4-1}}_{G_{OL}(s)} = 0$

② علامت‌شمار = + × − = −

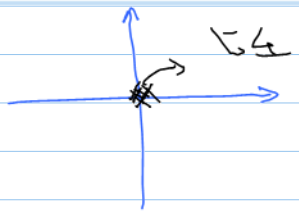
3-1 ← صفرها و قطب‌های حلقه باز.



$G_{OL}(s) = \frac{1}{s^4-1}$ $\quad s^4-1=0$

$s^4 = 1$

قطب‌ها: $\begin{cases} s^2 = 1 \\ s^2 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = +1, -1 \\ s = +j, -j \end{cases}$



جلسه ۲۹ کنترل خطی

برق ۸۷

۰ معادله مشخصه یک سیستم کنترل به صورت زیر است

$$s^3 + (a+b+k)s^2 + (ab+kc+kd)s + kcd = 0$$

تحت شرایط کدام گزینه، ریشه‌های این معادله همواره حقیقی و منفی هستند. d, c, b, a و k حقیقی و مثبت هستند.

۱) $b > d > c > a$

۲) $d > c > b > a$

۳) $d > a > c > b$

۴) $b > d > a > c$

$s^3 + (a+b+k)s^2 + (ab+kc+kd)s + kcd = 0$

$\Delta(s) = s^3 + (a+b+k)s^2 + (ab+kc+kd)s + kcd = 0$

مکان هندسی ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای تغییرات k (مثبت) از صفر تا $+\infty$ چگونه باشد.

مقادیر a، b، c، d چگونه باشد تا شاخه‌های مکان هندسی همواره حقیقی باشند؟

① $\Delta(s) = \underbrace{s^3 + (a+b)s^2 + abs}_{G_{OL}(s)} + ks^2 + kcs + kds + kcd = 0$

$$\Delta(s) = 1 + k\,\frac{s^2 + (c+d)s + cd}{s^3 + (a+b)s^2 + abs} = 0$$

$$G_{OL}(s) = \frac{(s+c)(s+d)}{s(s+a)(s+b)}$$

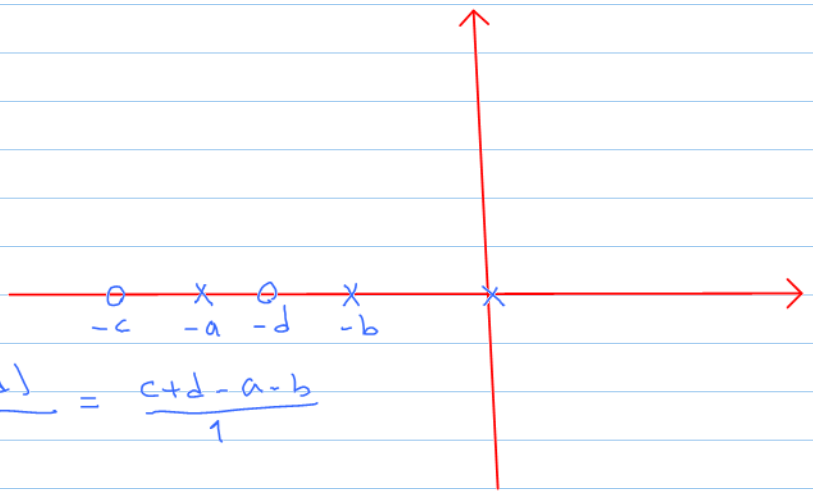
② علامت مکان = + × − = −

③ ✓

④ جابجا = $|2-3| = 1$

زاویه = $\frac{(2m+1)\pi}{1} \xrightarrow{m=0} \theta = \pi$

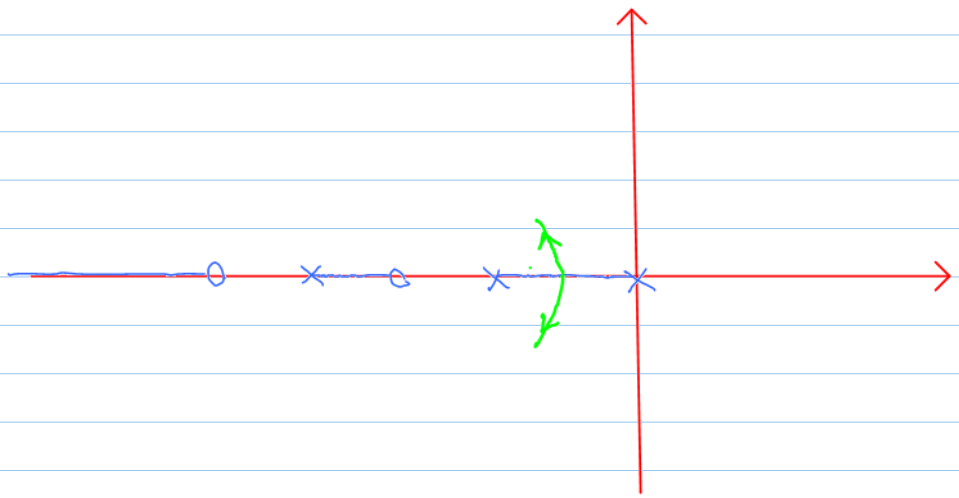
$\sigma_0 = \frac{-a+(-b)-(-c+-d)}{1} = \frac{c+d-a-b}{1}$



⑤ تعداد شاخه‌ها = $\max\{2,3\} = 3$ → یک قطب حلقه باز به ∞ میل می‌کند

$k=\infty$ $k=0$

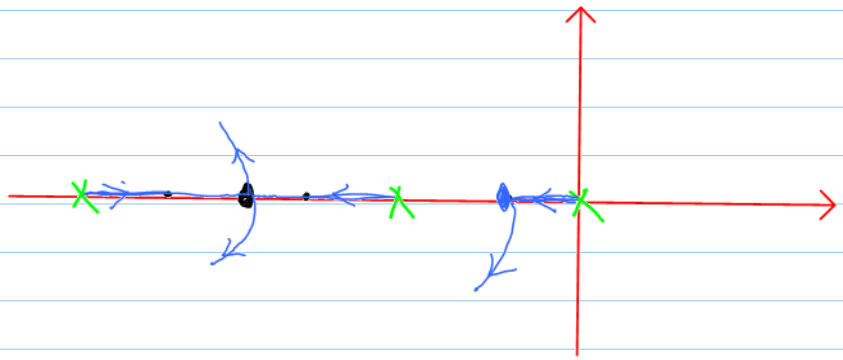
⑥ نقطه شکست

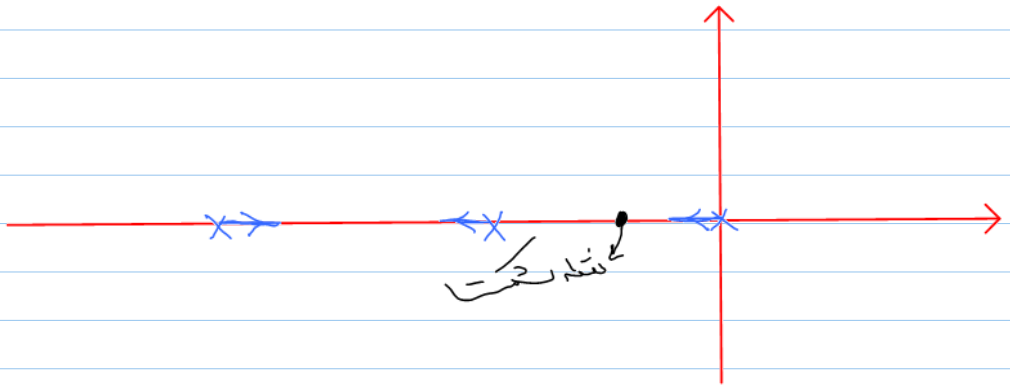


مکان (نامها) از روی متقاطعه باز (حقیقی) شروع می‌شود.

سؤال می‌خواهد نامها همواره روی هر حقیقی باشند.

هفته شکسته ← نقاطی که نامها باز روی هر حقیقی خارج یا وارد می‌شوند.

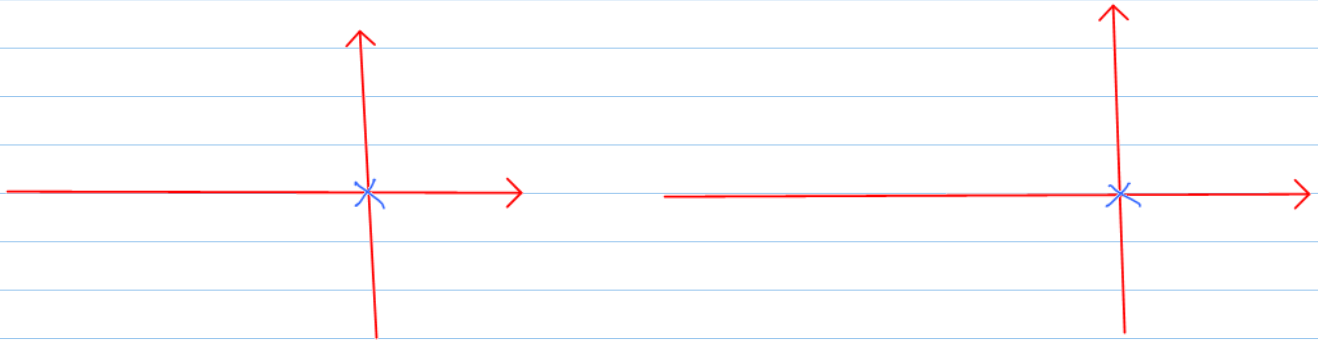


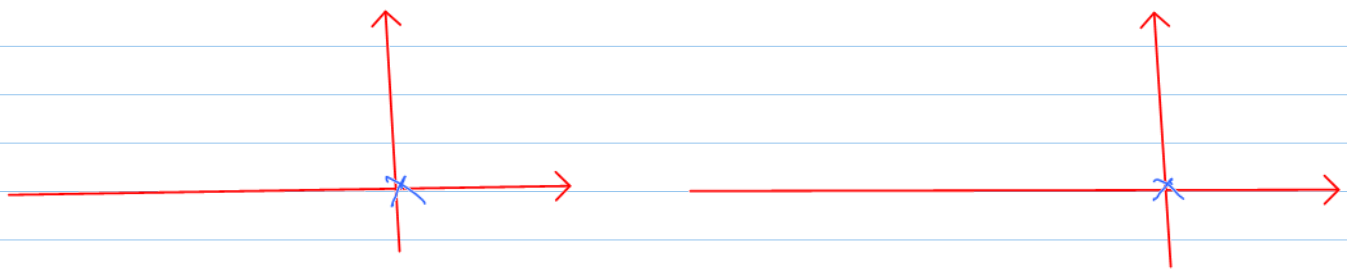


شرط اینکه نامها همواره روی هر حقیقی باشند ← نقطه شکست نداشته باشیم.

بین دو قطب حقیقی اگر مزدوج نباشد
بین دو صفر حقیقی اگر مزدوج نباشد
← نقطه شکست خواهیم داشت.

اگر بین دو قطب حقیقی یا بین دو صفر حقیقی مزدوج نباشد قطعاً نقطه شکست خواهیم داشت.





... حقیقی و منفی هستند. d,c,b,a و k حقیقی و مثبت هستند.

۱) $b>d>c>a$ ۲) $d>c>b>a$ ۳) $d>a>c>b$ ۴) $b>d>a>c$

$-a=p_1$

$-b=p_2$

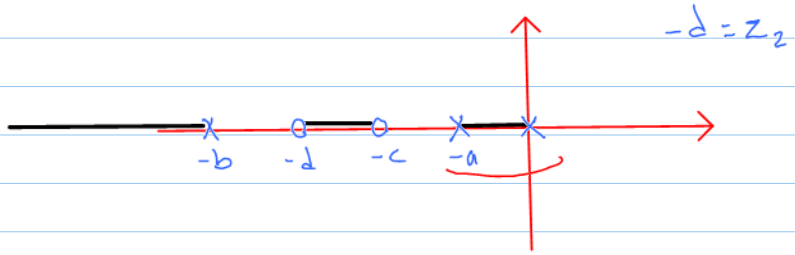
$-c=z_1$

$-d=z_2$

1) $a<c<d<b \rightarrow -a,-b,-c,-d$

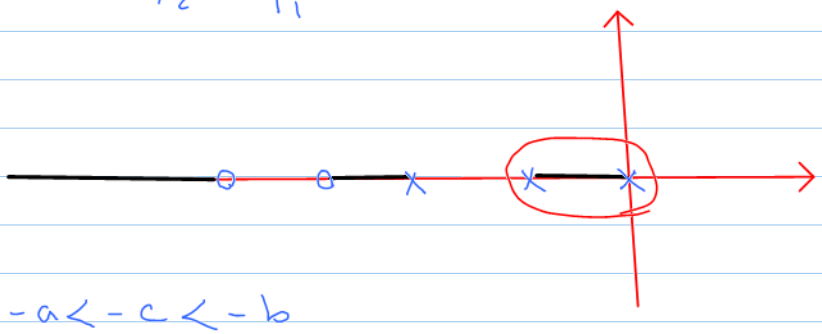
$\downarrow -a>-c>-d>-b$

$p_1>z_1>z_2>p_2$



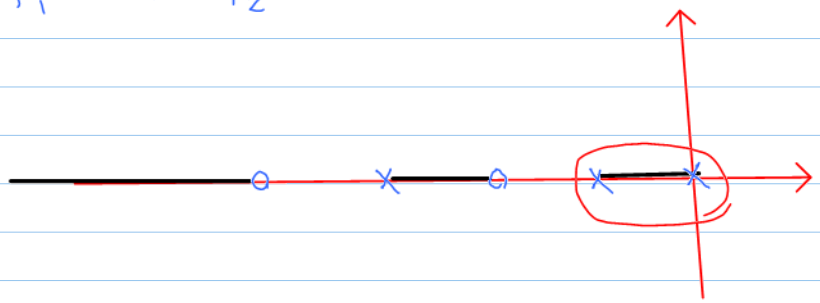
2) $d>c>b>a \rightarrow -d<-c<-b<-a$

$z_2<z_1<p_2<p_1$



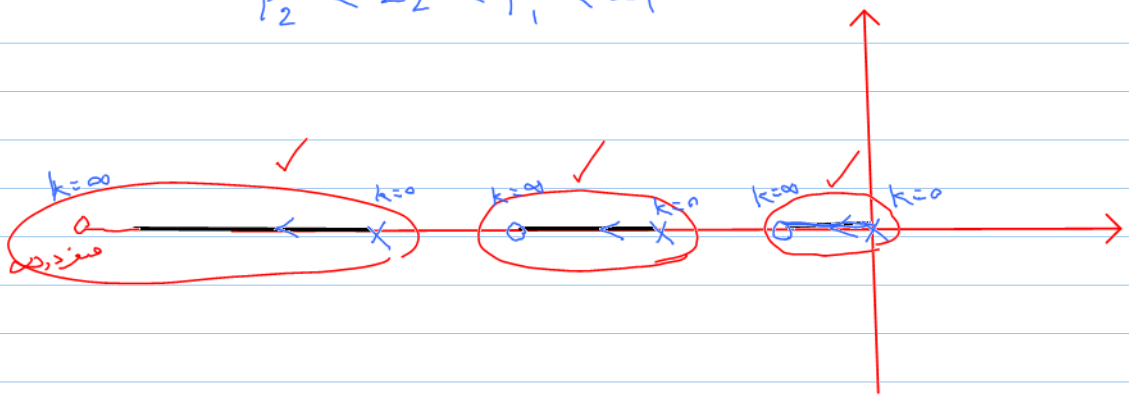
3) $d>a>c>b \rightarrow -d<-a<-c<-b$

$z_2<p_1<z_1<p_2$



✓4) $b>d>a>c$ $\quad -b<-d<-a<-c$

$p_2<z_2<p_1<z_1$



صفحه ۱

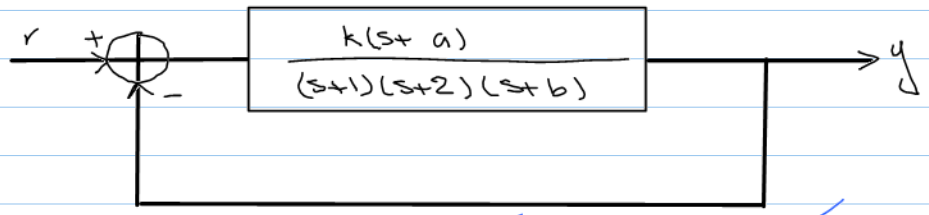
۱ ـ مقادیر k ، a و b را چنان تعیین کنید که سیستمی با تابع تبدیل حلقه $\frac{k(s+a)}{(s+1)(s+2)(s+b)}$، قطب حلقه بسته‌ای در $-1+j2$ داشته باشد.

۱) $k=2/3 \quad b=\frac{5}{2} \quad a=\frac{1}{2}$

۲) $k=3/3 \quad b=\frac{5}{3} \quad a=3$

۳) $k=2/3 \quad b=3 \quad a=\frac{1}{2}$

۴) $k=3/3 \quad b=4 \quad a=3$



مقادیر k و a و b را طوری تعیین کنید که $s=-1+j2$ یک قطب حلقه بسته باشد؟

مقادیر k و a و b را برای اینکه یک قطب حلقه بسته در $s=-1+j2$ باشد کدام است؟

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{(s+a)}{(s+1)(s+2)(s+b)} = 0$$

$$\Delta(-1+j2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} k = ? \\ a = ? \\ b = ? \end{cases}$$

$$\Delta(s) = (s+1)(s+2)(s+b) + k(s+a) = 0$$

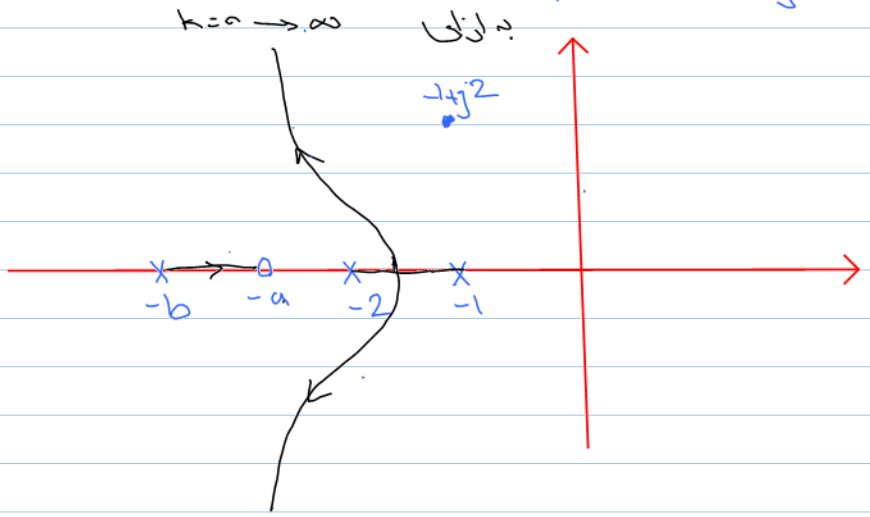
$$\Delta(-1+j2) = (-j2)(1+j2)(b-1+j2) + k(a-1+j2) = 0$$

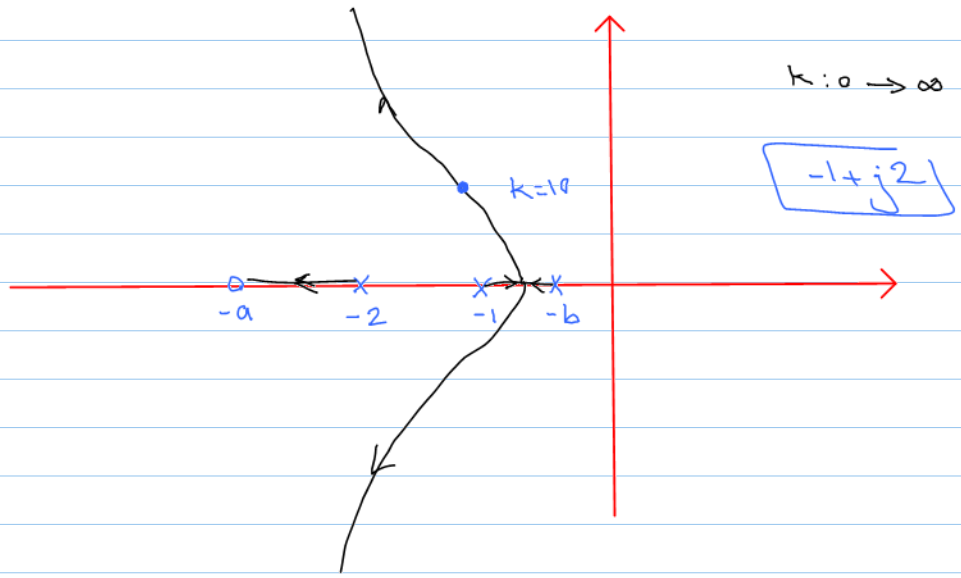
یک معادله سه مجهول

قطب های حلقه بسته ← مکان هندسی

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که مکان هندسی از $s=-1+j2$ عبور کند و

مقدار k را در $s=-1+j2$ بیابید؟

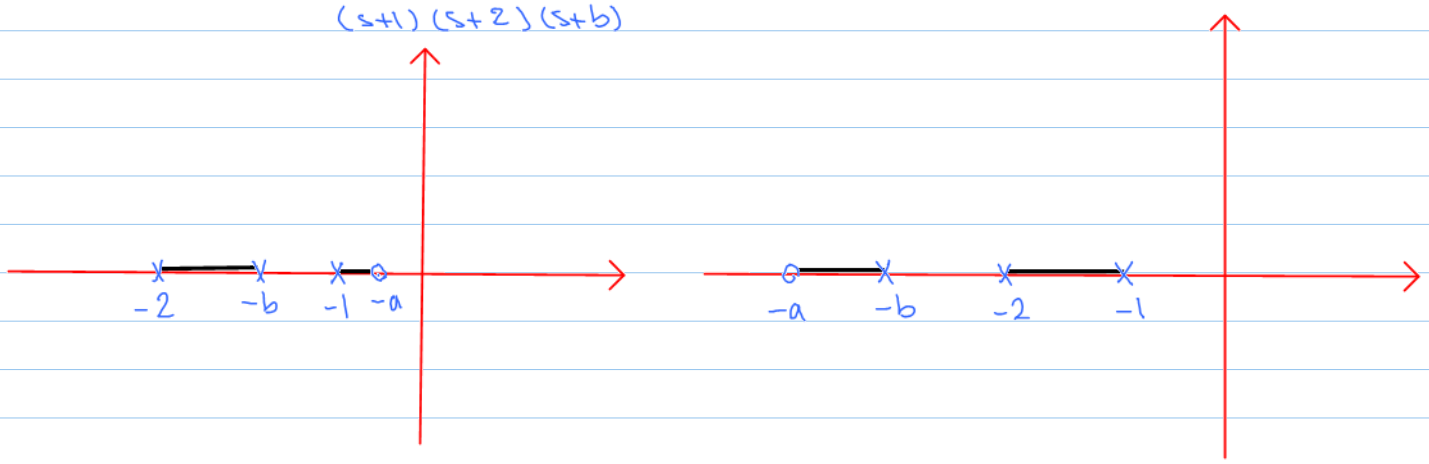




a و b را طوری تعیین کنید که مکان هندسی از روی $-1+j2$ عبور کند.

① $\Delta(s) = 1 + k\dfrac{(s+a)}{(s+1)(s+2)(s+b)} = 0$

② ✓



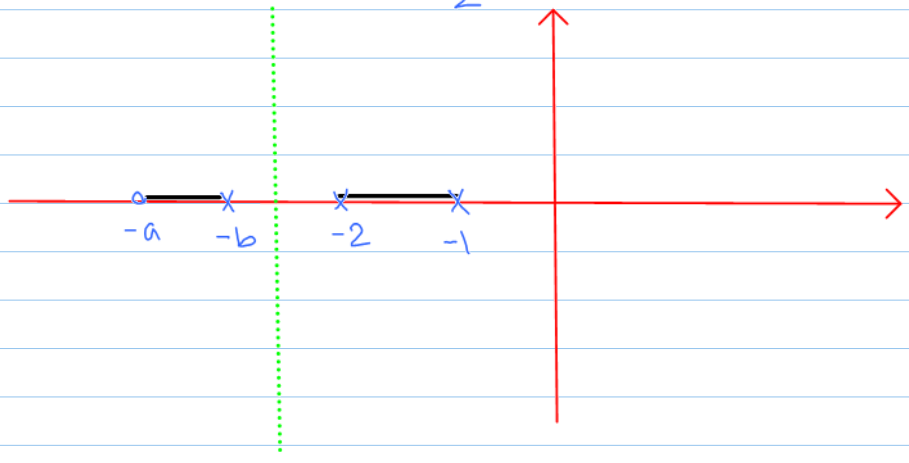
③ تقارن = + × − = −

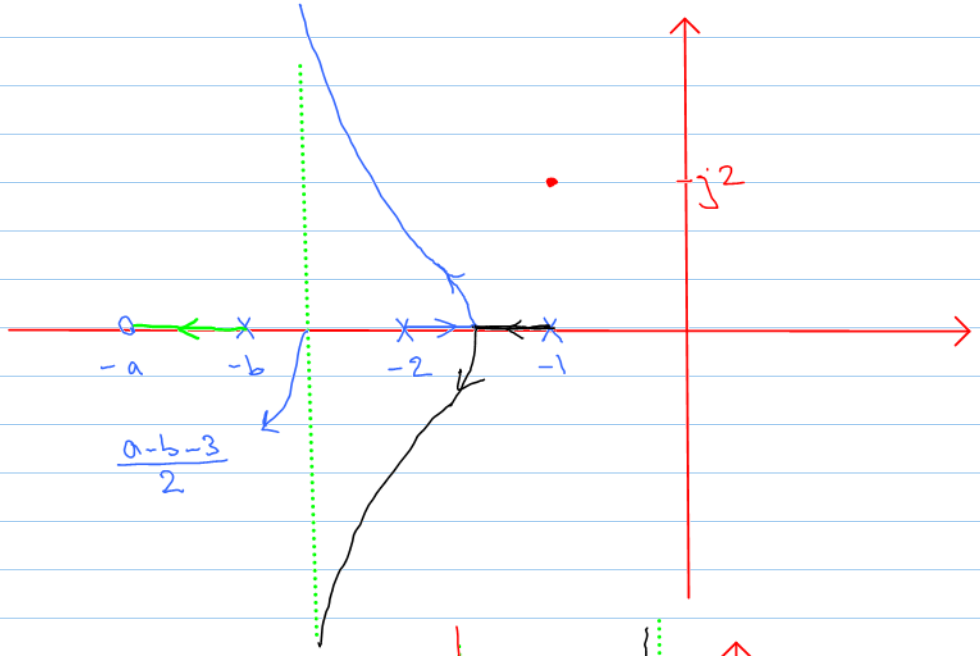
④ هوا زه بین دو قطب و بین یک صفر و یک قطب

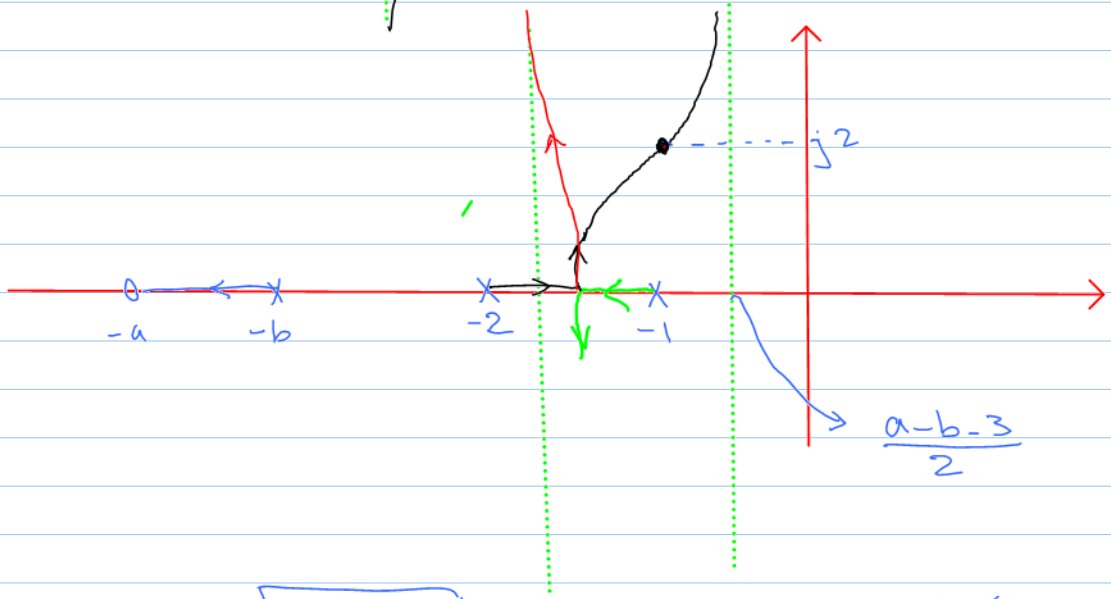
⑤ جانبها → تعداد $= |1-3| = 2$

زاویه $= \dfrac{(2m+1)\pi}{2} \rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{2}, \theta_2 = -\dfrac{\pi}{2}$

$$\sigma_0 = \frac{-1+-2+-b-(-a)}{2} = \frac{a-b-3}{2}$$







$\frac{a-b-3}{2} > -1 \rightarrow \boxed{a-b>1} \rightarrow -1+j2$ شرط بیرون مکان لازمی

$a-b=\frac{4}{3}>1$ ✓

$k=2/3 \quad b=\frac{5}{2} \quad a=2$ (2)

$k=2/3 \quad b=2 \quad a=2$ (4)

$a-b=1$

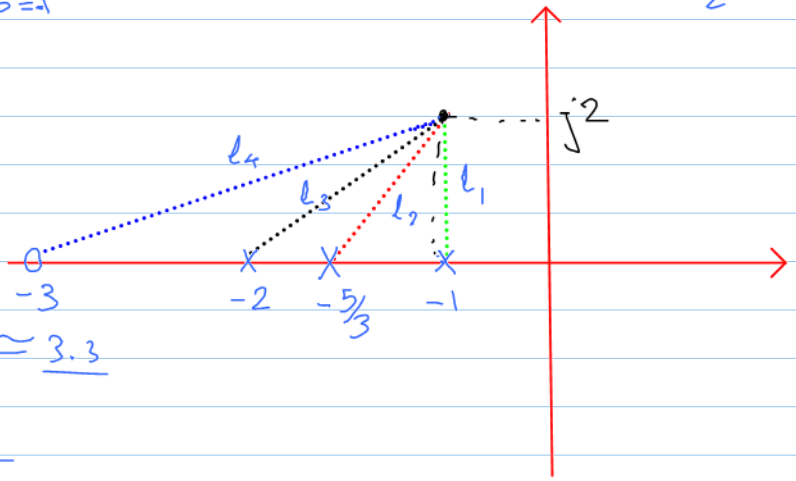
$a-b=-\frac{4}{3}$

$k=2/3 \quad b=\frac{5}{2} \quad a=\frac{1}{2}$ (1)

$k=2/3 \quad b=2 \quad a=\frac{1}{2}$ (3)

$a-b=-\frac{5}{2}$

$k=\frac{\text{حاصلضرب فاصله } -1+j2 \text{ از قطبها}}{\text{صفرها}}$



$k=\frac{l_1 \times l_2 \times l_3}{l_4}=\frac{2 \times \sqrt{\frac{40}{9}} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \simeq 3.3$

$l_2=\sqrt{4+\frac{4}{9}} \qquad l_3=\sqrt{5}$

۸۸

در یک سیستم کنترل با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$، چنانچه نقطه شکست مکان ریشه‌ها روی محور حقیقی و در محل $-\frac{۴}{۹}$ و محل تلاقی مجانب‌ها در $-\frac{۱۱}{۹}$ باشد، فرکانس نوسان سیستم چند رادیان بر ثانیه است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$

۲) $\frac{۸۸}{۹}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

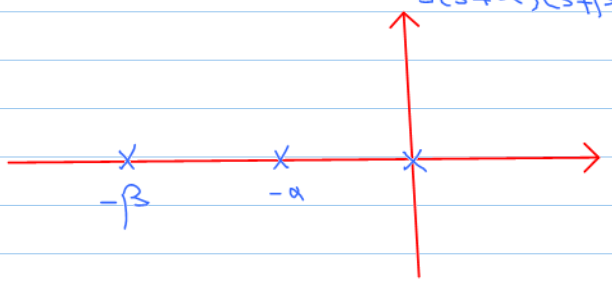
۴) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)} = 0 \qquad G_{OL}(s) = \frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$\sigma_0 = -\frac{11}{9}$

نقطه شکست $= -\frac{9}{4}$

تعداد مجانب $= |0-3| = 3$



$$\sigma_0 = \frac{0 + -\alpha + -\beta - (0)}{3} = \frac{-\alpha-\beta}{3} = -\frac{11}{9}$$

① $\boxed{\alpha+\beta = \frac{11}{3}}$

$$k = -\frac{1}{G_{OL}(s)} = -s(s+\alpha)(s+\beta) = -\left(s^3 + (\alpha+\beta)s^2 + \alpha\beta s\right)$$

$$k = -\left(s^3 + \frac{11}{3}s^2 + \alpha\beta s\right)$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \longrightarrow \qquad \frac{dk}{ds} = -\left(3s^2 + \frac{22}{3}s + \alpha\beta\right) = 0$$

$s =$ ۱ بدست آمد
$s =$ ۲ بدست آمد

ما به دنبال نقطه شکست هستیم

$s = -\frac{4}{9}$

$$-\left(3\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{22}{3} \times -\frac{4}{9} + \alpha\beta\right) = 0$$

$$-\left(\frac{16}{27} - \frac{88}{27} + \alpha\beta\right) = 0 \longrightarrow \qquad \alpha\beta = 8/3$$

$\alpha\beta =$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \frac{11}{3} \\ \alpha\beta = 8/3 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)} = 1 + k\frac{1}{s\left(s^2+(\alpha+\beta)s+\alpha\beta\right)} = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + k \frac{1}{s(s^2 + \frac{11}{3}s + \frac{8}{3})} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + \frac{11}{3}s^2 + \frac{8}{3}s + k = 0$$

روش روث ← معادله مشخصه

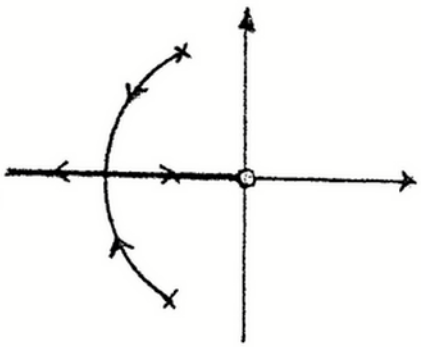
$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{11/3}}$$

شرط نوسانی شدن $\frac{11}{3} \times \frac{8}{3} = 1 \times k$

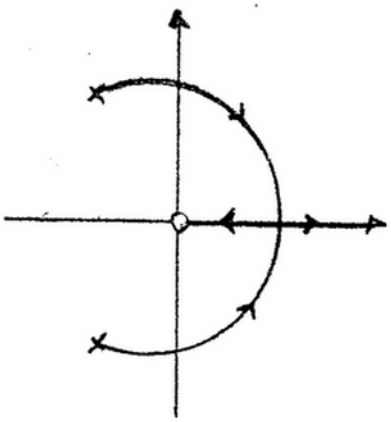
$$w_0 = \sqrt{\frac{88/9}{11/3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\frac{\sqrt{6}}{3}$$

- سیستمی با معادلات حالت $\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=(1 \quad 1)\,x(t)\end{cases}$ توصیف می‌گردد. در صورتی که $u(t)=-[1 \quad 1]\,x(t)$ باشند، مکان هندسی قطب‌های سیستم حلقه بسته به ازاء تغییرات $\lambda \geq 0$ چیست؟

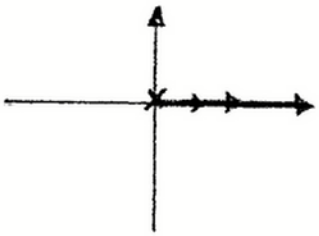
۱)



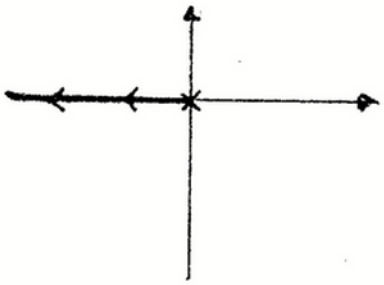
۲)



۳)



۴)



$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t)\\ y(t)=(1\quad 1)\,x(t)\end{cases}$$

$u=-[1\quad 1]\,x(t)$

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}x[-1\quad -1]\,x(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}x(t)$$

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -\lambda-1\end{pmatrix}}_{A}x(t)\\ y(t)=(1\quad 1)\,x(t)\end{cases}$$

$$sI-A=\begin{pmatrix}s & -1\\ 1 & s+1+\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Delta(s)=\det(sI-A)=s^2+s+\lambda s+1=0$$

$$\Delta(s)=s^2+s+\lambda s+1=0$$ بدلزل $\lambda<0$ رسم کنید

① $\Delta(s)=\underbrace{s^2+s+1}+\lambda s=0$

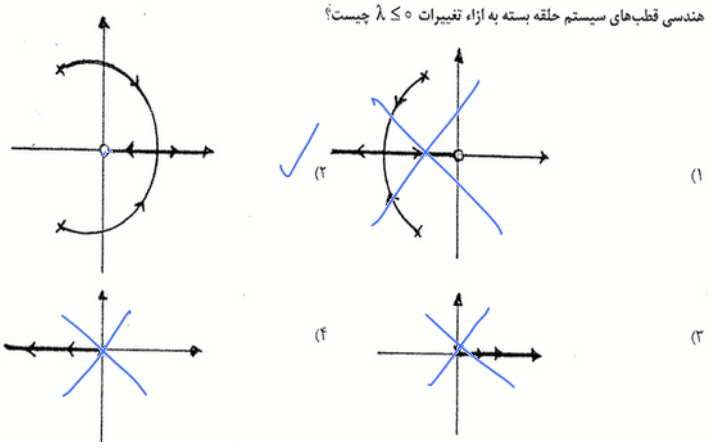
$$\Delta(s)=1+\lambda\frac{s}{s^2+s+1}=0$$

$$G_{OL}(s)=\frac{s}{s^2+s+1}$$

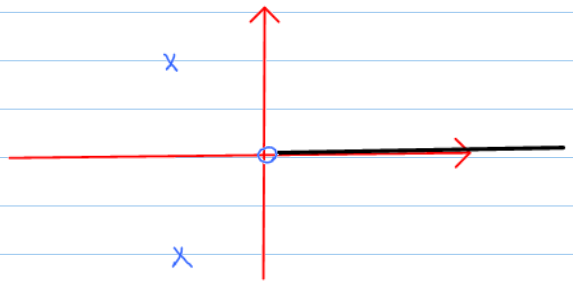
② علائم = − × − = +

$s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

هندسی قطب‌های سیستم حلقه بسته به ازاء تغییرات $\lambda \geq 0$ چیست؟



3-1 حل مسئله مقطعا

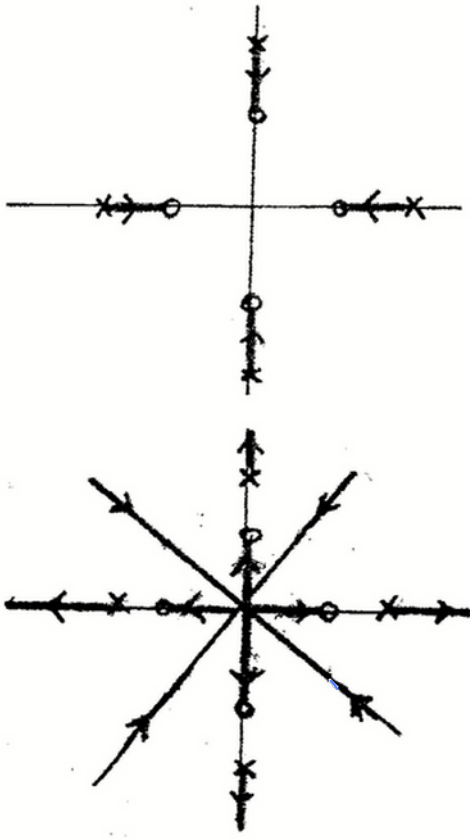


3-2 بعضی از موارد حقیقی که جواب مسائل

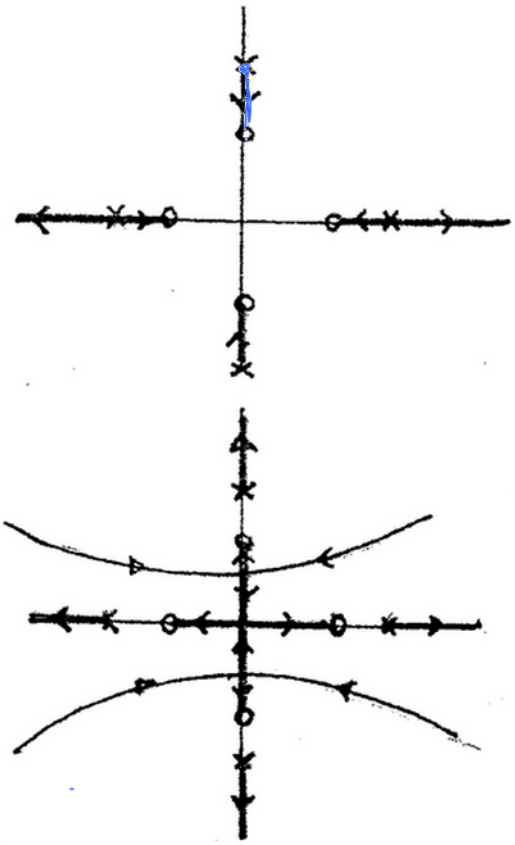
برق ۸۸

تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت $G(s)=\frac{k(s^2+5)(s^2-3)}{(s^2+6)(s^2-4)}$ مکان ریشه‌های حلقه بسته سیستم برای $k<0$ کدام است؟

۱)



۲)

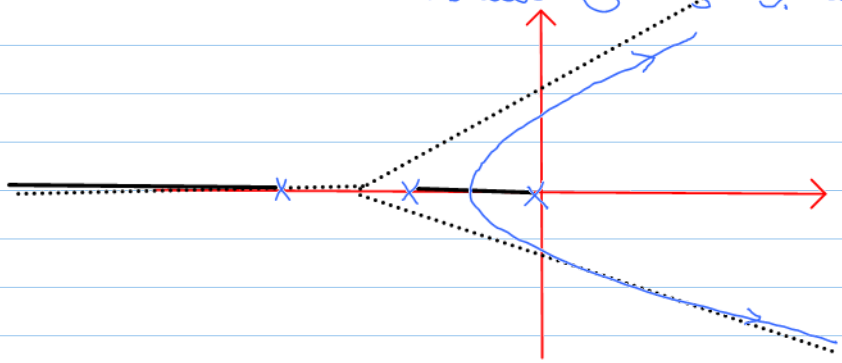


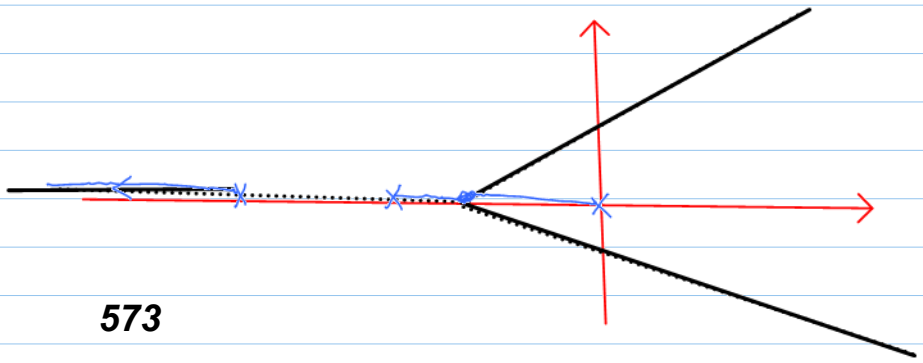
۳)

۴)

نکته! هرگاه در گزینه مکان هندسی به صورت خطوط راست مشاهده شد اول از همه به بررسی نکته زیر می پردازیم (در هشتاد و چهار)

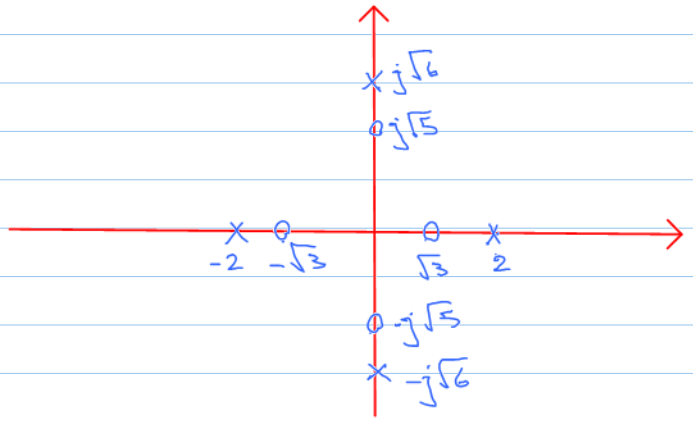
تنها در صورت مکان هندسی به صورت خطوط راست است که نقطه شکست و نقطه تلاقی با هم یکی باشد. در این حالت با هم جزء خود مکان هستند.





$$G(s)=\frac{k(s^2+5)(s^2-3)}{(s^2+6)(s^2-4)}$$

$$\Delta(s)=1+k\frac{(s^2+5)(s^2-3)}{(s^2+6)(s^2-4)}=0$$



$$\sigma_0=\frac{0+0+2+-2-(\sqrt{3}+-\sqrt{3}+0+0)}{\text{تعداد قطبها}}=\frac{0}{\text{تعداد}}=0$$

$$k=-\frac{1}{G_0L(s)}=-\left(\frac{(s^2+6)(s^2-4)}{(s^2+5)(s^2-3)}\right)$$

$$k=-\left(\frac{s^4+2s^2-24}{s^4+2s^2-15}\right)\qquad \frac{dk}{ds}=-\left(\frac{(4s^3+4s)(9)}{(s^4+2s^2-15)^2}\right)=0$$

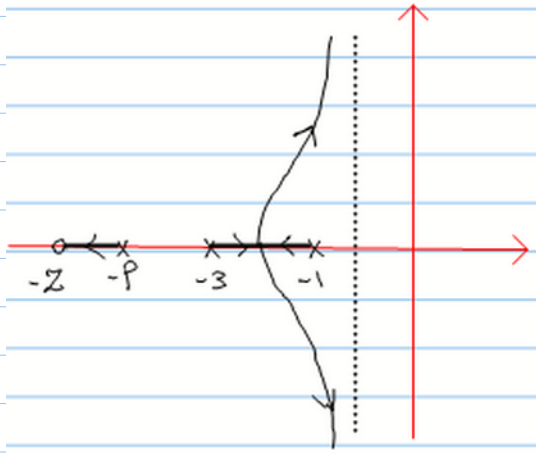
$$s=\begin{cases}0\rightarrow\\ +j\times\\ -j\times\end{cases}\qquad k=-\left(\frac{-24}{-15}\right)=-\frac{24}{15}\ \checkmark$$

* نقطه شکست در صورتی که $3\leq|\text{تعدادصفرها}-\text{تعدادقطبها}|$ باشد حقیقی است.

$\sigma_0=0$ = نقطه شکست $\rightarrow 0=$ محور حقیقی سمت راست

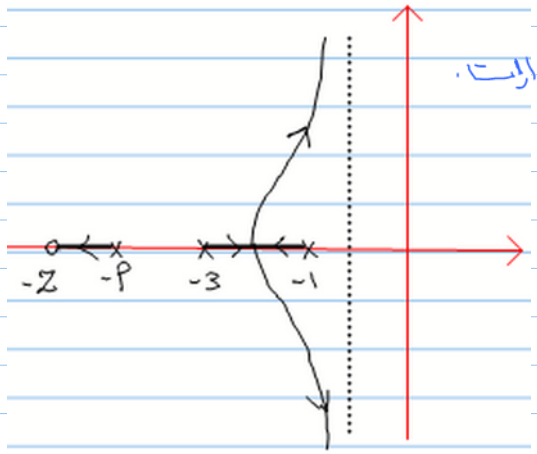
جلسه ۴۵ کنترل خطی

برخی ۳. مکان هندسی ریشه های سیستمی به صورت شکل زیر است. کدام گزینه در مورد پایداری آن صحیح است؟



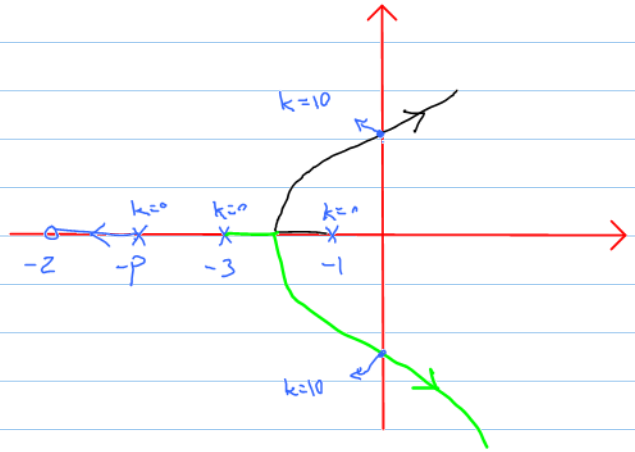
۱) اگر $0 < z-p < 4$ باشد برای تمام k های مثبت پایدار نیست.

۲) اگر $z-p > 4$ باشد ~ ~ ~



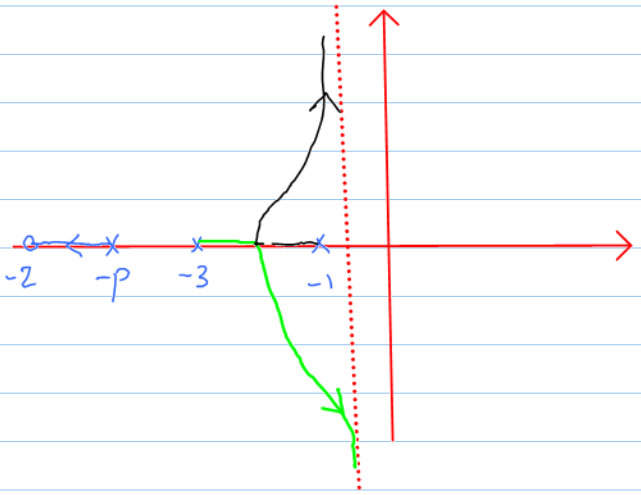
به ازای چه مقدار $p-z$ ، سیستم حلقه بسته به ازای برخی مقادیر k ناپایدار است.

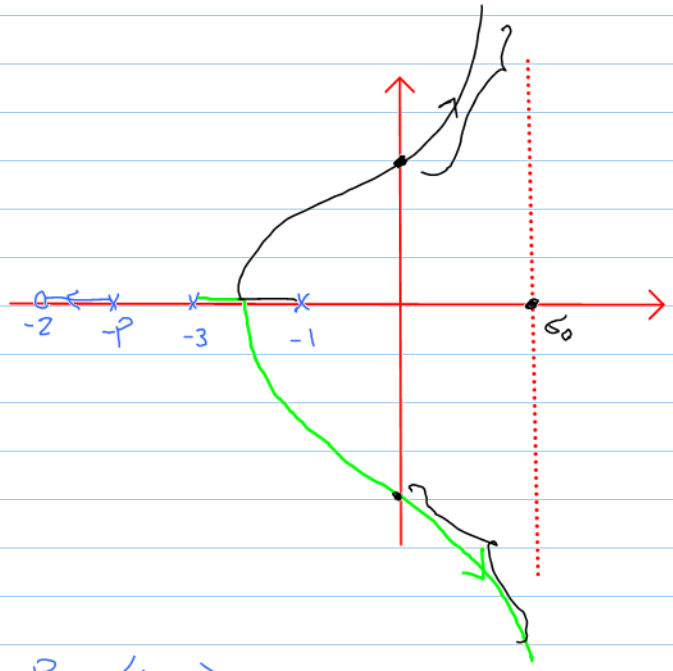
~ ~ ~



به ازای $k=10$ سیستم پایدار است

به ازای $k>10$ ~ ~ ~ ~





$$\sigma_0 = \frac{-1 + -3 + -p - (-2)}{2} = \frac{2 - p - 4}{2} > 0$$

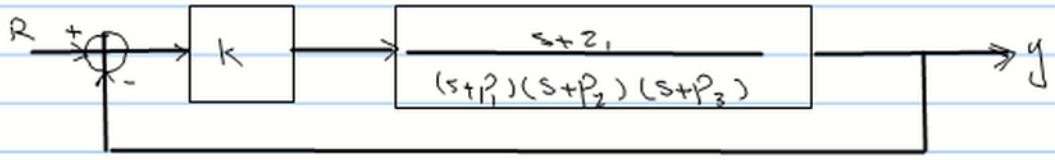
$$2 - p > 4$$

* جایی به عنوان جاذب سیستم های مکان هندسی هستند.

مکانیک سیستم

دسته متقابل G(s) دارای سه قطب و یک صفر است و داریم ($p_1 > p_2 > p_3$). تمام قطب‌ها و صفرهای حلقه باز در LHP قرار دارند. چه رابطه‌ای بین صفرها و قطب‌های حلقه باز باشد تا برای تمام k های مثبت، سیستم حلقه بسته همواره پایدار باشد؟

$z_1 > (p_1 + p_2 + p_3)$ $\quad z_1 < (p_1 + p_2 + p_3)$ $\quad z_1 > p_3$ $\quad z_1 > p_1$



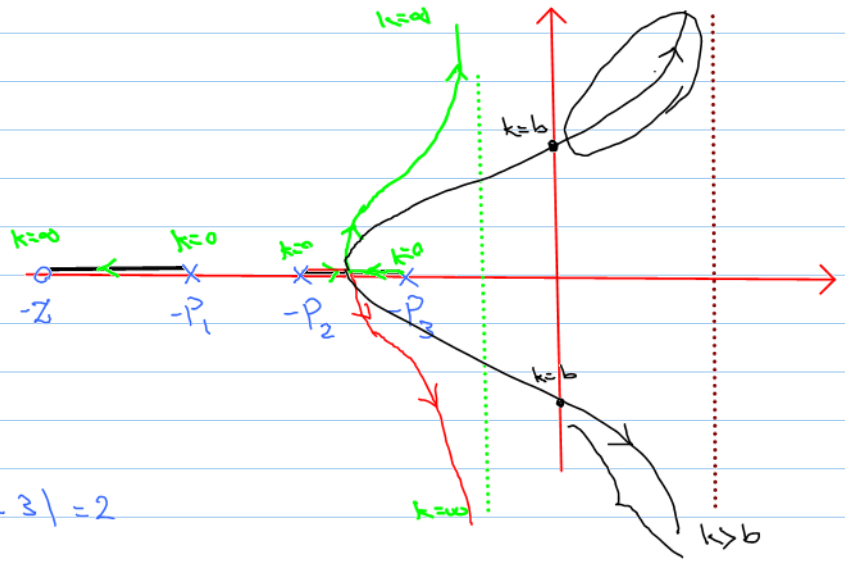
$$\Delta(s) = 1 + k\frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = 0 \qquad k>0$$

رابطه بین صفرها و قطبهای حلقه باز چگونه باشد تا سیستم حلقه بسته بازای تمام k ها پایدار باشد.

مثالهای مکان هندسی مستخیص هورس

$$p_1 > p_2 > p_3$$

علامت کمکی: $+ \times - = -$



تعداد $= |1-3| = 2$ ← جایشها

$$\sigma_0 = \frac{-p_1 + -p_2 + -p_3 - (-z)}{2} = \frac{z - p_1 - p_2 - p_3}{2}$$

$$\text{زاویه} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} +90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \frac{z - p_1 - p_2 - p_2}{2} < 0 \qquad z < p_1 + p_2 + p_3$$

ورودی ۹۱

در چه بازه‌ای از k پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته برای تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)=\frac{k}{s(s^2+4s+5)}$ میرای شدید (overdamping) است؟

۱) $0<k\leq 2$

۲) $\frac{50}{27}\leq k\leq 2$

۳) $1\leq k\leq \frac{5}{3}$

۴) به ازاء همه مقادیر $0<k<20$ پاسخ گذاری سیستم حلقه بسته میرای سینوسی است.

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s^2+4s+5)} = 0$$

بازای چه مقادیری از k سیستم حلقه بسته فوق میراست

درسیستم درجه 3 فوق میرا؟

(1) $$\Delta(s) = 1 + k\frac{1}{s(s^2+4s+5)} = 0$$

بازای چه مقادیری از k ، قطبهای حلقه بسته روی محور حقیقی است.

نقاط مکان هندسی

(2) ✓

(3) تعداد = تعداد شاخه‌ها = 3

(4) ✓

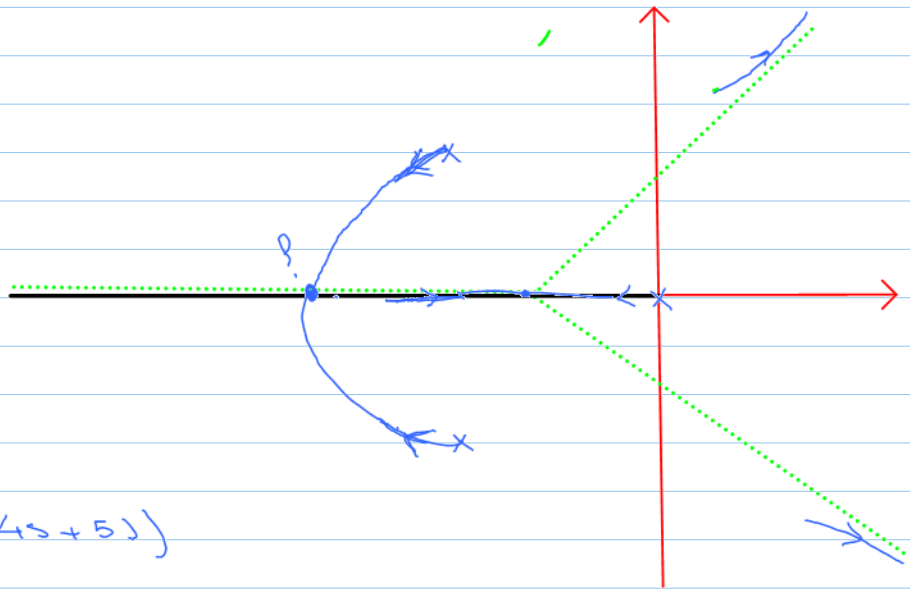
(5) تقارنی



تعداد = $|0-3| = 3$

زاویه → $\pm 60°$ ، $180°$

$$\sigma_0 = \frac{0+-2+-2-(0)}{3} = -4/3$$



$$k = -\frac{1}{G_{OL}(s)} = -(s(s^2+4s+5))$$

$$\frac{dk}{ds} = -(3s^2+8s+5) = 0$$

$$-((s+1)(3s+5)) = 0 \rightarrow \begin{cases} s=-1 \checkmark \\ s=-5/3 \checkmark \end{cases}$$

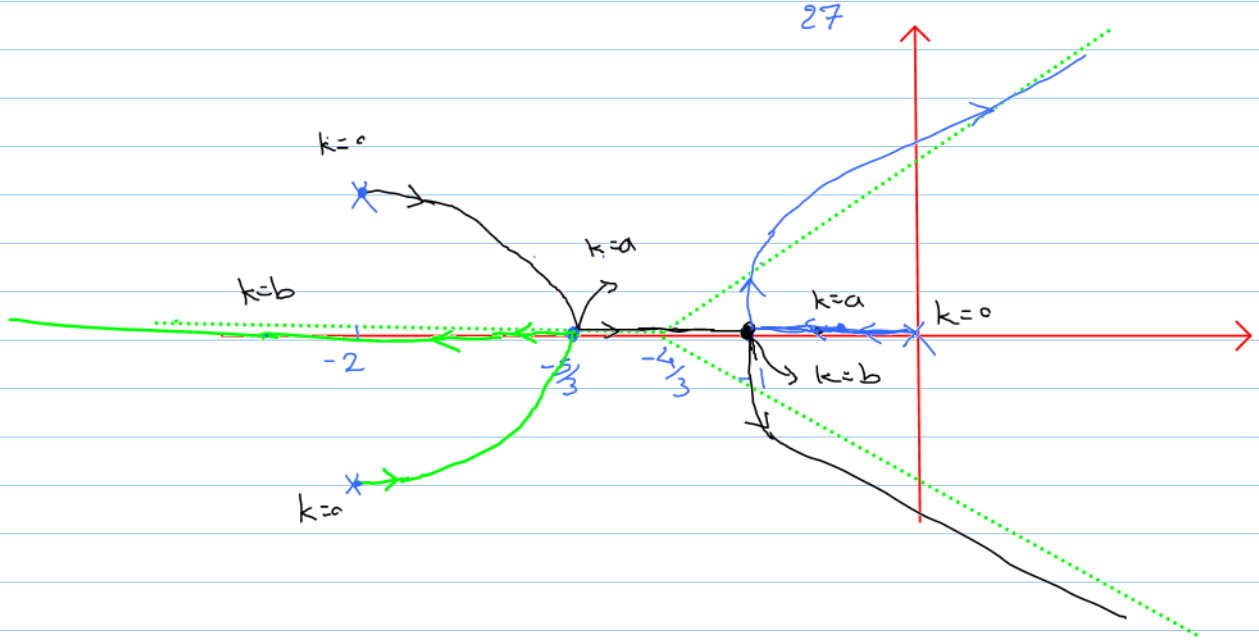
کاندید!

(ثبت) $k = -s(s^2+4s+5) \rightarrow$

$k = -(-1)(1-4+5) = 2$ ✓ $\quad s=-1$

$k = -(-\frac{5}{3})(\frac{25}{9} - \frac{20}{3} + 5) > 0 \quad s=-\frac{5}{3}$

$\frac{50}{27}$



$a < k < b$

برای چه مقدار k، خروجی روی خود حقیقی هستند.

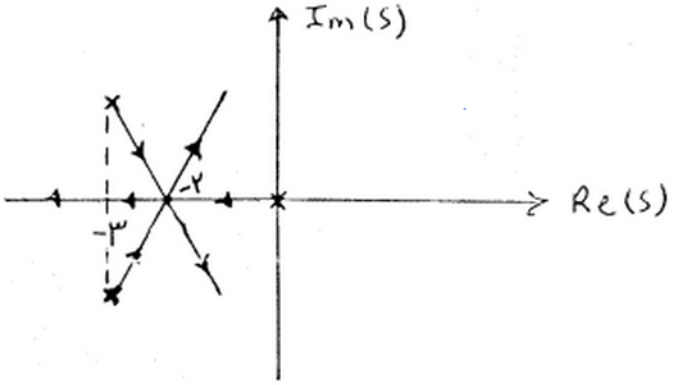
$2 < k < 50/27$

$k=2 \quad \leftarrow s=-1$ مقدار k در نقطه ثبت = a

$k=\frac{50}{27} \quad \leftarrow s=-\frac{5}{3}$ " " " = b

برق ۹۰ و هستای ۷۹

مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم کنترلی با تابع تبدیل حلقه باز $KG(S)$ به شکل زیر است. حداقل خطای حالت ماندگار به ورودی $(t+1)u(t)$ کدام است؟ $(k>0)$



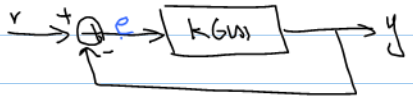
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{2}{3}$

$r(t) = (t + 2t)u(t)$ $\quad r(t) = 2t\,u(t)$



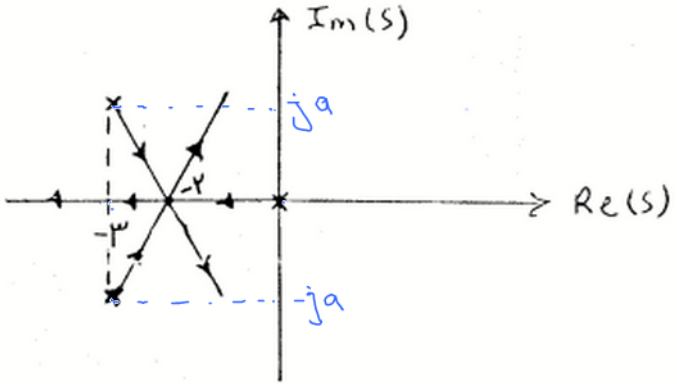
$e_{ss\,min} = ?$ $\quad k > 0$

① خطای تقریبی $= r - y$ → حلقه باز

خطای $\sim = r - y$

$L(s) = k\,G(s)$

② نوع و زوایی $= 1$ → $e_{ss} = \frac{2}{k_v}$ $\quad k_v = \lim_{s\to 0} s\,L(s) = \lim_{s\to 0} s\,k\,G(s)$



$\Delta(s) = 1 + k\,G(s) = 0$

$G_{oL} = G(s) = \frac{1}{s(s-(-3+j\alpha))(s-(-3-j\alpha))}$

$G(s) = \frac{1}{s(s^2+6s+9+\alpha^2)}$

مکان به صورت خط راست ← نقطه شکست و تلاقی با هم ندارند.

$\sigma_0 = \frac{0+-3+-3-(0)}{|0-3|} = -2 =$ نقطه شکست

$k = -\frac{1}{G(s)} = -s(s^2+6s+9+\alpha^2)$

$\frac{dk}{ds} = -(3s^2+12s+9+\alpha^2) = 0$ → مشتق بگیر → $s = -2$

$-(3\times 4 - 24 + 9 + \alpha^2) = 0 \rightarrow \alpha^2 = 3 \rightarrow \alpha = \sqrt{3}$

$G(s) = \frac{1}{s(s^2+6s+12)}$

$e_{ss} = ?$ $\quad k_v = \lim_{s\to 0} s \times \frac{k}{s(s^2+6s+12)} = \frac{k}{12}$

$e_{ss} = \frac{2}{k/12} = \frac{24}{k}$ →

e_{ssmin} ← بدانی k چه مقدار باید باشد تا

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{1}{s(s^2+6s+12)} = 0$$

$$\Delta = s(s^2+6s+12) + k = 0$$

$$\Delta = s^3 + 6s^2 + 12s + k = 0$$

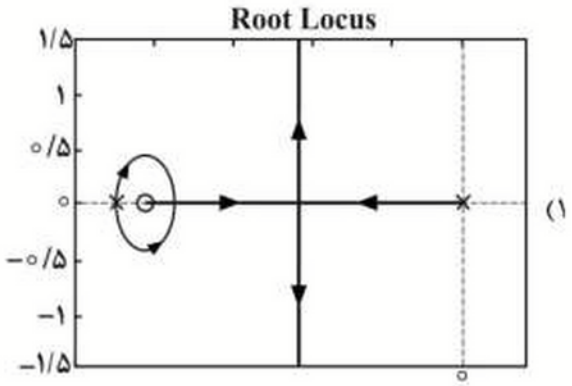
شرط پایداری $\quad 6\times 12 = 1\times k \quad k = 72$

$$e_{ssmin} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

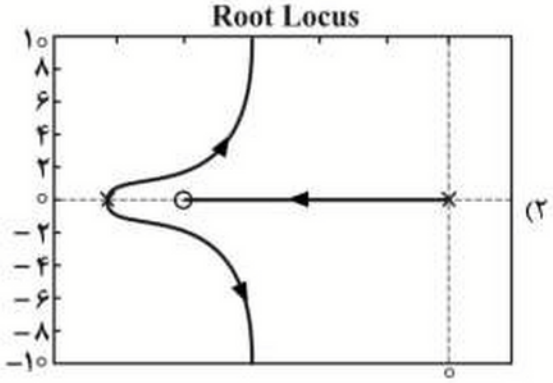
برق ۹۷

مکان هندسی ریشه‌های سیستم $k > 0$, $G(s) = k\frac{s+4}{s(s+4/5)^2}$، کدام است؟

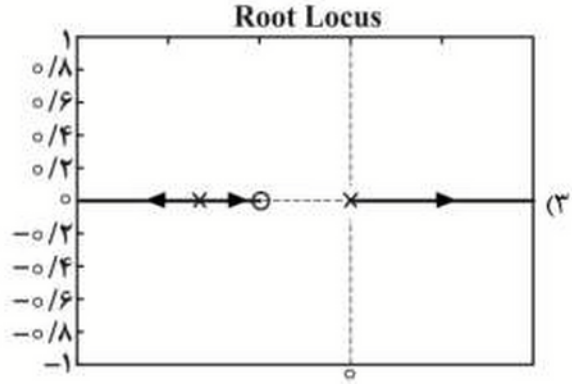
۱)



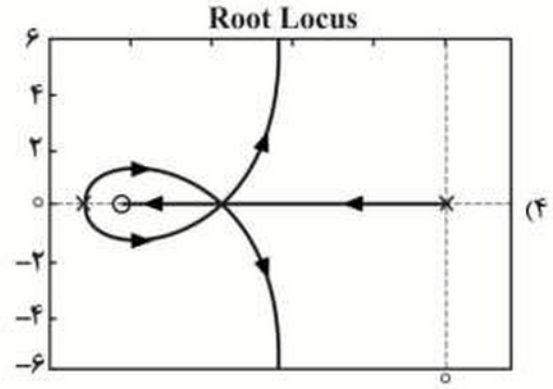
۲)



۳)

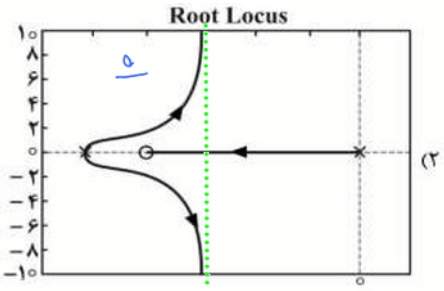


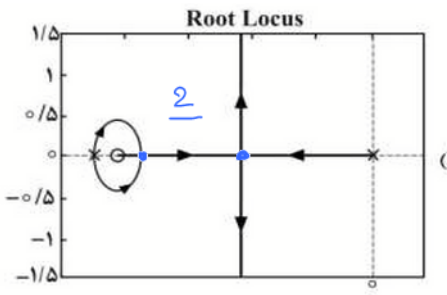
۴)

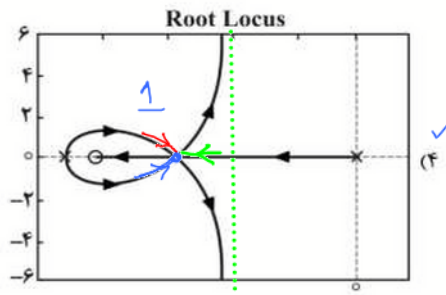


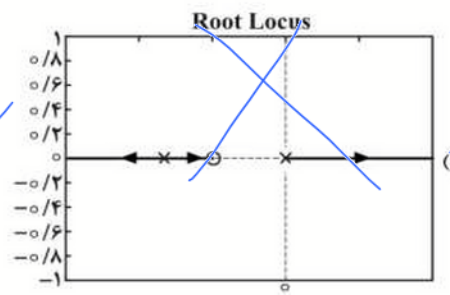
① $\Delta(s) = 1 + k\dfrac{s+4}{s(s+4.5)^2} = 0$

② مکان هندسی = + × − = −



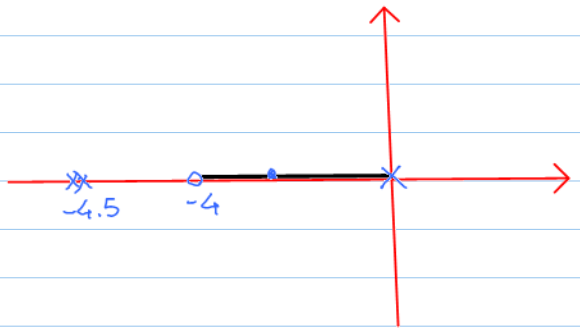






۳-۱. در صفر و قطب

۳-۲. بیشتر از دو شاخه



۳-۳. پایدار

۳-۴. ناپایدار

$$k = -\frac{1}{G_{OL}(s)} = -\frac{s(s+4.5)^2}{s+4}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{\left((s+4.5)^2 + 2s(s+4.5)\right)(s+4) - 1\left(s(s+4.5)^2\right)}{(s+4)^2} = 0$$

$$= -(s+4.5)\left[(s+4.5+2s)(s+4) - s(s+4.5)\right] = 0$$

$$= -(s+4.5)\left(3s^2 + 12s + 4.5s + 18 - s^2 - 4.5s\right)$$

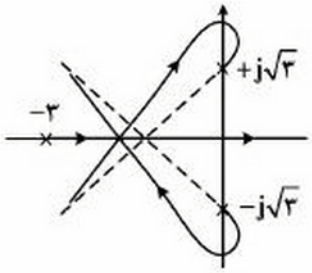
$$= -(s+4.5)\left(2s^2 + 12s + 18\right) = -(s+4.5)(s+3)^2 \times 2 = 0$$

$$\begin{cases} s = -4.5 \ \times \\ s = -3,-3 \ \checkmark \end{cases} \quad n=2 \rightarrow \quad k = -\frac{s(s+4.5)^2}{s+4} = -\frac{-3(1.5)^2}{1} = 3\times 1.5^2$$

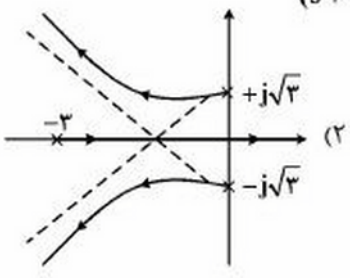
برق ۹۶

مکان هندسی ریشه‌های سیستم $(k \le 0)$, $GH(s) = \dfrac{k}{(s+3)(s^2+3)}$ ، کدام است؟

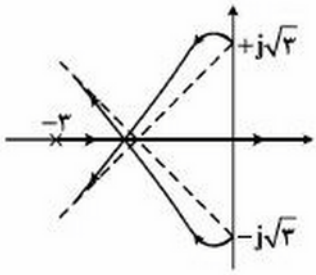
۱)



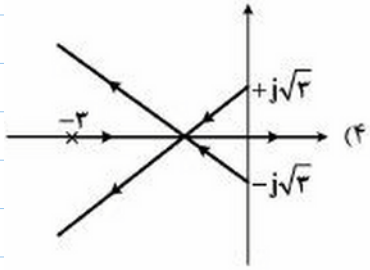
۲)



۳)

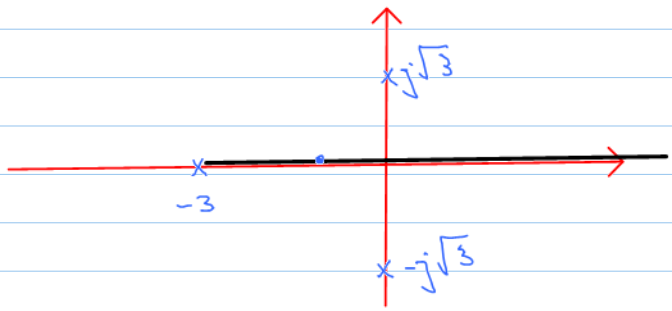


۴)



چون در بی‌نهایت مکان به سمت خطوط مجانب میل می‌کند ←

$\sigma_0 \overset{?}{=}$ نقطه شکست



$$\Delta = 1 + k \frac{1}{(s+3)(s^2+3)} = 0$$

GOL

$$\sigma_0 = \frac{-3 + 0 + 0 - (0)}{|0-3|} = -1$$

$$k = -(s+3)(s^2+3)$$

$$\frac{dk}{ds} = -\left[(s^2+3) + 2s(s+3)\right] = -(3s^2 + 6s + 3) = 0$$

$$= -3(s+1)^2 = 0$$

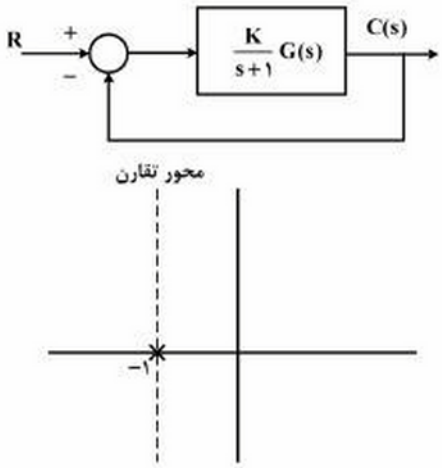
$$s = -1, -1 \quad \checkmark$$

علامت مکان: $- \times - = +$

$$k = -(s+3)(s^2+3) \rightarrow k = -(2)(4) = -8 \quad \checkmark$$

$\sigma_0 = -1$ = نقطه شکست $\rightarrow -1$ مکان مجانب

به ازای $k > 0$، کدام گزینه در مورد شکل مکان‌هندسی ریشه‌های حلقه بستهٔ بلوک دیاگرام زیر صحیح است؟ در مورد $G(s)$ می‌دانیم که صفری ندارد و همهٔ قطب‌های آن نسبت به محور نشان‌داده شده روی شکل متقارن هستند.



۱) با افزایش تعداد قطب‌های $G(s)$، محل تلاقی مجانب‌ها به سمت راست میل می‌کند.

۲) با افزایش تعداد قطب‌های $G(s)$، محل تلاقی مجانب‌ها به سمت چپ میل می‌کند.

۳) شکل مکان نسبت به محور نشان‌داده شده، متقارن است.

۴) شکل مکان نسبت به محور نشان‌داده شده، می‌تواند متقارن نباشد.

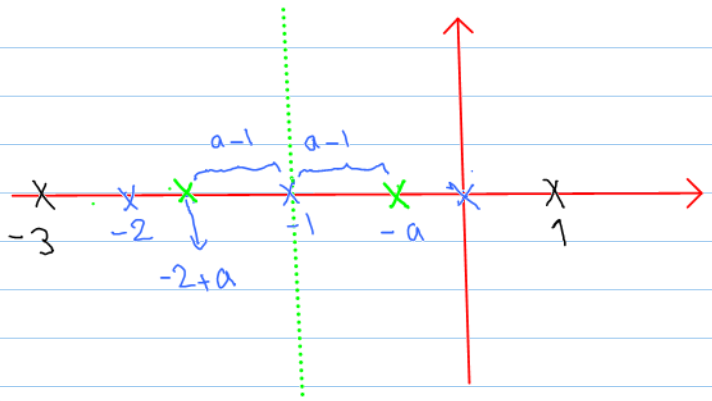
$$\Delta(s) = 1 + k\frac{G(s)}{s+1} = 0$$

$$G_{OL}(s) = \frac{1}{s+1} \times G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{f(s)}$$

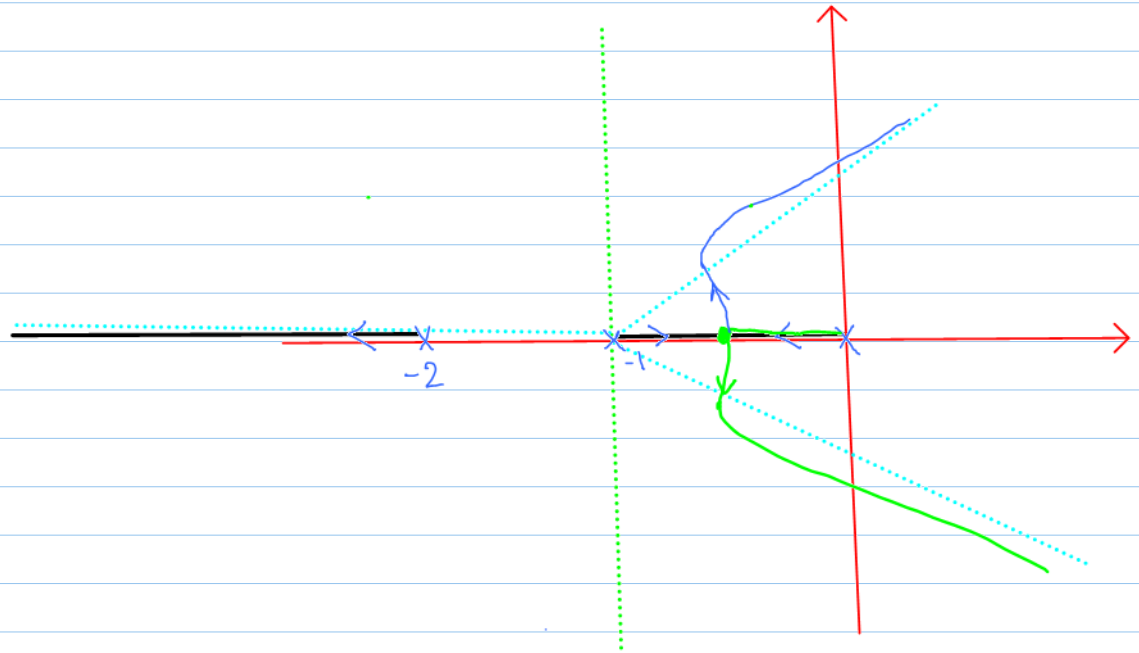
$$G_{OL}(s) = \frac{1}{(s+1)\,f(s)}$$

قطبهای حلقه باز = $\begin{cases} -1 \\ f(s) \text{ قطبهای} \end{cases}$



$$\sigma_0 = \frac{a + -a + -1 + -2+a + -2}{|a-5|} = -1$$

$$\sigma_0 = \frac{1+a+-a+-1+-2+a+-2+-3}{|a-7|} = -1$$



مکان هندسی = $+ \times - = -$

مجانبها ⇒ 3 ⟶ $\sigma_0 = -1$ ، $\begin{cases} 180^\circ \\ +60 \\ -60 \end{cases}$

جلسه ۱۷ کنترل

هر وقت دو گزینه ها به شما هندسی بدهد:

① $\Delta(s)$ را بنویسید و استاندارد کنید.

② علت مکان را بیان کنید.

③ پیدا کردن وجه غلط گزینه ها

3-1- حل مسائل مقطعی حلقه باز

3-2- جابجایی به مقدار، زاویه، حل تقاطع

3-3- بعضی از شور حتماً جزء مکان است.

3-4- نقطه شکست

3-5- زاویه خروج/ورود به صفرها و قطبهای حلقه باز

3-6- تطبیق پایداری با جدول R-H

3-7- حل تقاطع مکان با محور موهومی

زاویه ورود/خروج به قطبها:

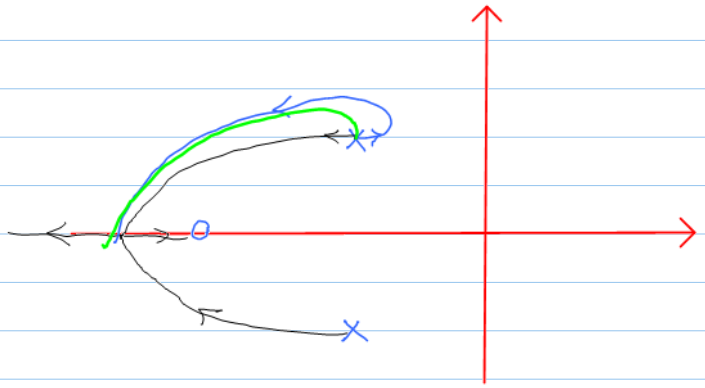
$$\sum \text{زاویه صفر } i \times \text{مرتبه تکراری} - \sum \text{زاویه قطب } i \times \text{مرتبه تکراری} = \begin{cases} \pi(2m+1) & \text{علت مکان} \\ 2\pi m & + \text{ ~ ~} \end{cases} \quad *$$

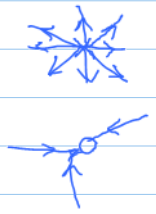
اگر می خواهیم زاویه خروج از صفر $s=s_0$ را حساب کنیم. (θ_1) نقطه مرجع

$$\left(\theta_1 + \sum \text{زاویه صفر } i \times \text{مرتبه تکراری}\right) - \sum \text{زاویه قطب } i \times \text{مرتبه} = \begin{cases} \pi & - \\ 2\pi & + \end{cases}$$

زاویه صفر iام: یعنی من نقطه صفر iام بایستم و به نقطه $s=s_0$ نگاه کنم زاویه نگاه را زاویه صفر iام

~ قطب ~ : ~ ~ قطب ~ ~ ~

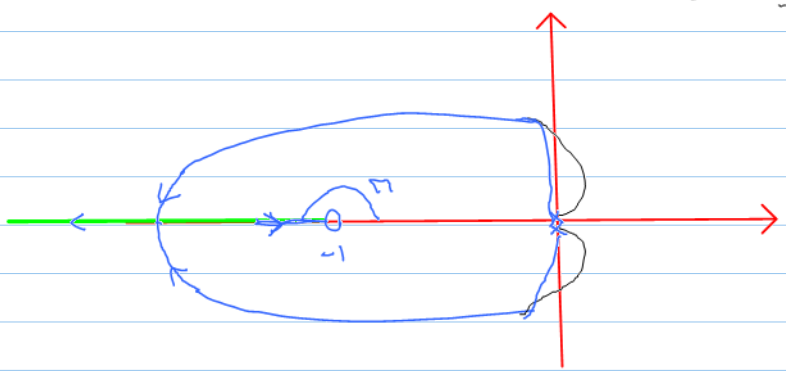




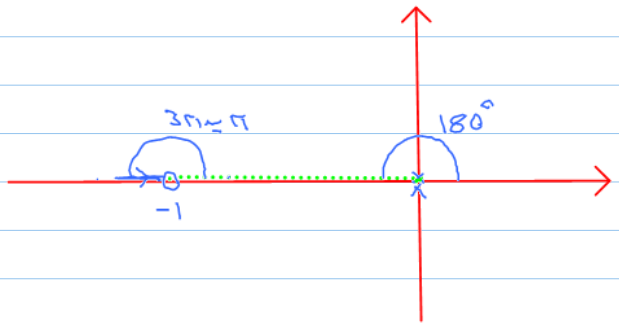
$$\Delta(s) = 1 + k\,\frac{s+1}{s^2} = 0 \qquad k>0$$

علامت‌گذاری = + x - = -

زاویه خروج از صفر و ورود به قطب‌ها را بیابید.



زاویه ورود به $s=-1 \leftarrow \theta$



$$(1\times\theta) - (2\times 180^\circ) = (2m+1)\pi$$

$$\theta = 2\pi + (2m+1)\times\pi$$

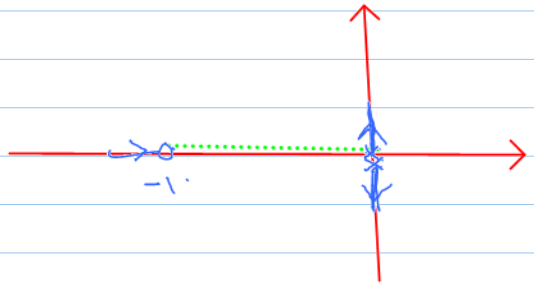
m را به ترتیب 0، 1، -1، 2، -2، ... می‌دهیم تا به تعداد مرتبه‌ترار نقطه مرجع، زاویه بدست آید.

$$\theta = 2\pi + (2\times 0+1)\times\pi = 3\pi$$

زاویه خروج از قطب $s=0 \leftarrow \theta$

$$(1\times 0) - (2\times\theta) = (2m+1)\pi$$

$$\theta = -\frac{(2m+1)\pi}{2}$$

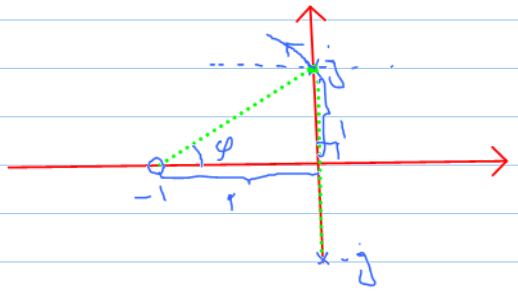


$m=0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

$m=1 \rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{2} \simeq \frac{\pi}{2}$

$\Delta(s) = 1 + K \frac{s+1}{s^2+1} = 0$ $\quad K>0$ (علامت شرط) = -

زاویه خروج از قطب $z=s$ و $z=s$ را حساب کنید.



$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

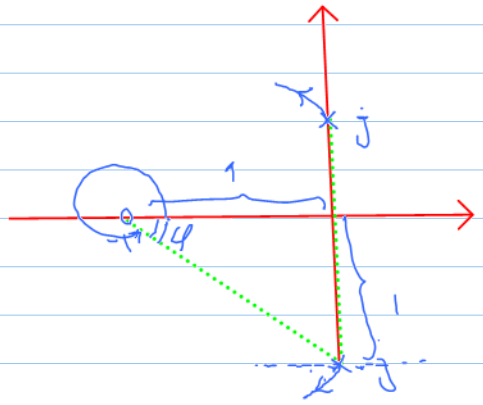
زاویه خروج از $z=s$ ← θ

$\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \times 1\right) = (2m+1)\pi$

$\theta = -(2m+1)\pi - \frac{\pi}{4}$

$m=0 \rightarrow \theta = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

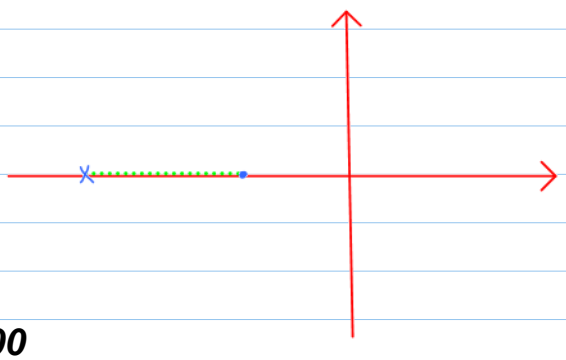
زاویه خروج از $z=s$ ← θ



$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \left(1 \times \theta + \frac{-\pi}{2}\right) = (2m+1)\pi$

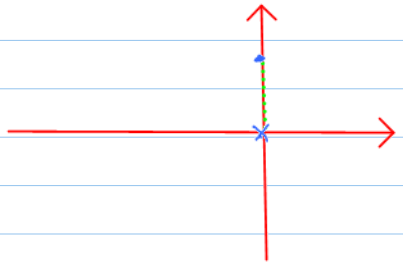
$m=0 \rightarrow 2\pi + \frac{\pi}{4} - (2\times 0+1)\pi = \theta \rightarrow \pi + \frac{\pi}{4} = \theta$



* اگر خط واصل اوج با بردار آفاق دارد:

① نقطه موجع سمت راست باشد زاویه = 0

② " " چپ " " = 180°

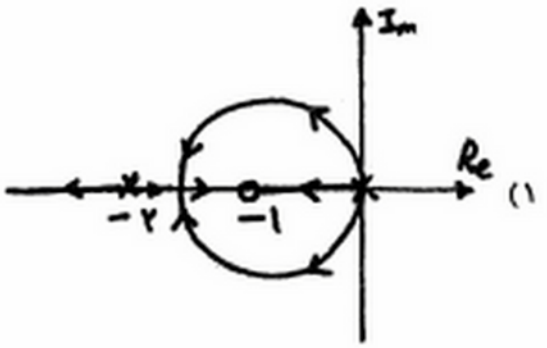


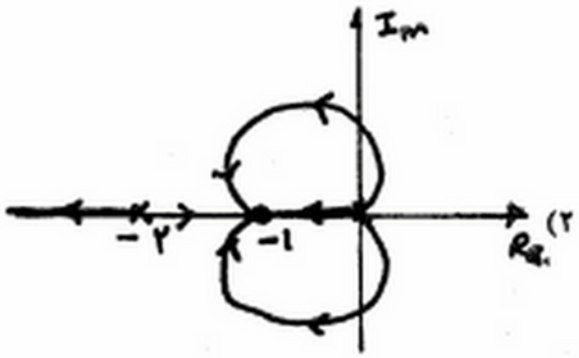
* اگر خط واصل عمودی باشد:

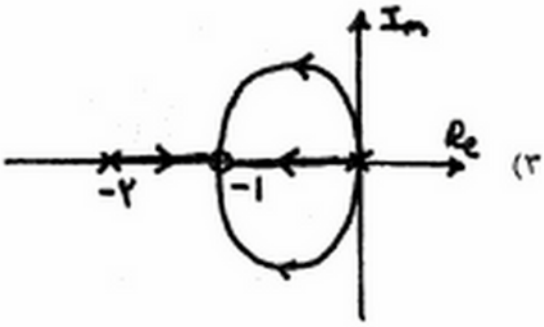
① نقطه مرجع بالا باشد ← زاویه = $\frac{\pi}{2}$

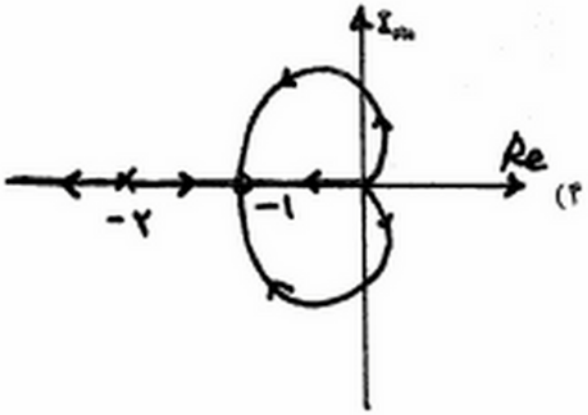
② ~ ~ پایین ~ ~ ~ = $-\frac{\pi}{2}$

۱۰۰ـ کدام گزینه مکان هندسی تقریبی ریشه‌های معادله مشخصه سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $GH = \frac{k(s+1)^2}{s^2(s+2)^2}$ را وقتی k از ۰ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، معرفی می‌کند؟

۱)


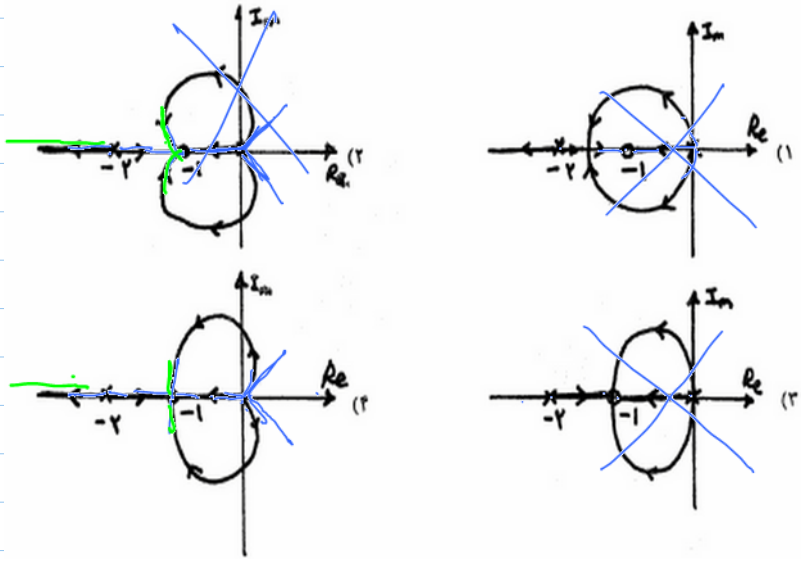
۲)


۳)


۴)


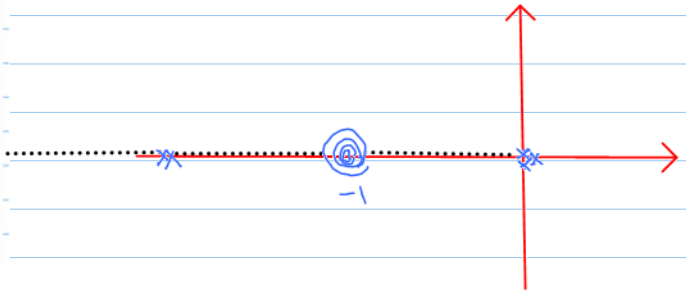
$$\Delta(s) = 1 + k\frac{(s+1)^4}{s^3(s+2)^2} \quad (1)$$

(2) علامت مکان = + × − = −



۳-۱ ـ محل صفرها و قطبهای حلقه باز ✓

۳-۲ ـ کدامیک از نقاط حقیقی که بر مکان هستند X

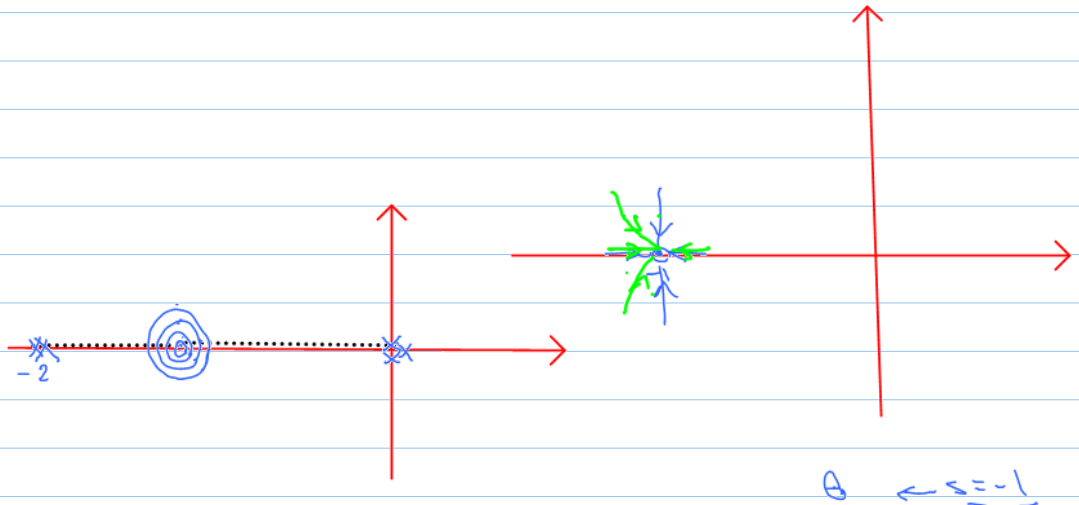


۳-۳ ـ تعداد شاخه‌ها ←

۳-۴ ـ جایشان ✓

۳-۵ ـ نقطه شکست ✓

۳-۶ ـ زاویه



زاویه ورودی θ ← $s=-1$

$$4\times\theta - (2\times 0 + 3\times\pi) = (2m+1)\pi$$

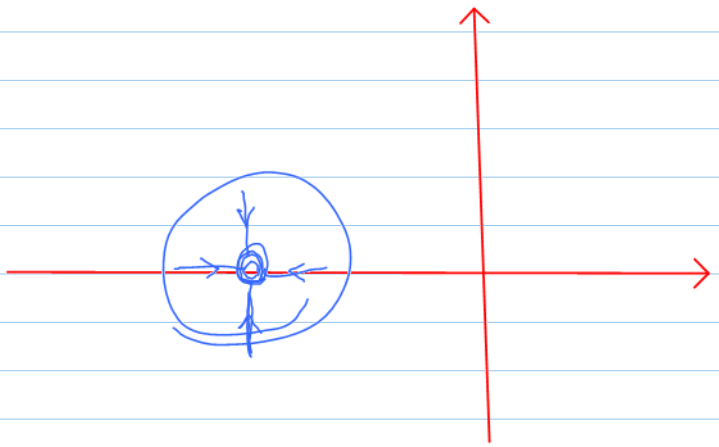
$$\theta = \frac{(2m+1)\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$$

$m=0 \rightarrow \theta = \pi$

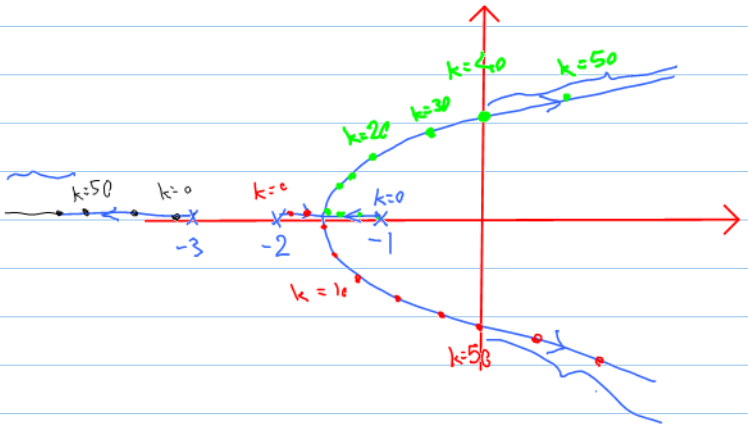
$m=1 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

$m=-1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$m=2 \rightarrow \theta = 2\pi = 0$



تطبیق پایداری ← R-H



- $k = 0 \to 50$ ← قطب حلقه بسته سمت چپ
- $k = 50 \to \infty$ ← ~ راست ~ ~ 2

$$\Delta(s) = 1 + k \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = 0$$

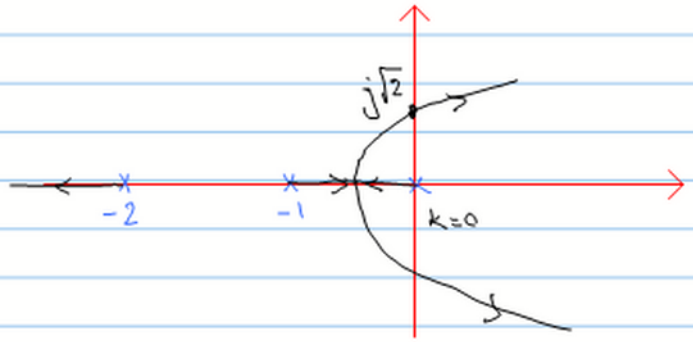
$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + k = 0 \longrightarrow$$

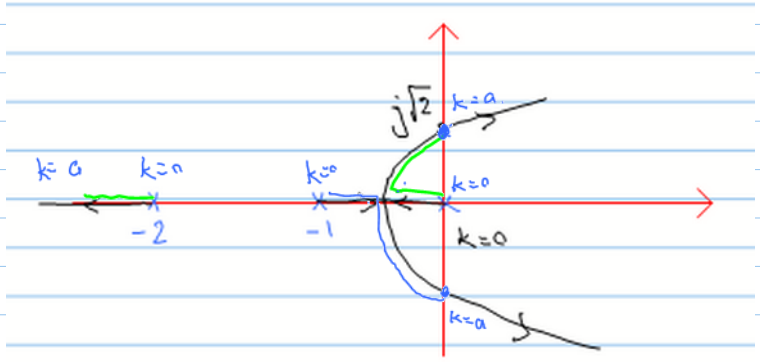
- $k: 0 \to a$ ← ~ چپ ~ ~ ۳
- $k: a \to b$ ← ~ راست ~ ~ ۲

برق ۹۹.

اگر مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم به صورت شکل زیر باشد، مقدار k برای پایداری سیستم کدام است؟

۱) $0 < k < \sqrt{2}$ ۲) $0 < k < 6$ ۳) $0 < k < 1$ ۴) هیچ‌کدام





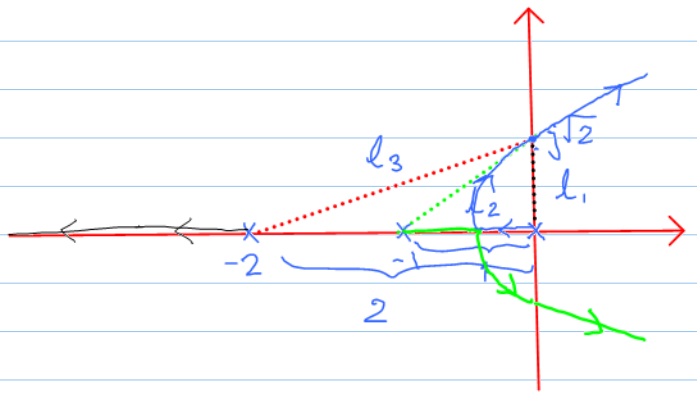
مقدار k برای اینکه هر سه شاخه ست چپ

مقدار k در نقطه $s=j\sqrt{2}$ ← a

بس قطب ست چپ $a<k<a$

2 قطب ست راست $a<k$

$k=$ حاصلضرب فاصله قطبهای هم‌زاویه از $s=j\sqrt{2}$ / حاصلضرب فاصله صفرهای هم‌زاویه از $s=j\sqrt{2}$



$l_1=\sqrt{2}$ $l_2=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$

$l_3=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$

$$k=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{1}=\sqrt{36}=6$$

{هر سه قطب ست چپ $0<k<6$

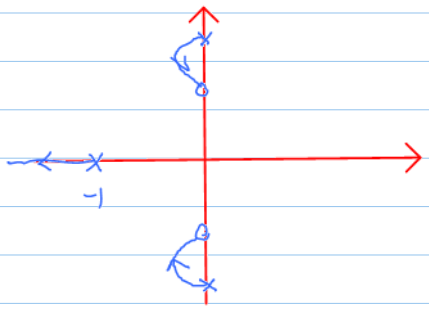
2 قطب ست راست $6<k$

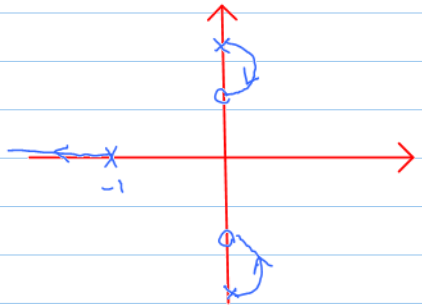
1 ~ ~ چپ

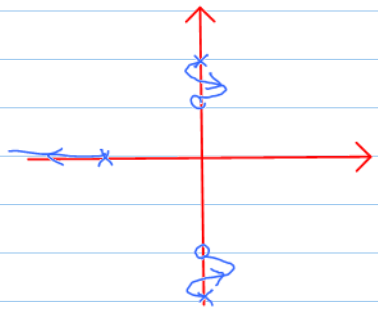
آزمون ۹۴.

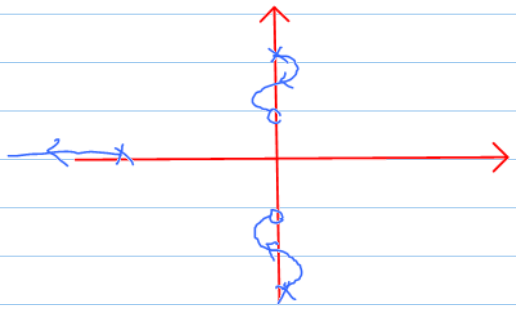
$G(s) = k\,\frac{s^2+a^2}{(s+1)(s^2+b^2)}$

مکان هندسی ریشه‌های سیستم زیر کدام است؟









همواره پایدار

همواره ناپایدار

اول پایدار بعد ناپایدار

$G(s) =$

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{s^2+a^2}{(s+1)(s^2+b^2)} = 0$$

علامت‌ها: + × − = −

اول ناپایدار

بعد پایدار

3.6 زاویه

3.7 تعیین پایداری

$$\Delta(s) = (s+1)(s^2+b^2) + k(s^2+a^2) = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + (1+k)s^2 + b^2 s + ka^2 + b^2 = 0$$

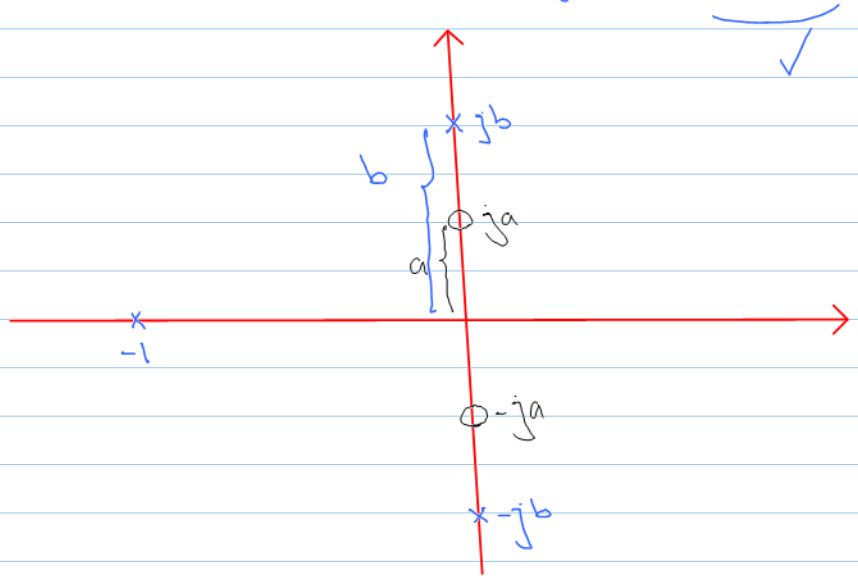
شرط پایداری: $\begin{cases} 1+k>0 \checkmark \\ ka^2+b^2>0 \checkmark \end{cases}$

$$(1+k)b^2 > 1\times(ka^2+b^2) \rightarrow \cancel{kb^2} + b^2 > \cancel{ka^2} + \cancel{b^2}$$

$$b^2 > a^2$$

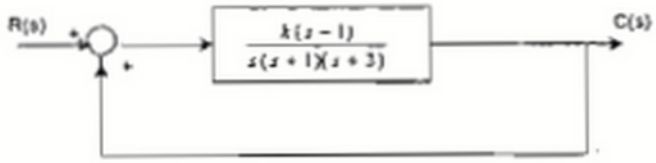
$$\boxed{b > a}$$ با فرض مثبت a,b

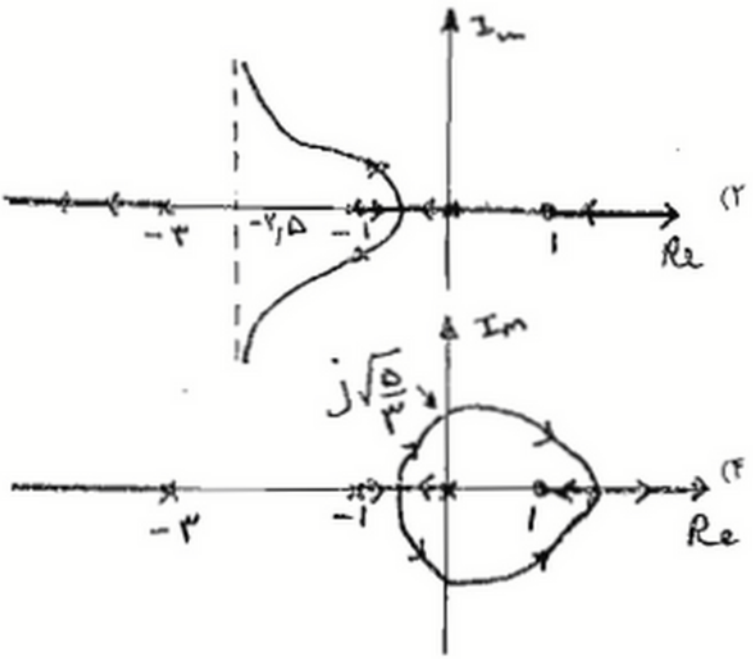
اگر $b>a$ باشد این سیستم به ازای تمام مقادیر k پایدار است. $\checkmark$

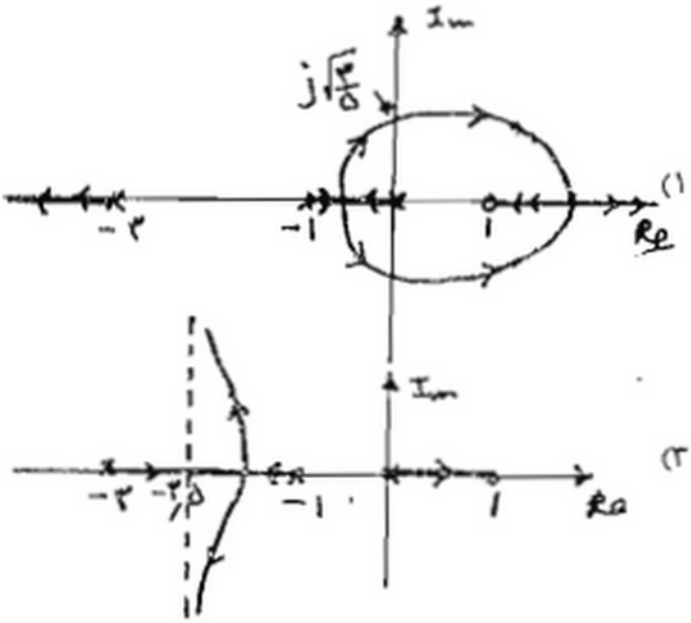


مرق ۱۹

در سیستم شکل مقابل که فاز بوده و دارای فیدبک مثبت واحد است، مکان هندسی ریشه‌ها به ازاء $k \geq 0$ چگونه می‌باشد؟



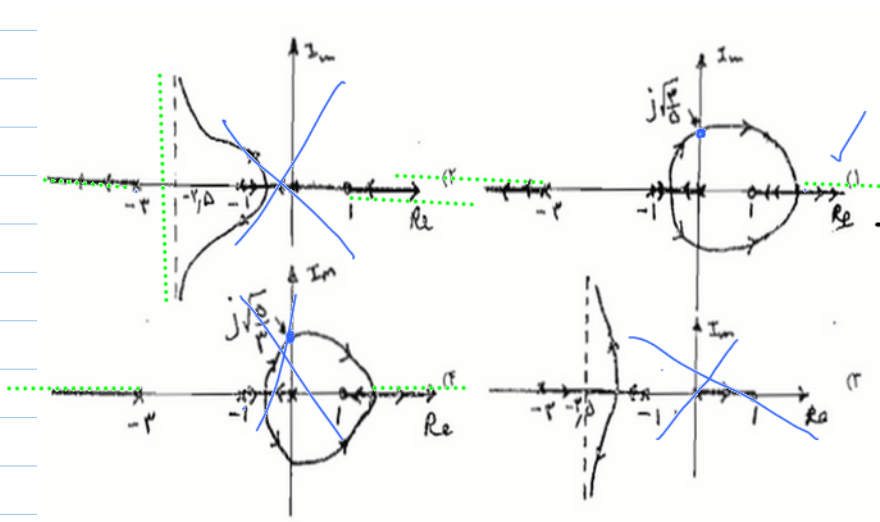


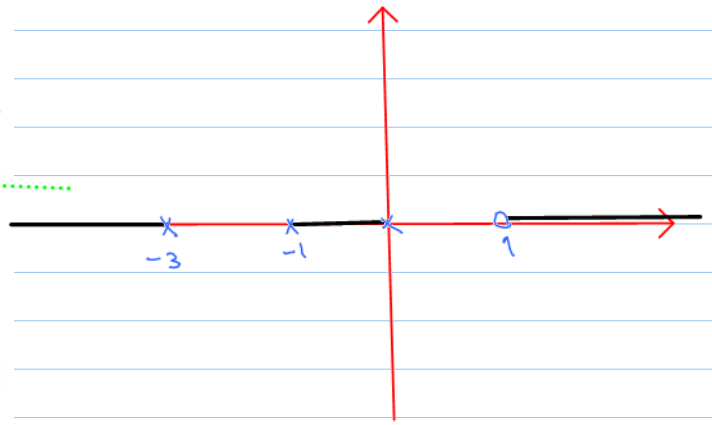


$$\Delta(s) = 1 - k\frac{s-1}{s(s+1)(s+3)} = 0$$

علامت‌ها = + × + = +

$$\Delta(s) = 1 + (-k)\frac{s-1}{s(s+1)(s+3)} = 0$$





فاصله = |1 - 3| = 2 مقدار

فاصله ←

8-3- حل تقاطع مکان با دور موهومی ← ① از جدول R-H ← وقتی سطر توان ۱ صفر شود

② $\Delta(j\omega)=0$ ← ω

$$\Delta(s) = s(s+1)(s+3) - k(s-1) = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + (3-k)s + k = 0$$

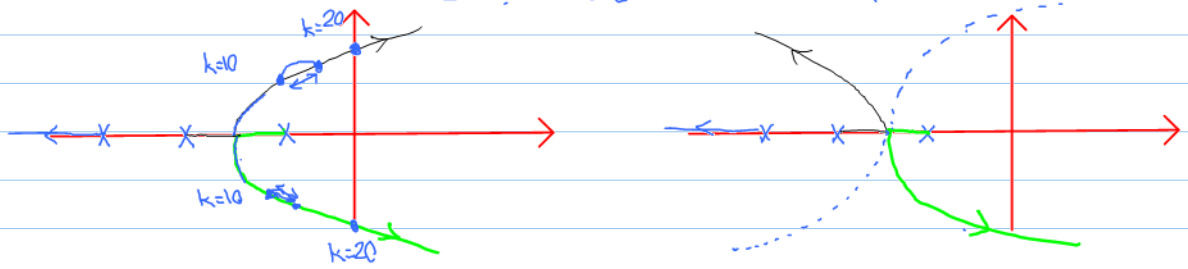
سطر توان ۱ → $4(3-k) = 1 \times k \rightarrow k = \frac{12}{5}$

سطر توان ۲ → $4s^2 + \frac{12}{5} = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{3}{5}$

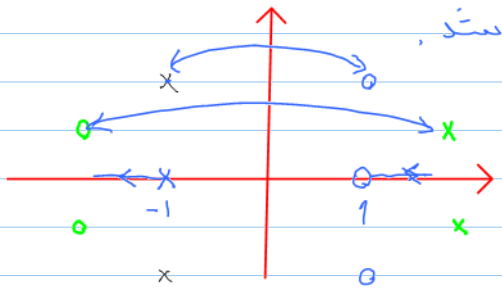
$$s = \pm j\sqrt{\frac{3}{5}}$$

جلسه 42 کنترل خطی

* مکان هندسی همواره نسبت به محور حقیقی متقارن است.



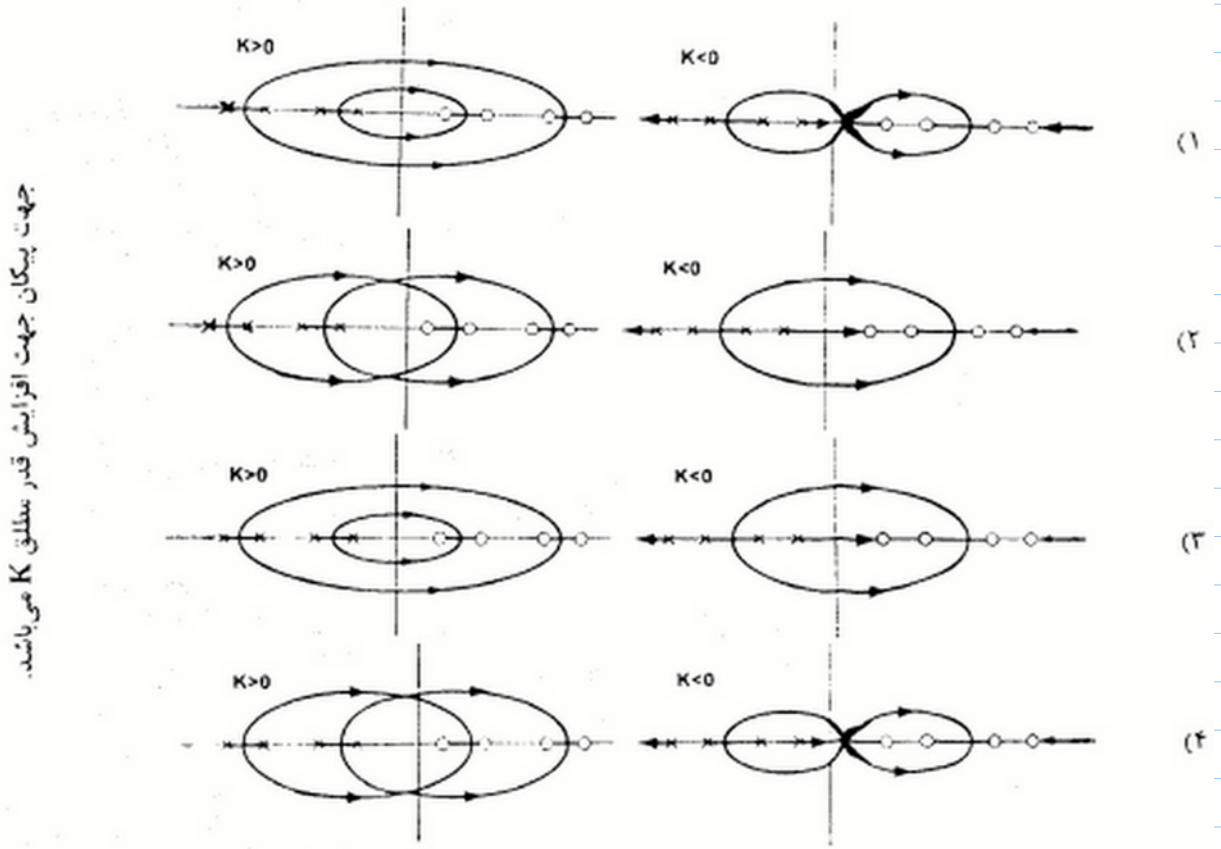
* مکان هندسی تغییر مودی نسبت به محور موهومی متقارن است که صفرهای حلقه باز با قطبهای حلقه باز نسبت به محور موهومی متقارن باشد.



* شاخه‌های مکان هندسی تغییر مقادیر یکدیگر با هم تقاطع دارند.

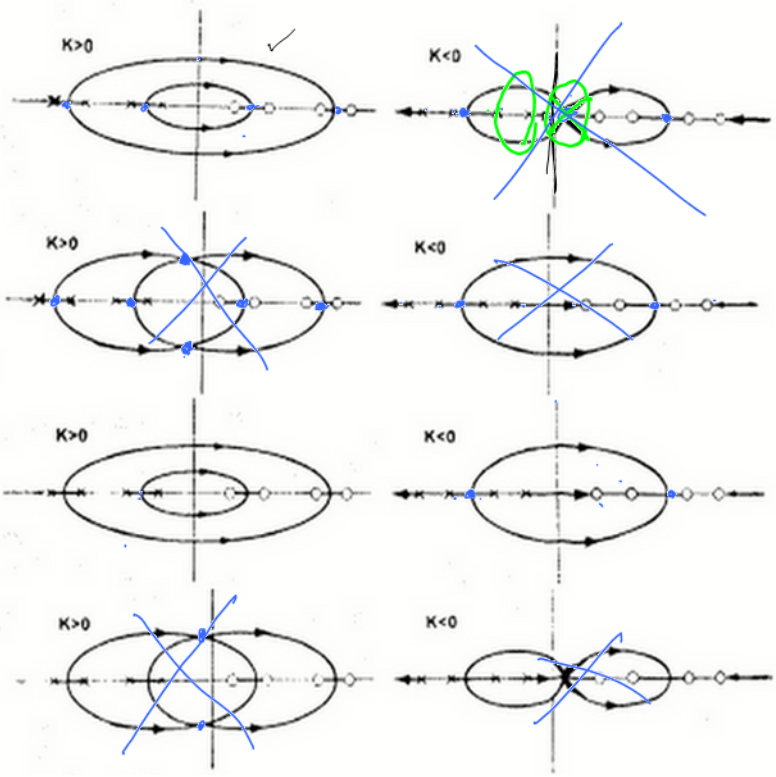
* نقطه شکست تغییر مودی می‌تواند موهومی یا مختلط باشد که درجه بیش از 3 بیشتر باشد.

$$GH(s)=\frac{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \qquad -\infty < k < \infty$$



جهت پیکان جهت افزایش قدر مطلق K می‌باشد.

$$GH(s)=\frac{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} \qquad -\infty<k<\infty$$



(۱) (۲) (۳) (۴)

① $\Delta(s)=1+k\,GH(s)=0$

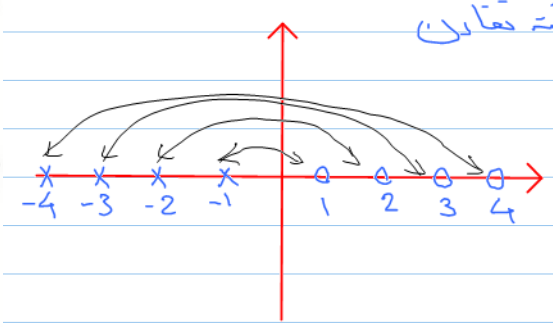
② معادله مشخصه = k معادله x −

3-1 ←

نقاط شکست

0 = درجه‌ی

نکته تقارن



$$k=-\frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)} \qquad \frac{dk}{ds}=0 \rightarrow \text{ریشه‌ها}$$

$$\frac{dk}{ds}=\frac{\text{صورت از درجه 7}}{\text{فرج از درجه 8}}=0$$

* در دو سه مکان هندسی سیستم‌های تأخیر (e^{-as}) عبارت تأخیر را با استفاده از تقریب پاده ساده می‌کنیم.

$$e^{-as}=\frac{1-\frac{a}{2}s}{1+\frac{a}{2}s}$$

در مورد مکان ریشه‌های سیستمی که تابع تبدیل حلقه آن به صورت $GH(s) = \frac{ke^{-Ts}}{s+1}$ است کدام بیان زیر همواره برقرار است؟

۱) تعداد شاخه‌های مکان بی‌نهایت است.

۲) مجانب‌های مکان همه موازی محور حقیقی هستند.

۳) تعداد نقاط تقاطع مکان با محور موهومی بی‌نهایت است.

۴) هر سه جواب درست است.

$$\Delta(s) = 1 + k \frac{e^{-Ts}}{s+1} = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + k \frac{1}{s+1} e^{-Ts} = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + k \frac{1}{s+1} \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + k \underbrace{\frac{1 - \frac{T}{2}s}{(s+1)(1 + \frac{T}{2}s)}}_{G_{OL}(s)} = 0$$

تعداد شاخه‌های مکان بی‌نهایت است.

مجانب‌های مکان همه موازی محور حقیقی هستند.

تعداد نقاط تقاطع مکان با محور موهومی بی‌نهایت است.

هر سه جواب درست است.

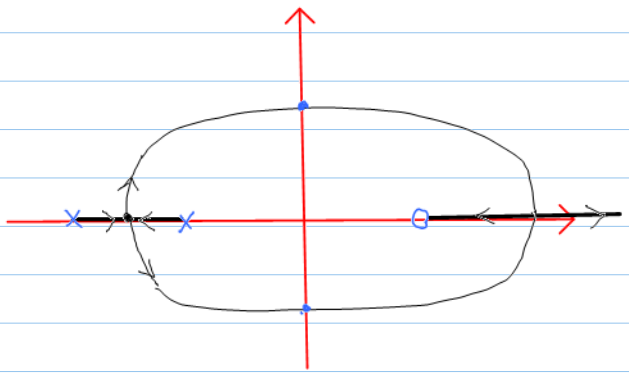
تعداد شاخه‌ها $= \max\{1, 2\} = 2$

قابل‌ها $\rightarrow |1-2| = 1$

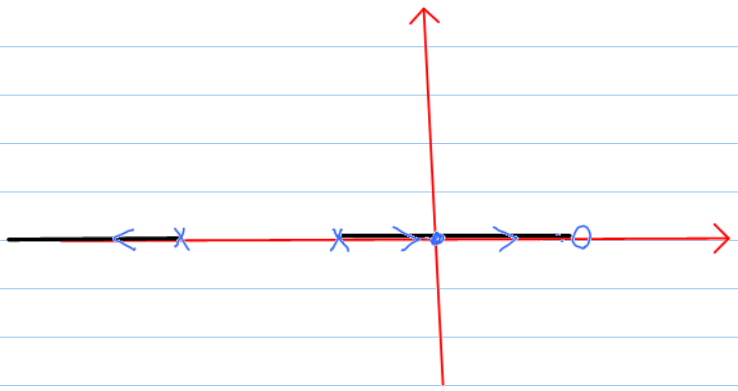
$$\theta = \begin{cases} \frac{(2m+1)\pi}{1} & \text{علامت مکان} - \\ \frac{2m\pi}{1} & + \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \pi & \text{علامت مکان} - \\ 0 & \text{علامت مکان} + \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \frac{-1 - \frac{2}{T} - \frac{2}{T}}{1} = -1 - \frac{4}{T}$$

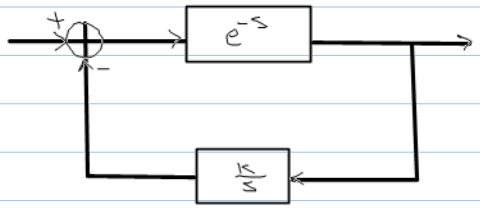


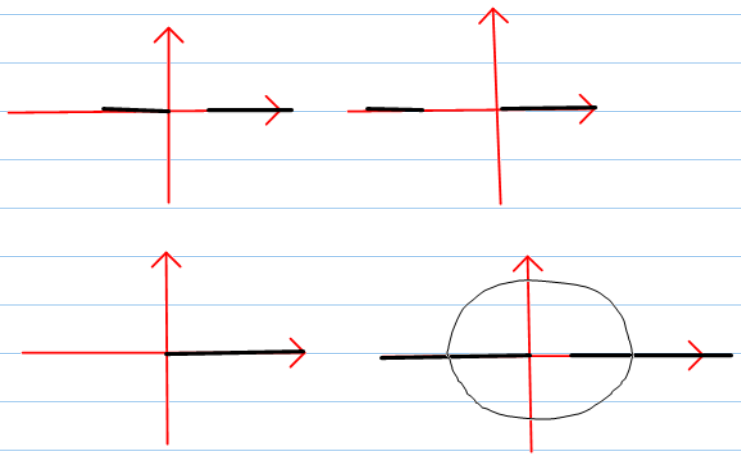
علامت مکان +



علامت مکان −

مکان هندسی قطبهای سیستم حلقه‌بسته زیر به ازای مقادیر $k>0$ به کدام گزینه شبیه‌تر است؟

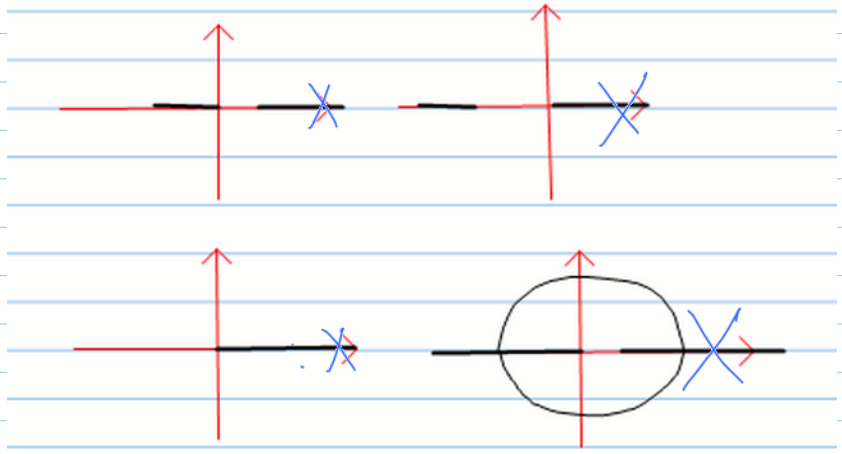


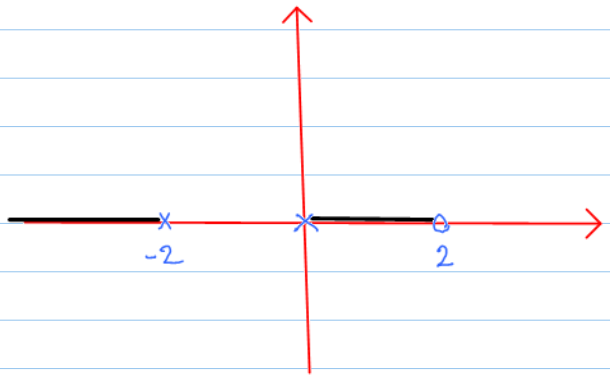


$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s} e^{-s} = 0$$

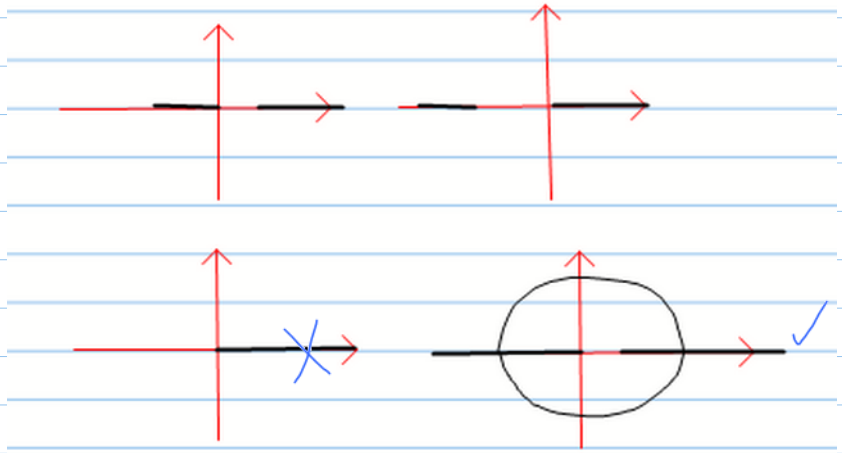
$$\Delta(s) = 1 + k \frac{1}{s} \frac{(1 - \frac{s}{2})}{(1 + \frac{s}{2})} = 1 + k \frac{1 - \frac{s}{2}}{s(1 + \frac{s}{2})} = 0$$

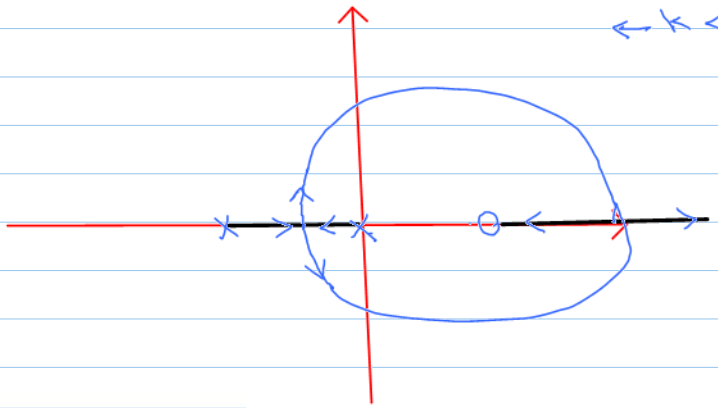
علامت مکان = + x − = −





علامت مکان = − x − = +





$k < 0$ ← جهت

دیاگرام مکان هندسی ریشه‌های سیستم زیر را در نظر بگیرید. حساسیت کدام نقطه نسبت به تغییرات پارامتر k کم‌تر است؟

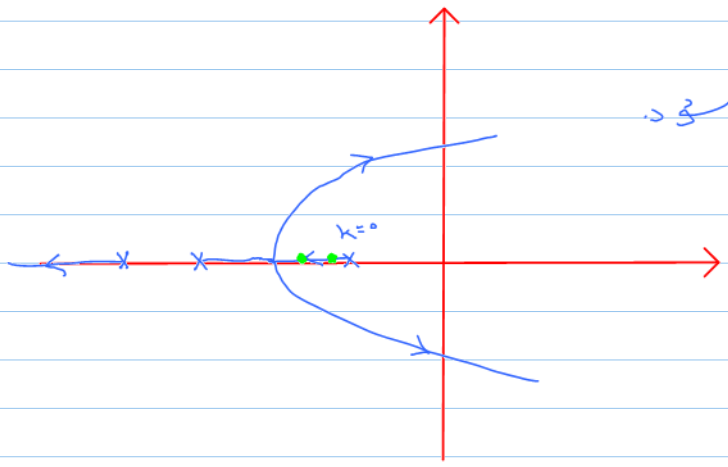
$$G(s)=\frac{k(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+5)}$$

۱) $s=-0/9+j0/9$

۲) $s=-6$

۳) $s=-1/5$

۴) $s=-0/5$



حساسیت: یعنی با تغییر k، چقدر جابجا می‌شود.

* حساسیت نقاط مکان هندسی به k در نقطه شکست بیشترین مقدار است.

" " " " " " هر چه از نقطه شکست دورتر شویم کمتر است.

" " " " " " در صفرها و قطب‌های حلقه باز ∞ است.

" " " " " " نقاطی که جزء مکان نیستند k برابر ∞ است.

کم‌تر است؟

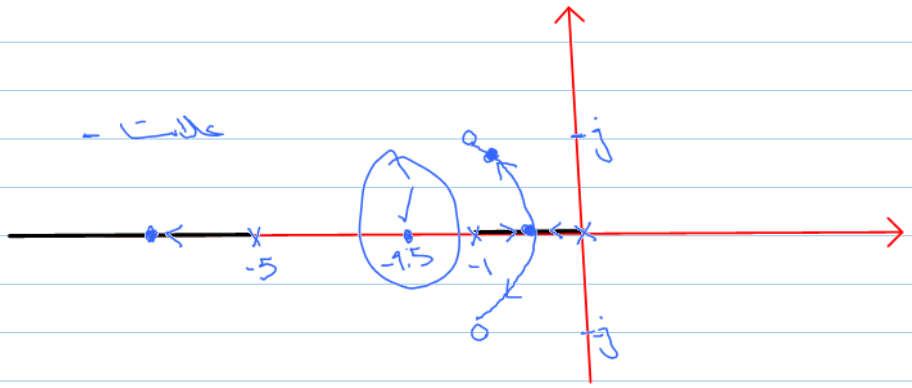
$$G(s)=\frac{k(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+5)}$$

۱) $s=-0/9+j0/9$

۲) $s=-6$

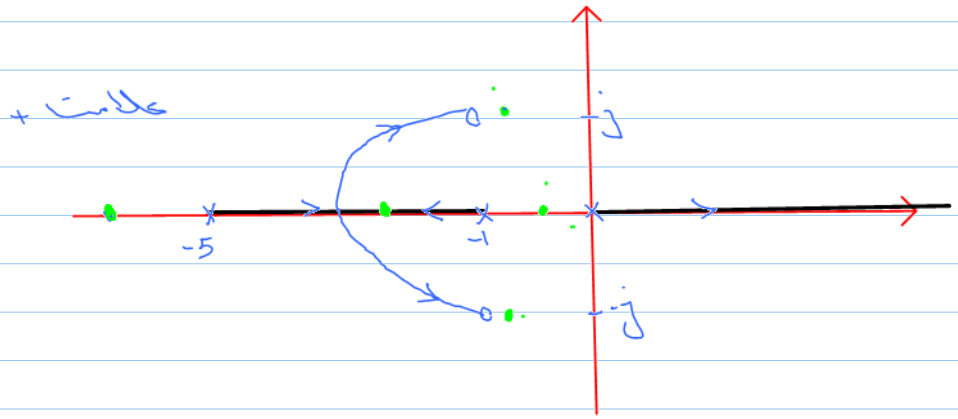
۳) $s=-1/5$

۴) $s=-0/5$



$$\Delta(s)=1+k\frac{(s^2+2s+2)}{s(s+1)(s+5)}=0$$

علامت = علامت k × علامت $-$



① $\Delta(s)$ را به فرم استاندارد بنویسید.

② علامت مکان را یقین کنید.

وجود یا نبود بین گزینه‌ها را بررسی کنید:

① محل صفرها و قطب‌های حلقه باز

② جابجایی ← از نظر تعداد، زاویه، ...

③ بخشی از هر حقیقی که جزء مکان است.

④ تعداد شاخه‌های ورودی به صفر و فرجی از قطب‌ها

⑤ نقاط شکست

⑥ تطبیق پایداری با جدول R-H

⑦ زاویه ورود و خروج

⑧ محل تقاطع مکان با محور موهومی

⑨ تقارن مکان نسبت به هر حقیقی

⑩ تقارن مکان نسبت به محور موهومی

جلسه 43 کنترل خطی

Bode diagram — نمودارهای بودی

سؤالات متداول:

نمودار بودی را چرا باید بگیریم؟

>> Bode( )

نرم افزار Matlab؟

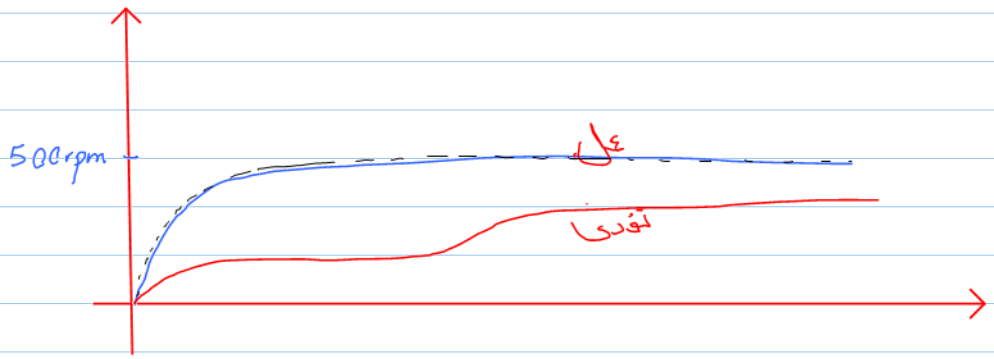
درعلی به دردمان می خورد؟

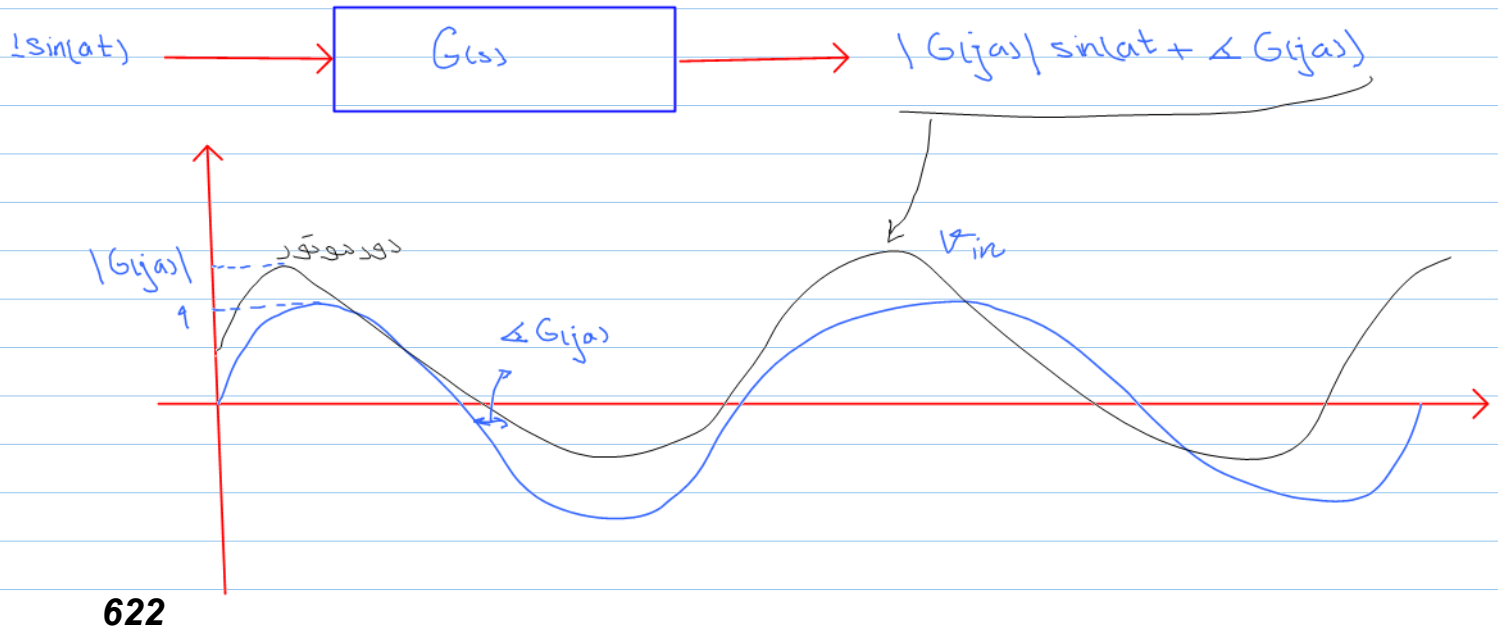
کنترل موتور BLDC ← G(s)

G(s) → ② پایداری ③ حالت گذرا ④ خطای ماندگار

⑤ رفتار سیستم بازای k های مختلف

① مدلسازی ← تئوری دینامیک موتور ← معادلات ← G(s)





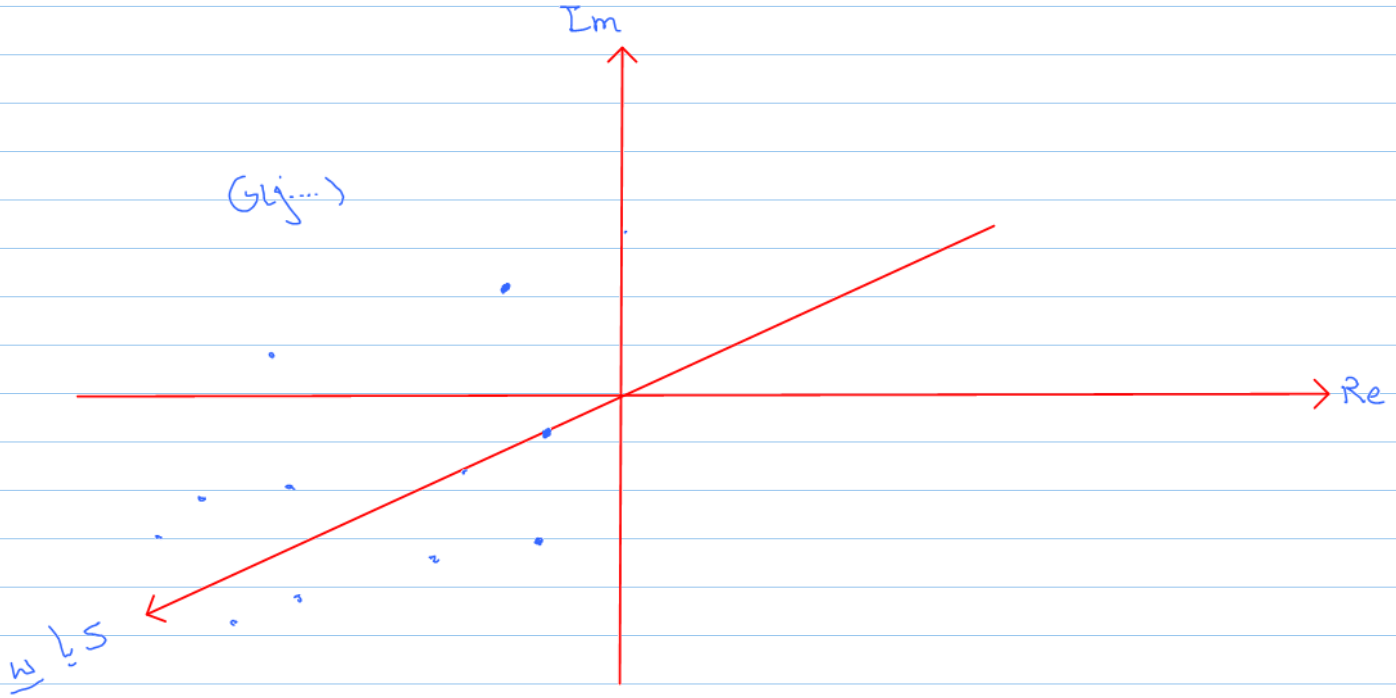
$G(s) \rightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)}$

$s = j\omega$ $G(s)$? $\rightarrow$ $|G(j\omega)| = 2$, $\angle G(j\omega) = \frac{\pi}{3}$

$s = jb \rightarrow$ steady state $= \sin(bt) \rightarrow |G(jb)|$, $\angle G(jb)$

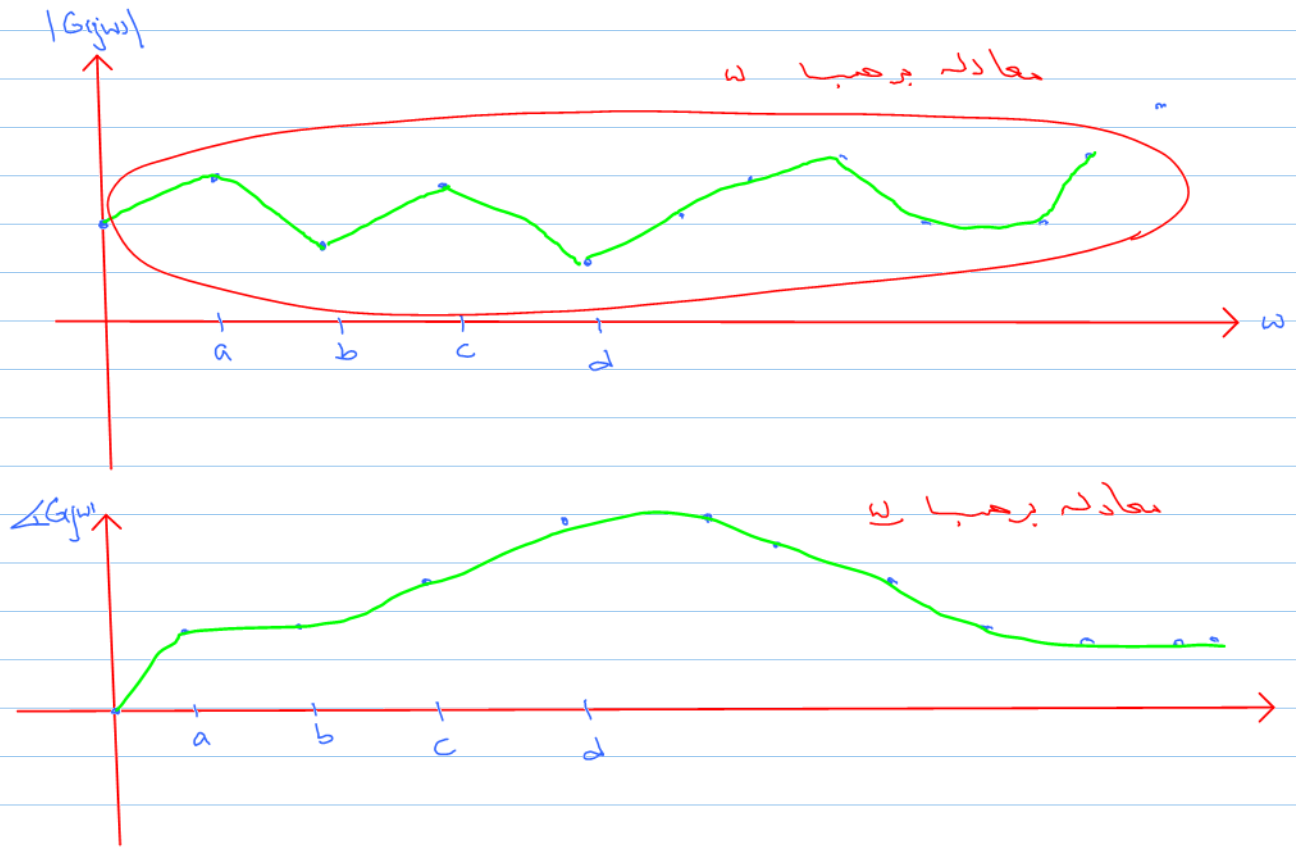
jc $\quad$ $\sin(ct)$

$\omega \to \infty$



$G(jb) = |G(jb)| e^{j \angle G(jb)} = Re(G(j\omega)) + j\,Im(G(jb))$

jw هرمونیک $\rightarrow$ $G(jw)$ و اندازه فاز



عوداز اندازه $\rightarrow |G(jw)| = \frac{w^2+1}{w-1} \times w \sin(w)$

فاز $\sim$ $\angle G(jw) = (w+\frac{\pi}{2})(tg(w-1))$

$$G(jw) = \frac{w^2+1}{w-1} w \sin w \; e^{j(w+\frac{\pi}{2})tg(w-1)}$$

$G(s) \rightarrow s=jw \rightarrow G(jw)$

$\checkmark \quad \leftarrow \quad w=\frac{s}{j} \quad \leftarrow$

$G(s) \Rightarrow s = j\omega \rightarrow G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$

از روی شکل $|G(j\omega)|$ و $\angle G(j\omega)$ معادلات را می‌خواهیم استخراج کنیم؟

$G(j\omega) = \omega \rightarrow |G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \rightarrow$ " "

هر ایرادی دستگاه چه صدایی تولید می‌کند ← از روی صدای ایراد

$G(s) \rightarrow |G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$

$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$

$G_1(j\omega) = j\omega$ $\quad G(s) = s$

$|G(j\omega)| = \omega \quad \angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$

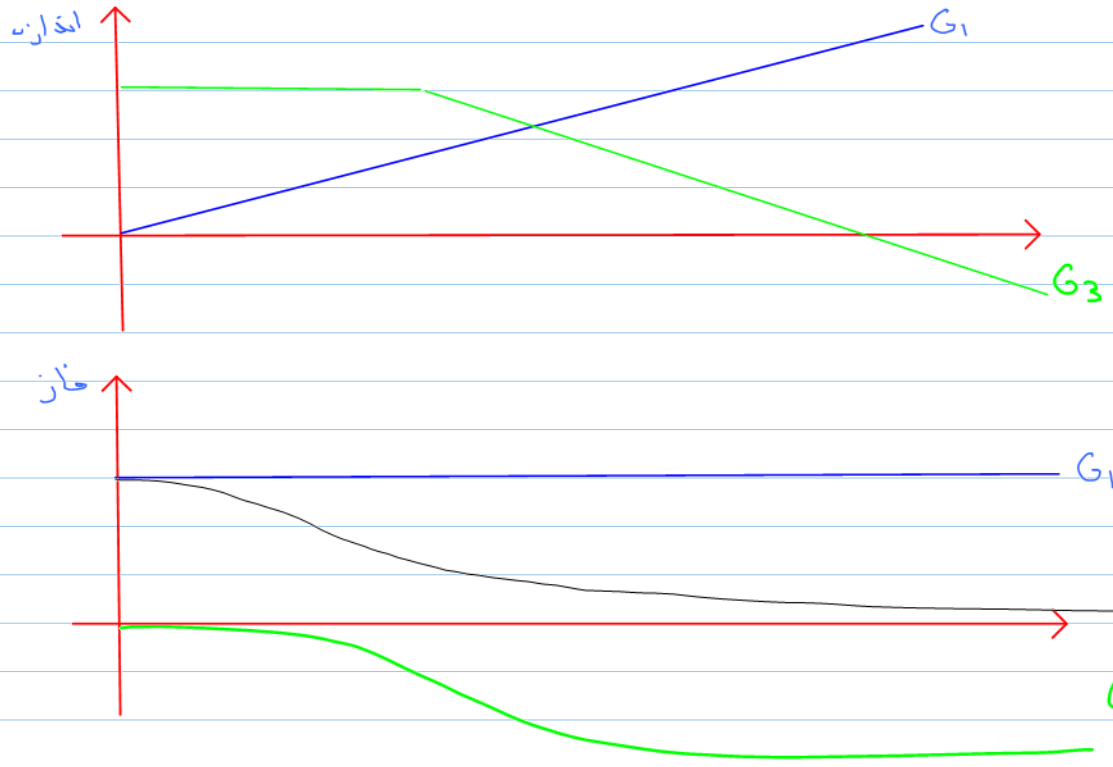
$G_2(s) = \frac{1}{s} \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$, $\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$G_3(s) = \frac{1}{s+1} \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$, $\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$

$G(s) = \frac{s}{s+1} \quad G(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+1} = G_1(j\omega) \times G_3(j\omega)$

$|G(j\omega)| = |G_1| \times |G_3|$

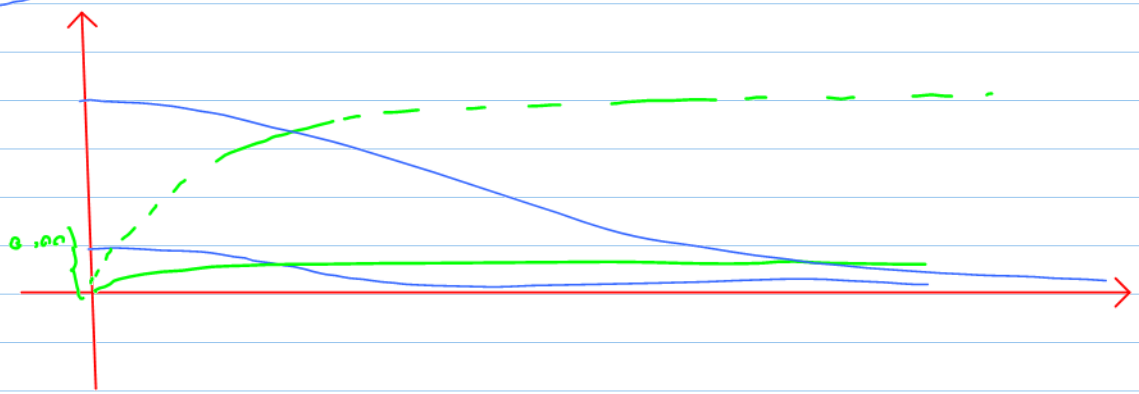
$\angle G(j\omega) = \angle G_1 + \angle G_3$ ✓



$$\log|G| = \log|G_1| \times |G_3| \rightarrow$$

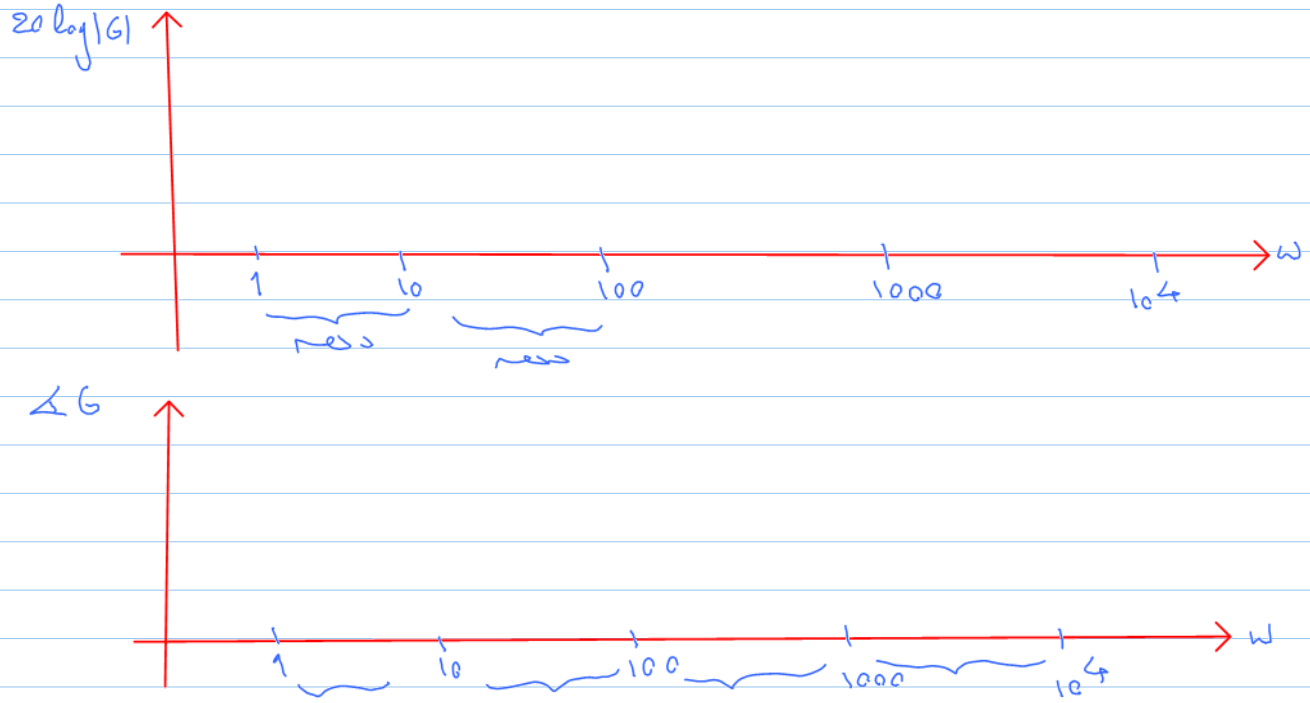
$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$20\log|G| = 20\log|G_1| + 20\log|G_3|$$



نمودار $20\log|G(j\omega)|$ و $\angle G(j\omega)$ بودی

نمودار $20\log|G(j\omega)|$ و $\angle G(j\omega)$ را برحسب ω رسم می‌کنیم ← نمودارهای بودی



محور ω را برحسب log تقسیم‌بندی می‌کنند.

$20\log|G|$ ← واحد برحسب دسی بل

جلسه ۴۴ کنترل خطی

نمودار بودی

یادآوری ریاضی:

$$\log_b a = c \rightarrow a = b^c$$

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c a/b = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_b a^x = x \log_b a$$

$$\log_b 1/a = -\log_b a$$

برای رسم نمودار بودی مراحل زیر را دارید:

① پاسخ فرکانسی یعنی $G(j\omega)$ را بدست آورید.

② اندازه و فاز $G(j\omega)$ را بیان کنید.

③ محور ω را به صورت لگاریتمی تقسیم بندی کنید.

④ نمودار $20\log|G|$ و $\angle G$ را رسم کنید.

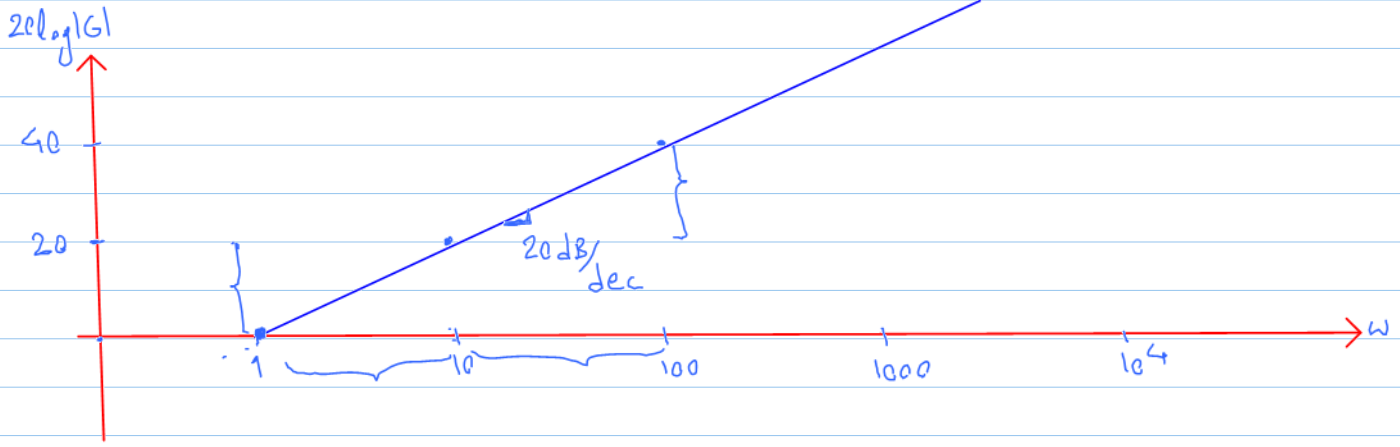
مثال: نمودار بودی $G(s) = s$ را رسم کنید.

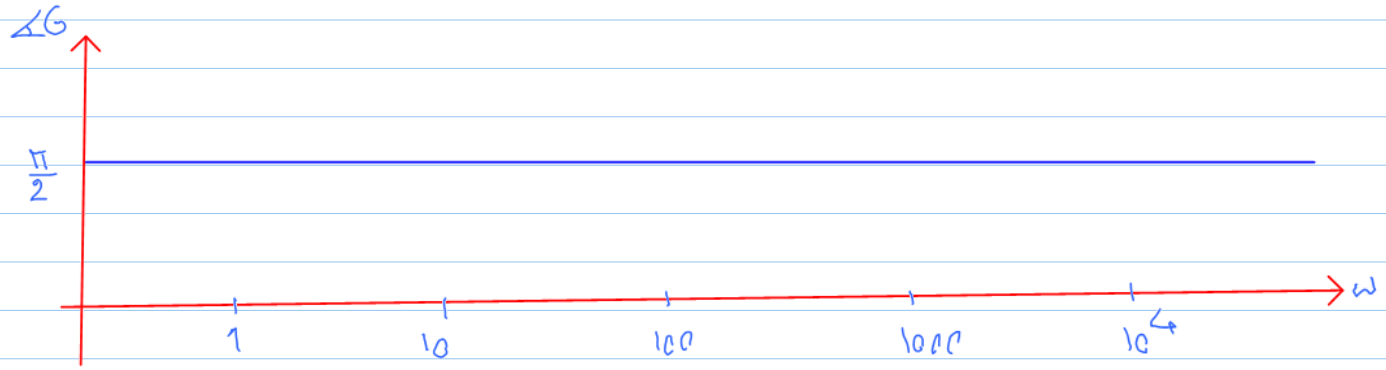
① $G(j\omega) = j\omega$

② $|G(j\omega)| = |j\omega| = |j||\omega| = |\omega| \rightarrow |G(j\omega)| = \omega \quad \omega \geq 0$

$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = \frac{\pi}{2}$

③ $20\log|G(j\omega)| = 20\log\omega$ $\quad 20\log 10^2 = 40 \log_{10} 10 = 40$





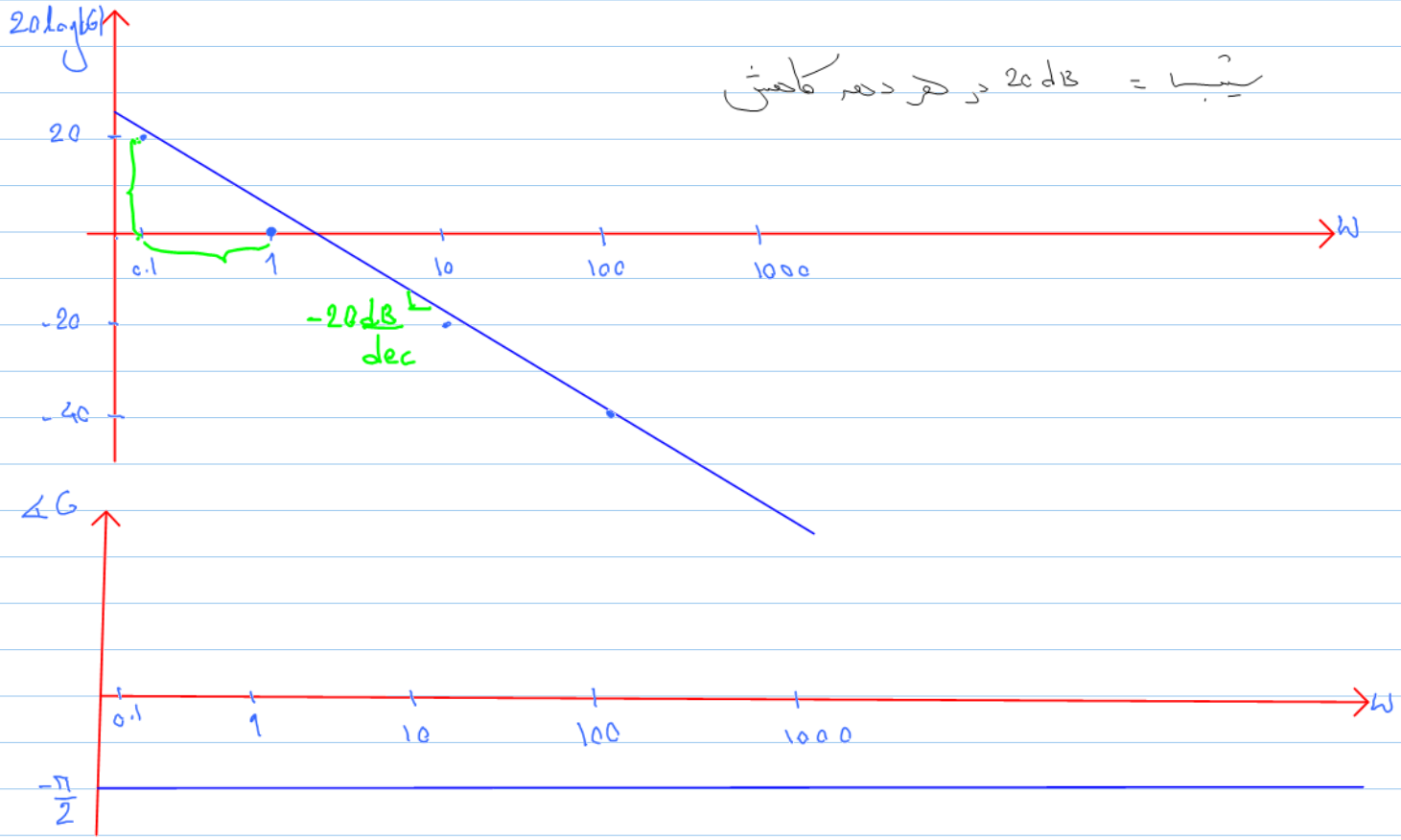
$20 \log 0 = -\infty$

$G(s) = \frac{1}{s}$

$G(jw) = \frac{1}{jw}$

$|G(jw)| = \left|\frac{1}{jw}\right| = \frac{1}{w} \qquad w > 0$

$$\begin{cases} \angle G(jw) = \angle 1 - \angle jw = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \\ 20 \log |G| = 20 \log \frac{1}{w} = -20 \log w \end{cases}$$



شیب = 20 dB در هر دهه کاهش

$-20\log w \rightarrow$

$w = 0.1$	$\rightarrow$	$-20\log\frac{1}{10} = +20\log 10 = 20$
$w = 1$		$-20\log 1 = 0$
$w = 10$		$-20\log 10 = -20$
$w = 100$		$-20\log 100 = -40$

$$G(s) = s + 10$$

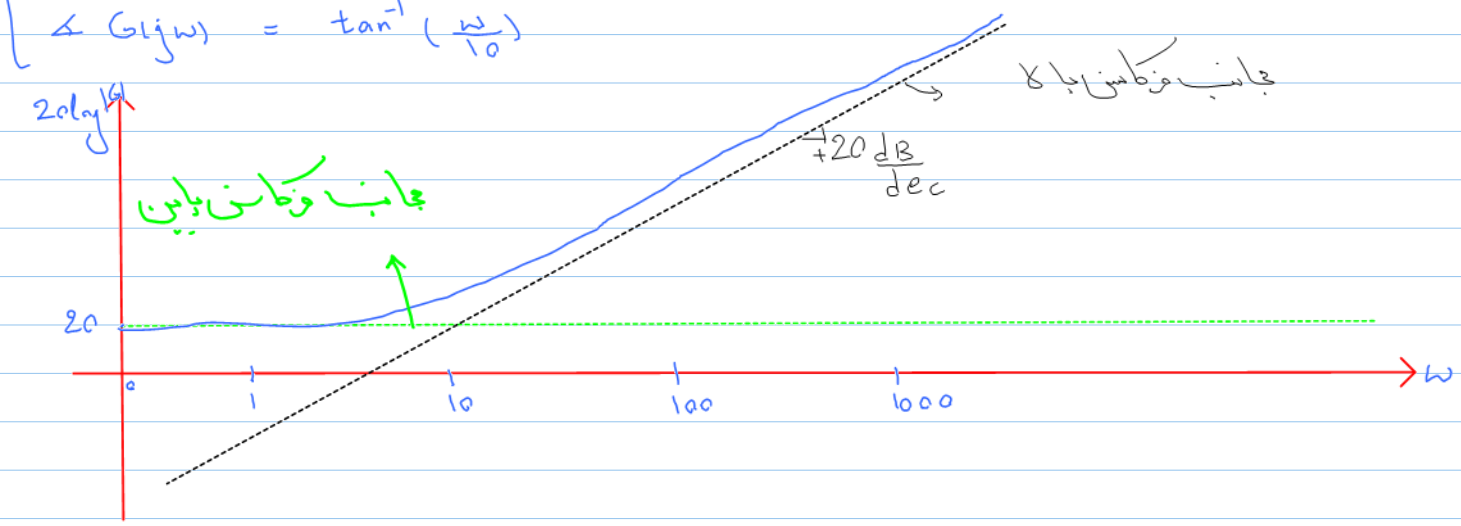
$$G(jw) = jw + 10$$

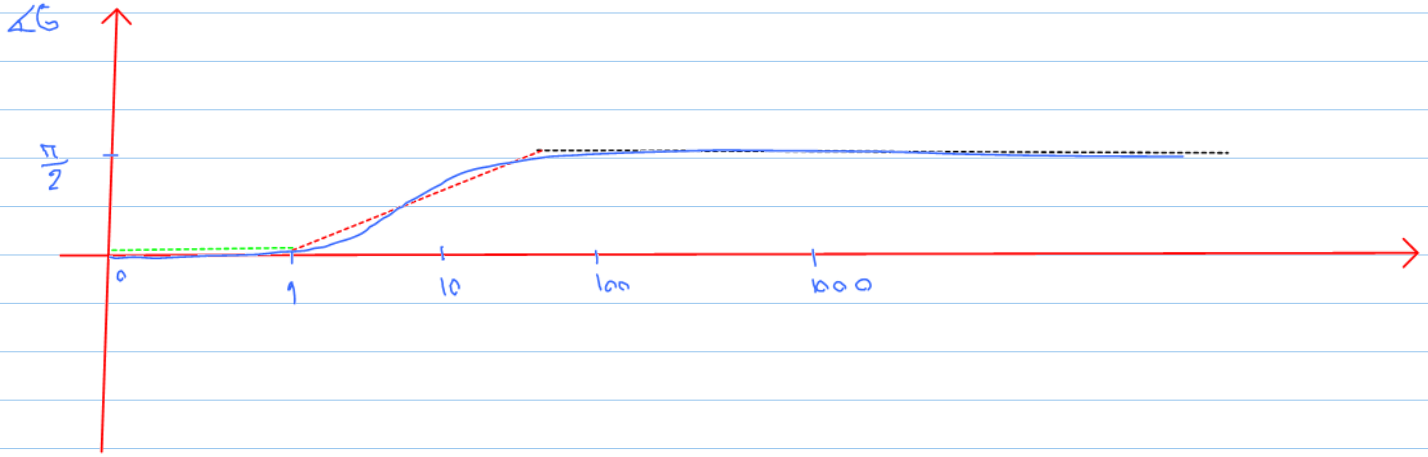
$$|G(jw)| = \sqrt{w^2 + 100} = (w^2 + 100)^{1/2}$$

$$\angle G(jw) = \tan^{-1}\left(\frac{w}{10}\right)$$

$$20\log|G(jw)| = 20\log(w^2 + 100)^{1/2} = 10\log(w^2 + 100)$$

$$\begin{cases} 20\log|G(j\omega)| = 10\log(\omega^2+100) \\ \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) \end{cases}$$





فرکانس پایین عدی کوچک ω

$$10\log(\omega^2+100) = 10\log 100\left(\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1\right) = \overset{2}{\cancel{10\log 100}} + 10\log\left(\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1\right)$$

$$20\log|G| = 20 + 10\log\left(\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1\right)$$

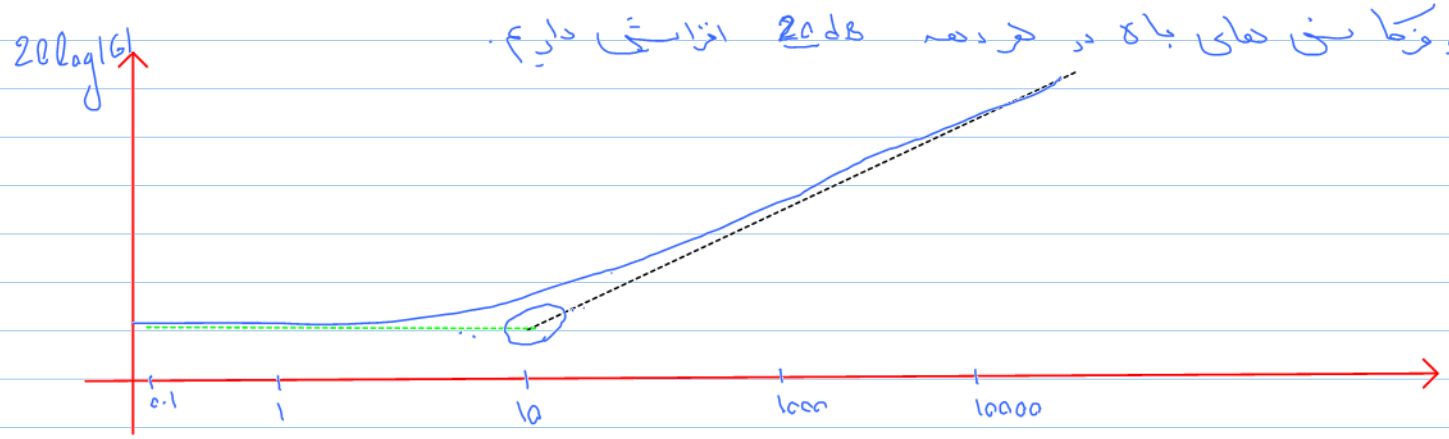
$\omega = 0.1$ $20\log|G| = 20 + 10\log(\overset{1}{\cancel{0.0001}}+1) \simeq 20 + 10\log 1 = 20$

ω عدی بزرگ $\omega = 1000$

$\omega = 1000$ $20\log|G| = 20 + 10\log\left(\left(\frac{1000}{10}\right)^{\overset{10000}{\cancel{2}}}+1\right) = 20 + 10\log 10^4 = 20+40 = 60$

$\omega = 10000$ $20\log|G| = 20 + 10\log(\overset{10^6}{\cancel{1000001}}) = 20 + 60\log 10 = 80$

در فرکانس های بالا در هر دهه 20dB افزایش دارد.



به دلیل سختی محاسبات به جای رسم 20log|G| می توان به تقریب خوبی

با نمودار 20log|G| جابجایی دارد صحبت کرد.

برای نمودار فاز هم می توان جابجایی دارد صحبت کرد.

رسم نمودار بودی با استفاده از جابجایی:

$$G(s) = s + 10$$

$$G(jw) = jw + 10$$

① $G(jw)$ ← $G(jw)$

② $|G|$ و $\angle G$ ← $|G|$ و $\angle G$

$$|G| = (w^2 + 100)^{1/2}$$

$$\angle G = \tan^{-1}\left(\frac{w}{10}\right)$$

③ تقریب $20\log|G|$ را برای $w>10$ و $w<10$ بدست می آوریم.

$$20\log|G| = 20 + 10\log\left(\left(\frac{w}{10}\right)^2 + 1\right)$$

$$20\log|G| = \begin{cases} 20 & w<10 \\ 20\log(w) & w>10 \end{cases}$$

$w<10 \rightarrow \frac{w}{10} < 1 \rightarrow \left(\frac{w}{10}\right)^2 << 1 \rightarrow \left(\frac{w}{10}\right)^2 \simeq 0$

$0.2 \qquad 0.04$

$$\log\left(\left(\frac{w}{10}\right)^2 + 1\right) \simeq \log 1 = 0$$

$w>10 \rightarrow \frac{w}{10} > 1 \rightarrow \left(\frac{w}{10}\right)^2 >> 1 \rightarrow \left(\frac{w}{10}\right)^2 + 1 \simeq \left(\frac{w}{10}\right)^2$

$$\log\left(\left(\frac{w}{10}\right)^2+1\right) \simeq \log\left(\frac{w}{10}\right)^2 = 2\log w/_{10} = 2\log w - 2\log 10 = 2\log w - 2$$

$$20 + 10\log\left(\left(\frac{w}{10}\right)^2+1\right) = 20 + 10(2\log w - 2) = 20\log w$$



$$\angle G(jw) = \tan^{-1}\left(\frac{w}{10}\right)$$

بالنهاية مثلا:

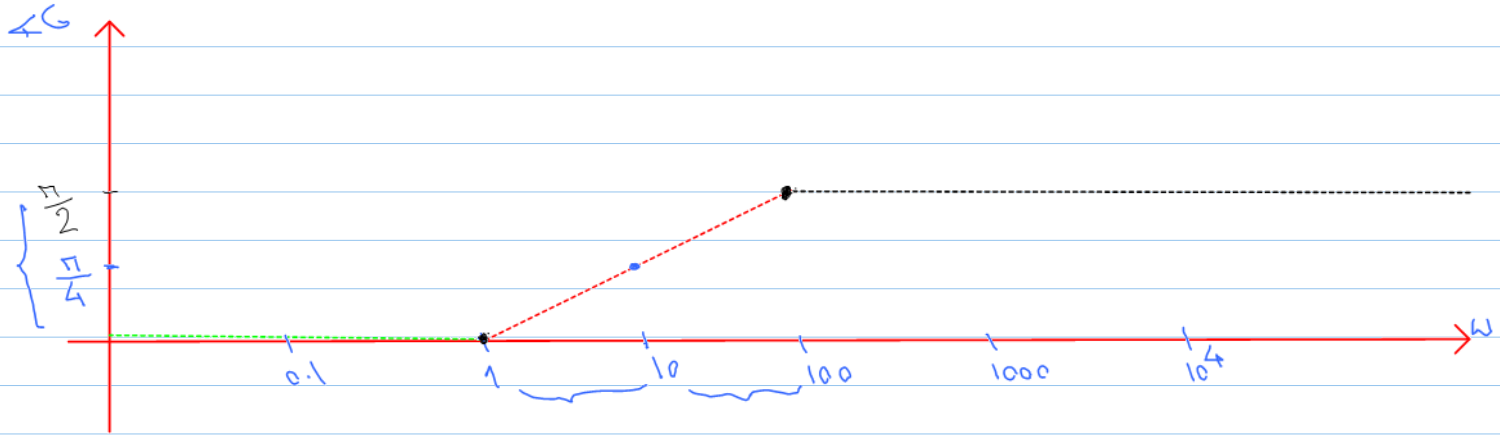
$$\angle G(jw) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$w \ll 10 \rightarrow w < 1$

$w \gg 10 \rightarrow w > 10 \times 10$

$w \ll 10 \rightarrow \frac{w}{10} \ll 1 \rightarrow \frac{w}{10} \simeq 0 \rightarrow w < \frac{1}{10}(10) \Rightarrow w < 1$

$w \gg 10 \rightarrow \frac{w}{10} \gg 1 \Rightarrow \frac{w}{10} \simeq \infty$



$a \overset{w}{\gg} b \overset{10}{\rightarrow} a \overset{w}{>} 10b$

$a \overset{w}{\ll} b \rightarrow a < \frac{1}{10}b$

ميل $= \frac{40}{2} = 45°/dec$

$$G(s) = \frac{1}{s+5}$$

① $$G(jw) = \frac{1}{jw+5}$$

② $$|G| = \frac{1}{\sqrt{w^2+25}} = \frac{1}{(w^2+25)^{1/2}} = (w^2+25)^{-1/2}$$

$$|G| = \left(25\left(\left(\frac{w}{5}\right)^2+1\right)\right)^{-1/2}$$

$$|G| = (25)^{-1/2}\left(\left(\frac{w}{5}\right)^2+1\right)^{-1/2}$$

$$|G| = \frac{1}{5}\left(\left(\frac{w}{5}\right)^2+1\right)^{-1/2}$$

$$\angle G(jw) = \angle 1 - \angle(jw+5) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{w}{5}\right)$$

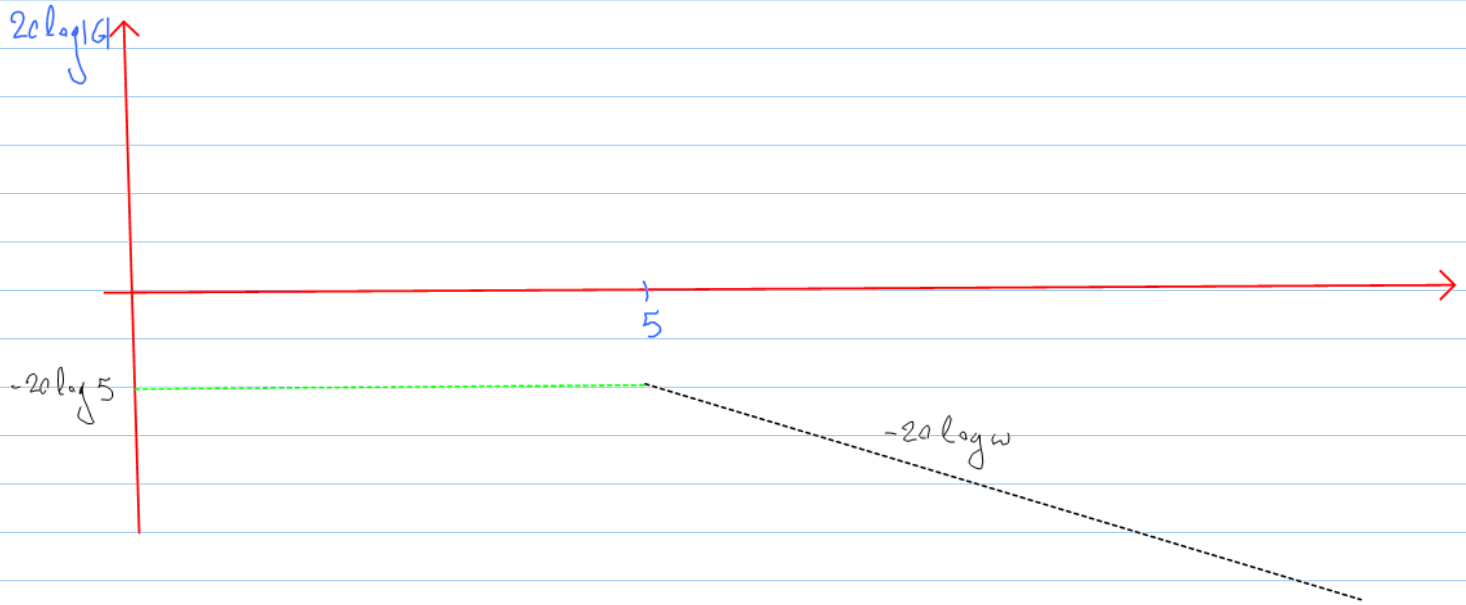
④ $$20\log|G| = 20\log\left(\frac{1}{5}\left(\left(\frac{w}{5}\right)^2+1\right)^{-1/2}\right) = 20\log\frac{1}{5} + 20\log\left(\left(\frac{w}{5}\right)^2+1\right)^{-1/2}$$

$$20\log|G| = -20\log 5 - 10\log\left(\left(\frac{w}{5}\right)^2+1\right)$$

$$\left(\frac{w}{5}\right)^2+1 = \begin{cases} 1 & \left(\frac{w}{5}\right)^2 \ll 1 \rightarrow \frac{w}{5} < 1 \rightarrow w < 5 \\ \left(\frac{w}{5}\right)^2 & \left(\frac{w}{5}\right)^2 \gg 1 \rightarrow \frac{w}{5} > 1 \rightarrow w > 5 \end{cases}$$

$$20\log|G| = \begin{cases} -20\log 5 & w<5 \\ -20\log 5 - 10\log\left(\frac{w}{5}\right)^2 \quad (20\log w - 20\log 5) & w>5 \end{cases}$$

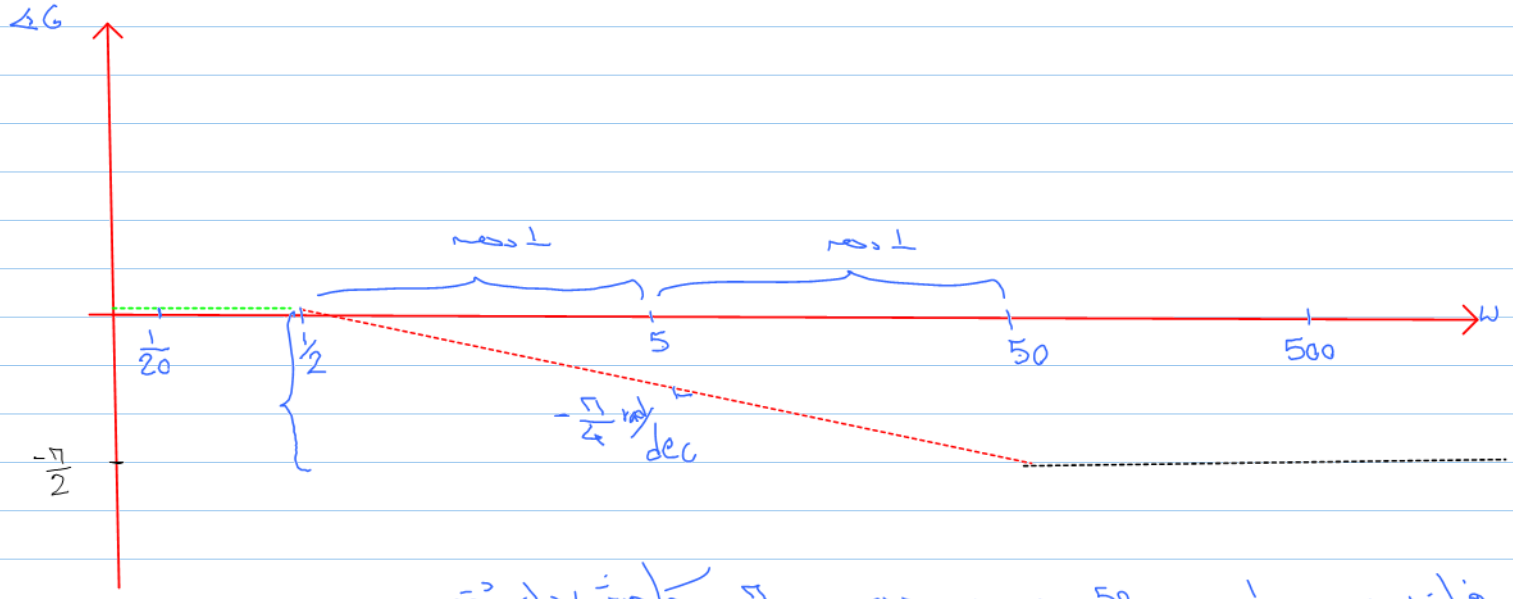
$$20\log|G| = \begin{cases} -20\log 5 & w<5 \\ -20\log w & w>5 \end{cases}$$



$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) = \begin{cases} 0 & \omega < \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 50 \end{cases}$$

$\frac{\omega}{5} \ll 1 \rightarrow \frac{\omega}{5} < \frac{1}{10} \rightarrow \omega < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\omega}{5} \simeq 0$

$\frac{\omega}{5} \gg 1 \rightarrow \frac{\omega}{5} > 10 \times 1 \rightarrow \omega > 50$



فازبین $\frac{1}{2}$ و 50 در دو دهه کاهش داشته $\frac{\pi}{2}$

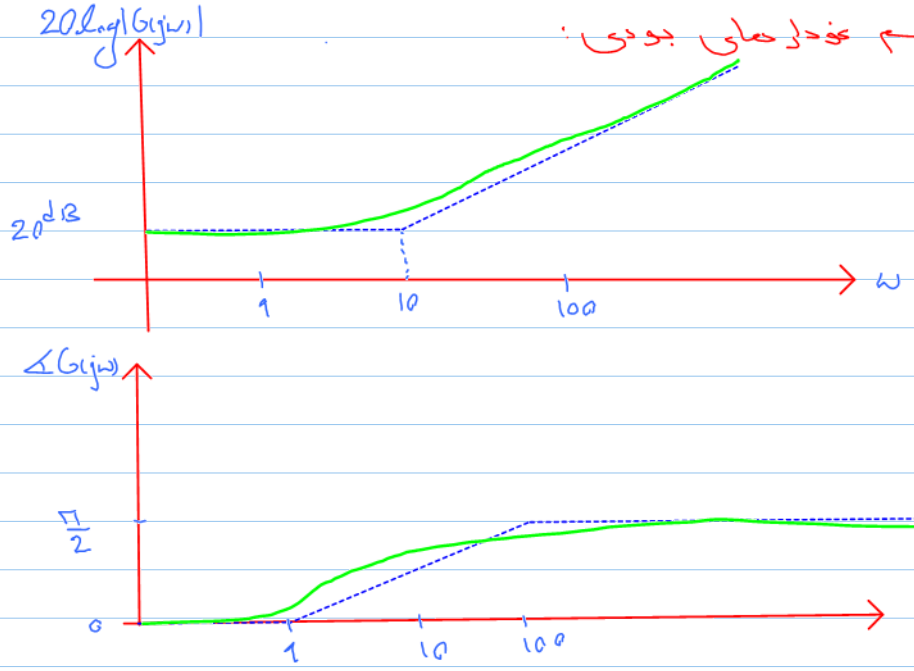
یک خط با شیب $-45^\circ/dec$

جلسه 45 کنترل خطی

نمودار بودی

روش رسم نمودارهای بودی:

$G(s) = s+10$



$H(s) = s+1000$

$H(j\omega) = j\omega + 1000 \longrightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \sqrt{\omega^2 + (1000)^2} \\ \angle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1000}\right) \end{cases}$

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log\left(\omega^2+(1000)^2\right)^{1/2} = 10\log(\omega^2+(1000)^2)$$

$\log ab = \log a + \log b$

$$= 10\log\underbrace{(1000)^2}_{a}\underbrace{\left(\left(\frac{\omega}{1000}\right)^2+1\right)}_{b} = 10\log(1000)^2 + 10\log\left(\left(\frac{\omega}{1000}\right)^2+1\right)$$

$$= 10\log 10^6 + 10\log\left(\left(\frac{\omega}{1000}\right)^2+1\right)$$

$$20\log|H(j\omega)| = 60 + 10\log\left(\left(\frac{\omega}{1000}\right)^2+1\right)$$

$$\left(\frac{\omega}{1000}\right)^2+1 = \begin{cases} 1 & \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2 \ll 1 \\ \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2 & \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2 \gg 1 \end{cases}$$

← دانیما

$\left(\frac{w}{1000}\right)^2 << 1 \rightarrow \frac{w}{1000} < 1$ $\qquad a^2 << 1 \rightarrow a < 1$

$\left(\frac{w}{1000}\right)^2 >> 1 \rightarrow \frac{w}{1000} > 1$

$$\left(\frac{w}{1000}\right)^2 + 1 \simeq \begin{cases} 1 & \frac{w}{1000} < 1 \rightarrow w < 1000 \\ \left(\frac{w}{1000}\right)^2 & \frac{w}{1000} >> 1 \rightarrow w > 1000 \end{cases}$$

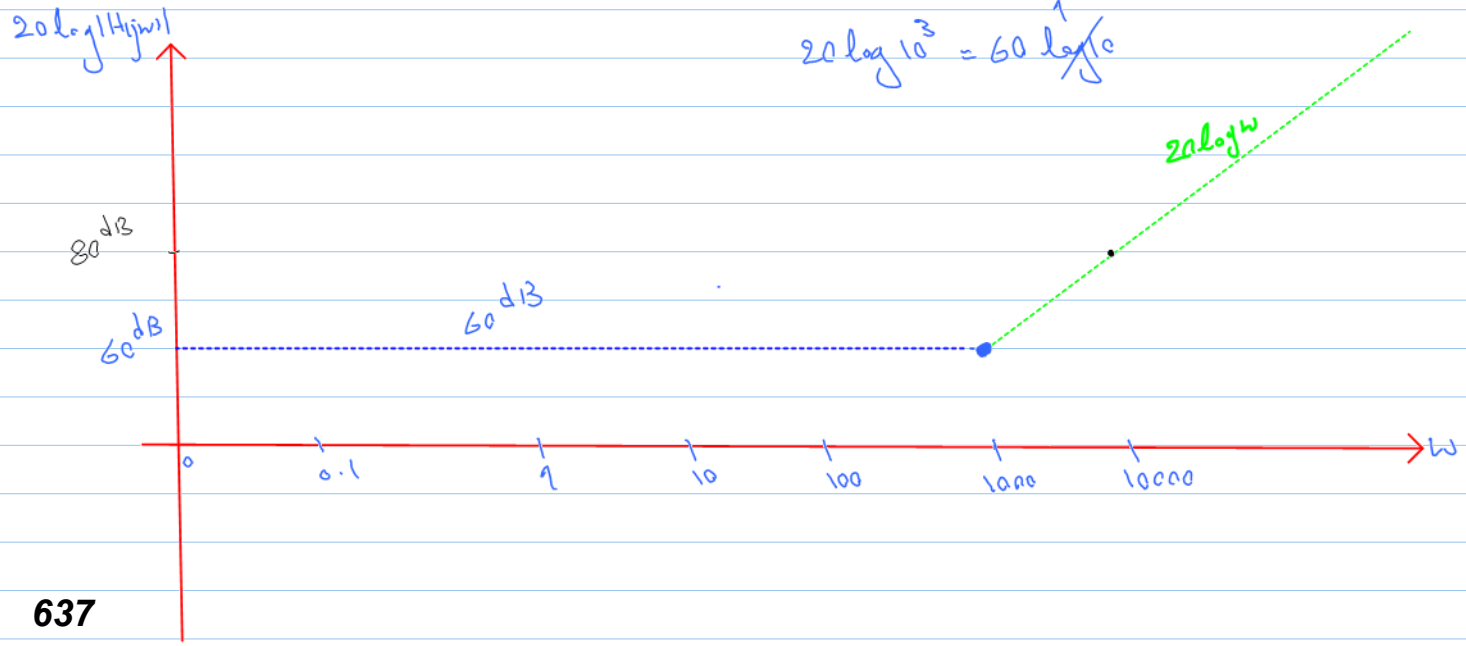
$$20\log|H(jw)| = \begin{cases} 60 + 10\log 1 & w < 1000 \\ 60 + 10\log\left(\frac{w}{1000}\right)^2 & w > 1000 \end{cases}$$

$20\log|H| = 60 + 10\log\left(\left(\frac{w}{1000}\right)^2 + 1\right)$

$60 + 10\log\left(\frac{w}{1000}\right)^2 = 60 + 20\log\frac{w}{1000} = 60 + 20\log w - 20\log 1000$

$= 20\log w$

$$20\log|H(jw)| = \begin{cases} 60 & w < 1000 \\ 20\log w & w > 1000 \end{cases}$$

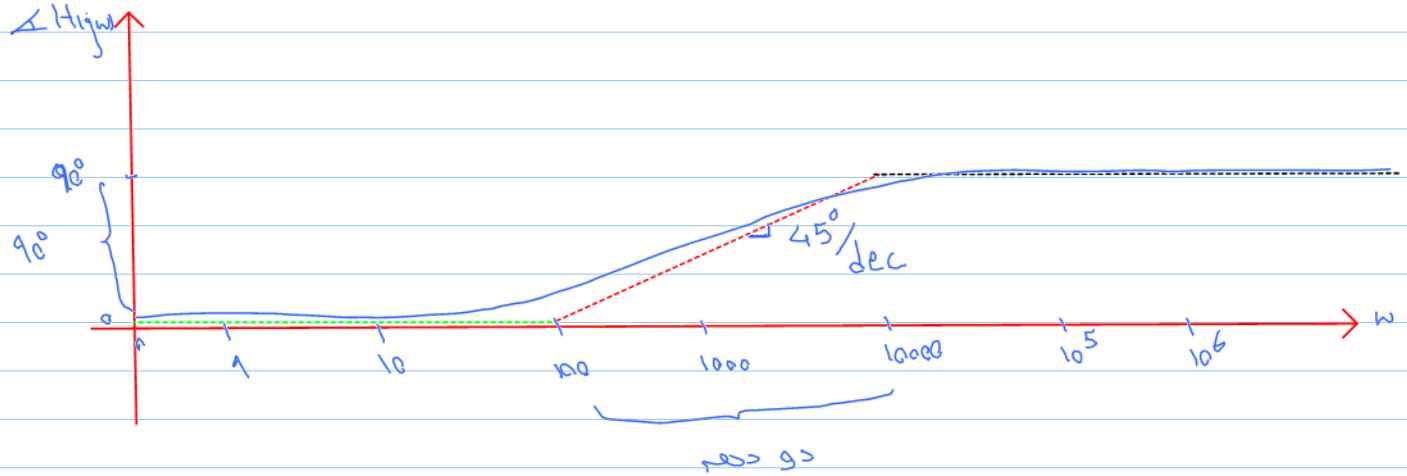


$20\log 10^3 = 60\log 10$

$$\begin{cases} a \gg b \rightarrow & a > 10b \\ a \ll b \rightarrow & a < \frac{b}{10} \end{cases}$$

$$\angle H(jw) = \tan^{-1}\left(\frac{w}{1000}\right) \simeq \begin{cases} \tan^{-1}(0) = 0^\circ & \frac{w}{1000} \ll 1 \rightarrow \frac{w}{1000} < \frac{1}{10} \\ \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ & \frac{w}{1000} \gg 1 \rightarrow \frac{w}{1000} > 10 \times 1 \end{cases}$$

$$\angle H(jw) = \begin{cases} 0 & w < 100 \\ 90^\circ & w > 10000 \end{cases}$$



$$F(s) = (s+10)(s+1000)$$

$$G(s) = s+10$$ بهره گذار

$$F(s) = G(s)\,H(s)$$

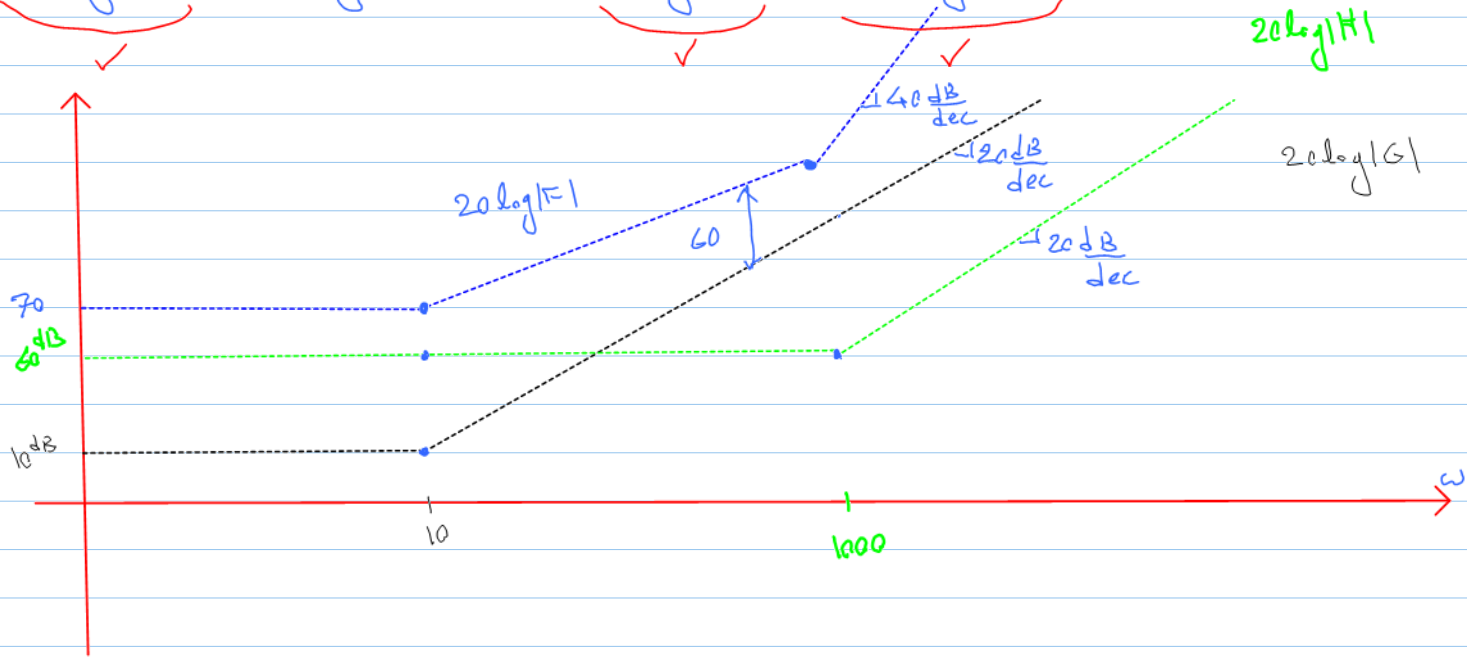
$$H(s) = s+1000$$ بهره گذار

$$F(jw) = G(jw)\,H(jw)$$

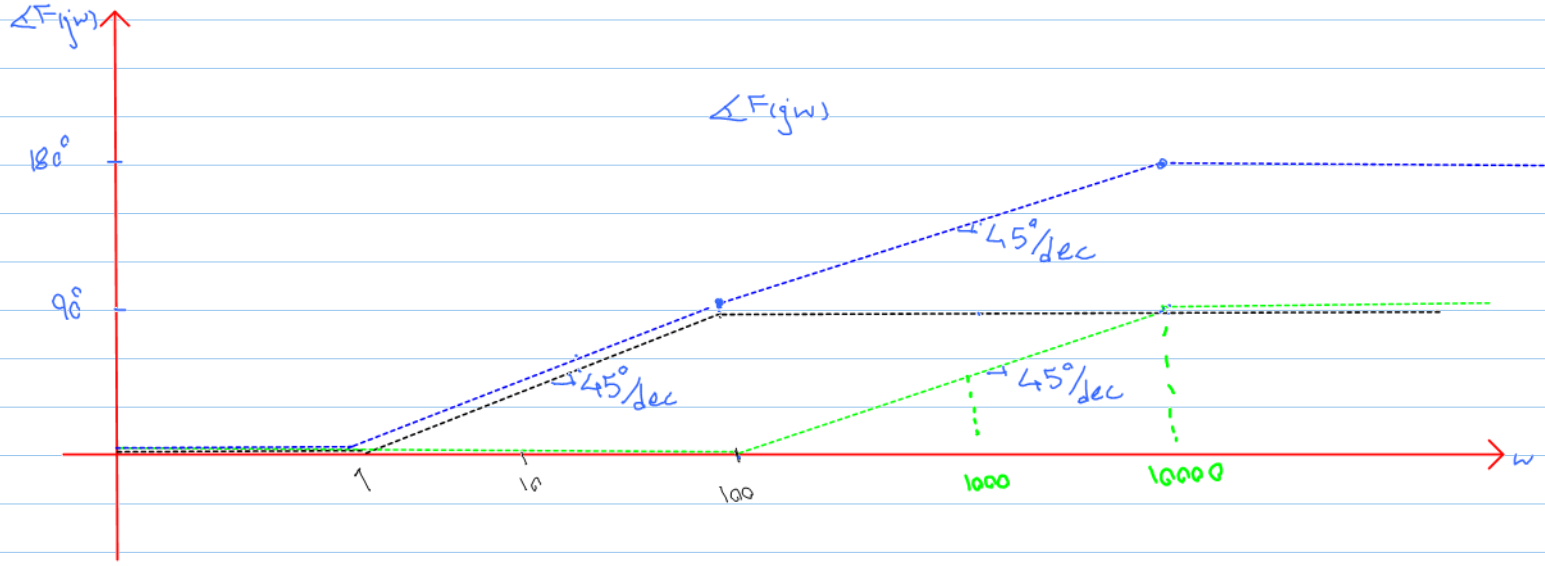
$$|F(jw)| = |G \times H| = |G|\,|H|$$

$$\angle F(jw) = \angle G \times H = \angle G + \angle H$$

$$20\log|F| = 20\log|G||H| = 20\log|G| + 20\log|H|$$



$$\angle F(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle H(j\omega)$$



نمودار بودی $F(j\omega)$ به راحتی از روی نمودار بودی $G(j\omega)$ و $H(j\omega)$ بدست آمد.

~ ~ هر تابع تبدیلی ~ ~ ~ ~ عوامل پایه ~ می‌آید.

چون عوامل پایه:

① بهره k:

$$G(s) = k$$

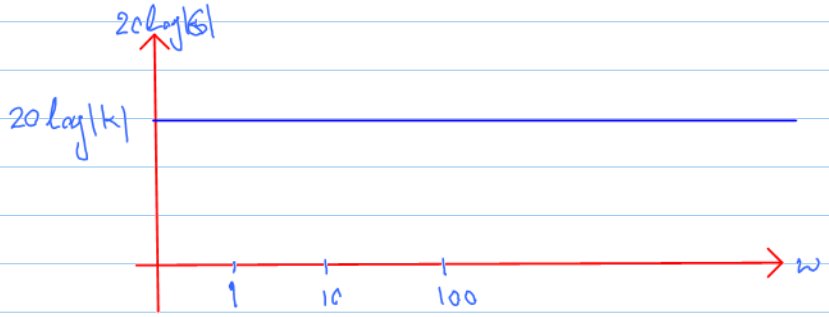
$20\log|G(j\omega)|$ ، $\angle G(j\omega)$

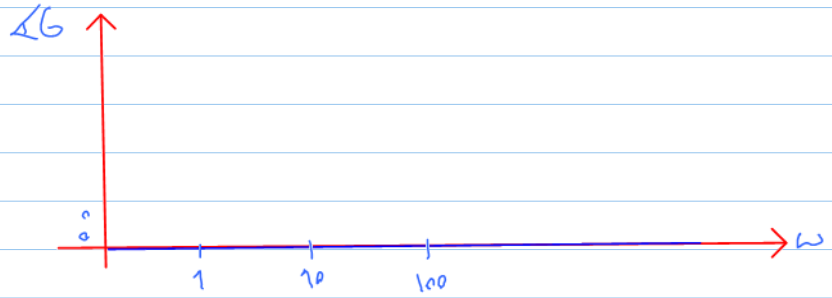
$$G(j\omega) = k \rightarrow |G(j\omega)| = |k| = |k|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle k = \begin{cases} 0 & k>0 \\ \pi & k<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20\log|G(j\omega)| = 20\log|k| \\ \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & k>0 \\ \pi & k<0 \end{cases} \end{cases}$$

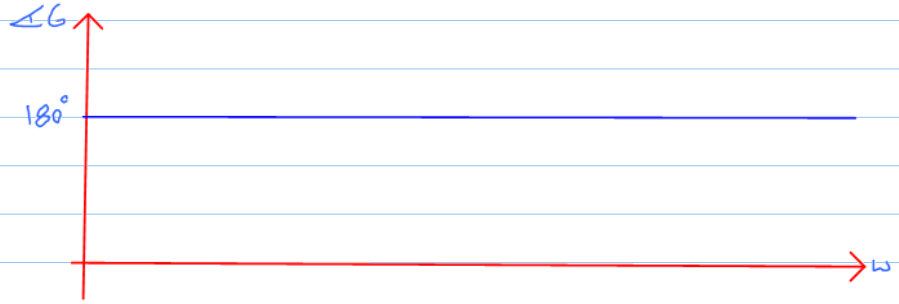
۱-۱- بهره ثابت k





۱-۲- بهره منفی k.





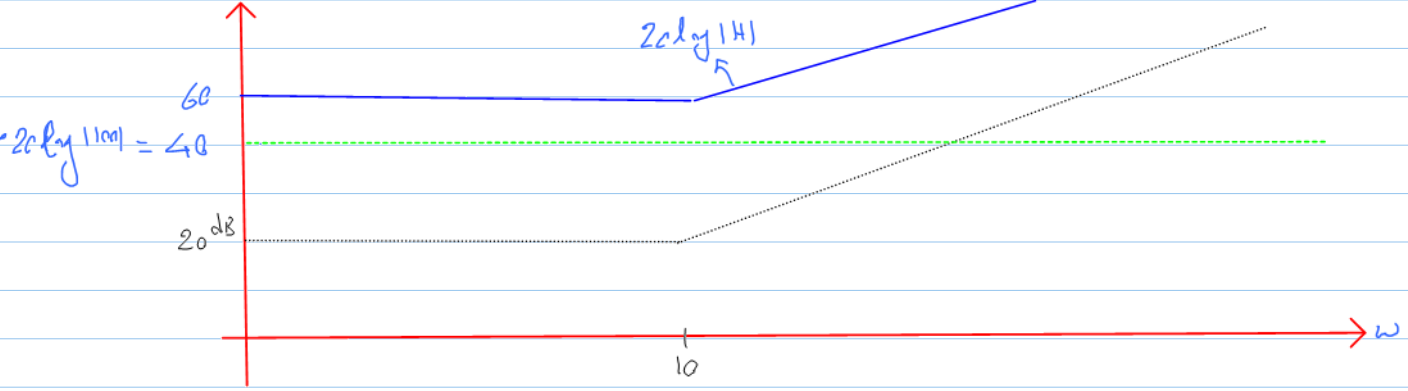
مثال. خودار بودی $H(s) = \frac{100}{k}(s+10)$

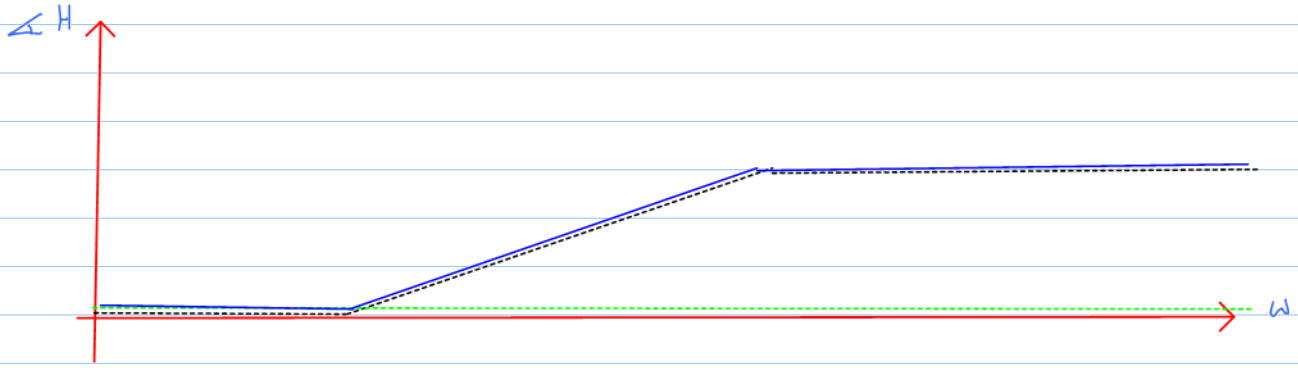
خودار $G(s) = s+10$ را سر کردیم.

$$H(j\omega) = \underbrace{100}_{k}\,(G(j\omega))$$

$$20\log|H| = \underbrace{20\log|100|}_{} + \underbrace{20\log|G|}_{}$$

$$\angle H = \underbrace{\angle 100}_{} + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{}$$



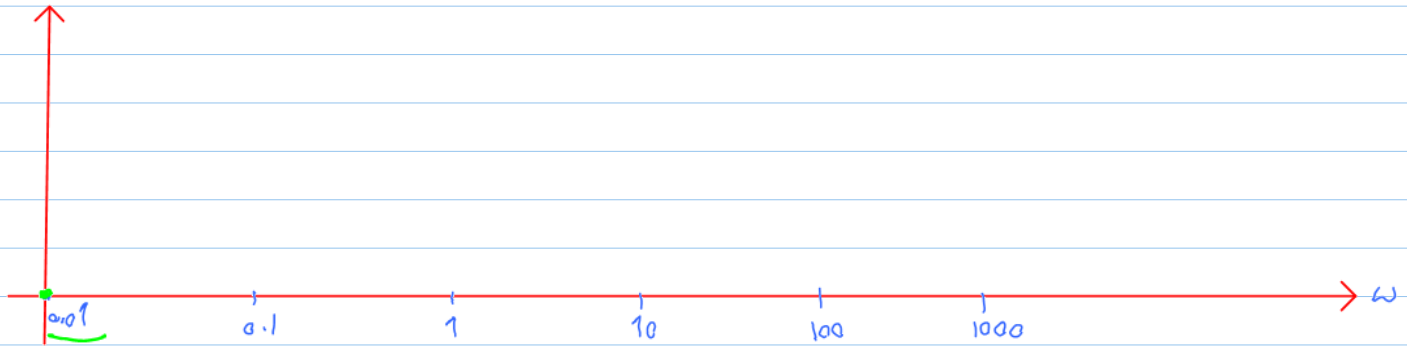


② صفر در مبدأ : $G(s) = s$ ←

$$G(jw) = jw \rightarrow |G(jw)| = w$$

$$\angle G(jw) = 90^\circ$$

$$\begin{cases} 20\log|G| = 20\log w \\ \angle G(jw) = 90^\circ \end{cases}$$



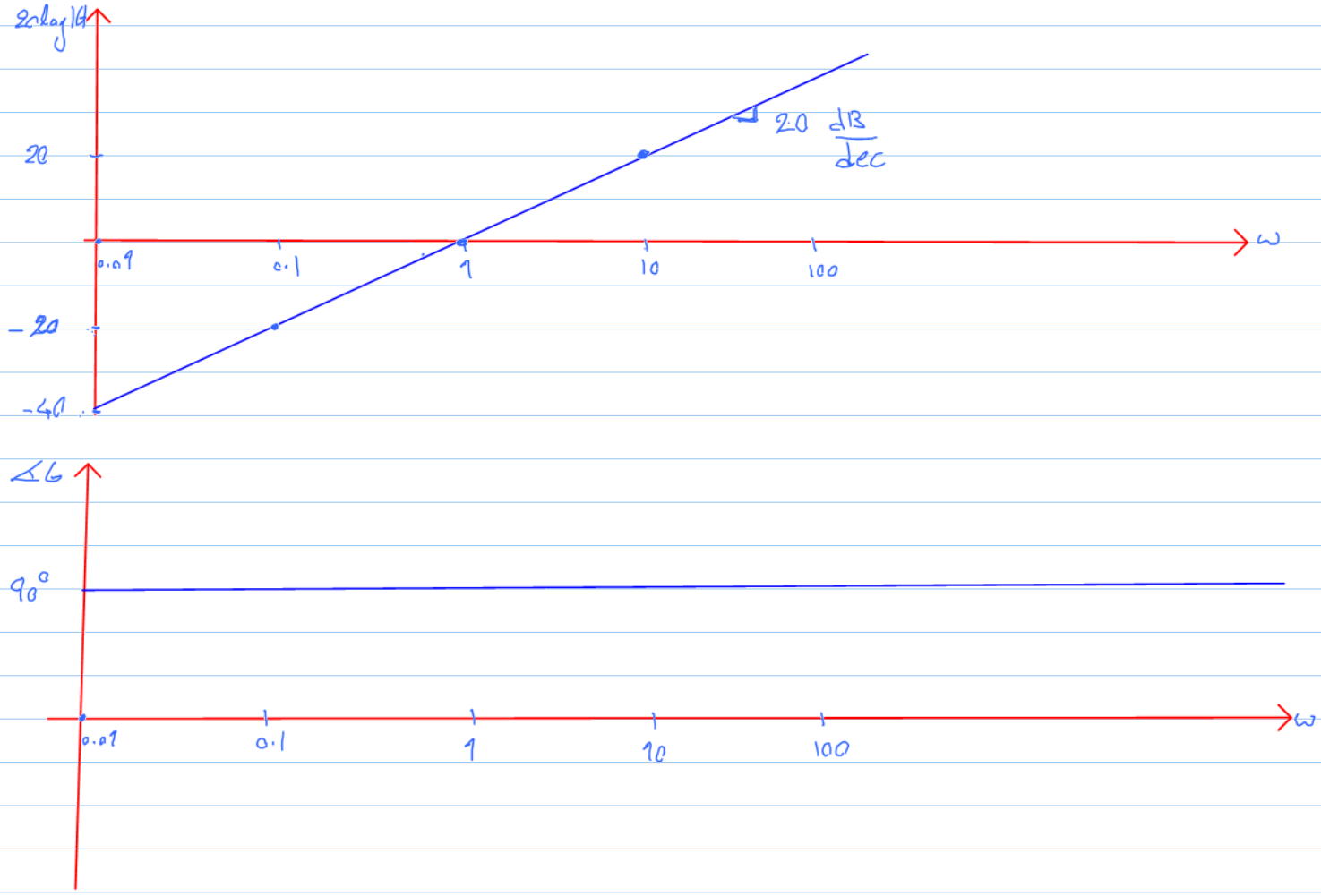
✗ $w = 0$ $\quad 20\log w = -\infty$ ✗

$w = 0.01$ $\quad 20\log 10^{-2} = -40\,dB$

$w = 0.1$ $\quad 20\log 10^{-1} = -20\,dB$

$w = 1$ $\quad 20\log 1 = 0\,dB$

نکته! هرگاه صفر در مبدأ داشته باشیم شور ω از عددی که جلوی غیرصفر شروع می‌شود

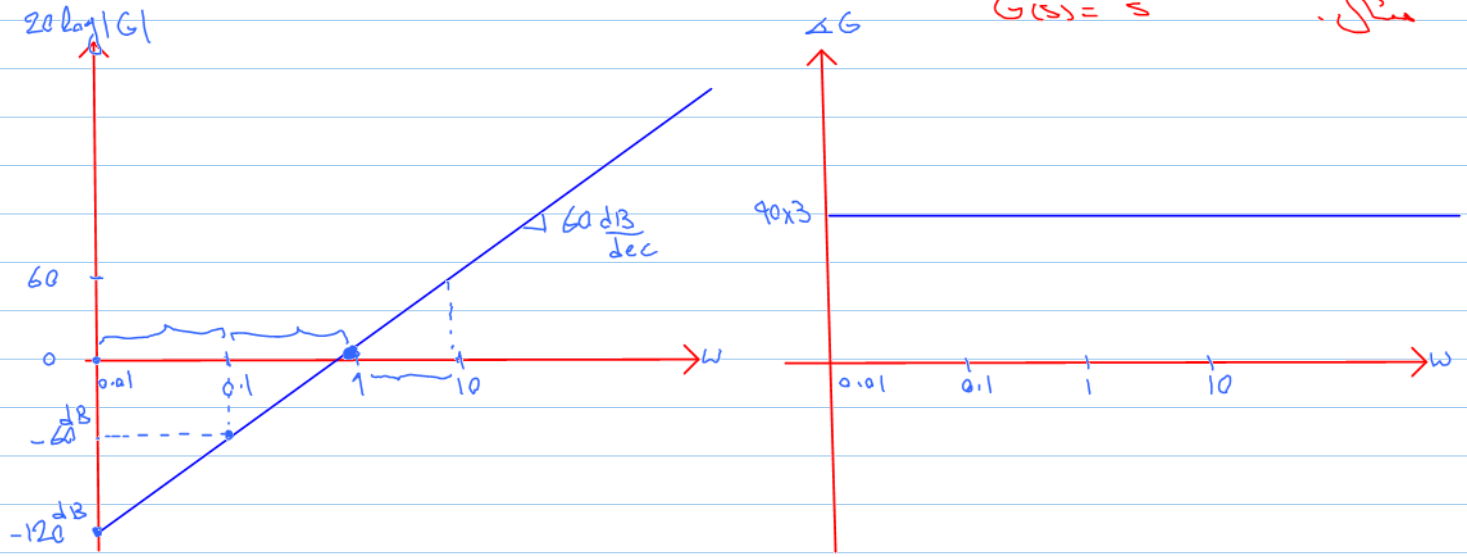


خلاصه عامل پایه صفر در مبدأ: (m تا صفر در مبدأ)

$G(s) = s^m$: نمودار اندازه خط با شیب $+\frac{20m\ dB}{dec}$

نمودار فاز خط ثابت روی $90 \times m\ ^\circ$

مثال. $G(s) = s^3$



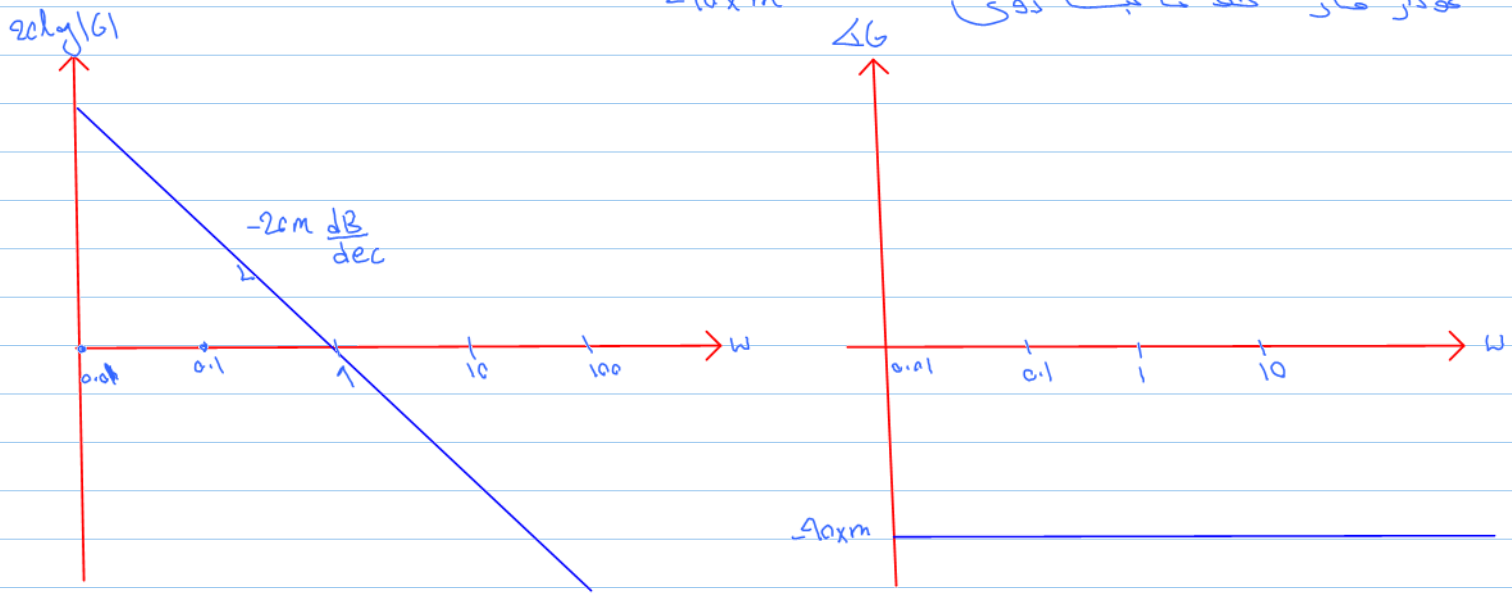
هر صفر در مبدأ، روی نمودار اندازه باعث شیب $+20\frac{dB}{dec}$

و روی فاز افزایش $+90^\circ$

③ قطب در مبدأ $G(s) = \frac{1}{s^m}$

نمودار اندازه خط با شیب ثابت $-20m \frac{dB}{dec}$

نمودار فاز خط ثابت روی $-90m^\circ$



نکته. هرگاه قطب در مبدأ داشتیم با شیب نمودار روی w از عددی شروع می‌شود که

$G(s) = s^m \rightarrow G(jw) = (jw)^m \rightarrow$

$H(s) = \frac{1}{s^m} = \frac{1}{G(s)} = (G(s))^{-1}$

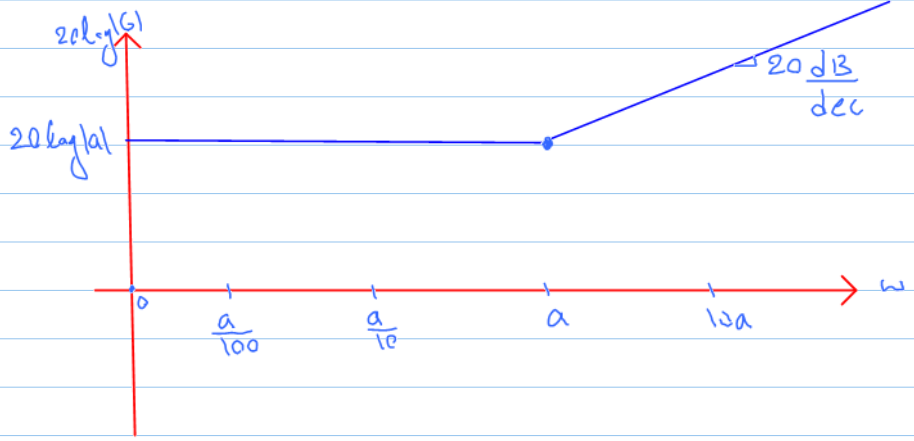
$20\log|H| = 20\log|G|^{-1} = -20\log|G|$

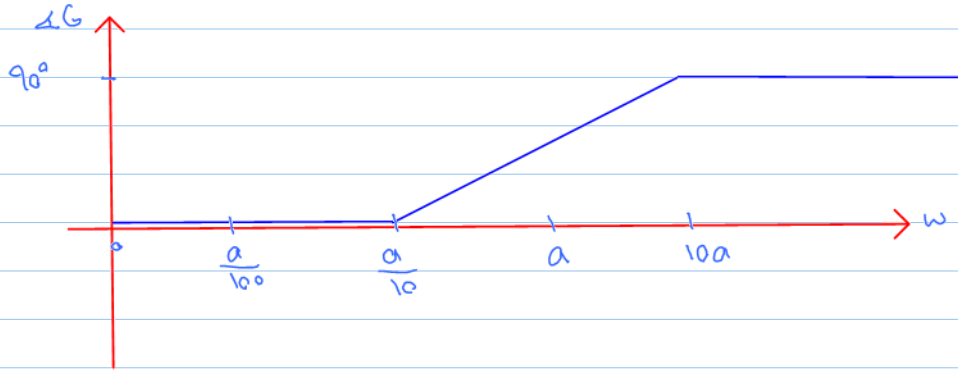
$\angle H = 0 - \angle G = -\angle G$

نکته. نمودار اندازه صفر و قطب در مبدأ به ازای هر کدام $w=1$ از 0dB عبور می‌کند.

④ صفر حقیقی مرتبه اول:

$G(s) = s+a$





$m \times 20\log|a|$ روی خط ثابت ← $w < |a|$

$+20m$ dB/dec خط با شیب ← $w > |a|$

← $G(s) = (s+a)^m$ نمودار اندازه

هر صفر در $s = -a$ قبل از فرکانس $|a|$ عدد ثابت و بدون آن باعث افزایش $+20$ dB/dec روی شیب آن شود.

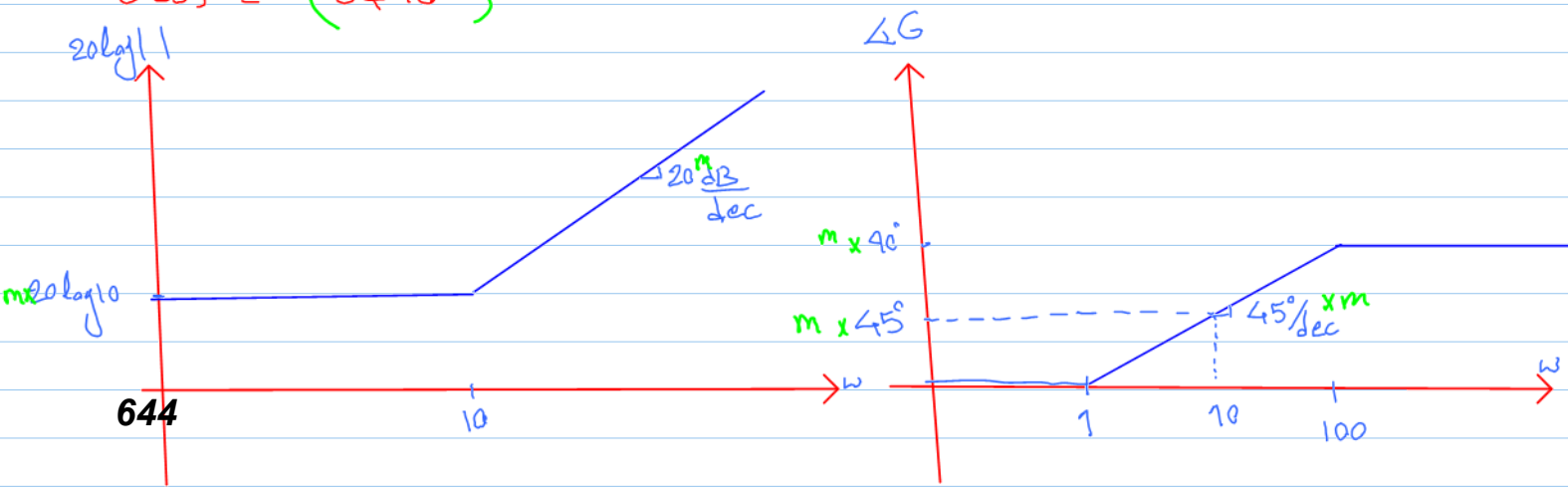
$w < \frac{|a|}{10}$ ← فاز ۰

$+45m$ °/dec خط با شیب ← $\frac{|a|}{10} < w < 10|a|$

$90m$ فاز ← $w > 10|a|$

← $G(s) = (s+a)^m$ نمودار فاز

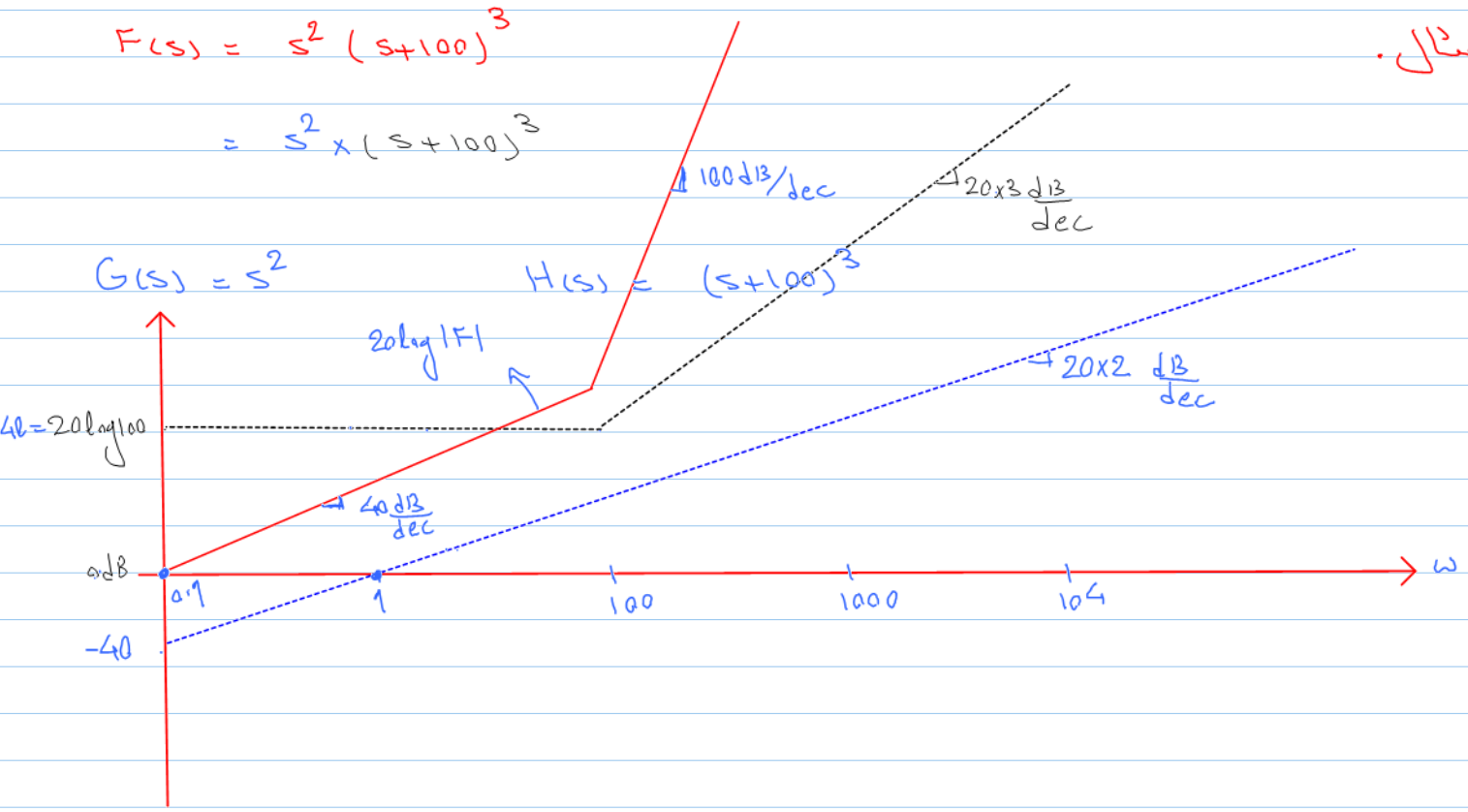
$G(s) = \left(s + \frac{a}{10}\right)^m$

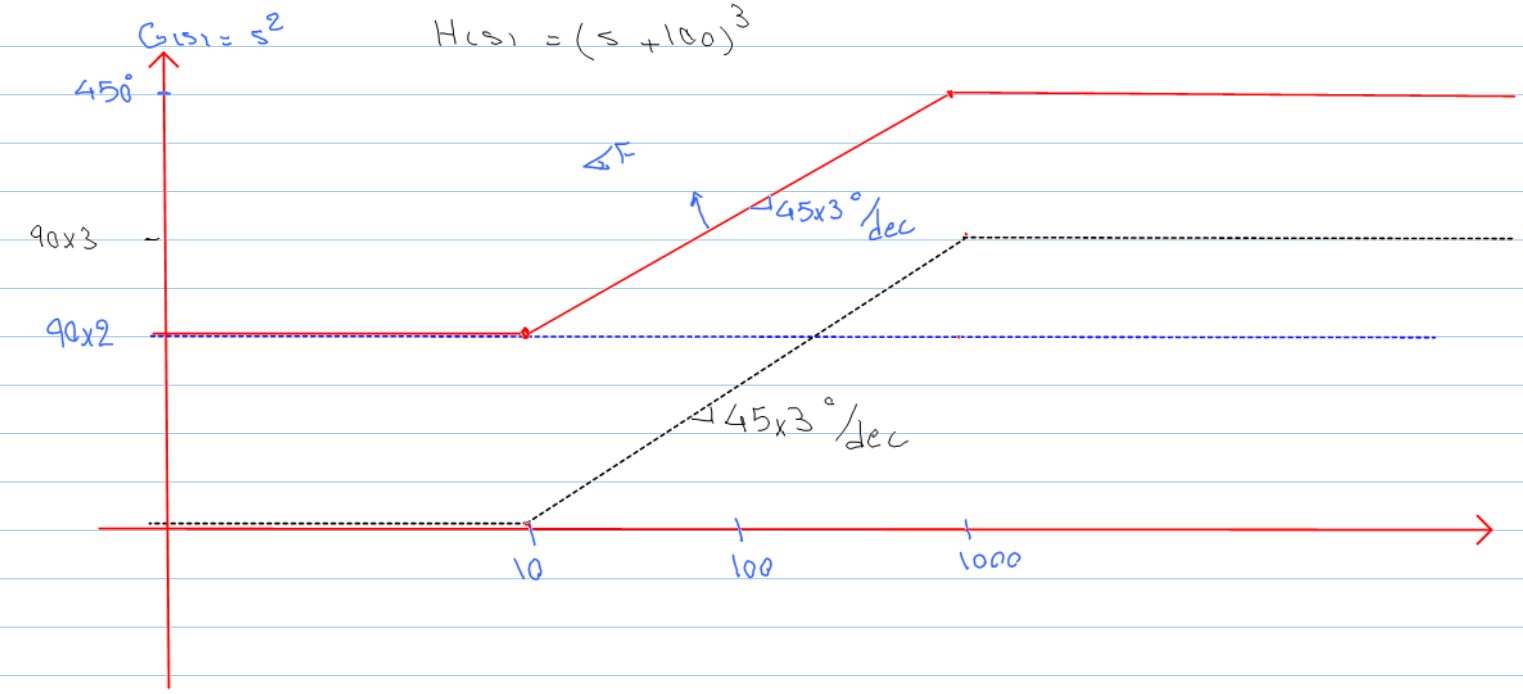


مثال

$F(s) = s^2 (s+100)^3$

$= s^2 \times (s+100)^3$



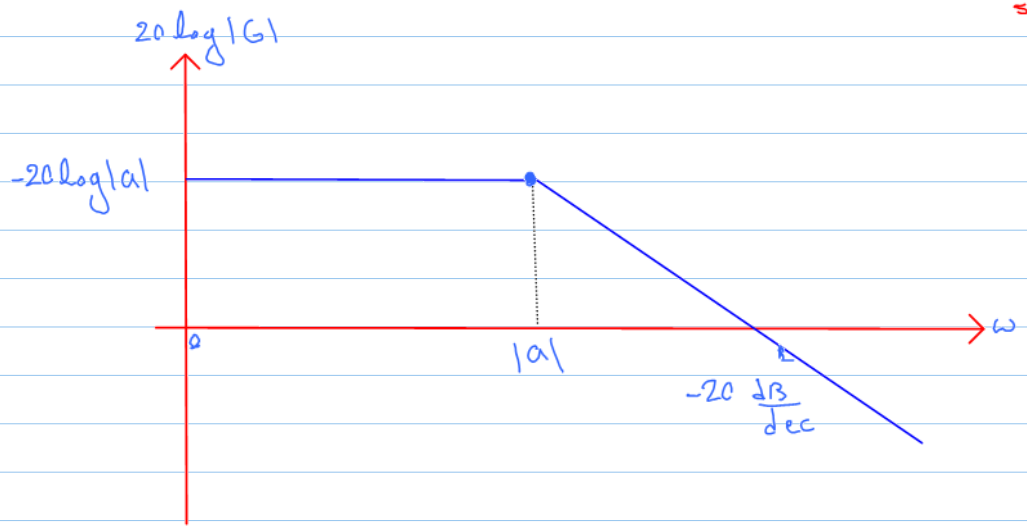


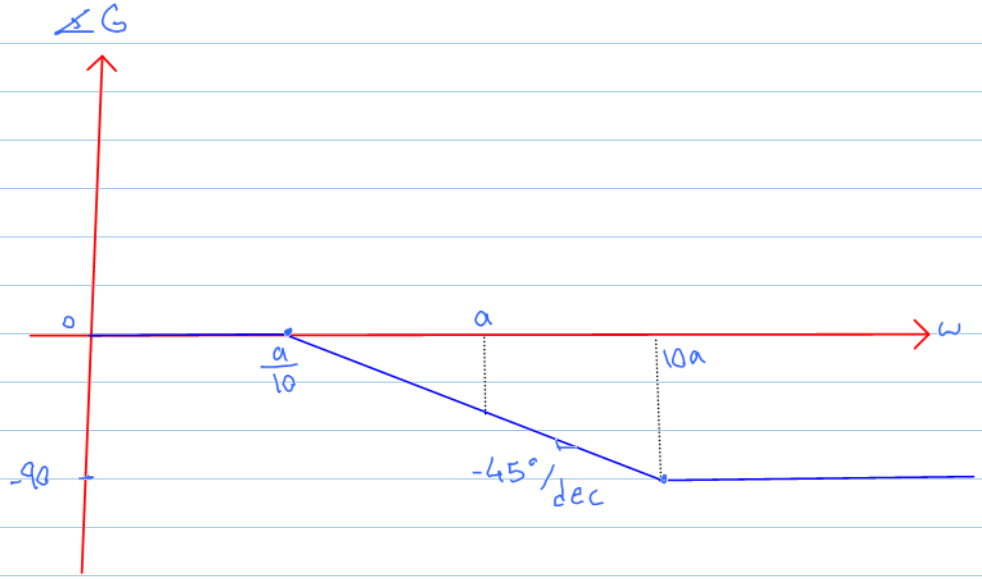
جلسه ۴۶ کنترل خطی

نمودار بودی

معرفی عوامل پایه:

⑤ قطب حقیقی: $G(s) = \frac{1}{s+a}$





قطب حقیقی: $G(s) = \frac{1}{(s+a)^m}$

در نمودار اندازه:
- $\omega < |a|$ ← خط با شیب صفر روی $m \times -20\log|a|$
- $\omega > |a|$ ← خط با شیب $-20m$ dB/dec

در نمودار فاز:
- $\omega < \frac{|a|}{10}$ ← فاز صفر
- $\omega > 10|a|$ ← فاز $-90m°$ (قطب سمت چپ) و یا $+90m°$ (قطب سمت راست)
- $\frac{|a|}{10} < \omega < 10|a|$ ← خط با شیب $\pm 45m°/dec$ (+ ← سمت راست، − ← سمت چپ)

فرکانس گوشه: فرکانسی که در آن بعد از فرکانس بالا و پایین نمودار اندازه به هم می‌رسند.

نکته: برای قطب‌ها و صفرهای حقیقی، فرکانس گوشه برابر قدرمطلق مقدار صفر یا قطب است.

$G(s) = \frac{1}{s+10} \rightarrow |-10|$ $\qquad G(s) = s+100 \quad |-100|$

$G(s) = \frac{1}{s-10} \rightarrow |10|$

روش رسم نمودار بودی

برای رسم نمودار بودی، تابع تبدیل را به عوامل پایه تجزیه می‌کنیم و مراحل زیر را طی می‌کنیم.

① نقطه شروع:

مود w: اگر صفر یا قطب در مبدأ داریم، مود w از مقداری غیر صفر و کوچک شروع می‌شود.

در غیر اینصورت مود w از ۱ شروع شده و به صورت گام‌هایی تقسیم‌بندی می‌شود.

نمودار اندازه: در نمودار اندازه، از نقطه $20\log|G(jw_0)|$ شروع می‌شود که w_0 نقطه شروع مود w است

نمودار فاز: نقطه شروع نمودار فاز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(I) صفر یا قطب در مبدأ نداریم. در این حالت $G(0)$ را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$G(0)$ حقیقی و مثبت $\rightarrow$ فاز اولیه $= 0$

$G(0)$ حقیقی و منفی $\rightarrow$ " " $= \pm 180$

$G(0)$ موهومی و مثبت $\rightarrow$ " " $= 90°$

$G(0)$ موهومی و منفی $\rightarrow$ " " $= -90°$

(II) اگر صفر یا قطب در مبدأ داریم: ابتدا $\bar{G}(s)$ را محاسبه می‌کنیم که $G(s)$ بدون صفرها یا قطب‌های در مبدأ است. سپس $\bar{G}(0)$ را محاسبه می‌کنیم و فاز اولیه $\bar{G}(0)$ را طبق حالت (I) بدست می‌آوریم.

فاز اولیه کلی $G(s)$ = فاز اولیه $\bar{G}(0)$ + $-90 \times$ تعداد قطب در مبدأ + $90 \times$ تعداد صفر در مبدأ

② شیب اولیه: شیب اولیه نمودار اندازه برابر است با:

شیب اولیه اندازه = 20+ × (تعداد قطب‌ها در مبدا − تعداد صفرها در مبدا)

شیب اولیه نمودار فاز همواره صفر است.

③ فرکانس گوشه: فرکانس‌های گوشه را هل صفرها و قطب‌ها را روی محور ω مشخص کنید.

④ تأثیر صفرها و قطب‌ها:

نمودار اندازه: تأثیر هر صفر روی نمودار اندازه اضافه شدن +20 dB/dec به شیب نمودار است.

" " " " قطب " " " -20 dB/dec " " " "

تأثیر قطب‌ها و صفرها روی نمودار اندازه در فرکانس گوشه شروع شده و پس از آن ادامه دارد.

نمودار فاز: هر صفر چپ‌گرد روی نمودار فاز اضافه شدن +90° به فاز با شیب +45°/dec است.

هر صفر راست " " " " -90° " " " -45°/dec "

هر قطب چپ‌گرد " " " " -90° " " " -45°/dec "

هر قطب راست " " " " +90° " " " +45°/dec "

تأثیر صفرها و قطب‌ها روی نمودار فاز از هل یک دهم فرکانس گوشه شروع شده و در ده برابر فرکانس گوشه عادی شود.

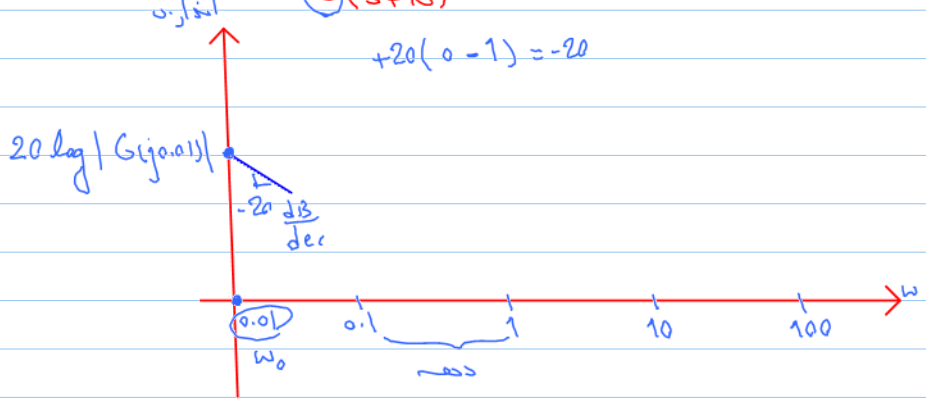
1) $G(s) = \frac{s+10}{s(s+10^4)}$

2) $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)}$

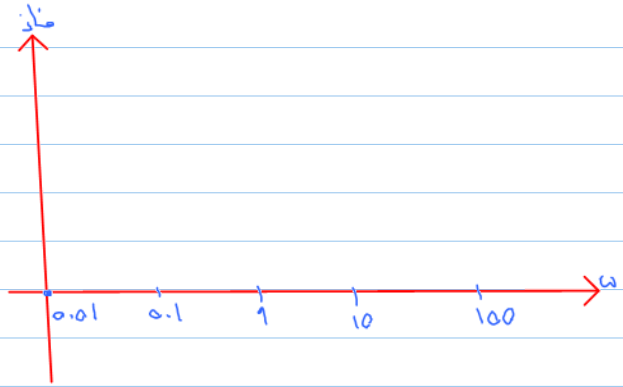
3) $G(s) = \frac{s(s+20)^2}{(s+100)^3}$

4) $G(s) = -2\,\frac{s+100}{s(s+10)}$

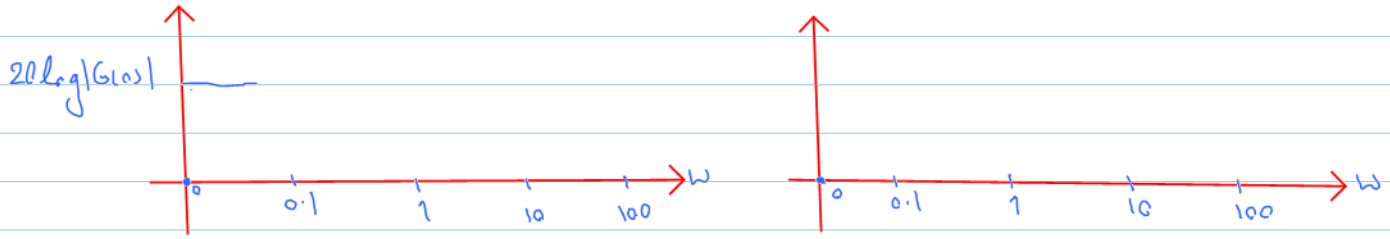
$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$



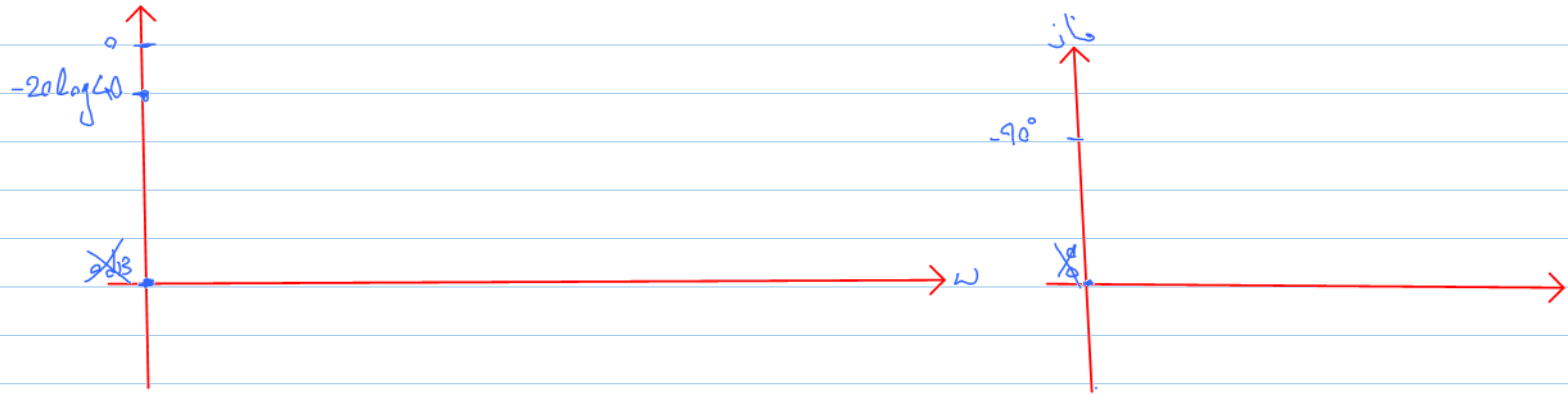
$$G(s) = \frac{s}{s+20}$$



$$G(s) = \frac{s+10}{(s+20)^2} \qquad 20(0-0) = 0$$



$$20\log|G(0)| = 20\log\left|\frac{10}{400}\right| = 20\log\frac{1}{40} = -20\log 40$$



$$G(s) = \frac{-10}{s+10} \qquad G(0) = \frac{-10}{10} = -1 \longrightarrow \text{مقدار زاوية} = \pm 180°$$

$$G(s) = \frac{j10}{s+2} \qquad G(0) = \frac{j10}{2} = j5 \longrightarrow \text{مقدار زاوية} = +90°$$

$$G(s) = \frac{10s(s-1)}{(s+20)^2} \qquad \tilde{G}(s) = \frac{10(s-1)}{(s+20)^2}$$

$\tilde{G}(0) = \frac{10 \times -1}{400} = -\frac{1}{40} \rightarrow \tilde{G}$ زاوية $= \pm 180^\circ$

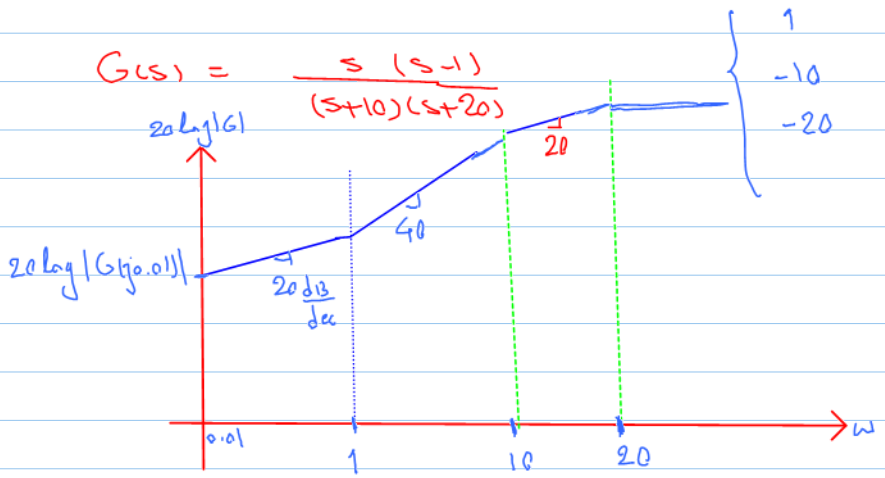
G زاوية $= +180^\circ + 0 \times -90 + 1 \times +90 = 270^\circ$

$G(s) = \frac{s(s-1)}{(s+10)(s+20)}$

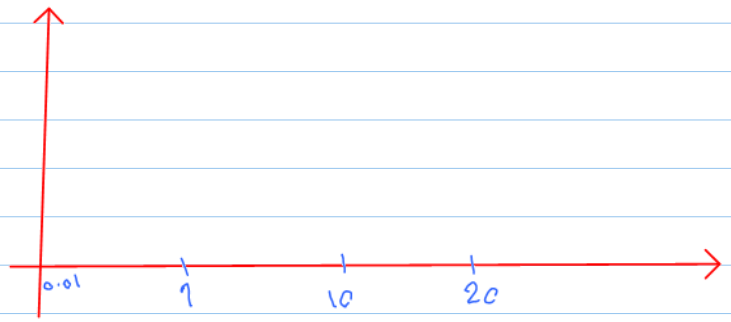
صفر 1

-10

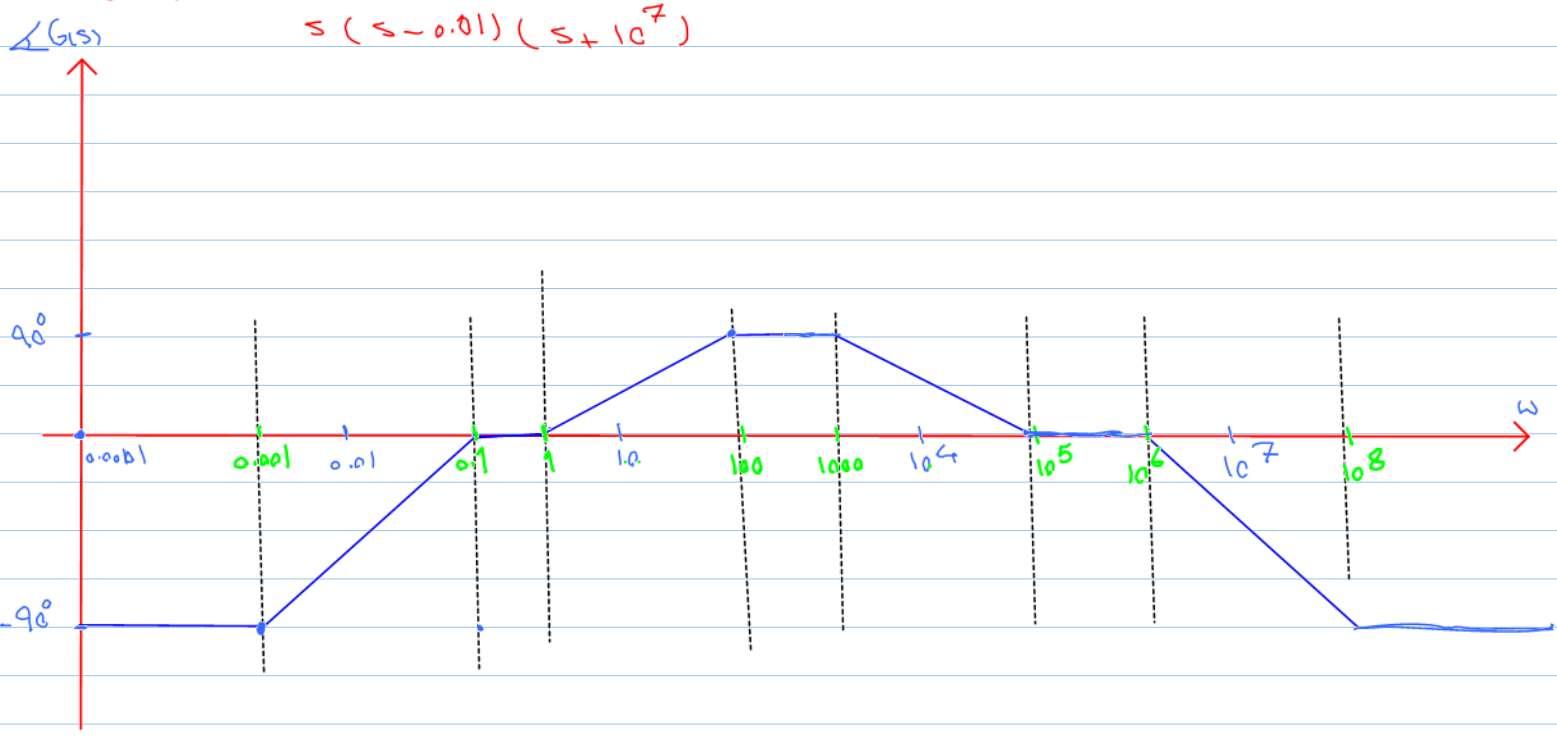
-20



سيب اوية $= 20(1-0) = +20$ dB/dec



$G(s) = \frac{(s+10)(s-10^4)}{s(s-0.01)(s+10^7)}$



$s = 0$ قطب

$s = 0.01$ قطب راست

$s = -10$ صفر

$s = 10^4$ صفرات

$s = -10^7$ قطب

$$\tilde{G}(s) = \frac{(s+10)(s-10^4)}{(s-0.01)(s+10^7)}$$

حوزه وسیع $\tilde{G}(0) = \frac{10 \times -10^4}{-0.01 \times 10^7}$

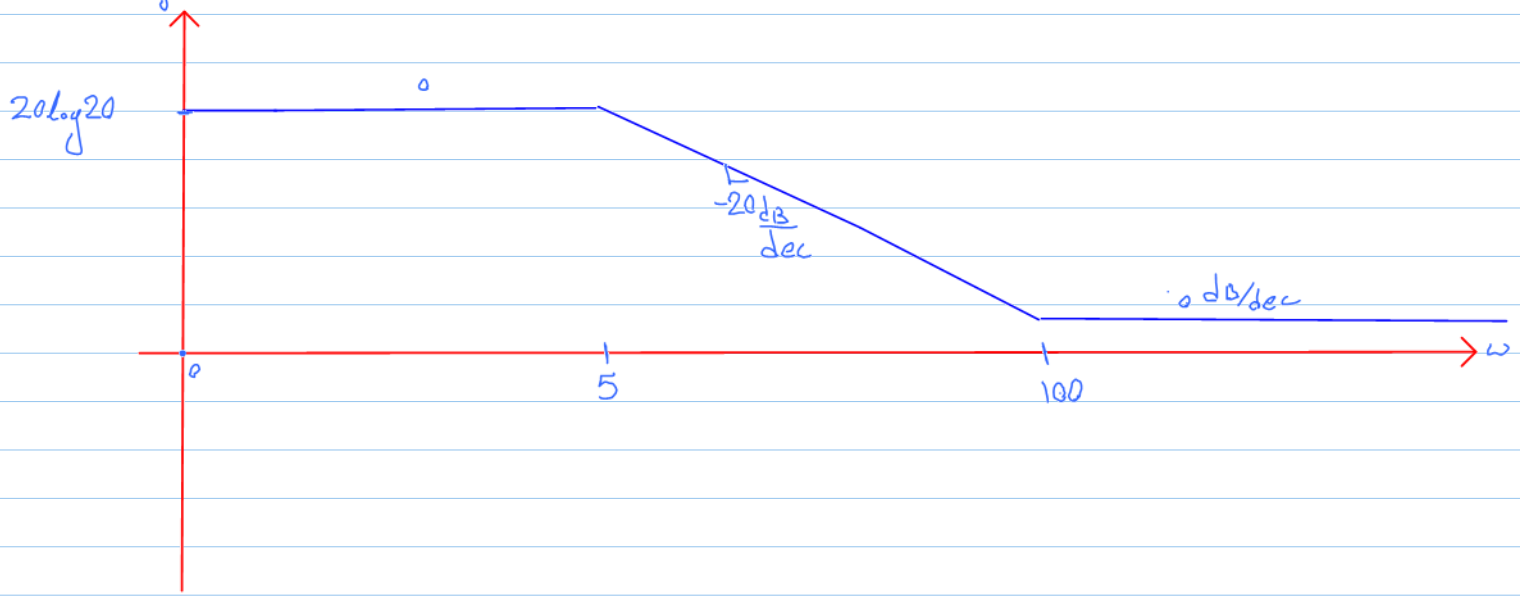
$\tilde{G}$ زاویه $= 0$

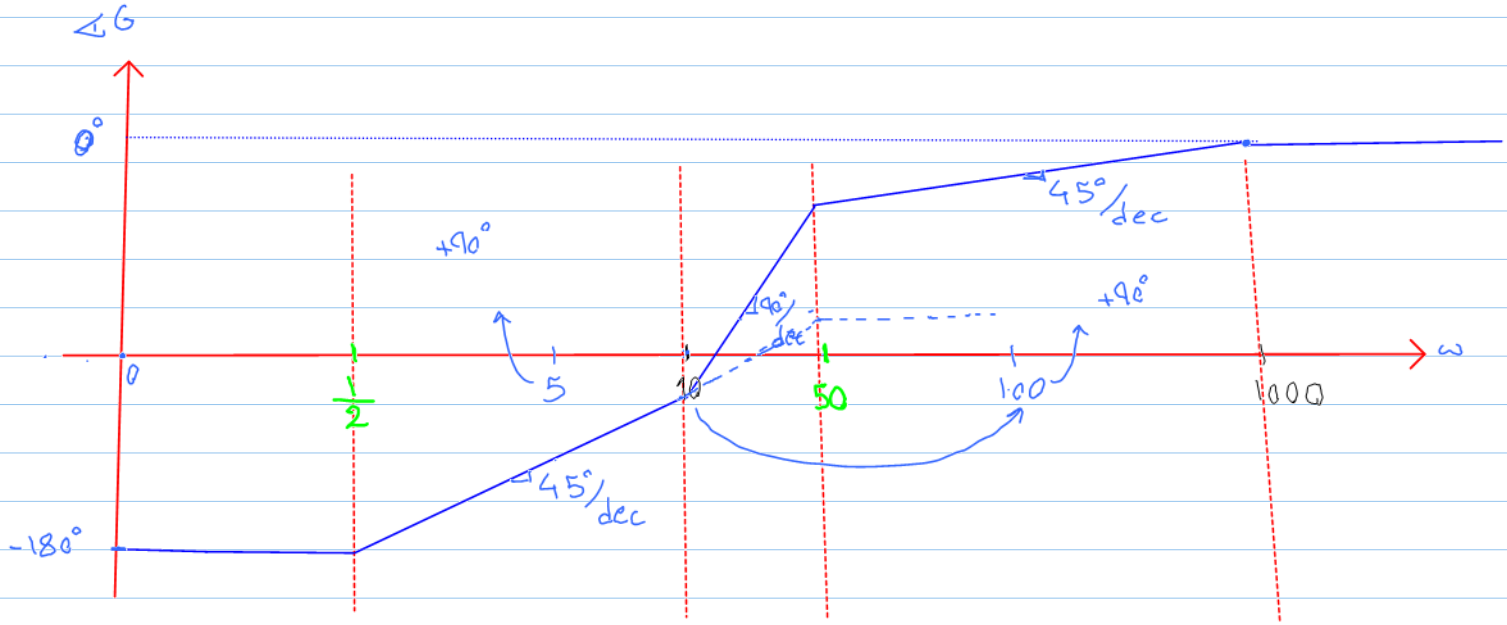
G زاویه $= 0 + 1 \times -90 + 0 \times 90 = -90^\circ$

نمودار بودی توابع تبدیل زیر را رسم کنید.

1) $G(s) = \frac{s+100}{s-5}$ →
- -100 صفر
- 5 قطب

$20\log|G|$





① نقطه شروع → اندازه $= 20\log|G(0)| = 20\log\left|\frac{100}{-5}\right| = 20\log 20$

فاز اولیه $= \pm 180°$

$G(0) = \frac{100}{-5}$ → حقیقی و منفی

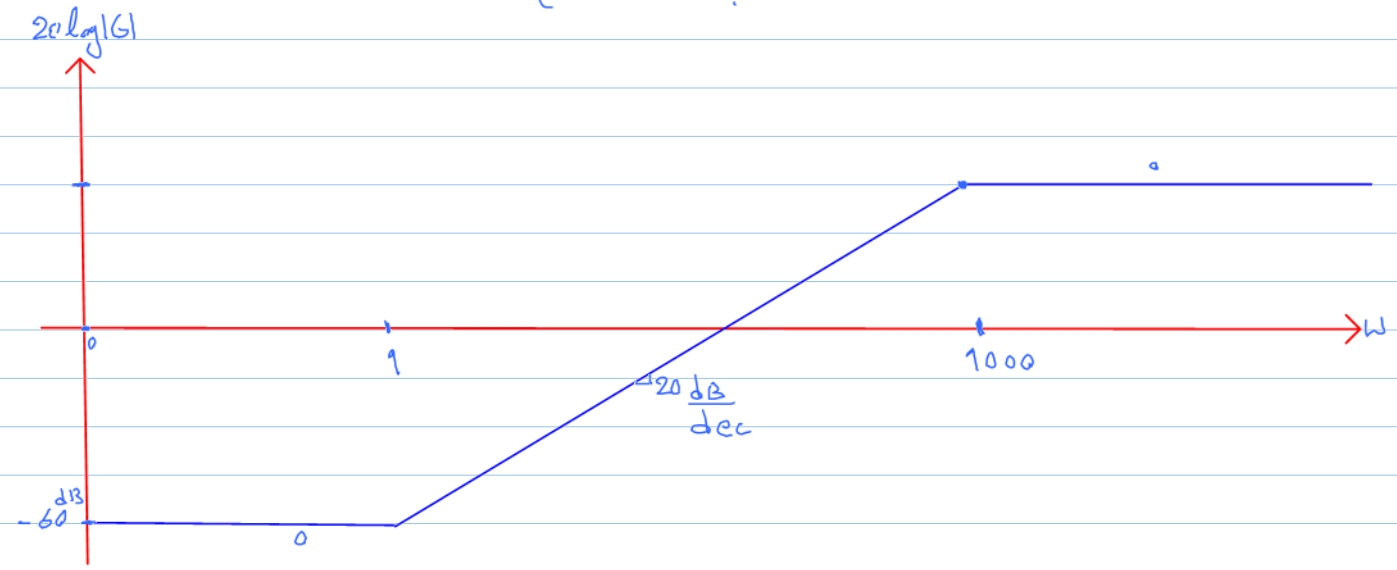
② سيب اوميه انلزه ← سيب اوميه = 20 (0 − 0) = 0

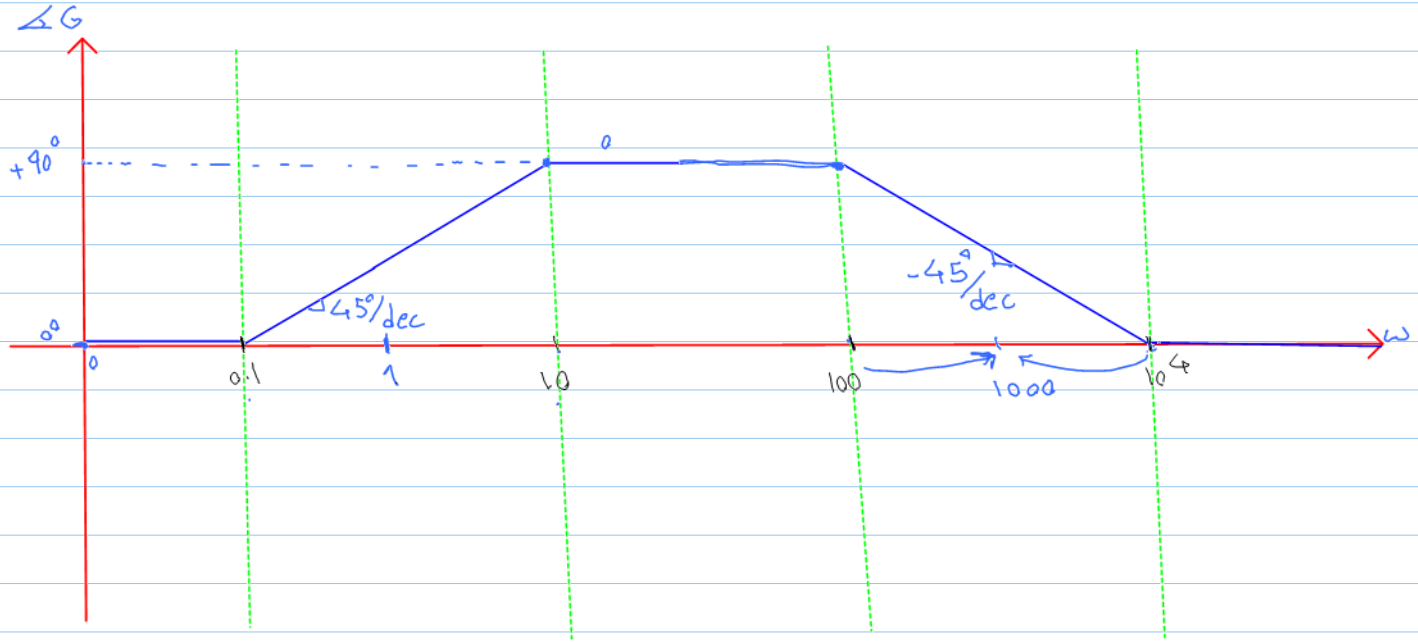
فاز ~ ~ = 0

فازهاي = مأثر قطبا + مأثر صفرا + فاز اوميه

~ ~ = −180 + +90 + 90 = 0

2) $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+1000)}$ → صفر −1 ، قطب −1000





نقطة شروع انلزه = 20 log |G(0)| = 20 log |(0+1)/(0+1000)| = 20 log 10^-3 = −60 dB/dec

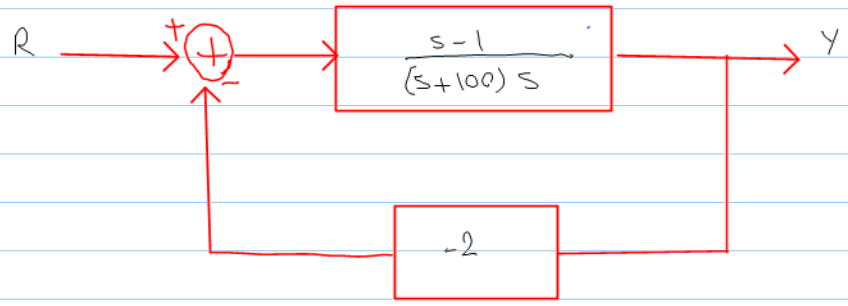
فاز اوميه = 0° ← حقيقي وسيب ← $\frac{1}{1000}$ = زمن

② سیب اولیہ اندازہ = 20 x (0 - 0) = 0

جلسه 47 کنترل خطی

نمودار بودی

مثال: نمودار بودی سیستم زیر را رسم کنید.



* اگر صورت سوال دقیقاً مشخص نکرده حلقه باز است یا حلقه بسته، نمودار بودی تابع تبدیل حلقه باز رسم می‌کنیم.

$$L(s) = -2\,\frac{(s-1)}{s(s+100)}$$

① چون قطب در مبدا داریم فقط ω از عدد کوچک و غیر صفر شروع می‌شود

نقطه شروع اندازه: $L(j\omega) = -2\,\frac{j\omega - 1}{j\omega(j\omega+100)}$

$$20\log|L(j0.01)| = ? \quad 20\log 2$$

$$L(j0.01) = -2\,\frac{(j0.01 - 1)}{j0.01\,(j0.01+100)} \simeq \frac{2}{j1} = \frac{2}{j}$$

$$|L(j0.01)| = \frac{|2|}{|j|} = \frac{2}{1} = 2$$

نقطه شروع فاز: $\tilde{G}(s) = -2\,\frac{(s-1)}{(s+100)} \rightarrow \tilde{G}(0) = -2\,\frac{(0-1)}{0+100} = \frac{2}{100}$ همیشه و مثبت

فاز اولیه $\tilde{G} = 0$

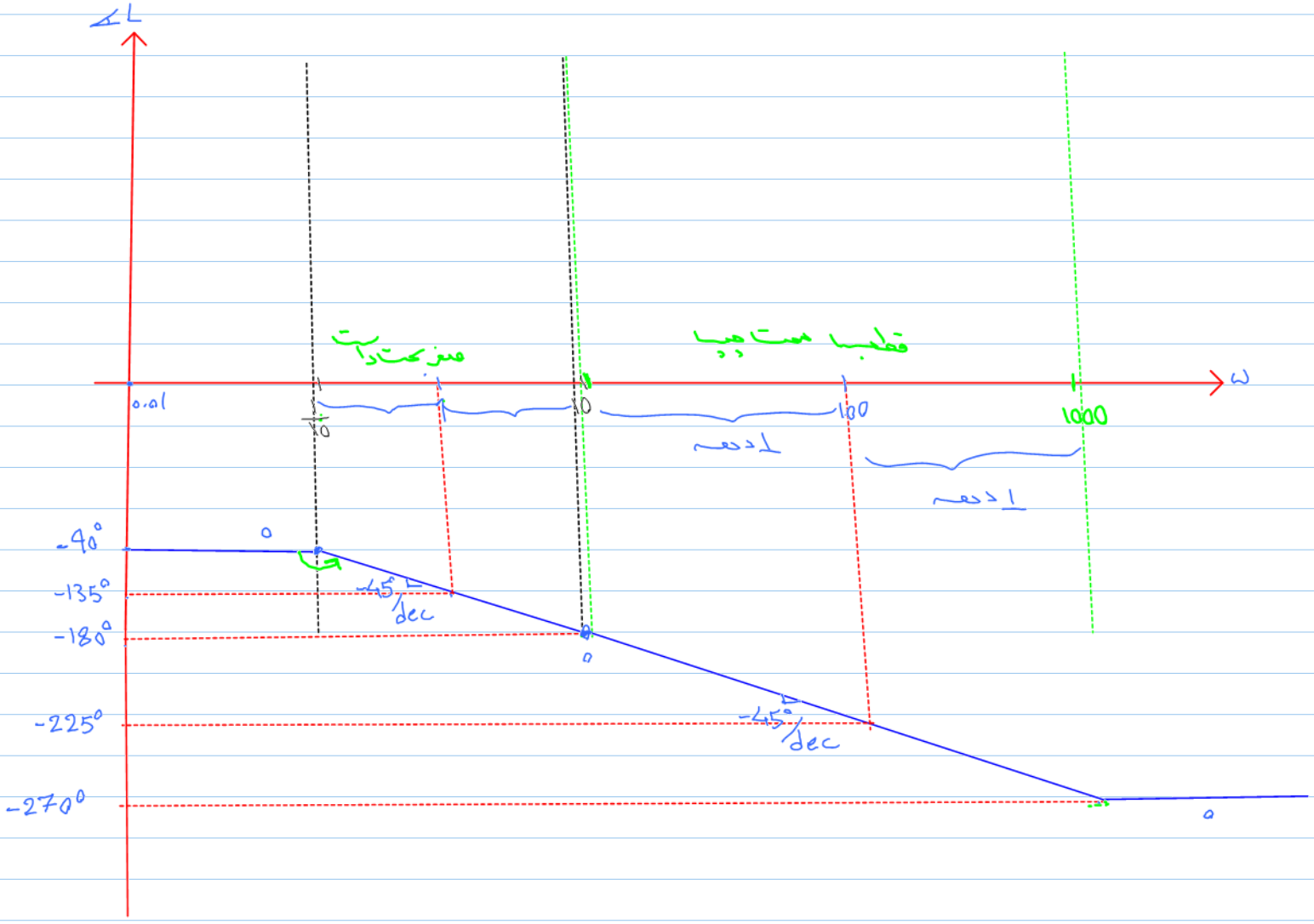
نقطه شروع فاز $= 0 + 1\times(-90) + 0\times 90 = -90^\circ$

③
- 1 — صفر حقیقی راست
- -100 — قطب حقیقی
- 0 — قطب در مبدا

⑤ سیب اویه → اندازه = $20 \times (0 - 1) = -20 \frac{dB}{dec}$

فاز = 0


20log|L|
20log2
-20
0.01
1
100
ω
صفر اضافه شده
قطب اضافه شده
0
-20


∠L
صفر بحث درست
قطب مست جیب
0.01
1/10
1
10
100
1000
ω
1 دهه
1 دهه
-90°
-135°
-180°
-225°
-270°
-45°/dec
-45°/dec
0
0
0

مثال: نمودار بودی سیستمی که دارای فیدبک واحد منفی بوده و تابع تبدیل حلقه بسته آن به شکل زیر است را رسم کنید.

$$T(s) = \frac{s+10}{s^2+101s+10}$$

$$G(s) = \frac{s+10}{s^2+100s} = \frac{s+10}{s(s+100)}$$

① نقطه شروع → $\omega : 0.01$

اندازه: $20\log|G(j0.01)| = 20\log\left|\frac{j0.01+10}{j0.01\times(j0.01+100)}\right| = 20\log 10 = 20\,dB$

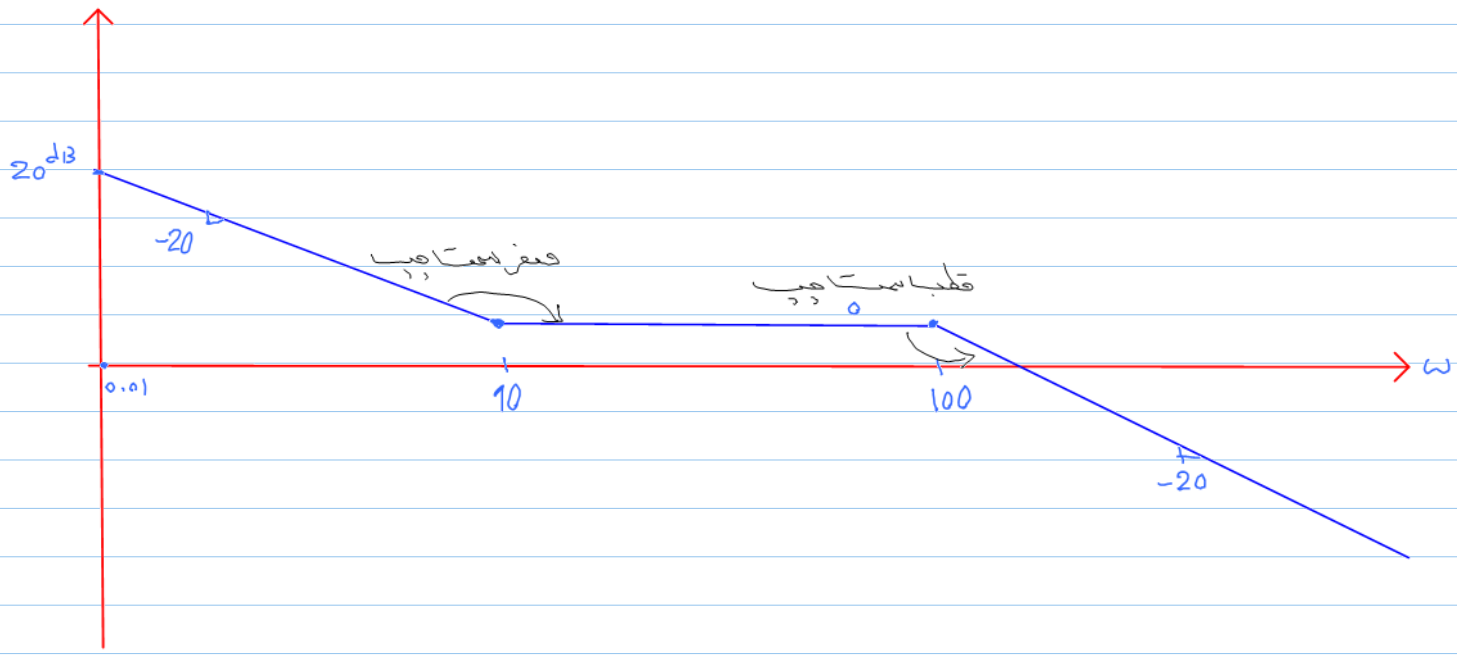
فاز: $\angle G(0) + 1\times 90^\circ + 0\times 90 = 0 + 1\times -90 = -90^\circ$

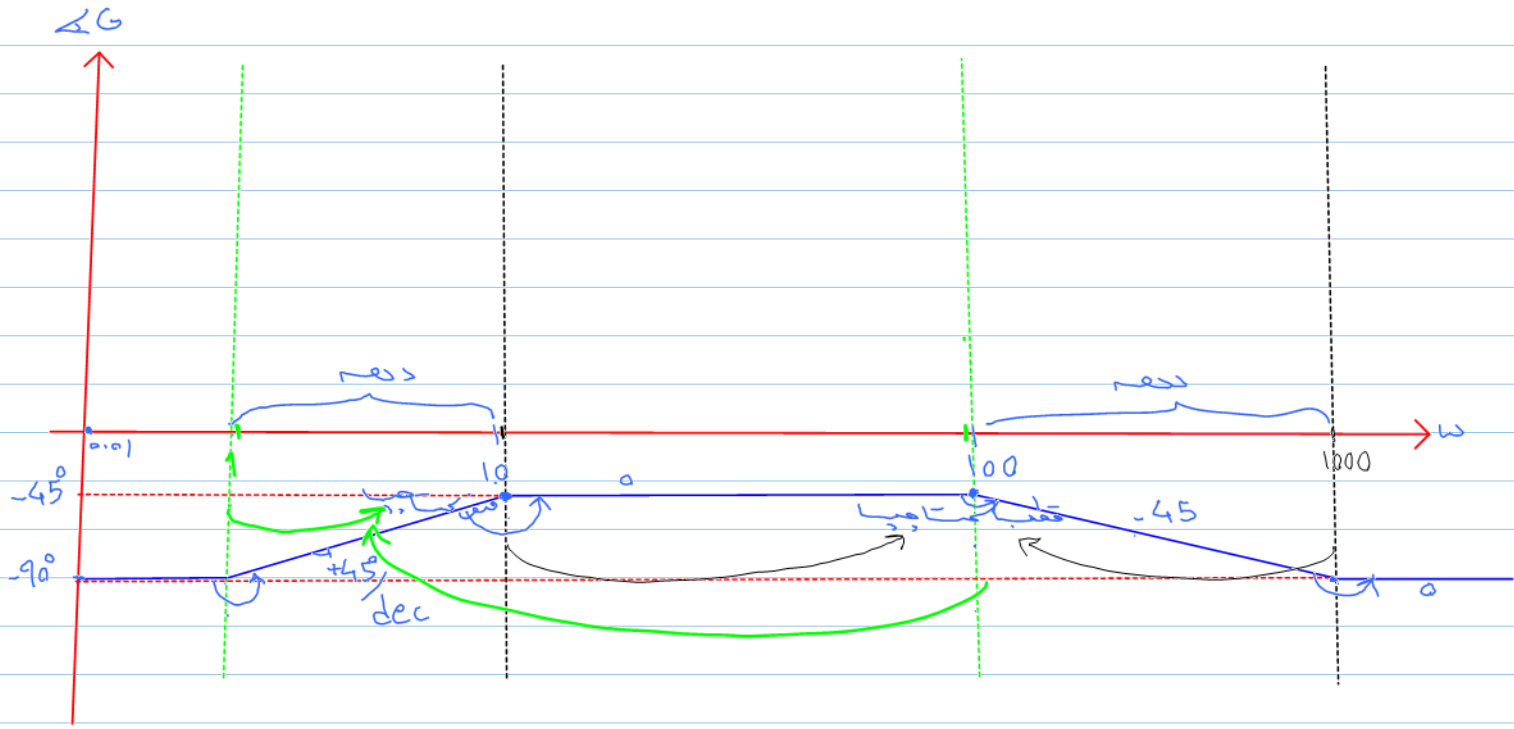
$$G(s) = \frac{s+10}{s+100} \rightarrow G(0) = \frac{10}{100}$$ حقیقی و مثبت

② مکان های شکست: 0 قطب، -10 صفر، -100 قطب

③ شیب اولیه: اندازه $= 20(0-1) = -20\ \frac{dB}{dec}$

فاز $= 0$





خط بین اول مرکزی انجام دهیم و خط بین دوم را مستقیم (عکس هر خط بین اول را انجام می دهیم.

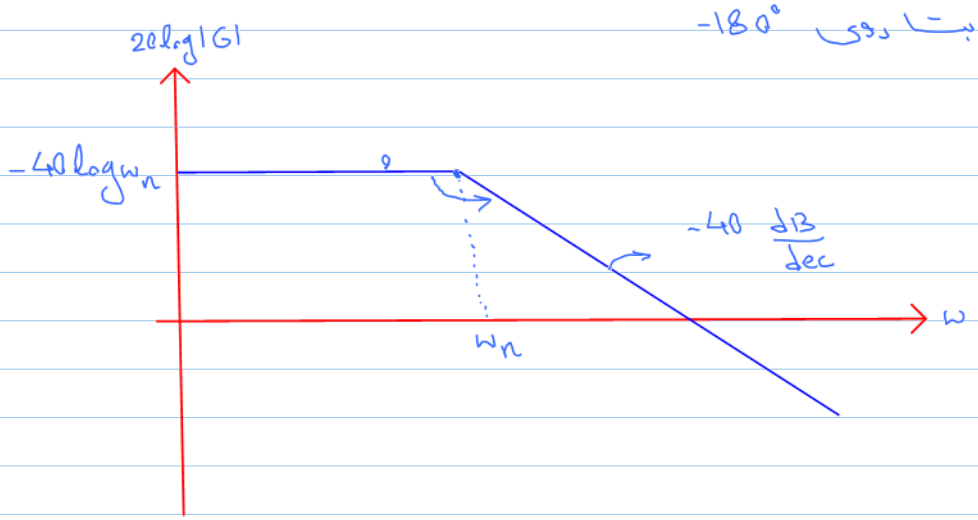
⑥ قطب مختلط :

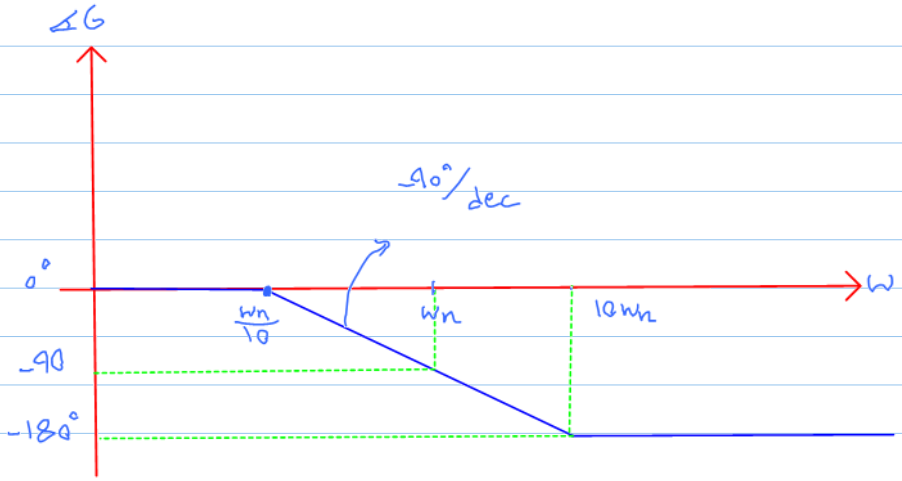
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

فرکانس گوشه برابر ω_n است. و مثل این است که در ω_n دو قطب حقیقی مساوی دارد.

نمودار اندازه:
- $\omega < \omega_n$ ← خط با شیب صفر دوی $-40\log\omega_n$
- $\omega > \omega_n$ ← خط با شیب $-40\ \frac{dB}{dec}$

نمودار فاز:
- $\omega < \frac{\omega_n}{10}$ ← خط ثابت روی زاویه $G(s)$
- $\frac{\omega_n}{10} < \omega < 10\omega_n$ ← خط با شیب $-90\ ^\circ/dec$
- $\omega > 10\omega_n$ ← خط ثابت روی -180°





قطب مرتبه دوم فقط روی نمودار اندازه در فرکانس گوشه باعث کاهش شیب به اندازه $40\ \frac{dB}{dec}$ می‌شود

و تأثیر آن از فرکانس گوشه شروع شده و تا $\omega = \infty$ ادامه دارد.

روی نمودار فاز از $\frac{\omega_n}{10}$ باعث کاهش شیب به اندازه $90°/dec$ شده و در $10\omega_n$

به بعد باعث افزایش شیب به اندازه $90°/dec$ می‌شود. و در نهایت $-180°$ فاز به بستم

امتداد می‌کند.

مثال. نمودار بودی سیستم $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+9)(s+1000)}$ را رسم کنید.

① نقطه شروع: فرض ω: 0.01

اندازه: $20\log\left|\frac{j0.01+1}{j0.01(-0.0001+j0.04+9)(j0.01+100)}\right| = 20\log\frac{1}{9}$

(1 در صورت؛ 9 و 100 در مخرج)

فاز $= 0 + 1\times(-90) + 0\times 90 = -90°$

$\tilde{G}(s) = \frac{s+1}{(s^2+4s+9)(s+100)}$ $\quad \tilde{G}(0) = \frac{1}{9\times 100}$ حقیقی و مثبت

② فرکانس‌های گوشه: $\begin{cases} |-1| = 1 \\ 0 = 0 \\ 3 = 3 \\ |-100| = 100 \end{cases}$

$G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+9)(s+100)}$

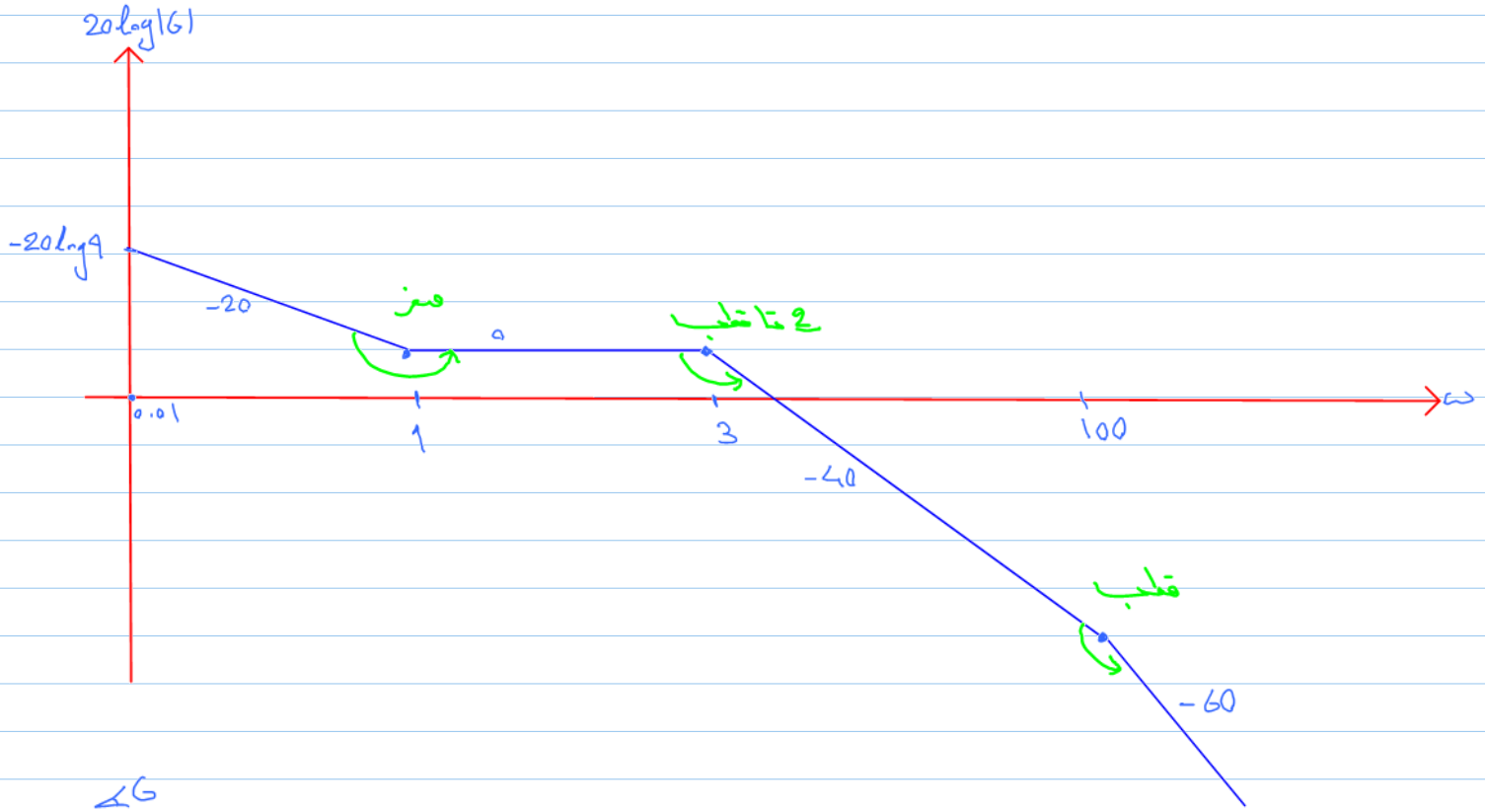
($2\xi\omega_n$، ω_n^2)

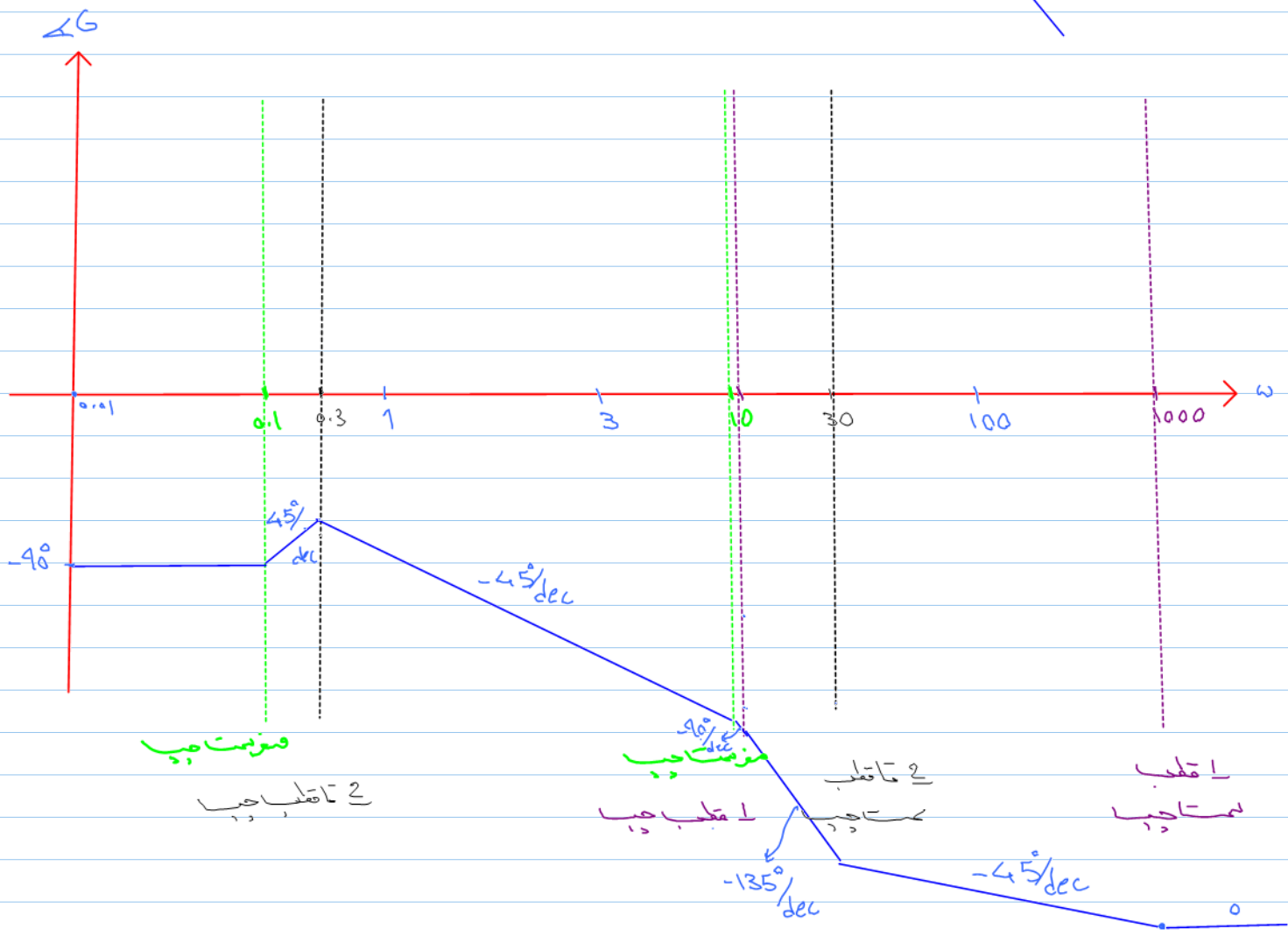
$-2 \mp j\sqrt{5}$

③ شیب اولیه $\rightarrow$ اندازه $= 20(0-1) = -20\ \frac{dB}{dec}$

فاز $= 0$

ω:
- $1 \rightarrow$ صفر ست‌جیب
- $3 \rightarrow$ قطب ست‌جیب
- $100 \rightarrow$ قطب ست‌جیب


20log|G|
-20log9
-20
صفر
0
2 تا قطب
0.01
1
3
100
-40
قطب
-60
ω


∠G
0.01
0.1
0.3
1
3
10
30
100
1000
ω
-90°
45°/dec
-45°/dec
صفر مثبت
2 تا قطب
-90°/dec
صفر مثبت
1 قطب
2 تا قطب
1 قطب
-135°/dec
-45°/dec
0

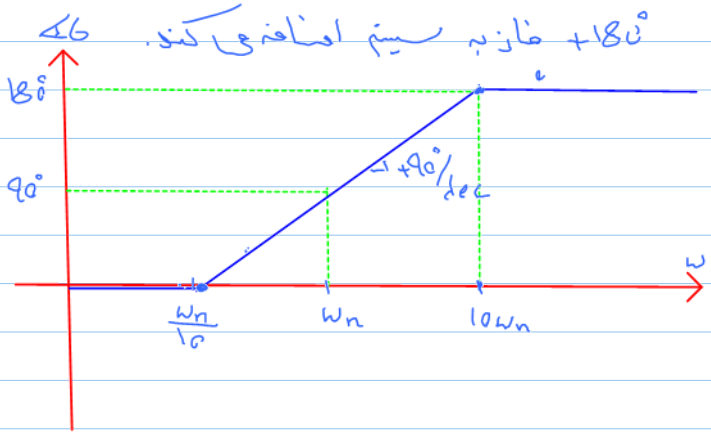
⑦ صفر مختلط : $G(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

فرکانس گوشه برابر ω_n است. و مثل اضافه شدن 2 تا صفر حقیقی مثبت جلو می‌کند.

تأثیر روی نمودار اندازه : از فرکانس گوشه به بعد باعث افزایش شیب $40\ \frac{dB}{dec}$ می‌شود.

و روی نمودار فاز از $\frac{\omega_n}{10}$ تا $10\omega_n$ شیب $+90°/dec$ به سیستم اضافه می‌کند و در نهایت $+180°$ فاز به سیستم اضافه می‌کند.





مثال. نمودار بودی $G(s) = \dfrac{s^2+3s+16}{(s-10)(s+10^3)^3}$

① نقطه شروع : ω نزدیک : 0

اندازه $= 20\log|G(j0)| = 20\log\left|\frac{16}{-10\times10^9}\right| = 20\log16 - 20\log10^9$
$= 20\log16 - 200\ dB$

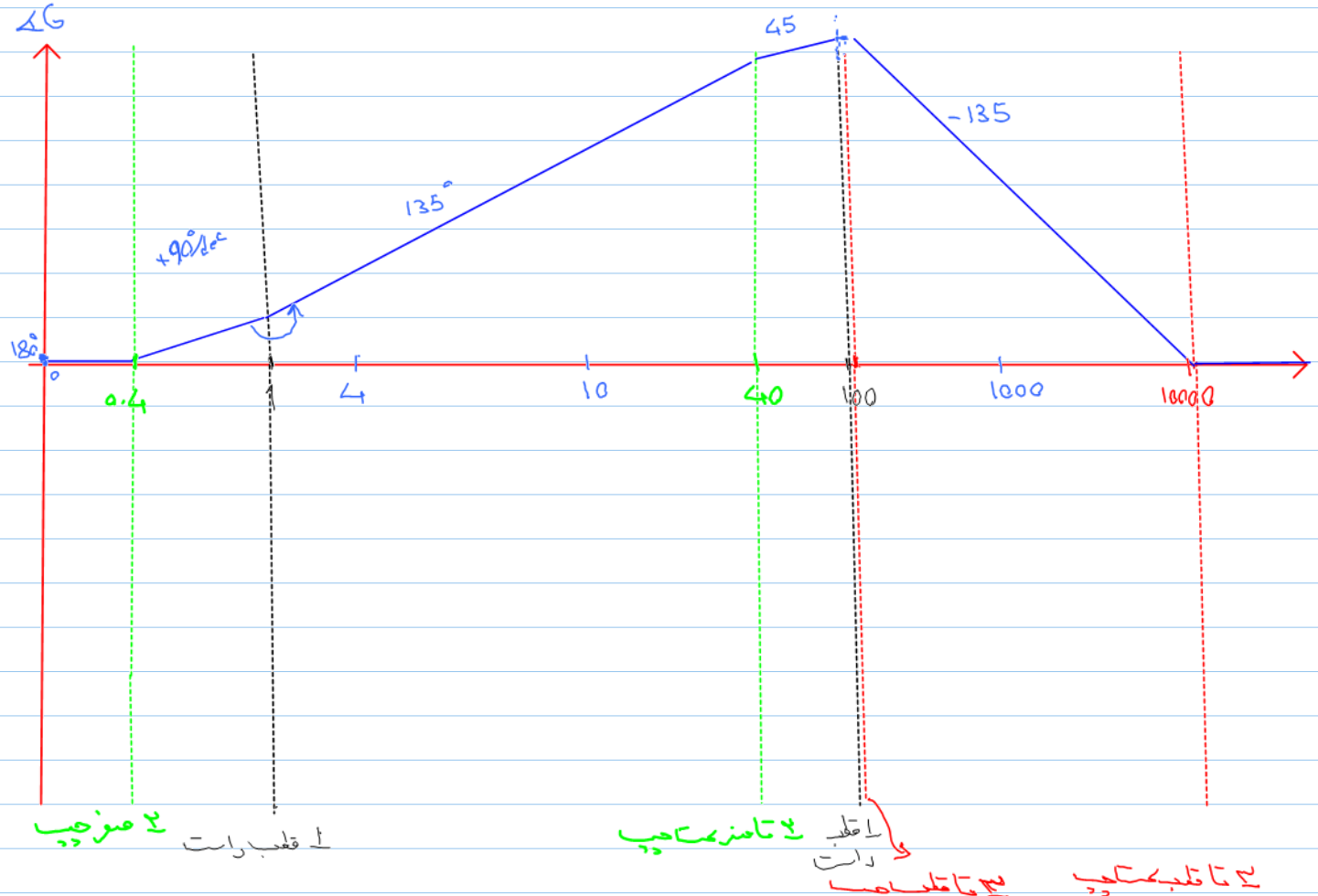
فاز $= \angle G(0) = \angle\frac{16}{-10\times10^9} = 180°$

② فرکانس‌های گوشه :
- $-1.5 \pm j\sqrt{7}$ صفر → 4 → 2 تا صفر مختلط
- 10 قطب → 10 → 1 قطب
- -10^3 قطب → 1000 → 3 تا قطب

$s^2 + 3s + 16 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \rightarrow \omega_n = 4$

③ شیب اولیه → فاز $= 0$
اندازه $= 20(0-0) = 0$


20log|G|
20log16 - 200
20
40
-40
0
4
10
1000
۱ قطب
۲ تا صفر
۳ تا قطب


∠G
45
-135
135°
+90°/dec
180°
0
0.4
1
4
10
40
100
1000
10000
۲ صفر چپ
۱ قطب راست
۲ تا صفر سمت چپ
۱ قطب راست
۳ تا قطب چپ
۲ تا قطب سمت چپ

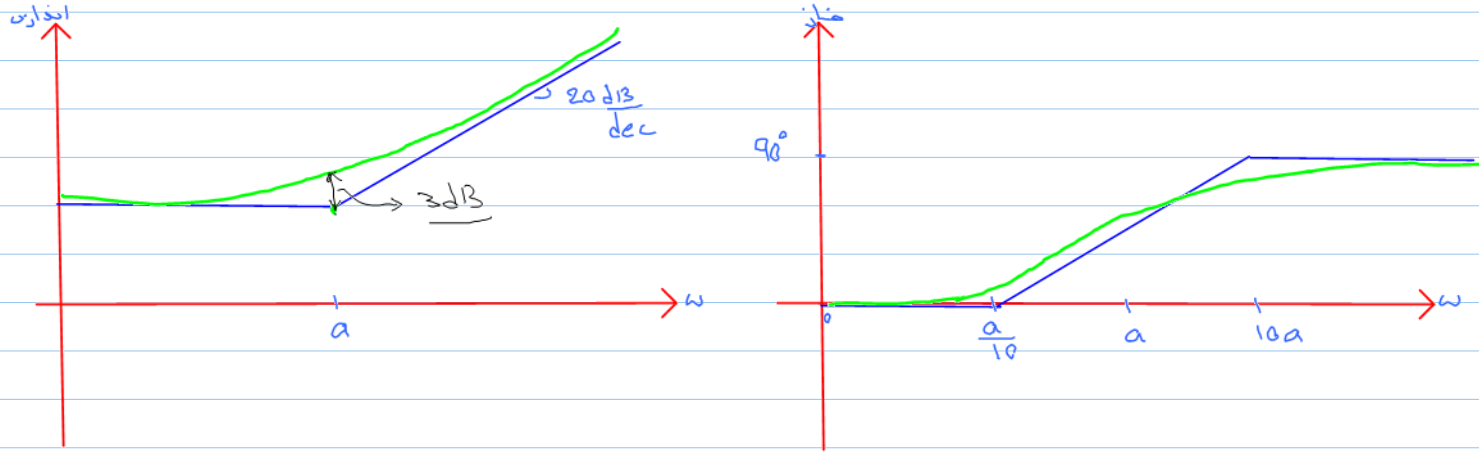
رسم نمودار واقعی روی جانبها:

پس از رسم جانبها می‌توان نمودار واقعی را به صورت تقریبی رسم کرد که برای عوامل پایه به صورت زیر است:

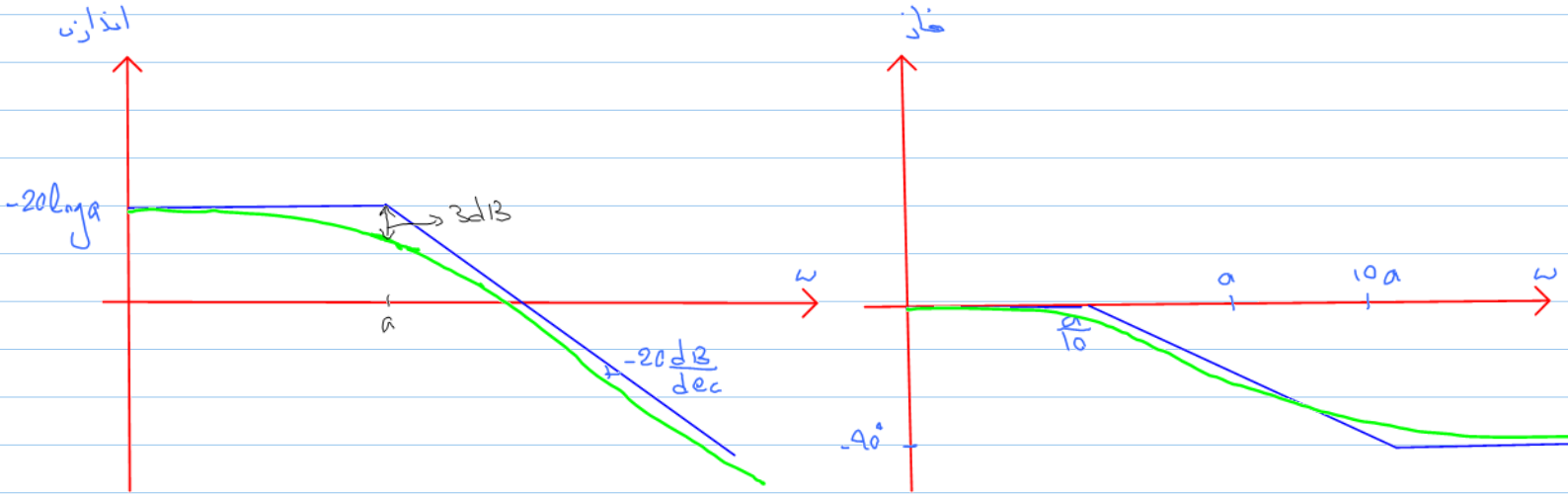
① نمودار صفرها و قطبهای درجه ۱ دقیقاً روی جانب است و در واقع نمودار واقعی همان جانبها هستند.



② در صفرها و قطبهای حقیقی بیشترین میزان خطا در فرکانس گوشه به اندازه $\pm 3dB$ است.



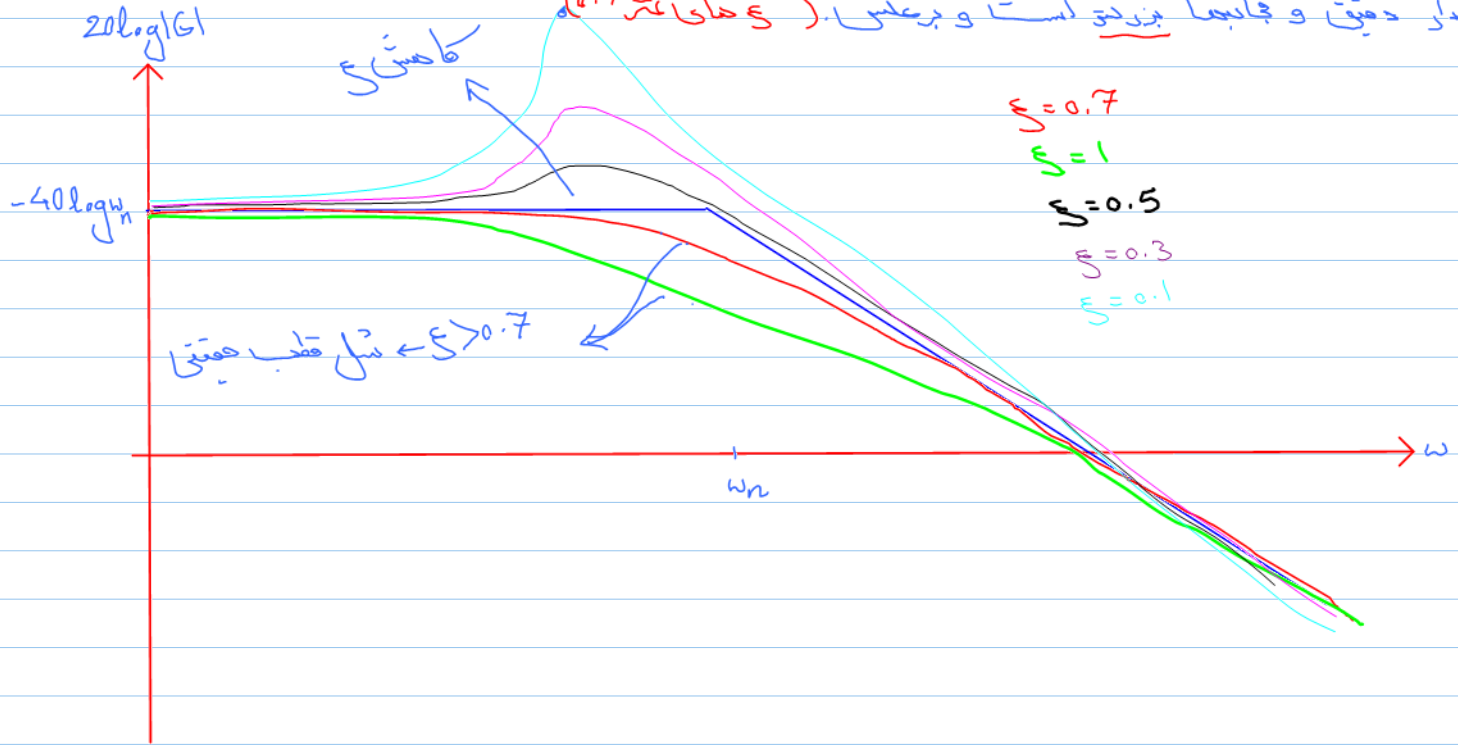
$$G(s)=s+a$$

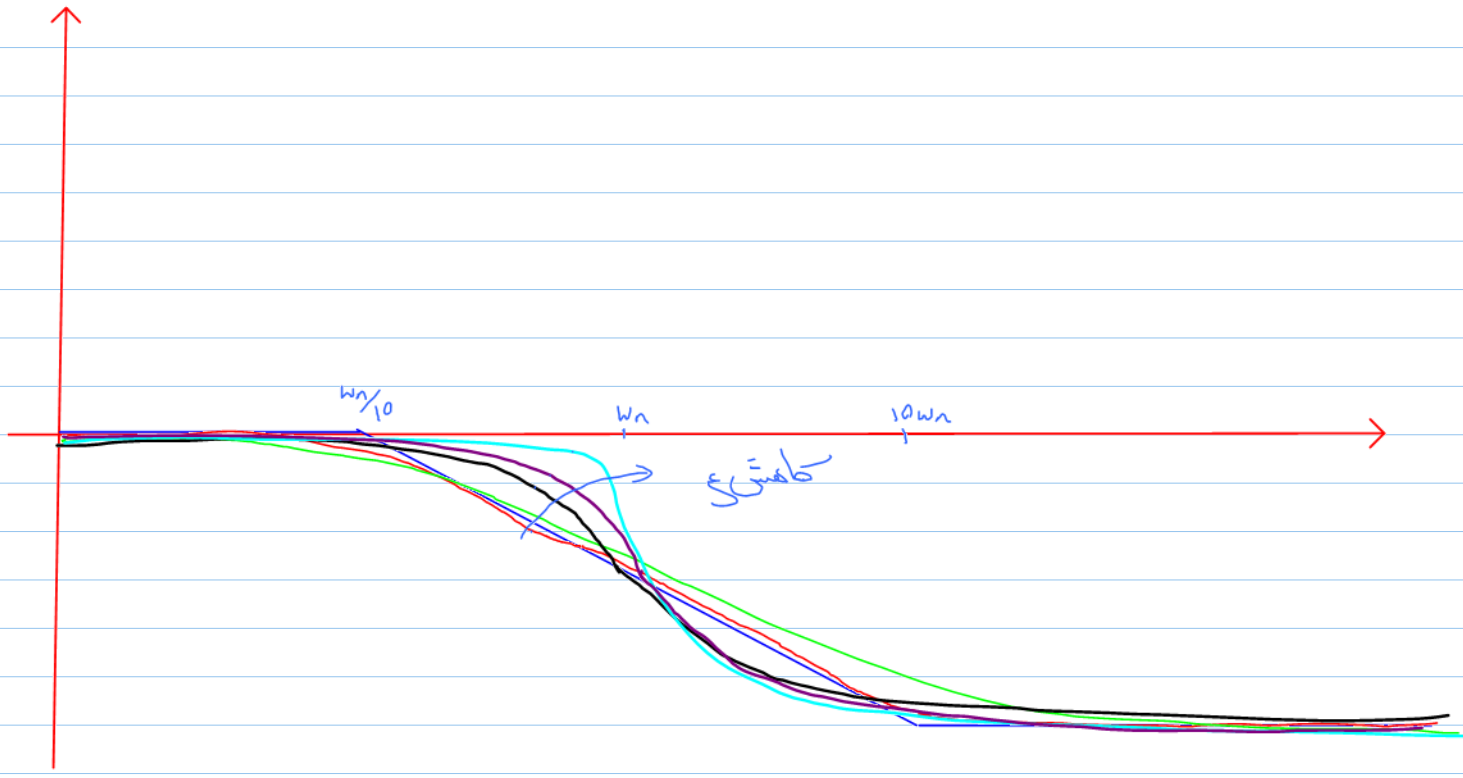


$$G(s)=\frac{1}{s+a}$$

③ قطب مختلط: $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

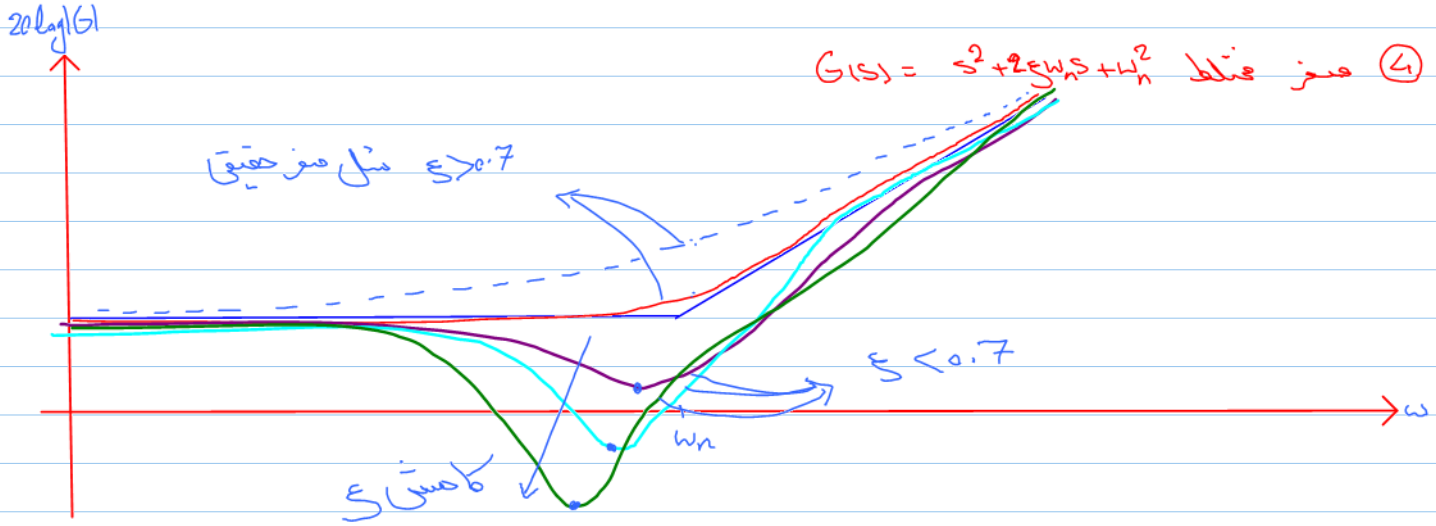
نمودار دقیق در این حالت بستگی به مقدار ξ دارد. هرچقدر ξ کمتر باشد خطای بین نمودار دقیق و مجانبها بزرگتر است و برعکس. (ξ های کمتر از 0.7)

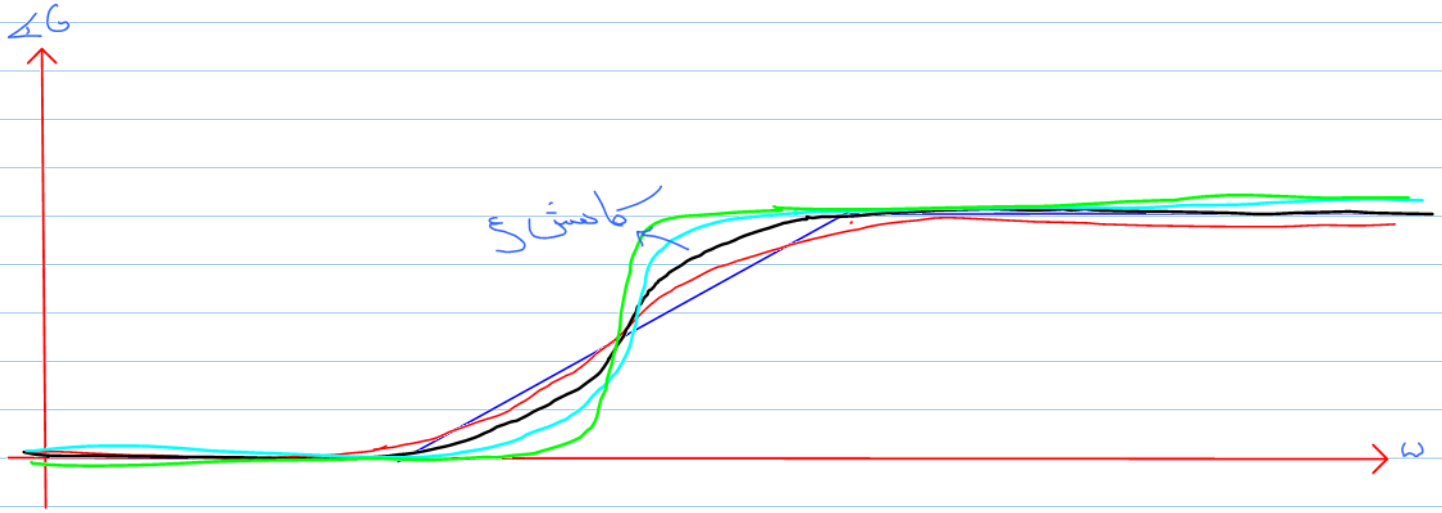




در نمودار اندازه اگر $\xi > 0.7$ باشد نمودار واقعی اندازه زیر مجانبها بوده و مثل قطب حقیقی عمل می‌کند. بازای $\xi < 0.7$ نمودار واقعی دارای یک قله خواهد بود که با کم شدن ξ ارتفاع قله افزایش می‌یابد.

در عوداز فاز با کاهش ζ، شیب عودار واقع در ω_n بیشتر می‌شود.

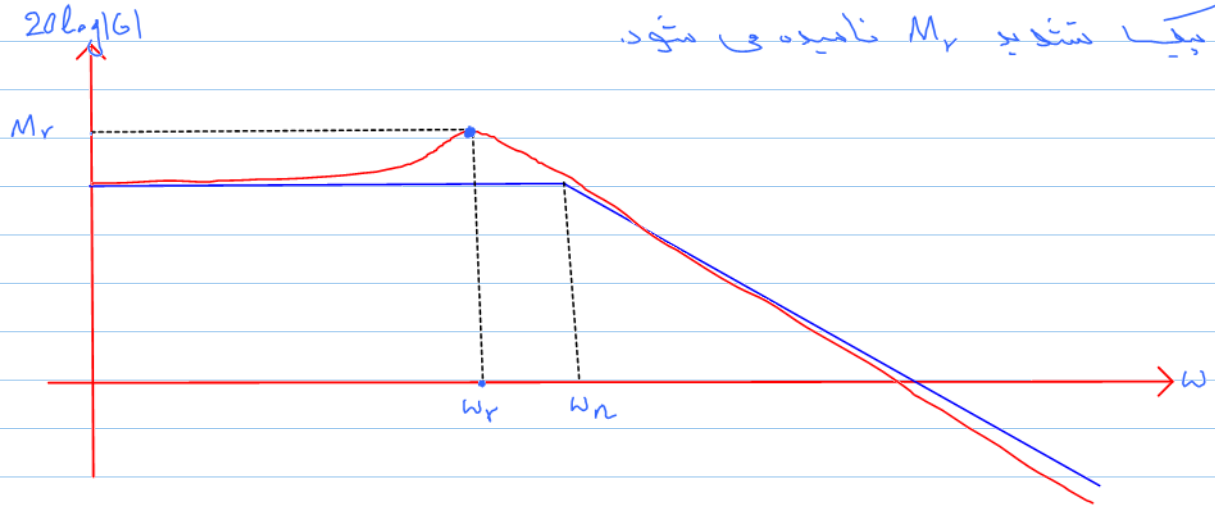




تشدید به ایجاد قله در عودار اندازه تشدید گفته می‌شود.

فرکانسی که در آن قله ایجاد می‌شود، فرکانس تشدید ω_r نام دارد.

ارتفاع قله یک تشدید M_r نامیده می‌شود.



تشدید فقط در سیستم‌های مرتبه دوم به بالاتر با صفر یا قطب مختلط رخ می‌دهد (به شرطی که ζ<0.7 باشد).

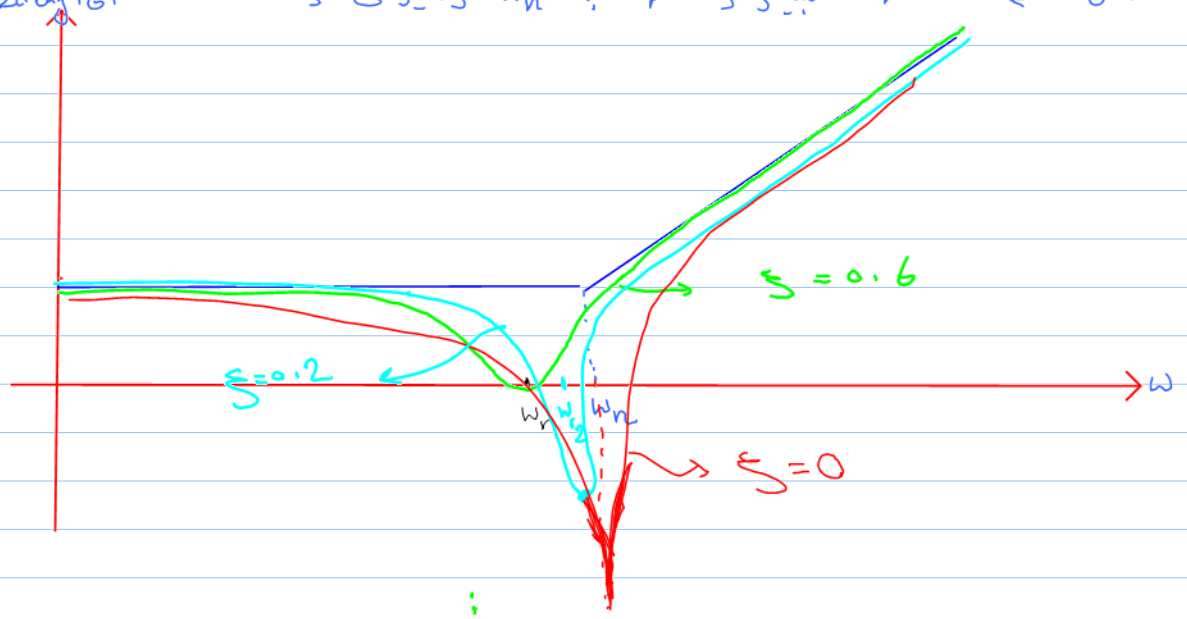
④ صفر مختلط $G(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

به ازای $\xi < 0.7$ پاسخ فرکانسی دارای تشدید است و $M_r = 1$ است. (از منحنی حساب می‌شود)

به ازای $\xi < 0.7$ دارای تشدید است.

$$\begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

هر چه ξ کمتر ← M_r بیشتر و ω_r به ω_n نزدیکتر می‌شود.



مثال: نمودار اندازه دقیق $G(s) = \dfrac{(s^2+4s+16)}{(s-100)(s+10^4)}$ را رسم کنید.

① نقطه شروع: ω نزدیک 0

اندازه $= 20\log|G(j\omega)| = 20\log 16 - 120$ dB

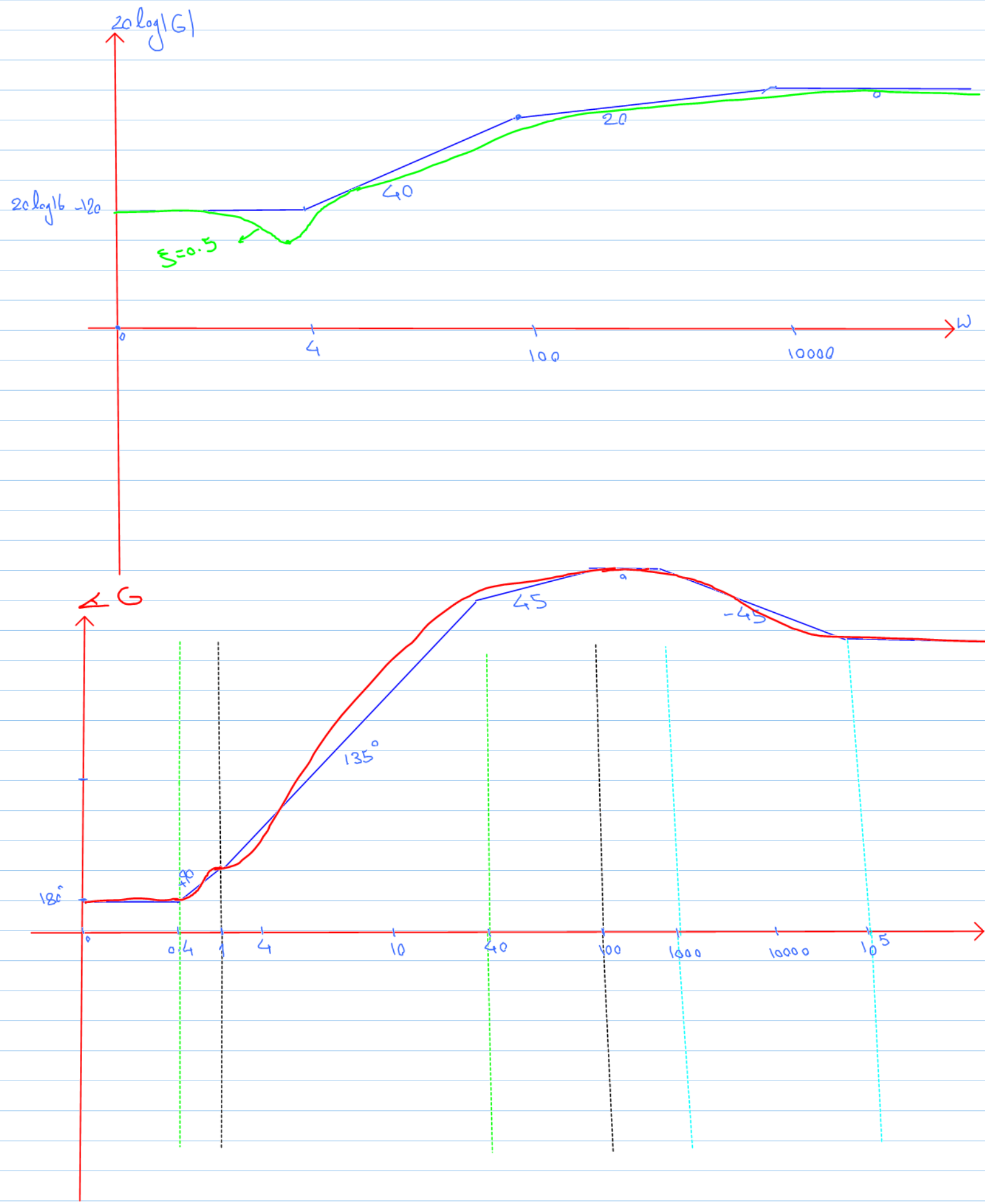
فاز $= \angle G(0) = \angle \dfrac{16}{-100\times 10^4} = 180^\circ$

② فرکانس‌های گوشه:

$\xi = 0.5 \rightarrow$ 2 تا همزمان چپ	4	صفر $-2 \pm j\sqrt{12}$
1 قطب راست	100	1 قطب راست 100
1 قطب چپ	10^4	1 قطب چپ -10^4

③ سمت راست: اندازه $= 20(0-0) = 0$

فاز $= 0$


20log|G|
20log16 -120
ξ=0.5
40
20
0
ω
0
4
100
10000
∠G
45
0
-45
135°
180°
-90
0.4
1
4
10
40
100
1000
10000
10^5

تا امروز عزیز سلامت پایه بودی ← کنکوری نبود

از جلسه آینده (۴۹) کاملاً کنکوری

جلسه 48 کنترل خطی

معرفی عوامل استثناء:

① تأخیر زمانی:

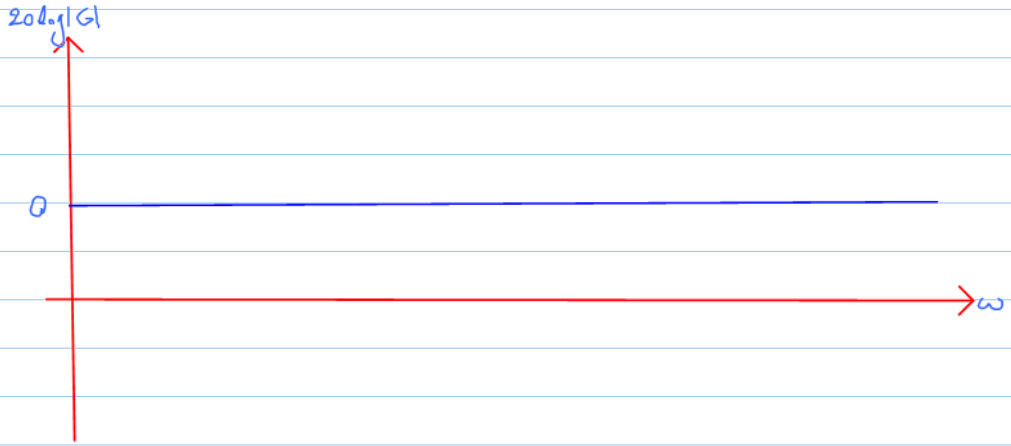
$G(s) = e^{-Ts}$

$G(j\omega) = e^{-jT\omega}$

$|G(j\omega)| = |e^{-jT\omega}| = 1$

$20\log|G| = 20\log 1 = 0$

$\angle G(j\omega) = \angle e^{-jT\omega} = -T\omega$





نکته! تأخیر روی نمودار اندازه تأثیر ندارد و فقط روی نمودار فاز تأثیر دارد.

در نمودار فاز از $\omega = 0$ ، موجب کاهش شیب به اندازه $-T^{\circ}/_{dec}$ می‌شود که تا $\omega = \infty$ ادامه دارد و تأثیرش روی نمودار فاز عالم‌گیر می‌شود.

نکته: تنها حالتی که شیب نمودار فاز در ابتدا و انتهای نمودار صفر نمی‌شود، داشتن تأخیرات

مثال: نمودار بودی $G(s) = \frac{s-1}{s+10} e^{-2s}$ را رسم کنید.

① نقطه شروع: ω نزدیک به: 0

اندازه: $20\log|G(0)| = 20\log\left|\frac{-1}{10} \times 1\right| = 20\log\frac{1}{10} = -20\,dB$

فاز: $\angle G(0) = \angle \frac{-1}{10} = 180^\circ$

② هروقت تأخیر دیدید، تأخیر را کناری بگذارید و نمودار عامل بدون تأخیر را رسم کنید.

$\tilde{G}(s) = \frac{s-1}{s+10}$ و $\tilde{G}(s) = e^{-2s}$

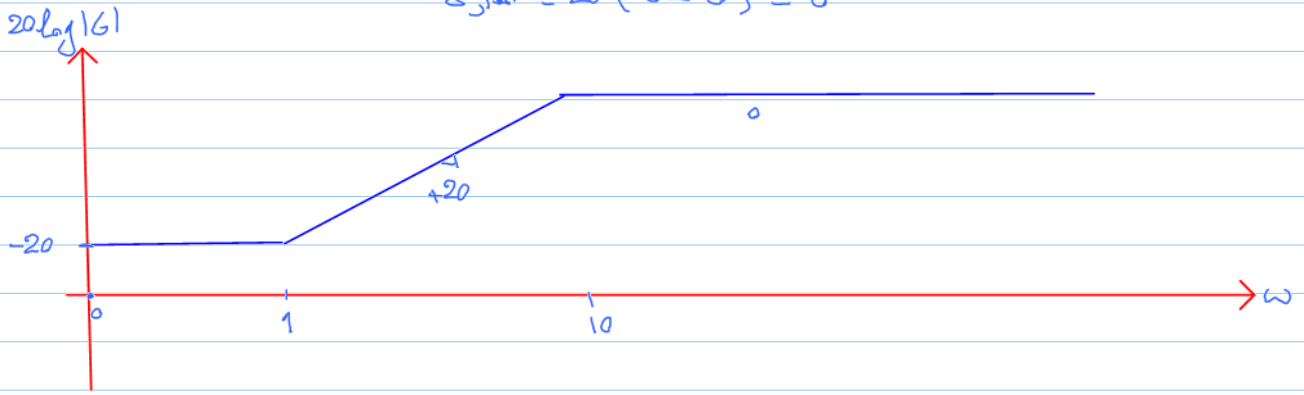
نمودار عامل بدون تأخیر $\tilde{G}(s)$ را رسم می‌کنیم و در نهایت نمودار $G(s)$ را با آن اصلاح می‌کنیم.

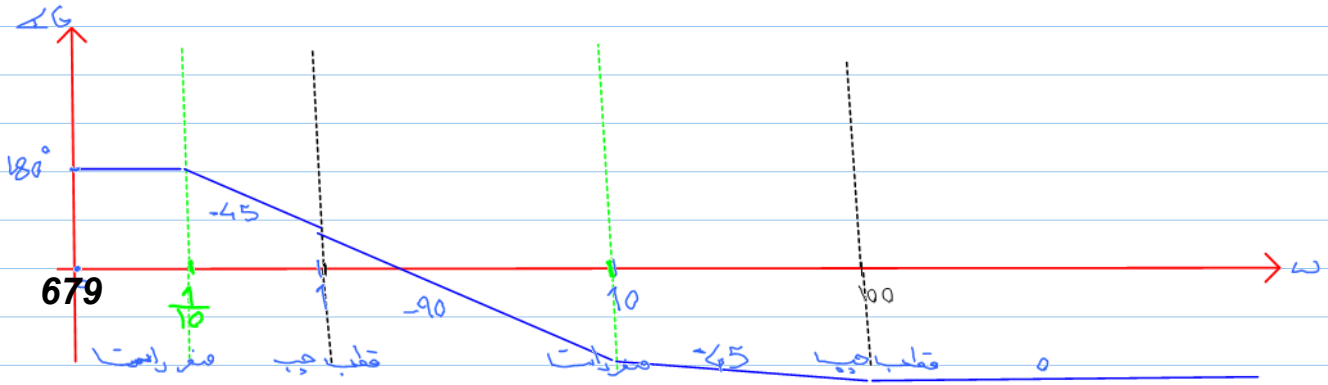
$\tilde{G}(s) = \frac{s-1}{s+10}$

③ وضعیت نقاط شکست: $\begin{cases} 1 \rightarrow \omega = 1 & \text{صفر سمت راست} \\ -10 \rightarrow \omega = 10 & \text{قطب چپ} \end{cases}$

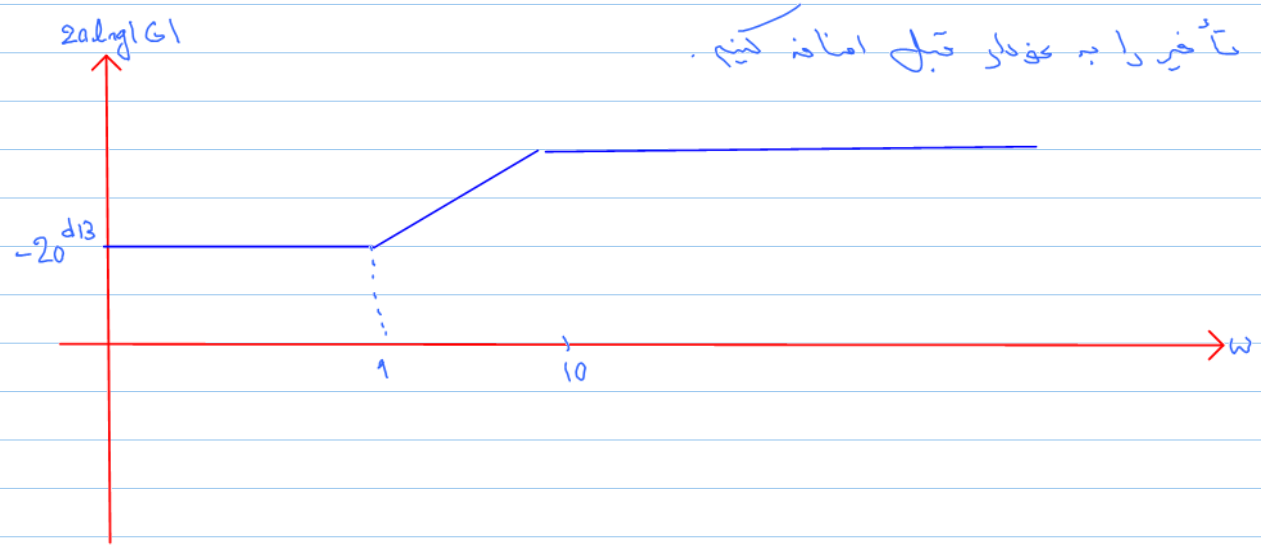
④ شیب اولیه: فاز $= 0$

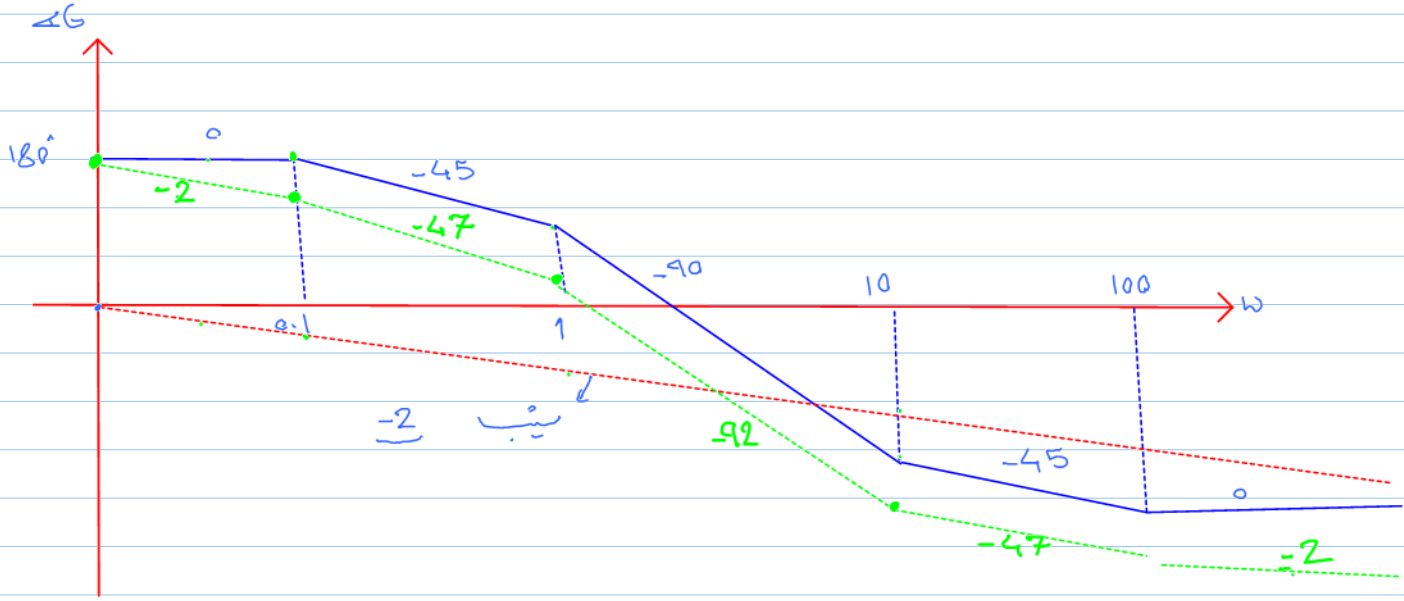
اندازه $= 20(0-0) = 0$





نمودار تأخیر را به نمودار قبل اضافه کنیم.





$e^{-2s} = e^{-Ts} \rightarrow T = 2 \rightarrow$ نمودار فاز -2

تأخیر ← تغییر فاز بدون تغییر اندازه

شیب نمودار فاز را در شروع و انتها غیر صفر می‌کند. $(-T°/dec)$

② عامل تغییر اندازه بدون تغییر فاز:

$G(s) = \frac{1}{a^2 - s^2}$ یا $G(s) = a^2 - s^2$

$G(s) = \frac{1}{s^2 - a^2}$ یا $G(s) = s^2 - a^2$

در $G(s) = a^2 - s^2$ شیب عوداً اندازه در $\omega = a$ ، $+40 \frac{dB}{dec}$ افزایش و یا بدو فاز عدد ثابت ۰ است.

در $G(s) = s^2 - a^2$ ~ ~ ~

$$G(s) = \frac{s^2-1}{10-s^2} \qquad \bar{G}(s) = e^{-10s}$$

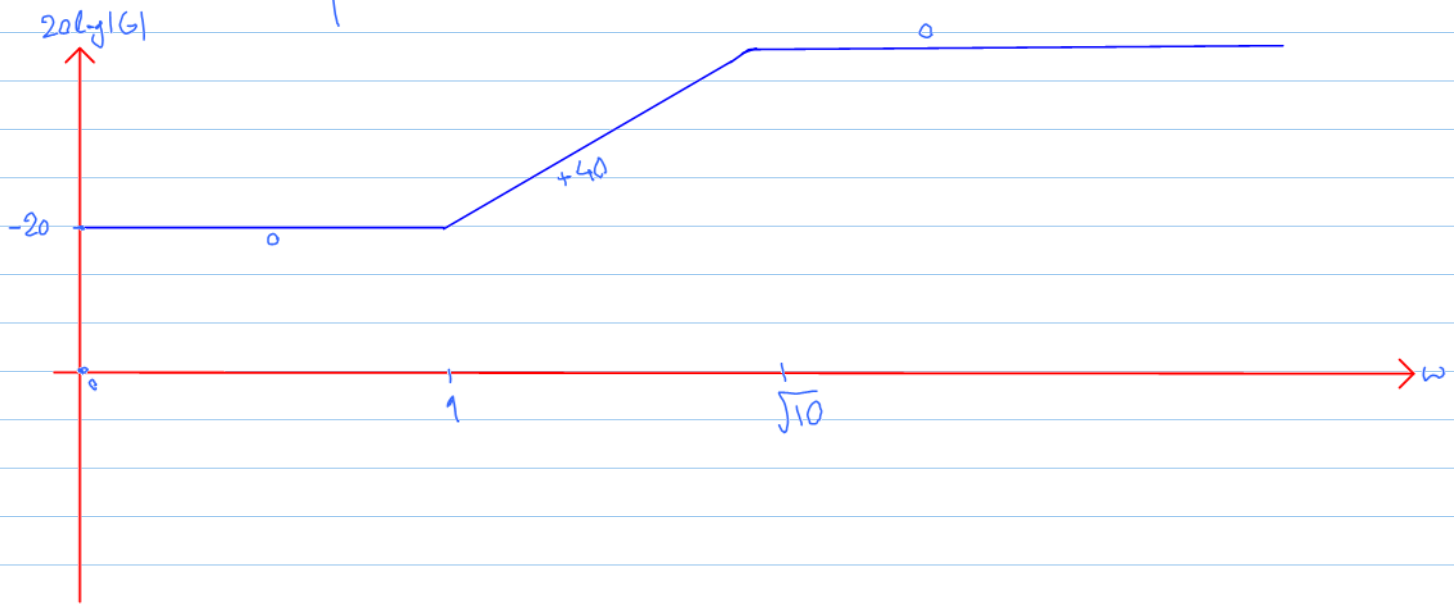
① $\omega : 0$

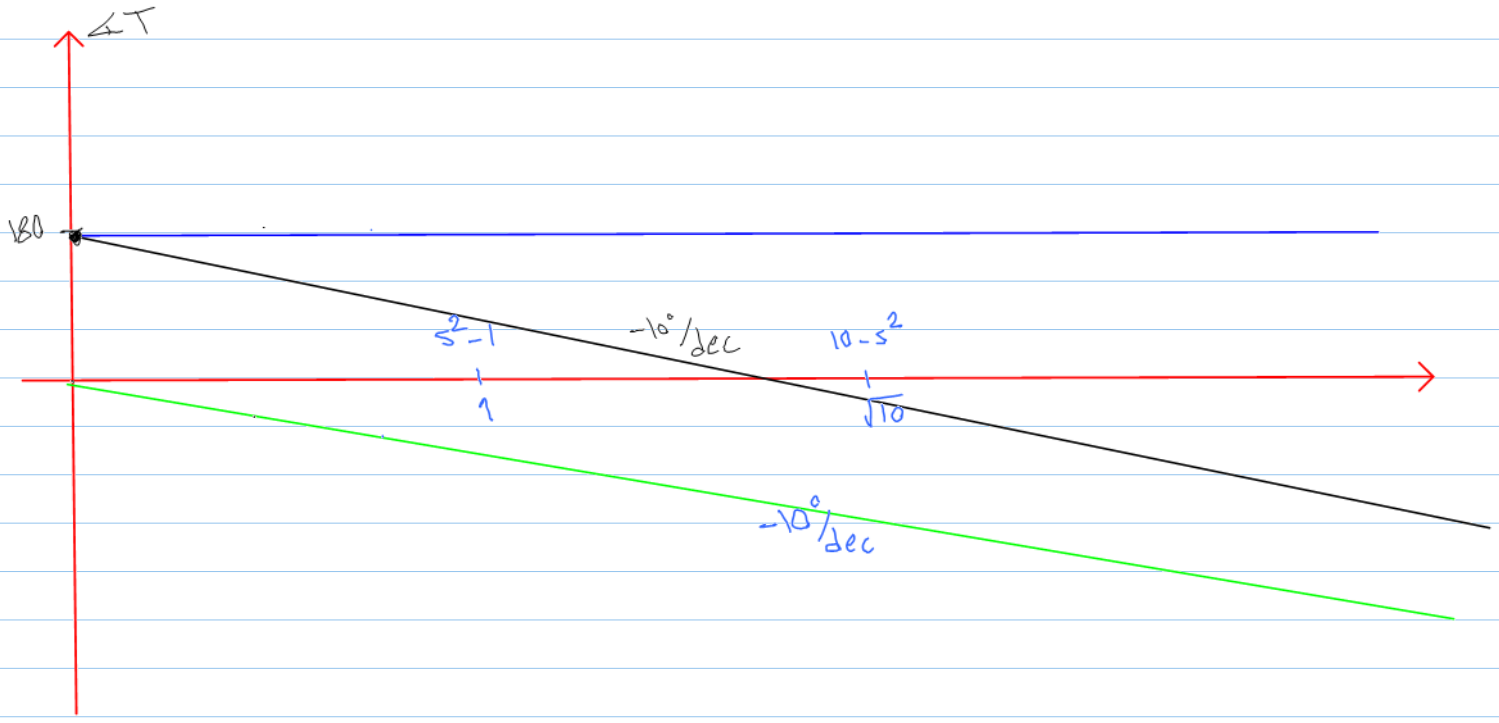
$$\text{دامنه} = 20\log|G(0)| = 20\log\left|\frac{-1}{10}\right| = -20\,dB$$

$$\text{فاز} = \angle G(0) = \angle \frac{-1}{10} = 180^\circ$$

② مرتبه‌ی گوشه: ± 1 صفر $\rightarrow 1$

$\pm\sqrt{10}$ قطب $\rightarrow \sqrt{10}$

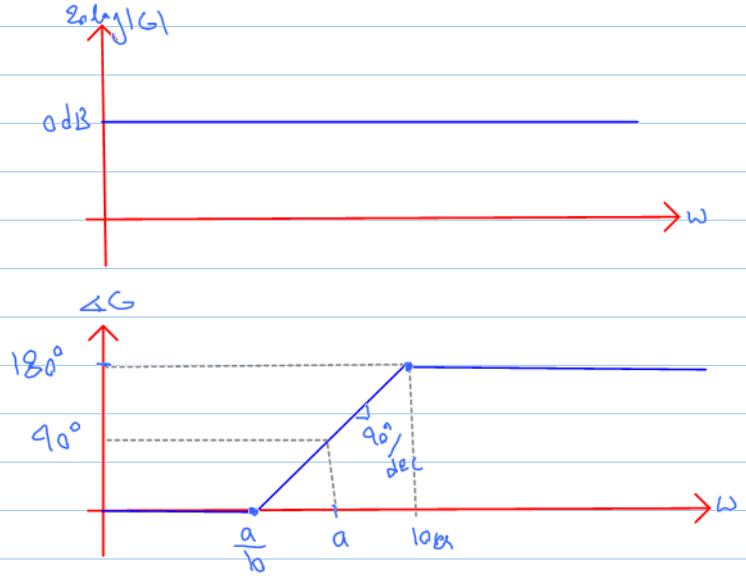




③ عامل بتغیر فاز بدون تغییر اندازه: $G(s) = \frac{s+a}{s-a}$ یا $\frac{s-a}{s+a}$

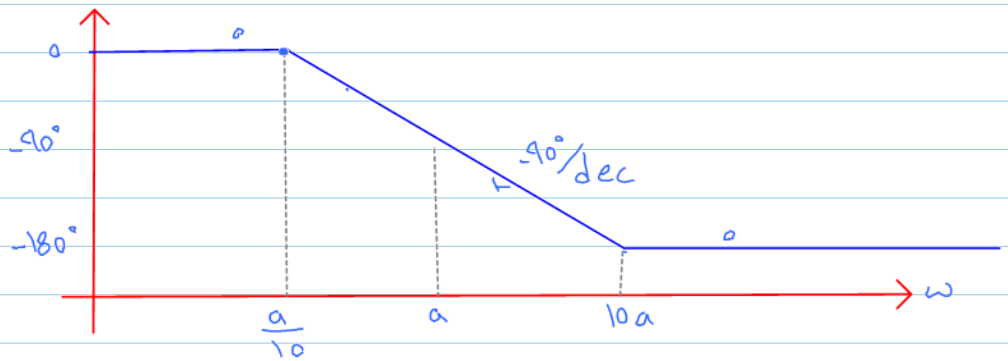
در عامل $G(s) = \frac{s+a}{s-a}$ ، نمودار اندازه عدد ثابت است ولی نمودار فاز از $w = \frac{a}{10}$ افزایش شیب $+90°/dec$ دارد و در $w = 10a$ ، کاهش شیب $90°/dec$.

یعنی تأثیر $G(s) = \frac{s+a}{s-a}$ روی نمودار فاز مثل دو تا صفر سمت چپ در $w = a$ است.



در نمودار $G(s) = \frac{s-a}{s+a}$ ، نمودار اندازه ثابت است ولی در نمودار فاز مثل دو قطب سمت چپ در $s=a$ عمل می‌کند.



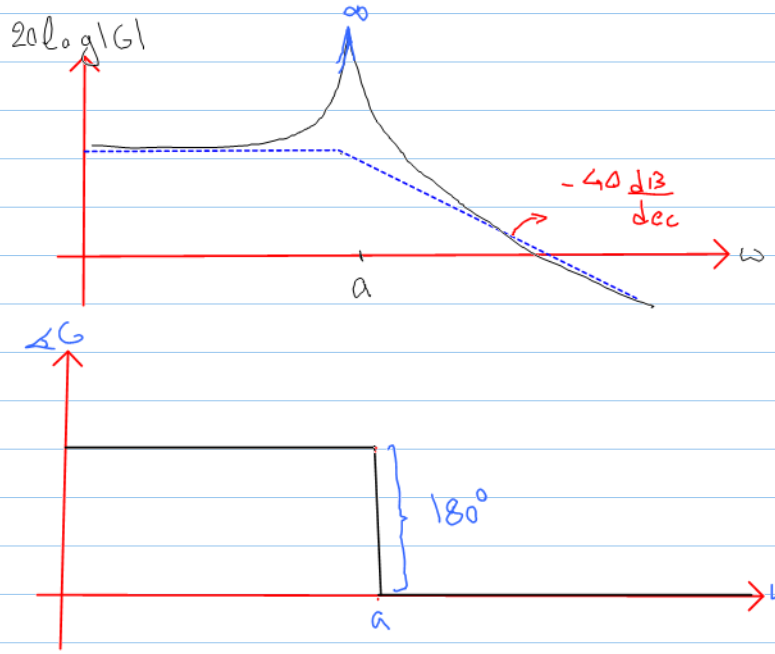


⑤ تغییر ناگهانی فاز و ایجاد شکل سوزنی در نمودار اندازه:

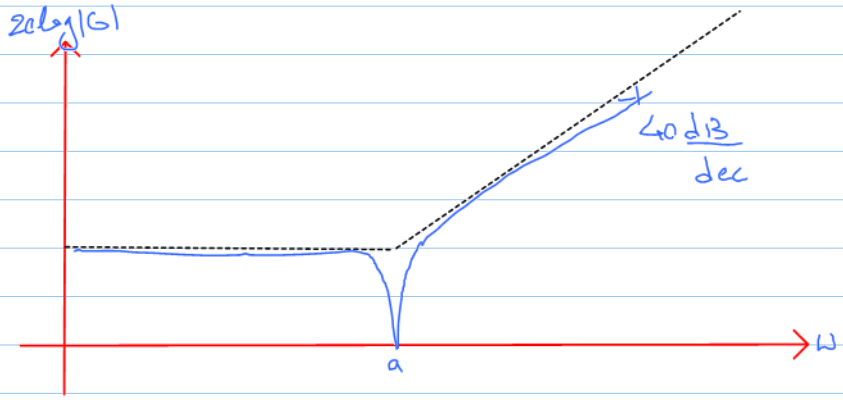
$G(s) = s^2 + a^2$ یا $\frac{1}{s^2 + a^2}$ دوتا صفر یا قطب روی محور $j\omega$

در نمودار اندازه، در فرکانس $\omega = a$، شکل سوزنی ایجاد می‌شود.

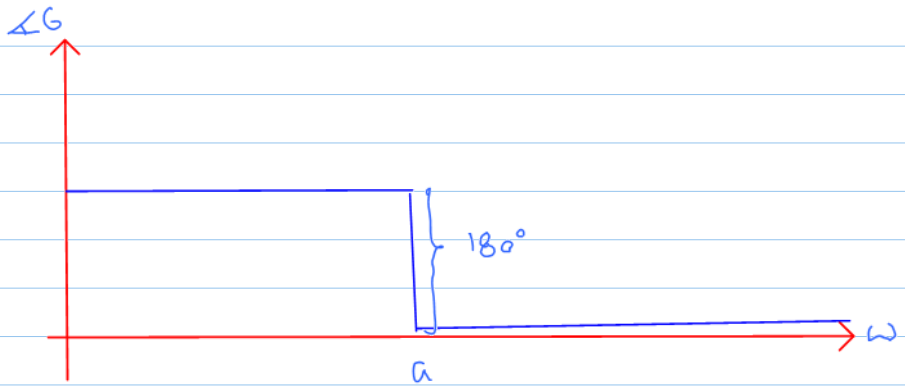
" " فاز، " " " تغییر یکباره فاز از 0 به 180° یا برعکس دارد.



$G(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$



$G(s) = s^2 + a^2$



شروع درس مودار بودی برای کنکور

سوالات بودی: شکل بودی رای دسته توابع تبدیل را از شما می خواهد.

قوانین طلایی مودار بودی (دسیبل)

جلسه ۴۹ کنترل هوا

نمودار بودی

قوانین کلی نمودار بودی:

برای تشخیص تابع تبدیل از روی نمودار بودی و یا رسم نمودار بودی از قوانین زیر به ترتیب ذکر شده استفاده می کنیم.

① اگر در گزینه ها در تابع تبدیل e^{-Ts} دارم، از روی نمودار فاز شیب نهایی را چک می کنیم اگر شیب نهایی نمودار فاز a بود یعنی گزینه های تأخیردار حذف می شود ولی اگر شیب نهایی فاز عدد غیر صفر b بود یعنی تأخیر e^{-bs} دارم.

اگر تابع تبدیل تأخیر e^{-Ts} دارد، گزینه های با شیب نهایی نمودار فاز a حذف می شود و شیب نهایی نمودار فاز باید $-T$ باشد. و اگر تابع تبدیل تأخیر ندارد، گزینه هایی که نمودار فاز دارای شیب نهایی غیر صفر است حذف می شود

② درجه صفر و شیب نهایی نمودار اندازه:

در نمودار بودی دارم: شیب نهایی نمودار اندازه $= +20 \times$ (تعداد قطب‌ها − تعداد صفرها)

در گام دوم قانون فوق را بین تابع تبدیل و نمودار بودی مطابقت می دهیم (اگر درجه صفر گزینه ها یا شیب نهایی نمودار اندازه در گزینه ها یکسان نباشد)

③ شیب اولیه نمودار اندازه:

شیب اولیه اندازه $= 20 \times$ (تعداد قطب در $\omega=0$ − تعداد صفر در $\omega=0$)

اگر شیب اولیه یا تعداد صفرها و قطب‌های در $\omega=0$ متفاوت باشد گام سوم را بررسی می کنیم

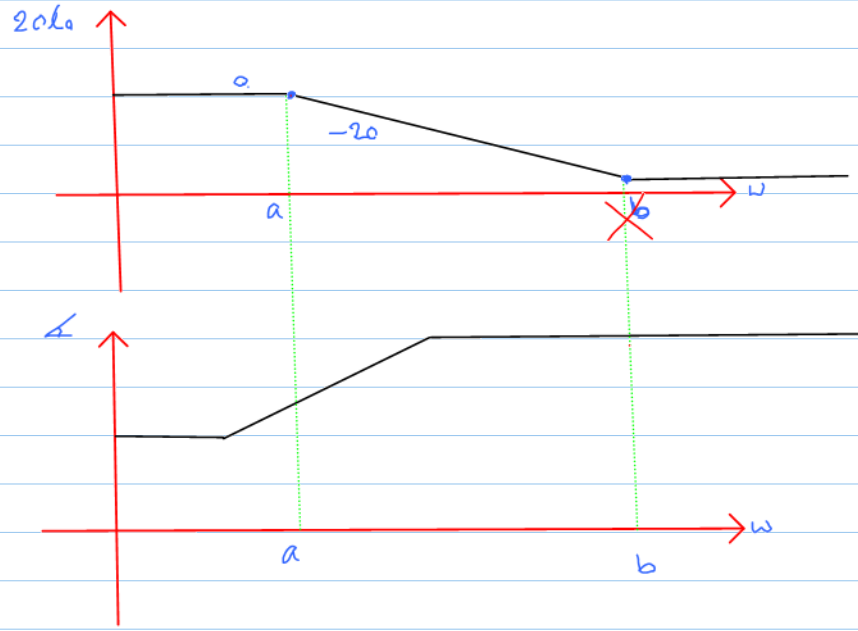
④ تغییر شیب و تشخیص صفرها و قطب‌ها:

برای تشخیص محل صفرها و قطب‌ها به صورت زیر عمل می کنیم:

$$G(s) = \frac{s-2}{s+10} \times \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{s+10}{s+20} \cdot \frac{1}{s}$$

۴-۱- تغییر مقیاس اندازه و فاز:



$$G(s)=\frac{}{(s-a)^1}$$

$$\frac{|-20|}{20}=1$$

$s-a$

- کاهش فاز ← صفر سمت راست در $s=a$
- افزایش فاز ← صفر سمت چپ در $s=-$

$(s-a)$ — افزایش شیب نمودار اندازه

- کاهش فاز ← قطب سمت چپ $s=-a$
- افزایش فاز ← قطب سمت راست $s=a$

$\frac{1}{s+a}$ — کاهش فاز

$\frac{1}{s-a}$ — افزایش فاز

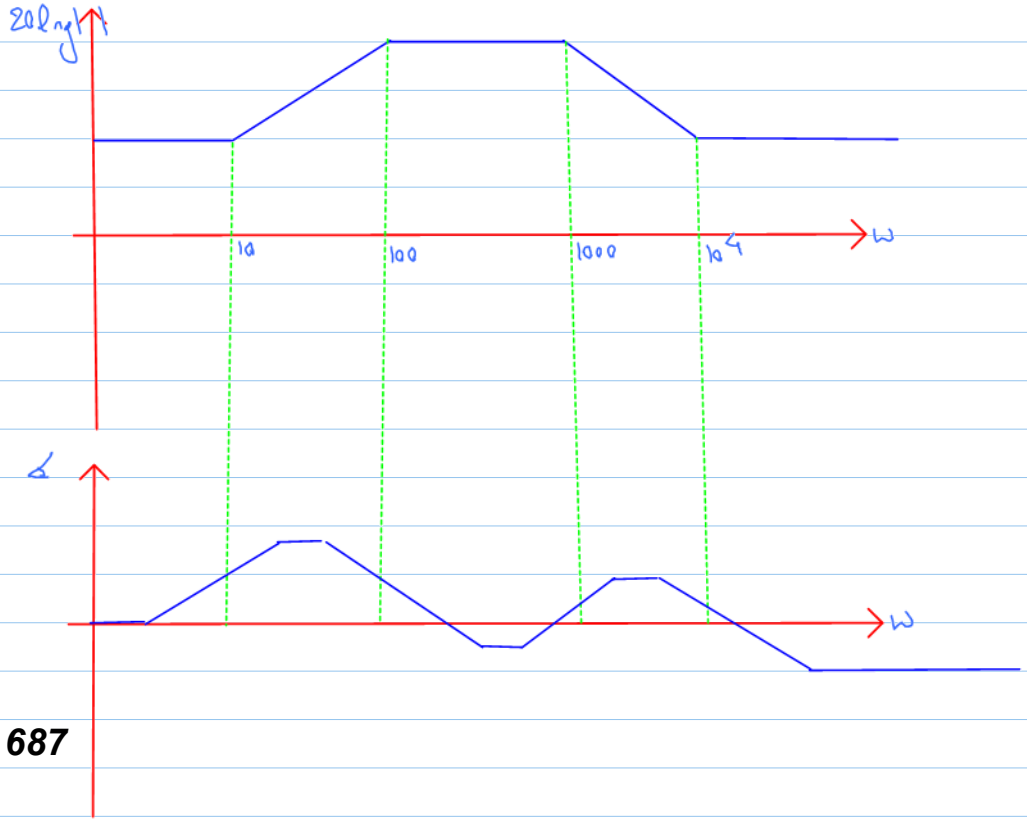
s — کاهش شیب نمودار اندازه

در فرکانس $\omega=a$

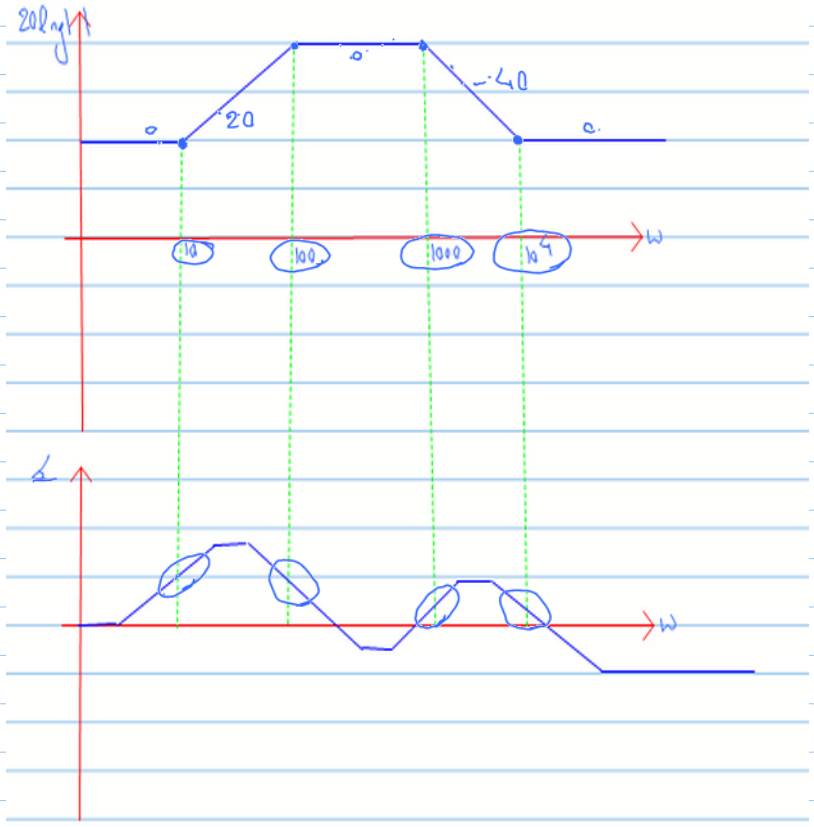
مرتبه تکرار صفر یا قطب $=\frac{|\text{تغییر شیب اندازه}|}{20}$

* اگر در نمودار اندازه تغییر شیب $\frac{dB}{dec}40$ داشته باشیم می‌توانند مربوط به صفر یا قطب مختلط باشند و این مورد فقط در حالتی که دو گزینه‌ها $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$ یا $\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ داشته باشیم رخ می‌دهد.

مثال:



$$G(s) = \frac{(s+10)^1 \quad (s-10^4)^2}{(s+100)^1 \quad (s-1000)^2}$$



$$\frac{|20|}{20} = 1$$

$$\frac{|-20|}{20} = 1$$

$$\frac{|-40|}{20} = 2$$

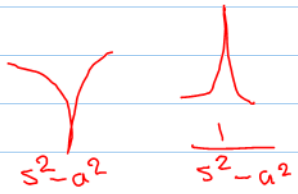
$$\frac{|40|}{20} = 2$$

اگر در نمودار فاز و شیب اندازه تغییرات یکبار باشد (کاهش-کاهش یا افزایش-افزایش) علامت $(s+a)$ خواهیم داشت در غیر این صورت علامت $(s-a)$ خواهد بود.

4-2- تغییر شیب اندازه بدون تغییر فاز:

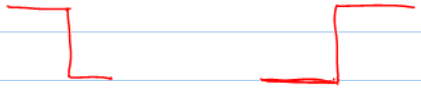
اگر در عوداراندازه در فرکانس شیب عودار تغییر کند ولی فاز تغییر نکند یعنی عامل s^2-a^2 یا $\frac{1}{s^2-a^2}$ دارع و بالعکس.

در این حالت در عودار دقیق اندازه، سوزن شکل خواهیم داشت.



4-3- تغییر فاز بدون تغییر شیب اندازه:

اگر در فرکانس شیب عودار اندازه تغییر نکند ولی در عودار فاز، افزایش فاز داشته باشیم یعنی عامل $\frac{s+a}{s-a}$ دارع و اگر فاز کاهش یابد یعنی $\frac{s-a}{s+a}$ دارع.



4-4- تغییر ناگهانی فاز:

هرگاه تغییر ناگهانی فاز (بصورت پله) داشته باشیم یعنی s^2+a^2 یا $\frac{1}{s^2+a^2}$ دارع. در این حالت در فرکانس تغییر فاز ناگهانی به عودار اندازه نگاه می‌کنیم اگر افزایش شیب دارع یعنی s^2+a^2 و اگر کاهش شیب دارع یعنی $\frac{1}{s^2+a^2}$

⑤ اندازه و فاز اولیه:

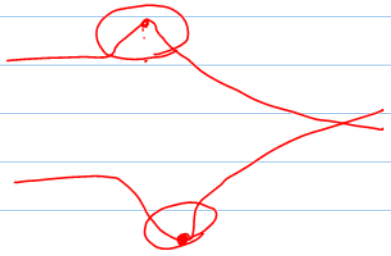
اگر با یکی از قانون فوق به جواب نرسیدیم اندازه و فاز اولیه را حساب کرده و بگزینه‌ها مطابقت می‌دهیم.

در این قانون دقت کنید که هر s را از چه عددی شروع شده و اندازه و فاز اولیه را در آن s حساب کنید.

اندازه اولیه = $20\log|G(j\omega)|$

فاز اولیه = فاز در فرکانس ω_0 ω_0: فقط شروع هر s

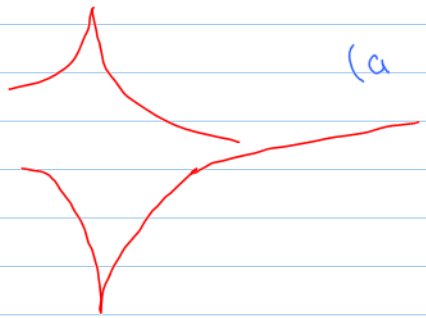
⑥ هرگاه در عودار اندازه قله داشته باشیم دارع: (a_ درونگی)



قله رو به بالا (∨) ← $s^2+2\xi a s+a^2$

قله رو به پایین (∧) ← $\frac{1}{s^2+2\xi a s+a^2}$

$\xi < 0.7$



(7) اگر در نمودار اندازه سوزن داشته باشیم (نرخ a)

سوزن رو به بالا ← $s^2 + a^2$

سوزن رو به پایین ← $\frac{1}{s^2 + a^2}$

مکانیک ۸۳ . نمودار بودی سیستمی که تمام صفرها و قطبهای آن منفی حقیقی محور منفی است داده شده است.

تابع تبدیل آن کدام است؟

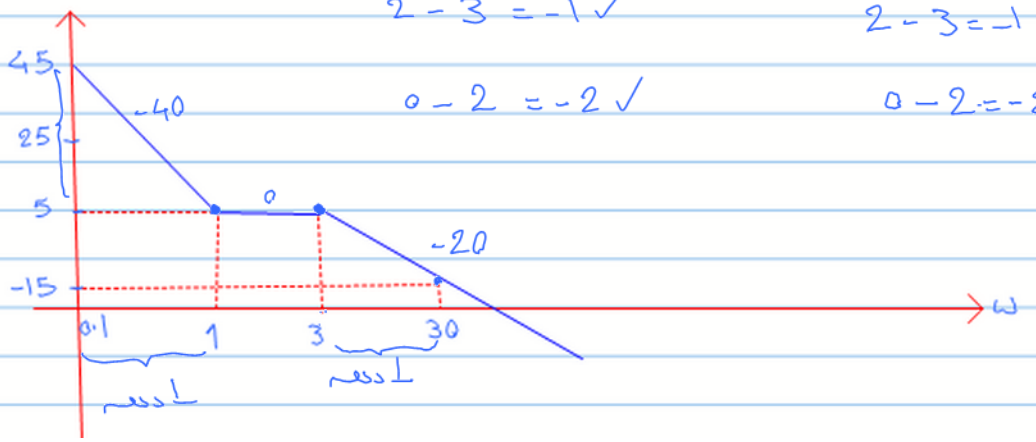
۱) $\frac{k(s+1)}{s(s+3)^2}$ ۲) $\frac{k(s^2+2s+1)}{s^2(s+3)}$ ۳) $\frac{k(s^2+3s+9)}{s^2(s+1)}$ ۴) $\frac{k(s+1)}{s^2(s^2+s+9)}$



$\frac{k(s+1)}{s^2(s^2+s+9)}$ (4 $\frac{k(s^2+3s+9)}{s^2(s+1)}$ (3 $\frac{k(s^2+2s+1)}{s^2(s+3)}$ (2 ✓ $\frac{k(s+1)}{s(s+3)^2}$ (1

$1-4=-3$ $2-3=-1$ ✓ $2-3=-1$ ✓ $3-2=1$ $1-3=-2$

$0-2=-2$ ✓ $0-2=-2$ ✓ $3-1=2$



$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(s+3)^1}$

شیب نهایی اندازه = تعداد صفرها − تعداد قطبها ← ② × ①

$\frac{\text{شیب نهایی اندازه}}{20}$

$5 \longrightarrow -15$ در یک دهنه

-20 dB/dec

$\frac{-20}{20} = -1$ = تعداد صفرها − تعداد قطبها ⟵

③ شیب اولیه ← -40 dB/dec

$\frac{-40}{20}$ = تعداد صفرهای در مبدأ − تعداد قطبهای در مبدأ

$-2 = \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim$

④ حل صفرها و قطبها ←

$\frac{|40|}{20} = 2$ $(s+1)^2$

$\frac{|-20|}{20} = 1$ $\frac{}{(s+3)^1}$

تغییر شیب اندازه ← افزایش ← صفر ← صورت
کاهش شیب ← خروج

$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(s+3)}$

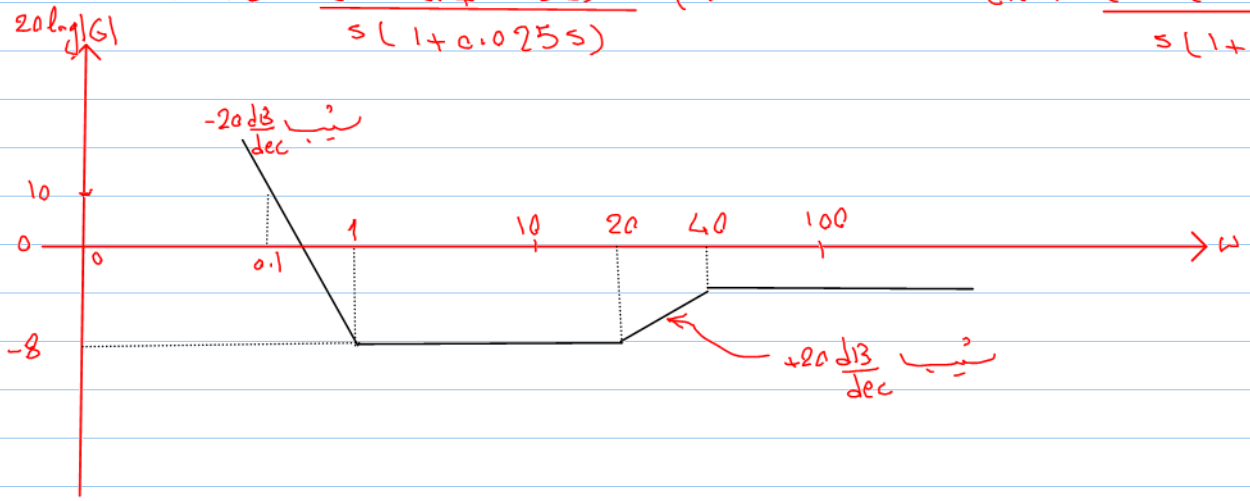
مکانیک ۸۹. نمودار مجانبهای دامنه بود یک سیستم دو زیر توسیع شده است. نزدیکترین تابع تبدیل متناظر با این نمودار کدام است؟

1) $\frac{0.4(1+s)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$

2) $\frac{0.28(1+s)(1+0.025s)}{1+0.05s}$

3) $\frac{0.04(1+s)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$

4) $\frac{0.028(1+s)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$



X (1)

(2) عدد صفرها − عدد قطبها = $\frac{0}{20}$

0 =

X (3)

(4) بدل صفرها قطبها

$\frac{|20|}{20} = 1$

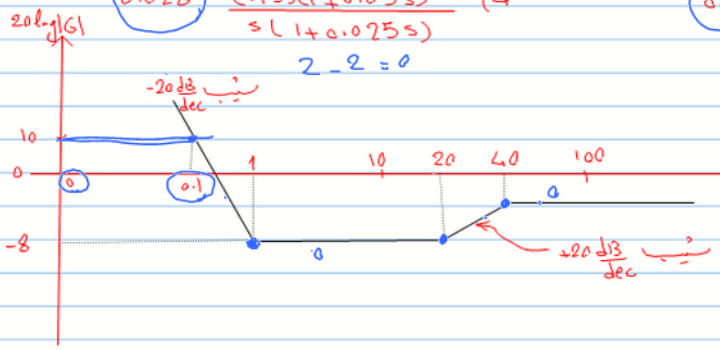
$\frac{|20|}{20} = 1 \qquad \frac{1.20|}{20} = 1$

(1) $\frac{0.4(1+s)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$ — $2-2=0$

(2) $\frac{0.28(1+s)(1+0.025s)}{1+0.05s}$ — $2-1=1$

(3) $\frac{0.04(1+s)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$ — $2-2=0$

(4) $\frac{0.028(1+s)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$ — $2-2=0$



$$G(s) = \frac{(s+1)^1(s+20)^1}{s(s+40)^1} = \frac{20(s+1)(1+0.05s)}{40s(1+0.025s)}$$

(5) انتازه اولیه

$$G(s) = k \times \frac{1}{2} \frac{(s+1)(1+0.05s)}{s(1+0.025s)}$$

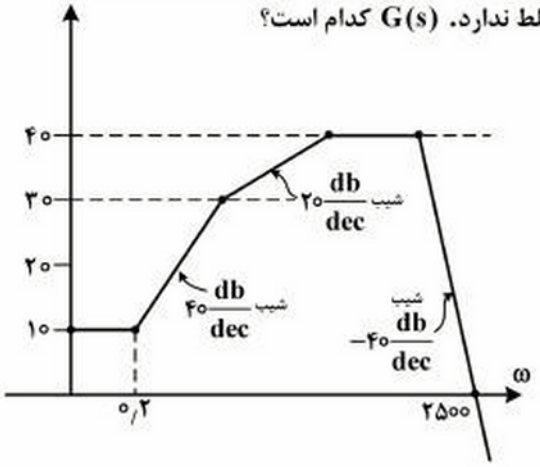
$\log_b a = c \rightarrow a = b^c$

$20\log|G(j0.1)| = 10 \rightarrow \log|G(j0.1)| = \frac{1}{2}$

$|G(j0.1)| = \sqrt{10} \rightarrow$

$$\left|k \frac{1}{2}\right| \frac{|(1+j0.1)||1+j0.1\times0.05|}{|j0.1||1+j0.1\times0.025|} = \sqrt{10} \rightarrow k =$$

شکل زیر، نمایش تقریبی مجانب‌های دیاگرام بود (Bode diagram) برای سیستمی با تابع تبدیل $G(s)$ است که هیچ قطب و صفری در نیم‌صفحهٔ سمت راست صفحهٔ مختلط ندارد. $G(s)$ کدام است؟

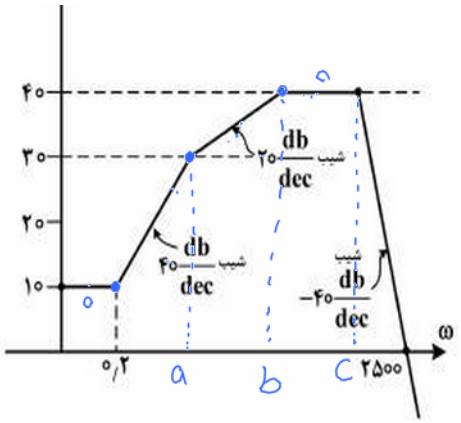


۱) $\frac{۳٫۱۶(۱+۵s)^۲}{(۱+۱٫۵۸s)(۱+۰٫۵s)(۱+۰٫۰۰۰۴s)^۲}$

۲) $\frac{۴٫۷۱(۱+۰٫۲s)^۲}{(۱+۳٫۲s)(۱+۳۲s)(۱+۲۵۰۰s)^۲}$

۳) $\frac{۹۴٫۶(۱+۰٫۲s)^۲}{(۱+s)(۱+۵s)(۱+۵۰s)^۲}$

۴) $\frac{۲٫۷۲(۱+s)(۱+۲s)}{(۱+۳٫۲s)(۱+۰٫۵s)(۱+۳٫۲s)}$



$$\frac{۳/۱۲(1+0.5s)^{۲}}{(1+۱/۵۸s)(1+۰/۵s)(1+۰/۰۰۰۴s)^{۲}} \quad (۱$$

$$\frac{۴/۷۵(1+۰/۲s)^{۲}}{(1+۴/۲s)(1+۳۲s)(1+۲۵۰۰s)^{۲}} \quad (۲$$

$$\frac{۹۴/۶(1+۰/۲s)^{۲}}{(1+s)(1+۵s)(1+۵۰s)^{۲}} \quad (۳$$

$$\frac{۲/۷۲(1+s)(1+۲s)}{(1+۳/۲s)(1+۰/۵s)(1+۳/۲s)} \quad (۴$$

-0.2

$1+0.2s=0 \rightarrow s=\frac{-1}{2}=-5$

$\frac{-40}{20}=-2=$ قطبها - صفرها

$$G(s)=k\frac{(s+0.2)^2}{(s+a)^1(s+b)^1(s+c)^2}$$

$=k(0.2)^2\ (1+5s)^2$

$\frac{|-40|}{20}=2$

$\frac{|-20|}{20}=1$

$\frac{|-20|}{20}=1$

$\frac{|-40|}{20}=2$

① ✓ 2-4=-2

② ✓ 2-4=-2

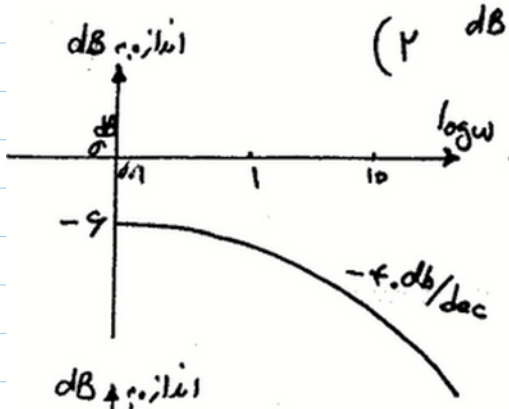
③ ✓ 2-4=-2

④ ✓ 2-3=-1

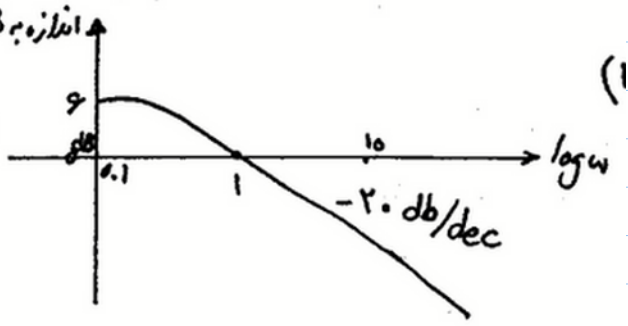
برق ۸۶

۰ سیستمی با معادلات حالت $y = [0\ 1]x$ و $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$ توصیف می‌شود پاسخ فرکانسی این سیستم کدام است؟

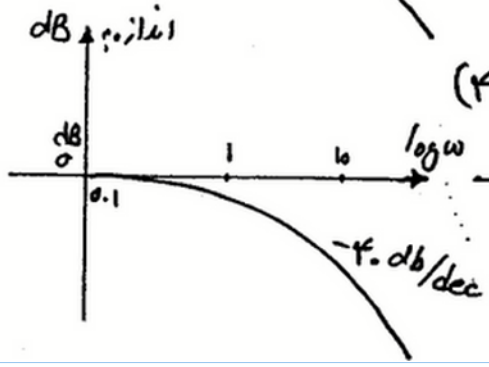
(۲



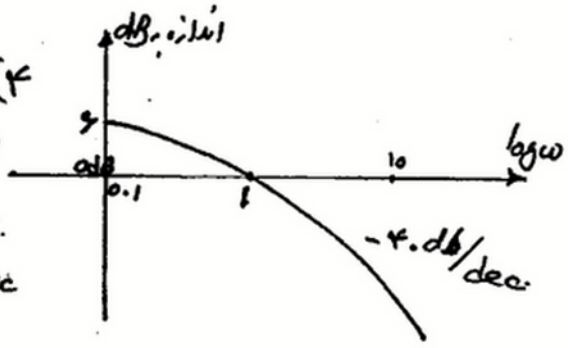
(۱



(۴



(۳



$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} \times u \end{cases}$$

$G(s) = ?$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + \cancel{D}^{0}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix} \rightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{2}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} + 0 \\ \frac{2}{(s-1)^2} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{(s-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{(s-1)^2} \end{bmatrix} = \frac{2}{(s-1)^2}$$

$$G(s) = \frac{2}{(s-1)^2}$$

$\times$ ① ② شیب نهایی

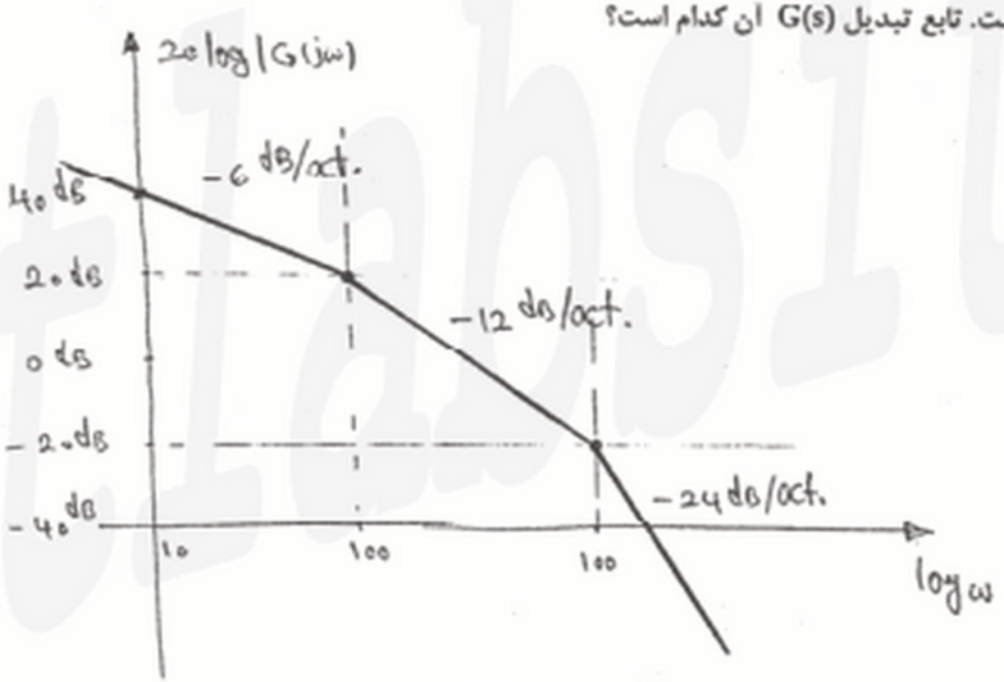
شیب نهایی $= 20 \times (0-2) = -40\ dB/dec$ گزینه ۱ صحیح

فرکانس گزینه‌های نقطه شروع $\leftarrow$ $\omega = 0.1$

$$20\log|G(j0.1)| = 20\log\frac{|2|}{|(j0.1-1)^2|} = 20\log 2 - 20\log\underbrace{|j0.1-1|^2}_{\approx 1} = 20\log 2$$

$$\log a = \begin{cases} \text{مثبت} & a > 1 \\ \text{منفی} & 0 < a < 1 \end{cases} \qquad 20\log 2 > 0 \rightarrow$$

منحنی دامنه بد در شکل زیر داده شده است. تابع تبدیل G(s) آن کدام است؟

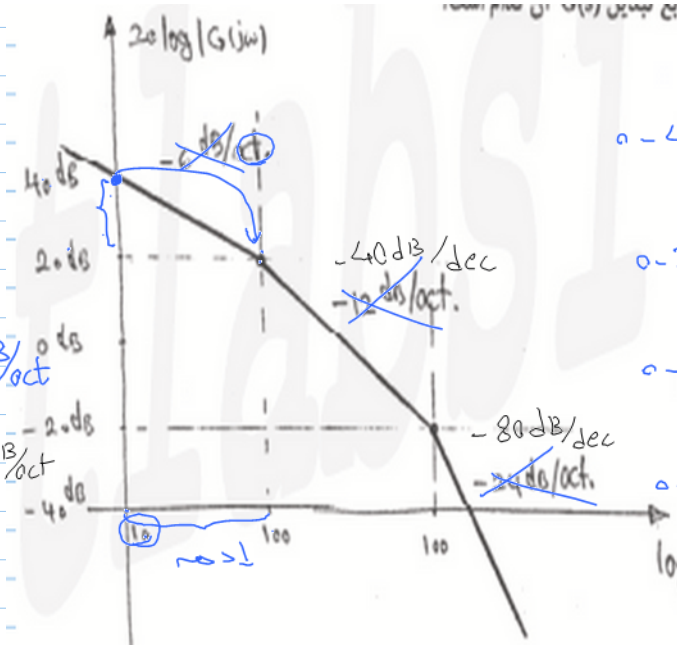


۱) $\frac{10^8}{s(s+100)(s+1000)^2}$

۲) $\frac{10^8}{s(s+100)(s+1000)}$

۳) $\frac{10^7}{(s+100)(s+1000)^2}$

۴) $\frac{10^{11}}{s(s+100)(s+1000)^2}$



octave ← هشت برابر

$-6\,dB/oct \rightarrow$ دو برابر شدن ω هشت برابر شدن اندازه dB کاهش دارد.

شیب اولیه $= -20\,dB/dec = -6\,dB/oct$

$-80\,dB/dec = -24\,dB/oct$

$0-4=-4$ $\quad \times \dfrac{10^{4}\,k}{s(s+100)(s+1000)^2}$ (1)

$0-3=-3$ $\quad \times \dfrac{10^{4}}{s(s+100)(s+1000)}$ (2)

$0-3=-3$ $\quad \times \dfrac{10^{7}}{(s+100)(s+1000)^2}$ (3)

$0-4=-4$ $\quad \times \dfrac{10^{11}\,k}{s(s+100)(s+1000)^2}$ (4) ✓

شیب نهایی اندازه ← $\dfrac{-80\,dB}{dec}$ ← (2) × (1)

$\dfrac{-80}{20}$ = تعداد صفرها − تعداد قطب‌ها

اندازه اولیه ← (5) × (4) × (3)

$20\log|G(j10)| = 40$

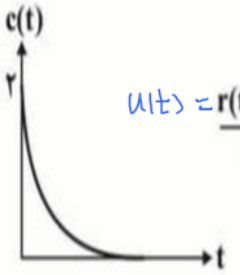
$\log|G(j10)| = 2 \rightarrow |G(j10)| = 100$

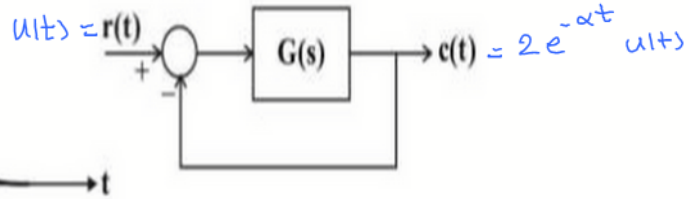
$$G(j10) = \frac{k}{j10\times(\frac{j10}{100}+1)(\frac{j10}{1000}+1)^2}$$

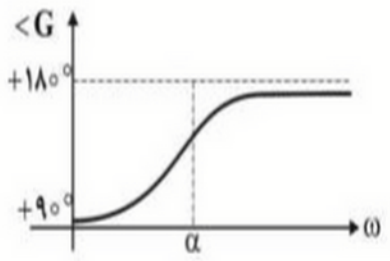
$$|G(j10)| \simeq \frac{k}{|j10\times100\times10^{6}|} = \frac{k}{|j|\,|10^{9}|} = \frac{k}{10^{9}}$$

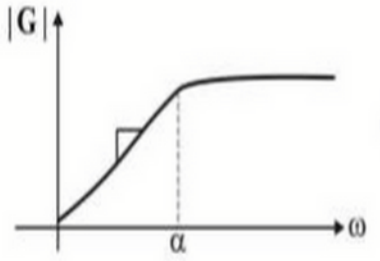
$$\frac{k}{10^{9}} = 10^{2} \rightarrow k = 10^{11}$$

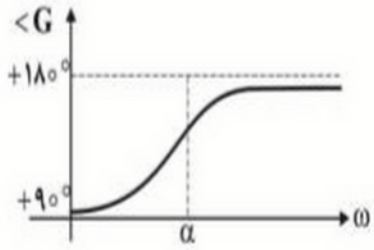
گر پاسخ پلهٔ یک سیستم حلقه‌بستهٔ فیدبک واحد به شکل زیر باشد $(c(t)=2e^{-\alpha t}u(t))$؛ دیاگرام بودی
سیستم حلقه‌باز $G(s)$، در کدام گزینه به‌درستی رسم شده است؟

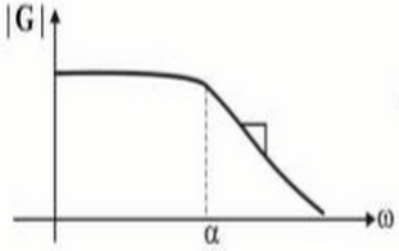


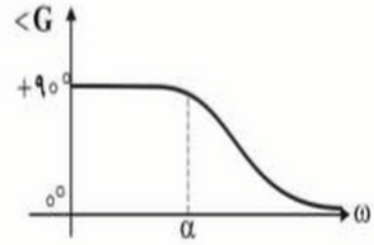


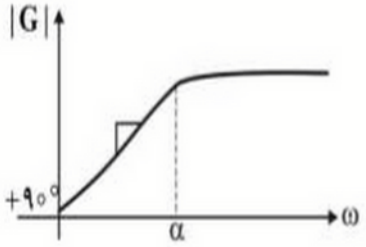


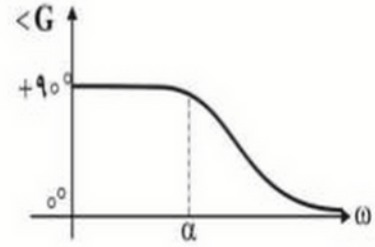


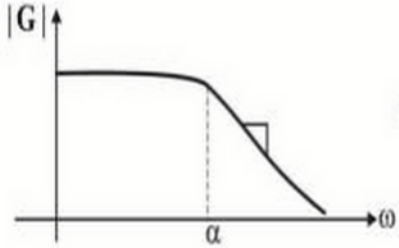










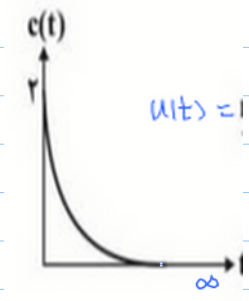


forum.konkur.in

$c(t) = 2e^{-\alpha t}\,u(t)$ $\qquad r(t) = u(t)$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{s+\alpha}}{\frac{1}{s}} = \frac{2s}{s+\alpha} = \frac{\text{مورد } G}{\text{مورد } G + \text{مخرج } G}$$

$$G(s) = \frac{2s}{s+\alpha-2s} = \frac{2s}{\alpha - s} \quad ; \quad \alpha \text{ مثبت یا منفی؟}$$



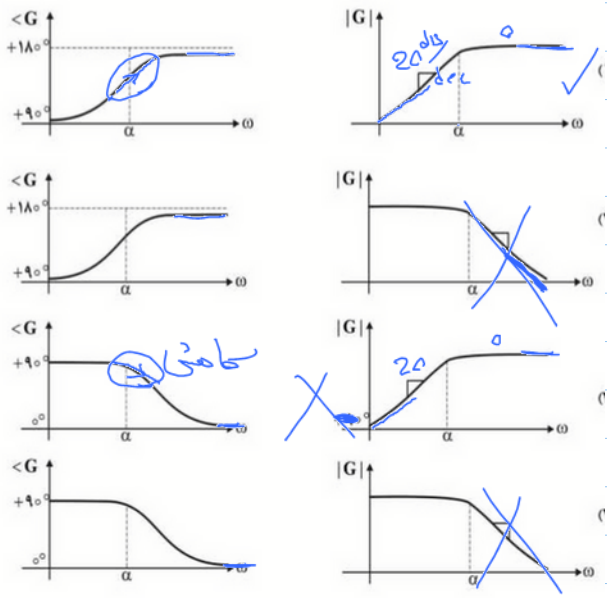
$c(t) = 2e^{-\alpha t}\,u(t)$

$c(\infty) = 0 \rightarrow 2e^{-\alpha\times\infty} \times 1 = 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0$ $\qquad e^{-\infty} = 0$

$\alpha > 0$

$\alpha = -1 \qquad e^{-(-1)\infty} = e^{\infty} = \infty$

$$G(s) = \frac{2s}{\alpha - s} \quad ; \quad \alpha > 0$$



① مخرج کسر ما صفر میشود ⟹ شیب خطی فاز = 0 ✓

② شیب خطی اندازه: $20(1-1) = 0$

③ شیب اولیه اندازه: $20\times(1-0) = 20\ dB/dec$

④ $\alpha > 0 \Rightarrow s = \alpha$ کاهش شیب اندازه و افزایش فاز

$$G(s) = \frac{2s}{\alpha - s} \rightarrow$$

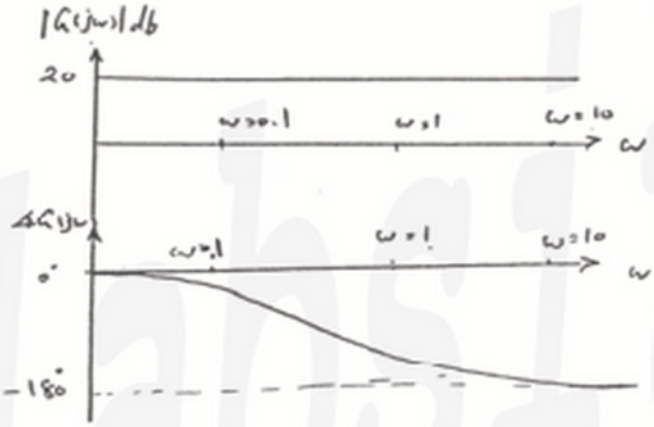
جلسه 50 کنترل خطی

نمودار بودی

قوانین طلایی نمودار بودی

برق ۹۱

۶۷- دیاگرام بود (Bode) یک سیستم بصورت تقریبی درشکل زیر رسم گردیده است. تابع انتقال این سیستم کدام است؟

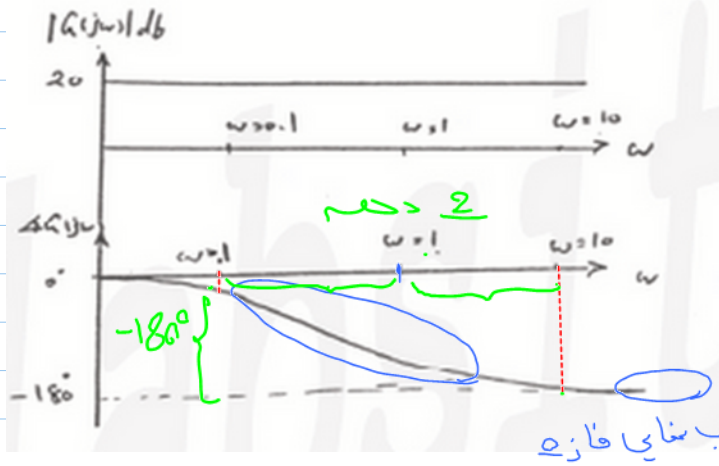


۱) $G(s) = 10 \frac{s+1}{s-1}$

۲) $G(s) = 10 \frac{s-1}{s+1}$

۳) $G(s) = 10 \frac{s-1}{s+1} e^{-s}$

۴) $G(s) = 10 \frac{s+1}{s-1} e^{-s}$



$G(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{s-1}$ (۱)

$G(s) = 10 \cdot \frac{s-1}{s+1}$ (۲) ✓

$G(s) = 10 \cdot \frac{s-1}{s+1} e^{-s}$ (۳)

$G(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{s-1} e^{-s}$ (۴)

① تأخیر ←

$\frac{s+a}{s-a}$ $\frac{s-a}{s+a}$ ←

عامل استثنایی تغییر

فازبدون تغییراندازه

تأخیر مذارع ← سبب نمایی فازه

افزایش فاز $\frac{s+a}{s-a}$

کاهش فاز $\frac{s-a}{s+a}$ ✓ صفر ست راست ← کاهش فاز

قطب ست چپ ← کاهش فاز

دروکاس a ← کاهش فاز

از دروکاس $\frac{a}{10}$ تا $10a$ باعث کاهش فاز 180° با شیب $-90^\circ/dec$ می‌شود. $\frac{s-a}{s+a}$

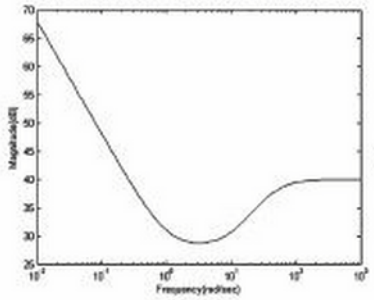
$\frac{-180^\circ}{2\,dec} = -90^\circ/dec$

پاسخ ضربهٔ سیستم حلقه بستهٔ با فیدبک واحد منفی به صورت زیر است:

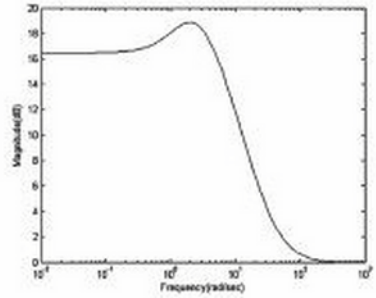
$$h(t)=K_1\delta(t)+(5e^{-5t}-K_2e^{-2t})u(t)$$

که در آن K_2 ، K_1 اعداد ثابت هستند. اگر خطای ماندگار این سیستم به ورودی‌های پله و شیب واحد صفر فرض شود، کدام نمودار معرف اندازهٔ پاسخ فرکانسی حلقه باز این سیستم خواهد بود؟

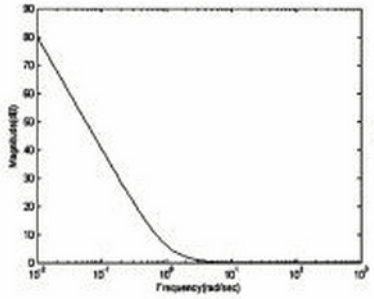
۱)



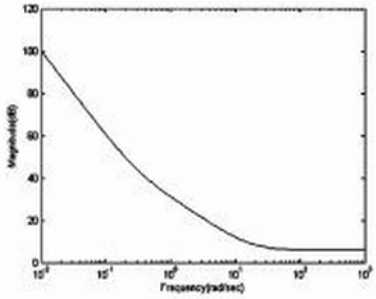
۲)



۳)



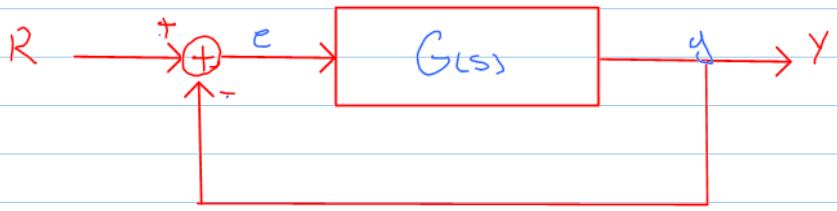
۴)



پاسخ ضربهٔ سیستم حلقه بستهٔ با فیدبک واحد منفی به صورت زیر است:

$$h(t)=K_1\delta(t)+(5e^{-5t}-K_2e^{-2t})u(t)$$

که در آن K_2 ،K_1 اعداد ثابت هستند. اگر خطای ماندگار این سیستم به ورودی‌های پله و شیب واحد صفر فرض شود، کدام نمودار معرف اندازهٔ پاسخ فرکانسی حلقه باز این سیستم خواهد بود؟



$G(s)=?$

$r(t)=\delta(t) \longrightarrow y(t)=k_1\delta(t)+5e^{-5t}u(t)-k_2e^{-2t}u(t)$

$\frac{Y(s)}{R(s)}=?T(s) \qquad Y(s)=T(s)R(s)$

$Y(s)=k_1+\frac{5}{s+5}-\frac{k_2}{s+2} \qquad R(s)=1$

$$Y(s)=\frac{k_1s^2+7k_1s+10k_1+5s+10-k_2s-5k_2}{s^2+7s+10}=T(s)\times 1$$

$$T(s)=\frac{k_1s^2+(7k_1+5-k_2)s+10k_1-5k_2+10}{s^2+7s+10}$$ حلقه بسته

$$G(s)=\frac{k_1s^2+(7k_1-k_2+5)s+10k_1-5k_2+10}{(1-k_2)s^2+(2+k_2-7k_1)s+5k_2-10k_1}$$

خطای ماندگار به ورودی پله و شیب = ۰

خطای تقریبی = $r-y$

خطای دقیق = $r-y$ $\longrightarrow$ حلقه باز $\rightarrow$ نوع سیستم

نوع ورودی > نوع سیستم $\rightarrow e_{ss}=0$

ورودی پله $\quad e_{ss}=0 \quad$ نوع سیستم > ۰

ورودی شیب $\quad e_{ss}=0 \quad$ نوع سیستم > ۱

نوع بی = { ② ← تعداد قطبهای در مبدا مختصات
✗
✗
⋮

نوع بی > ۱ →

$$G(s) = \frac{\qquad}{(\text{ضرب})s^2} \rightarrow$$

$$(1-k_2)s^2 + (2 - 7k_1 + k_2)s + 5k_2 - 10k_1 = \text{ضرب} \times s^2$$

$$5k_2 - 10k_1 = 0 \rightarrow k_2 = 2k_1$$

$$2 - 7k_1 + 2k_1 = 0 \rightarrow k_1 = \frac{2}{5} \quad , \quad k_2 = \frac{4}{5}$$

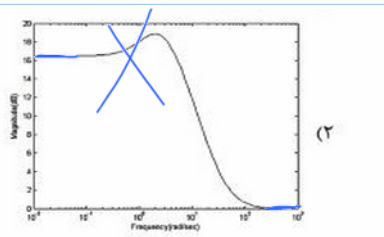
$$G(s) = \frac{\frac{2}{5}s^2 + (7)s + 10}{(1-\frac{4}{5})s^2} = \frac{2s^2 + 35s + 50}{s^2}$$

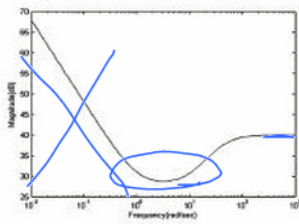
$$G(s) = 2\ \frac{s^2 + 17.5s + 25}{s^2}$$

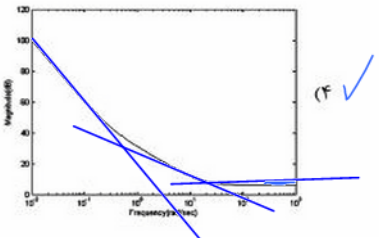
✗ ① ✗ ② شیب صفر

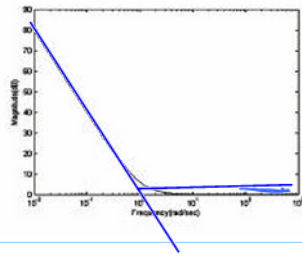
$20(0-2) = -40$ = شیب ③

④ صفرها و قطبها:


(۲)




(۴) ✓



$$s^2 + 17.5s + 25 = 0$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

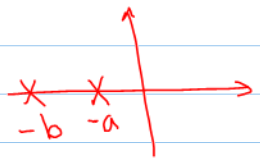
$\omega_n = 5 \quad 2\xi \times 5 = 17.5 \rightarrow \xi = \frac{17.5}{10} = 1.75 > 0 \rightarrow$ فوق میرا

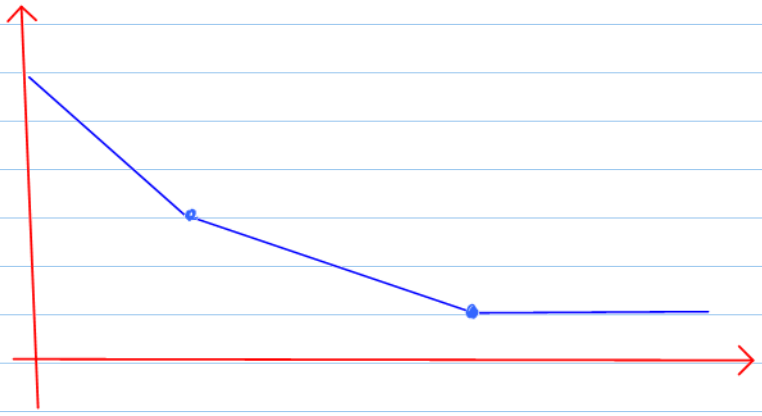
↓

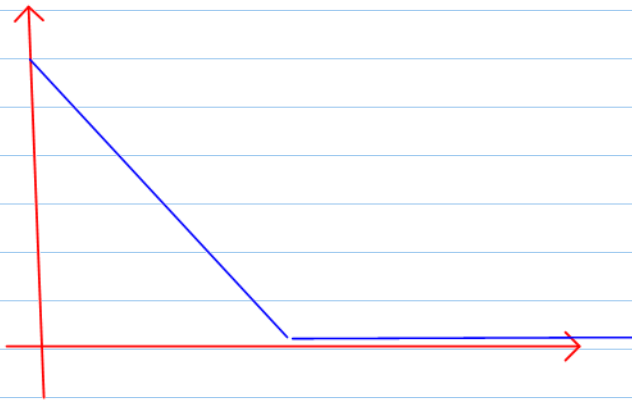
دو ریشه حقیقی منفی

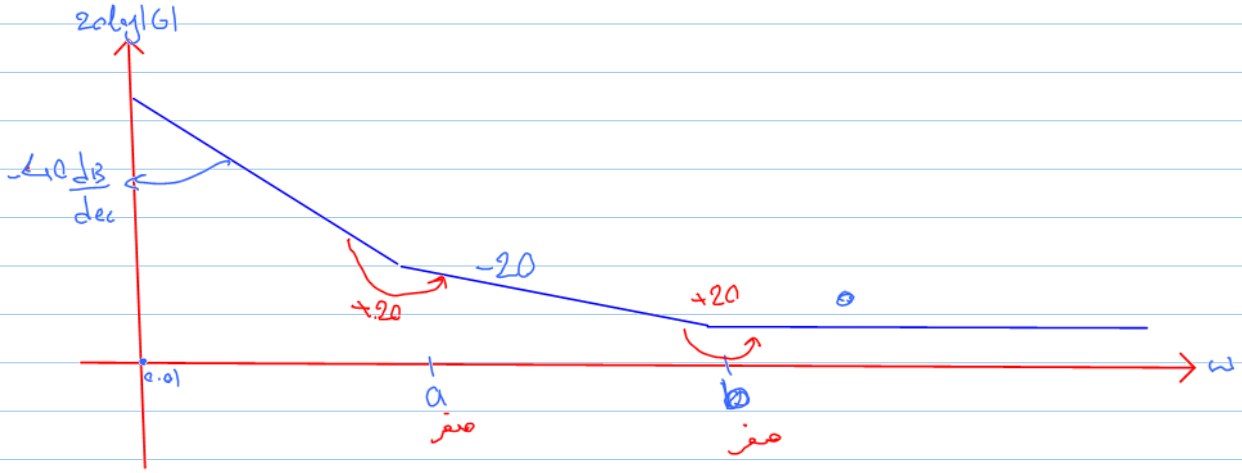
دو تا صفر حقیقی منفی →
- $-a \rightarrow a$
- $-b \rightarrow b$
- قطب $0 \rightarrow 0$

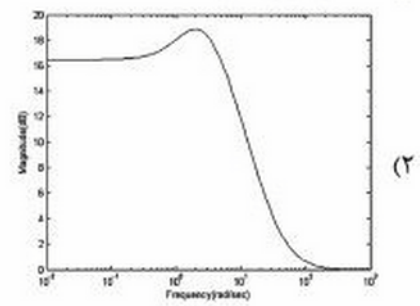
صفرهای حقیقی



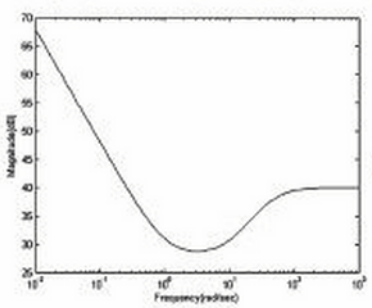


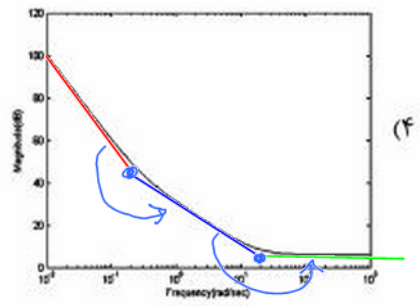



20log|G|
-40 dB/dec
-20
+20
+20
0.01
1
صفر
1
صفر
ω

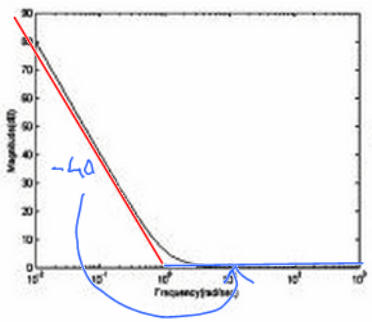

Magnitude(dB)
Frequency(rad/sec)

(٢

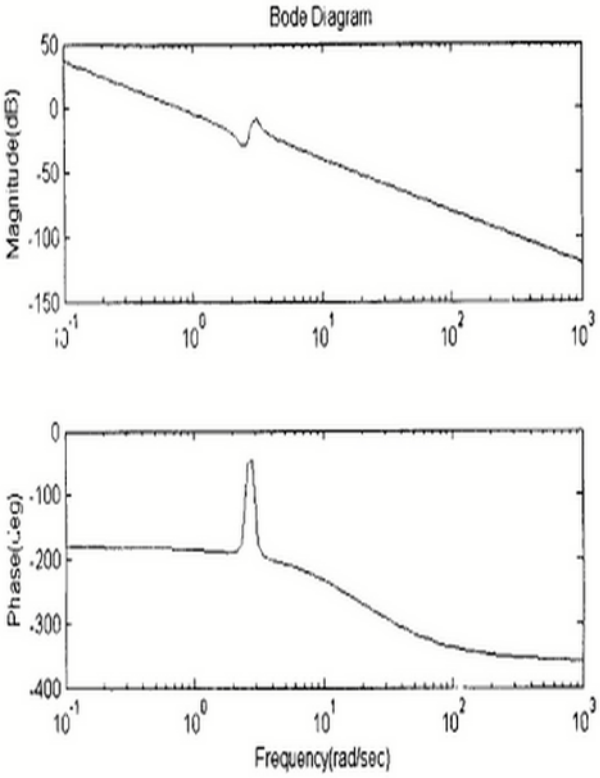

Magnitude(dB)
Frequency(rad/sec)


Magnitude(dB)
Frequency(rad/sec)

(٤


-40
Magnitude(dB)
Frequency(rad/sec)

۱- پاسخ فرکانسی $G(s)$ داده شده است. تابع تبدیل کدام است؟



۱) $\zeta_1 \cong \zeta_2$, $\alpha > 0$, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{s^2(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_n^2)(1+\alpha s)}$$

۲) $\alpha > 0$, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$, $\zeta_1 \cong \zeta_2$

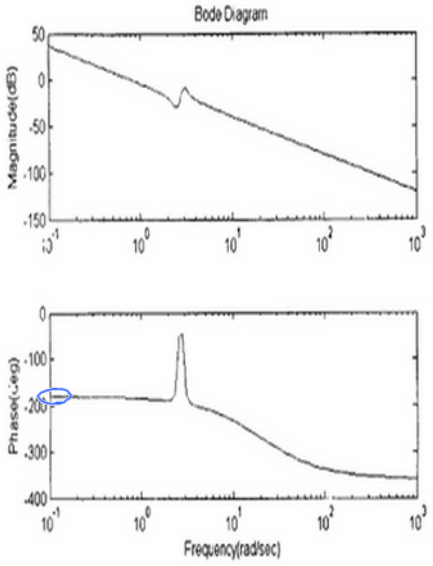
$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(s-\alpha)}{s^2(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)(s+\alpha)}$$

۳) $\alpha > 0$, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$, $\zeta_1 >> \zeta_2$

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{s^2(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_n^2)(1+\alpha s)}$$

۴) $\alpha > 0$, $\omega_{n1} > \omega_{n2}$, $\zeta_1 \cong \zeta_2$

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{s^2(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_n^2)(1+\alpha s)}$$



3-5 = -2

$\zeta_1 \cong \zeta_2$, $\alpha > 0$, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_n^2)(1+\alpha s)} \quad \frac{1}{\alpha}$$ ✓(1

3-5 = -2

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha)}{(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)(s+\alpha)} \quad \alpha$$

$\alpha > 0$, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$ (۲ , $\zeta_1 \cong \zeta_2$

3-5 = -2

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_n^2)(1+\alpha s)}$$

$\alpha > 0$, $\omega_{n1} < \omega_{n2}$ (۳ , $\zeta_1 \gg \zeta_2$

3-5 = -2

$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{(s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_n^2)(1+\alpha s)}$$

$\alpha > 0$, $\omega_{n1} > \omega_{n2}$ (۴ , $\zeta_1 \cong \zeta_2$

$\frac{1-\alpha s}{1+\alpha s}$ $\frac{s-\alpha}{s+\alpha}$ ④ شیب اولیه ③ ×② ×e^{-Ts} ①

$\frac{s-a}{s+a}$ ← از فاز اولیه 180° شروع شده و $-90°/dec$

$\frac{a-s}{a+s}$ ← ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ $-90°/dec$

فاز اولیه = $-180°$

حالت اول $\frac{(s^2 + 2\xi_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{s^2(s^2 + 2\xi_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)(1+\alpha s)}$ گزینه ۳ ,۴ ✓

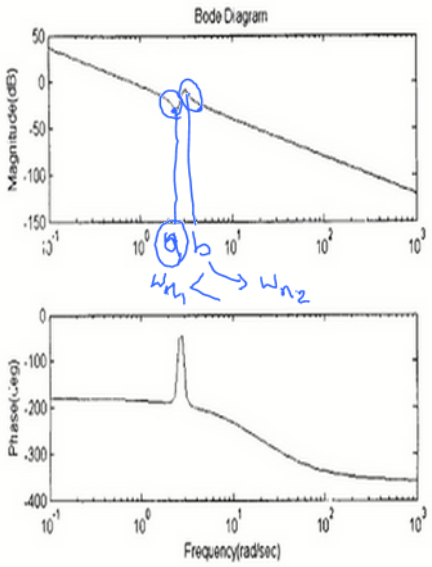
حالت دوم ~ $\frac{(s^2 + 2\xi_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(s-\alpha)}{s^2(s^2 + 2\xi_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)(s+\alpha)}$ گزینه 2

1) $\tilde{G}(s) = \frac{(s^2 + 2\xi_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2)(1-\alpha s)}{(s^2 + 2\xi_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)(1+\alpha s)}$ $\tilde{G}(0) = \frac{\omega_{n1}^2}{\omega_{n2}^2} > 0$

فاز اولیه = $0 + 2\times -90 + 0\times 90 = -180°$ ✓

2) $\tilde{G}(0) = \frac{\omega_{n1}^2 \times -\alpha}{\omega_{n2}^2 \times \alpha} = -\frac{\omega_{n1}^2}{\omega_{n2}^2} < 0$

فاز اولیه = $180 + 2\times -90 + 0\times 90 = 0$ ✗



$\omega_{n_1} > \omega_{n_2}$ یا $\omega_{n_1} < \omega_{n_2}$

قله ـ صفر یا قطب قطار

قله دوم با ξ کم ← $s^2 + 2\xi a s + a^2$

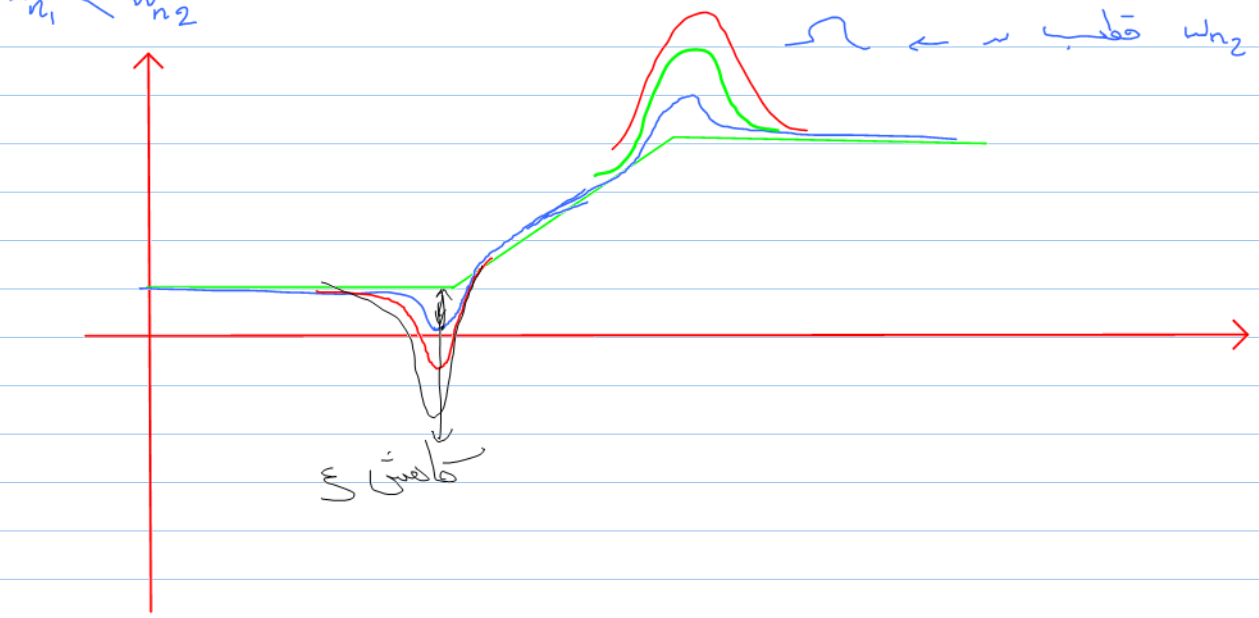
ـ ـ پایین ← $\frac{1}{s^2 + 2\xi b s + b^2}$

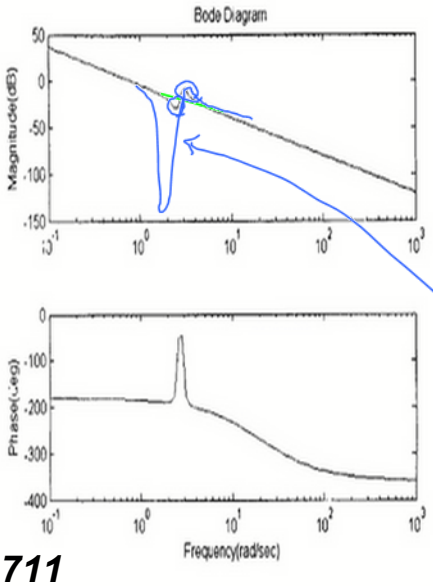
$$G(s) = \frac{(s^2 + 2\xi a s + a^2)(1 - \alpha s)}{s^2 (s^2 + 2\xi b s + b^2)(1 + \alpha s)} = \frac{(s^2 + 2\xi_1 \omega_{n_1} s + \omega_{n_1}^2)(1 - \alpha s)}{s^2 (s^2 + 2\xi_2 \omega_{n_2} s + \omega_{n_2}^2)(1 + \alpha s)}$$

دو فرکانس ω_{n_1} صفر مثلا ←

ـ ـ قطب ـ ← ω_{n_2}

$\omega_{n_1} < \omega_{n_2}$





ی متناسب با ارتفاع قله ←

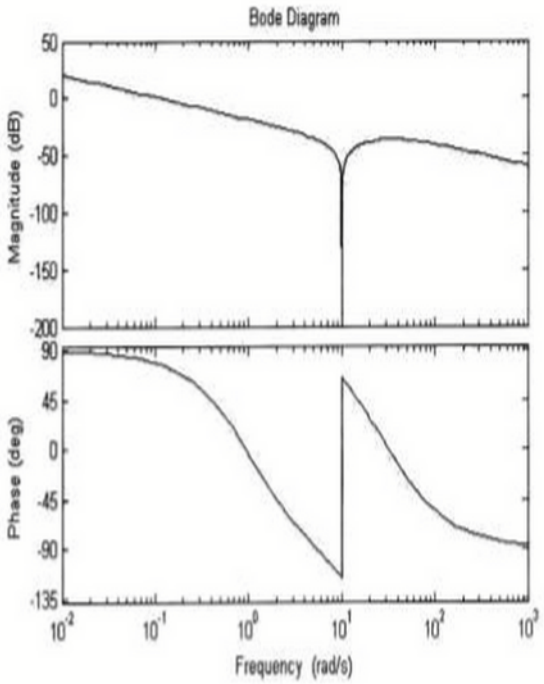
ی دو فرکانس ← ارتفاع قله‌ها یکسان

$\xi_1 << \xi_2$

$\xi_2 = 0.5$

$\xi = 0.001$

دیاگرام بودی زیر متعلّق به کدام تابع تبدیل است؟

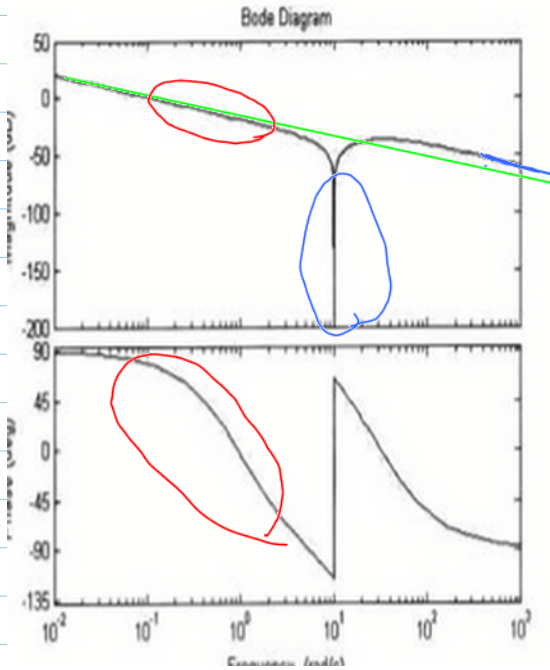


۱) $G(s)=\frac{(s-1)(s+30)^2}{s(s^2+10)(s+1)}$

۲) $G(s)=\frac{(1-s)(s^2+10)}{s^2(s+30)}$

۳) $G(s)=\frac{(s-1)(s^2+10)}{s(s+1)(s+30)^2}$

۴) $G(s)=\frac{(1-s^2)(s+30)^2}{s^2(s^2+10)}$



۳-۴=-۱ $G(s)=\frac{(s-1)(s+30)^2}{s(s^2+10)(s+1)}$ (۱

۳-۴=-۱ $G(s)=\frac{(1-s)(s^2+10)}{s^2(s+30)}$ (۲

۳-۴=-۱ $G(s)=\frac{(s-1)(s^2+10)}{s(s+1)(s+30)^2}$ (۳ ✓

۴-۴=۰ $G(s)=\frac{(1-s^2)(s+30)^2}{s^2(s^2+10)}$ (۴

① × ② = شیب نهایی $\neq 0$ (تعداد قطب − تعداد صفر) × 20

تعداد قطب − تعداد صفر $\neq 0$

③ شیب اولیه = شیب نهایی = $20(-1) = -20$

$-20 = 20($ تعداد قطب در مبدا − تعداد صفر در مبدا $)$

تعداد قطب در مبدا = 1

۱) $G(s)=\frac{(s-1)(s+30)^2}{s(s+1)(s^2+10)}$ ✓ ← کاهش فاز بدون تغییر شیب اندازه $\frac{s-1}{s+1}$

۳) $G(s)=\frac{(s-1)(s^2+10)}{s(s+1)(s+30)^2}$ ✓ $s^2+(\sqrt{10})^2$

s^2+a^2 ← تغییر ناگهانی فاز و ایجاد شکل سونی در نمودار اندازه ✓

$\frac{1}{s^2+a^2}$ ← ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~

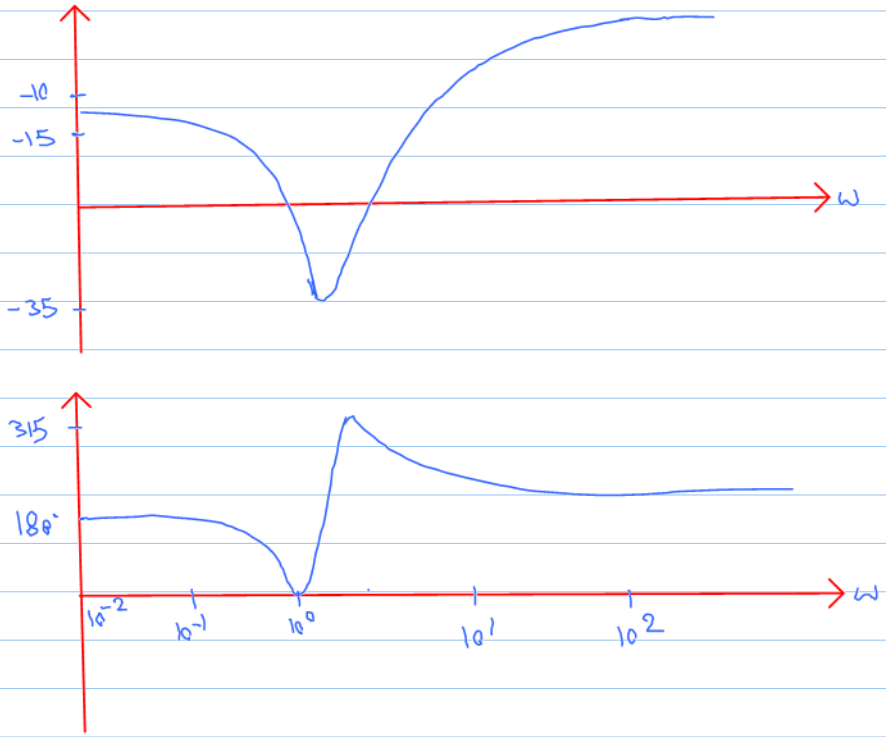
کنکوری ۹۱. پاسخ فرکانسی تابع تبدیل دیاگرام داده شده است. تابع تبدیل آن کدام است؟

1) $\frac{-(s^2+0.2s+2)}{(s+2)^2}$

2) $\frac{-(s^2+0.1s+1)}{(s+2)^2}$

3) $\frac{s^2+0.1s+1}{(s+2)^2}$

4) $\frac{-(s^2+0.1s+1)}{s^2+0.2s+4}$

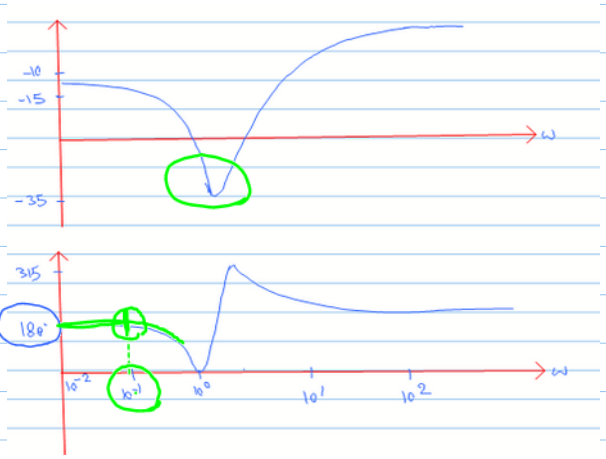


سیستم مینیمم فاز ① ② ③

فاز اولیه ← حل صفرها و قطبها ④

در کوچک انتخاب ← $\sqrt{s^2+2\xi as+a^2}$ ← ✓

$\frac{1}{s^2+2\xi as+b^2}$ ← ✗



(1 $\frac{-(s^2+0.2s+2)}{(s+2)^2}$ ✗ ω_n^2 (2 $\frac{-(s^2+0.1s+1)}{(s+2)^2}$ ✓ ω_n^2 (3 $\frac{s^2+0.1s+1}{(s+2)^2}$ ✗ (4 $\frac{-(s^2+0.1s+1)}{s^2+0.2s+4}$

$\angle G(0) = ?$

1) $G(0) = -\frac{2}{4} < 0 \rightarrow 180^\circ$

2) $G(0) = -\frac{1}{4} < 0 \rightarrow 180^\circ$

3) $G(0) = \frac{1}{4} > 0 \rightarrow 0$

4) $G(0) = -\frac{1}{4} < 0 \rightarrow 180^\circ$

1) ✗ $\sqrt{2}$ $|-2| = 2$ وکاملاً گویاست

2) ✓ 1 $|-2| = 2$

$s^2+2\xi as+a^2 \rightarrow$ باعث ایجاد قله در نزدیکی a می شود.

از $\frac{a}{10}$ شروع به افزایش فاز می‌کند و تا $10a$ با شیب $+90^\circ/dec$ فاز را افزایش می دهد.

10^{-1}

$\frac{a}{10} = 10^{-1} \rightarrow \underline{a = 1}$

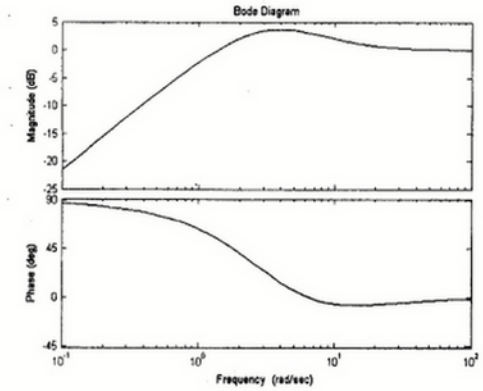
جلسه آینده باز هم حل تمرینهای بودی (با درجه سختی بالاتر)

جلسه 51 کنترل خطی

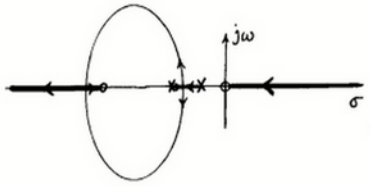
عوذل بودی

برق ۹۲

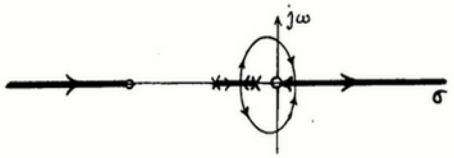
سیستم فیدبک واحد با تابع تبدیل مسیر پیشروی $G(s)$، که پاسخ فرکانسی آن در شکل نشان داده شده است را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌های سیستم $(k < 0)$ و وضعیت قطب‌ها به ازاء $k = -1$ چگونه است؟



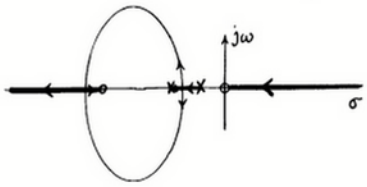
۱) با دو ریشه در LHP



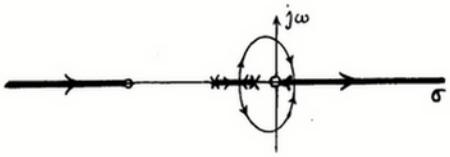
۲) با دو ریشه در RHP



۳) یک ریشه در ∞، یک ریشه در LHP



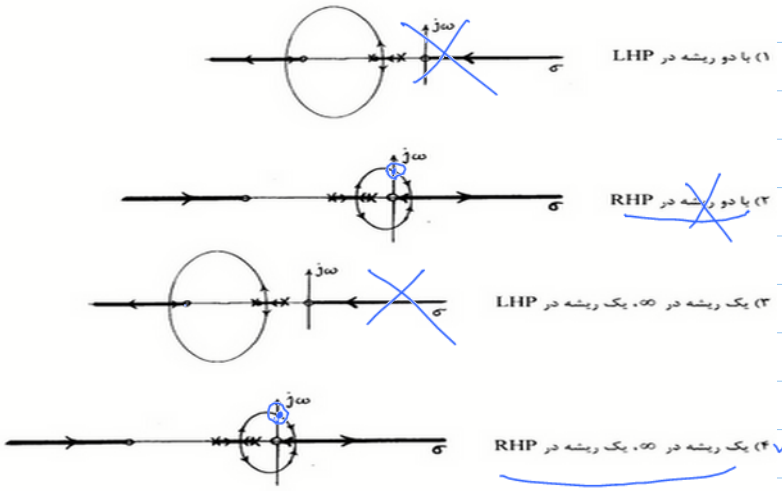
۴) یک ریشه در ∞، یک ریشه در RHP

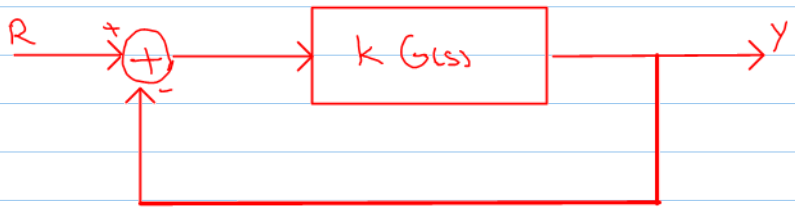


چرا عودار بودی را دادن است؟

تابع تبدیل $G(s)$ را بدست آورید.

تابع تبدیل تقریبی $G(s)$

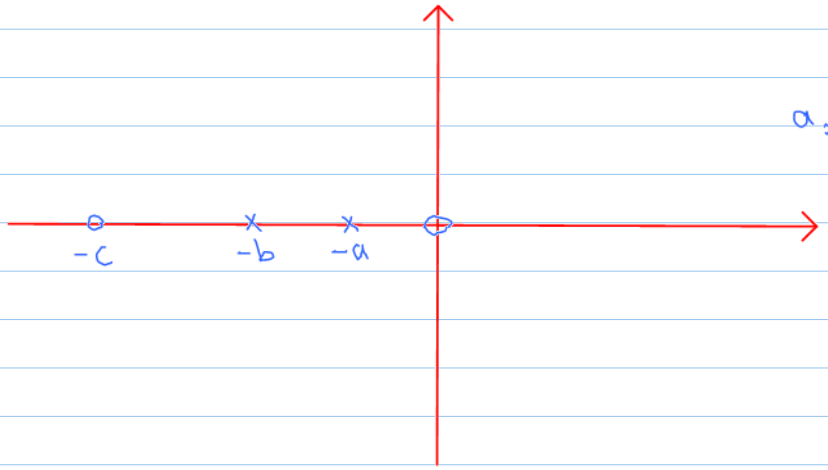




* مکان هندسی ریشه‌ها برای $k<0$

* برای $k=-1$ قطب‌های حلقه‌بسته؟

عودار بودن لازم نیست.



$a,b,c>0$

$a<b<c$

$$G(s)=\frac{s(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$

$$\Delta(s)=1+kG(s)=0$$

$$\Delta(s)=1+\frac{ks(s+c)}{(s+a)(s+b)}=0$$

$$\Delta(s)=(1+k)s^2+(kc+a+b)s+ab=0$$

مکان با فرم موضوع تلاقی دارد ← $\Delta(s)$ برای یک kای دارای قطب‌های روی محور $j\omega$

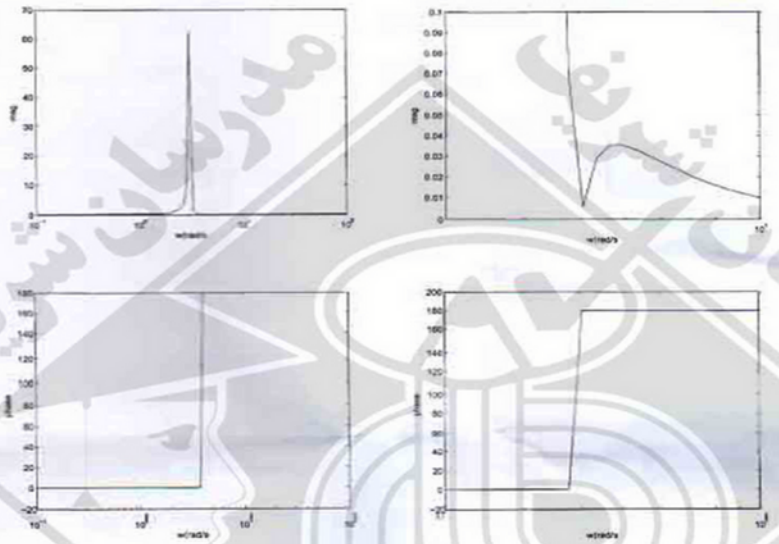
$\Delta(s)$ ← درجه 2 ← $k=-\frac{(a+b)}{c}<0$ ✓ , $ab>0$ ✓ , $1+k>0 \rightarrow k<-1$ ✓

مکان با فرم موضوع تلاقی دارد.

$k=-1 \rightarrow \Delta(s)=(a+b-c)s+ab=0$ ← یک ریشه محدود دارد.

ریشه دوم در ∞

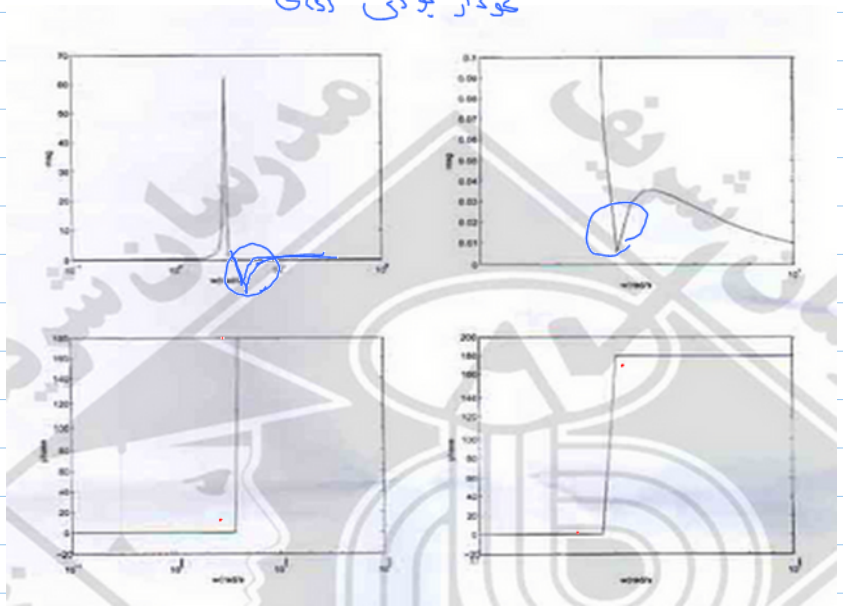
۶۶- پاسخ فرکانسی تابع تبدیل $G(s)$ که در یک سیستم فیدبک واحد به کار برده می‌شود در شکل زیر نشان‌داده شده است. (دقت کنید که اندازه پاسخ فرکانسی و نه لگاریتم آن ترسیم شده و همچنین پاسخ فرکانسی در بازهٔ ۲ تا ۱۰رادیان بر ثانیه در اشکال سمت راست بزرگنمایی شده است.) گزینهٔ صحیح کدام است؟

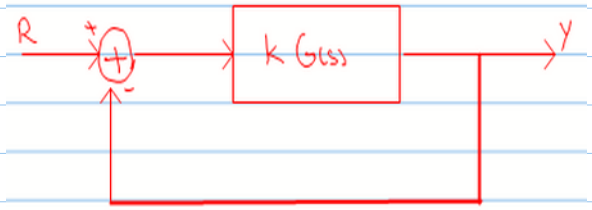


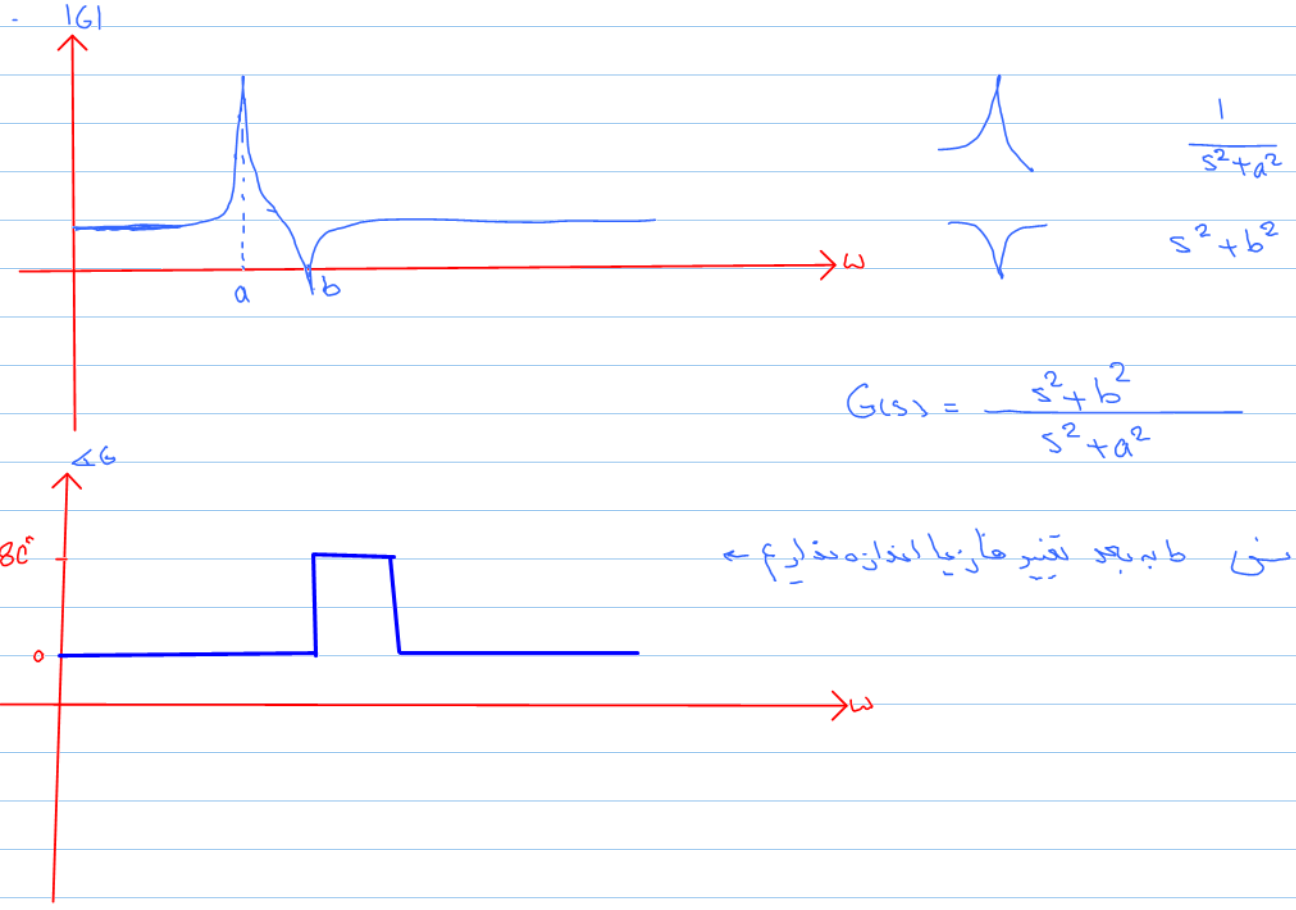
۱) تابع تبدیل $G(s)$ دارای دو صفر سمت راست است.
۲) به ازای هیچ بهره k سیستم حلقه بسته، اکیداً پایدار نمی‌شود.
۳) تابع تبدیل حلقه بسته همواره ناپایدار یا ۴ قطب سمت راست است.
۴) تابع تبدیل حلقه بسته همواره پایدار است.

تجزیه و تحلیل سیستم‌ها:

نمودار بودی $G(s)$







$$G(s) = \frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}$$

از خط سبز به بعد تغییر فاز یا اندازه نداریم ←

$$G(s) = \frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}$$

صفرها: $\begin{cases} +jb \\ -jb \end{cases}$

رد گزینه ۱

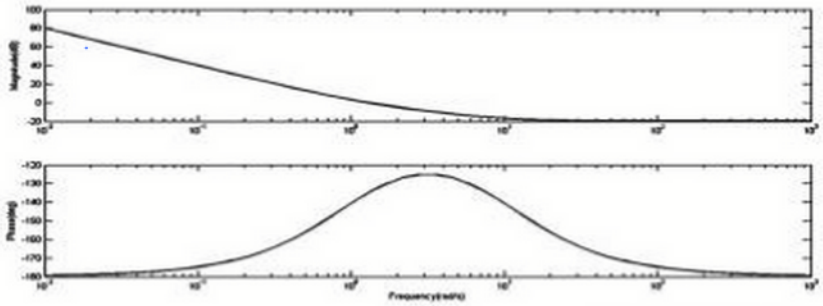
$$\Delta(s) = 1 + k\,G(s) = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + a^2 + ks^2 + kb^2 = 0 \longrightarrow \Delta(s) = (1+k)s^2 + a^2 + kb^2 = 0$$

چون ضریب s ندارد پس ناپایدار است ← گزینه ۴ رد می شود

$\Delta(s)$ از درجه ۲ است ← حداکثر ۲ قطب ← گزینه ۳ رد می شود.

دیاگرام بودی تابع تبدیل $G(s)$ در شکل زیر داده‌شده است. تابع تبدیل $G(s)$، کدام است؟



۱) $G(s)=\dfrac{(s+1)(1+0/1s)(s+3)(s+4)}{s^2(1-0/01s^2)}$

۲) $G(s)=\dfrac{(s+1)(1+0/01s^2)}{s^2(1-0/1s)}$

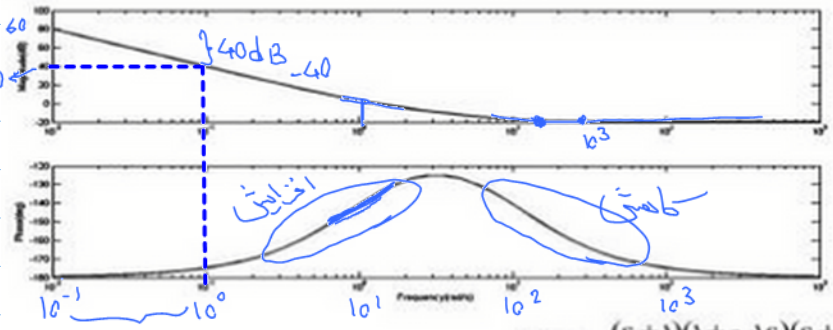
۳) $G(s)=\dfrac{-(s+1)(1+0/01s^2)}{s(1-0/1s^2)}$

۴) $G(s)=\dfrac{(s+1)(1-0/01s^2)}{s^2(s+0/2s)}$

1- X 2- شیب نمایی X

3- شیب اویه ✓

4- قطبها صفرها و قطبها



۱ دهم 4-4=0

3-3=0

3-3=0

3-3=0

$$G(s)=\frac{(s+1)(1+0/1s)(s+3)(s+4)}{s^2(1-0/01s^2)} \quad (1$$

$$G(s)=\frac{(s+1)(1+0/01s^2)}{s^2(1-0/1s)} \quad (2$$

$$G(s)=\frac{-(s+1)(1+0/01s^2)}{s(1-0/1s^2)} \quad (3$$

$$G(s)=\frac{(s+1)(1-0/01s^2)}{s^2(1+0/25)} \quad (4 \checkmark$$

شیب اویه $= \frac{-40}{1} = -40$ dB/dec

$\frac{-40}{20} = -2 \rightarrow$ 2 تا قطب دریم!

4) $1-0.01s^2 \rightarrow a^2-s^2 \rightarrow$ تغییر شیب بدون تغییر فاز

$1+0.01s^2 \rightarrow s^2+a^2 \rightarrow$ تغییر ناگهانی فاز

$1-0.01s^2 = 0.01(100-s^2) \rightarrow s=\pm 10 \rightarrow (10)$

جاهایی که شکل واضح نباشه!

→ مرحله

4) $G(s)=\frac{(s+1)(1-0.01s^2)}{s^2(s+0.2)}$

1) $G(s)=\frac{(s+1)(1+0.1s)(s+3)(s+4)}{s^2(1-0.01s^2)}$

مرحله حل کردن:

-1	1 →	صفر چپ
-10	10 →	″ ″
-3 →	3 →	″ ″
-4	4 →	″ ″
±10	10 →	قطب (استثناء)
0		

فرکانس: ۰ → ۱ → ۳ → ۷ → ۱۵

فاز: افزایش → افزایش → افزایش فاز → افزایش

افزایش بدون تغییر فاز

فاز: ۰ → افزایش → افزایش → افزایش

گزینه ۱ ← فاز همواره در حال افزایش است. عدم مطابقت با شکل ✗

* فرکانس گوشه را تعیین کنید.

فرکانس‌ها از کوچک به بزرگ مرتب

تأثیر هر عامل در فرکانس گوشه بدون تغییر فاز

تغییرات فاز را با شکل مطابقت دهیم.

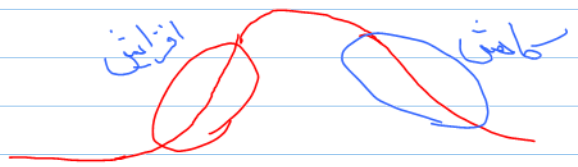
$$G(s) = \frac{(s+1)(1-0.01s^2)}{s^2(1+0.2s)}$$

- $0,0$ → قطب → ۰
- -5 → قطب سمت چپ → ۵
- -1 → صفر چپ → ۱
- ∓ 10 → صفر چپ و راست → ۱۰

بدون تغییر فاز ← $1-0.01s^2$

ω: ۰ → ۱ → ۵ → ۱۰ → ∞

فاز: ۰ → افزایش → کاهش → ۰ → ۰



هرگاه شکل واضح نبود می توان از روش زیر استفاده کرد:

① فرکانسهای گوشه را تعیین کنید.

② ~ ~ از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

③ در ~ ~ عبور از ω ، تأثیر عامل اضافه شده (ریشه کدام عبارت) را روی فاز بنویسید.

④ دو نقطه بخصوص فاز: از نظر افزایش یا کاهش را روی فرکانسها شکل مطابقت دهید.

افزایش فاز ⟵ قطب راست ، صفر چپ

کاهش فاز ⟵ قطب چپ ، صفر راست

بخش ناگهانی فاز ⟵ s^2+a^2 یا $\frac{1}{s^2+a^2}$

بدون تغییر فاز ⟵ s^2-a^2 ، $\frac{1}{s^2-a^2}$

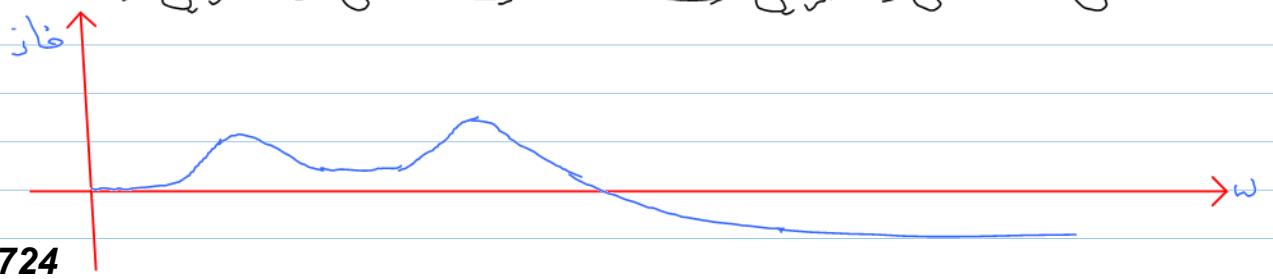
$$G(s) = \frac{(s^2+10)(s+1)(s-2)(s9)}{s(s-5)(s+6)(s+9)}$$

0 →	قطب →	0
-1 →	صفر چپ →	1
2 →	~ راست →	2
5 →	قطب راست →	5
-6 →	~ چپ →	6
$\pm\sqrt{10}$ →	$s^2+\sqrt{10}$ →	$\sqrt{10}$
± 9 →	$\frac{s-9}{s+9}$ →	9

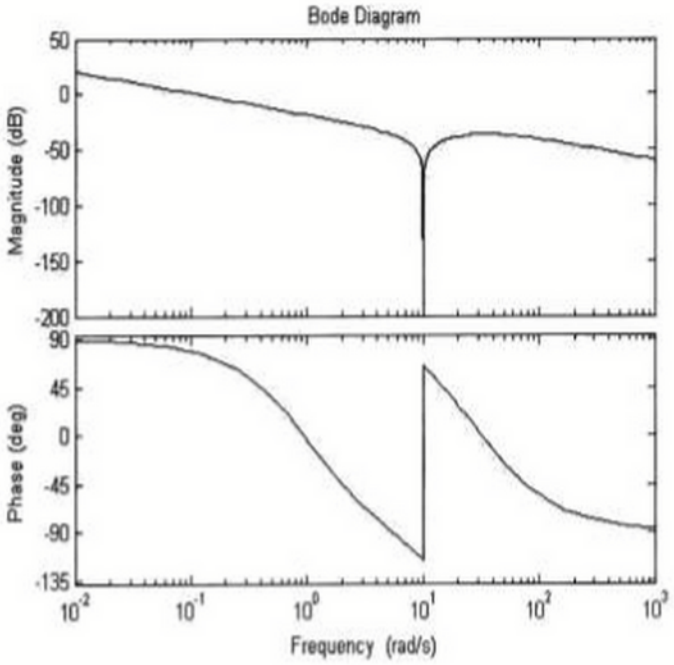
کاهش فاز ⟵ $\frac{s-a}{s+a}$

ω: 0 → 1 → 2 → $\sqrt{10}$ → 5 → 6 → 9

فاز: — → افزایش → کاهش → — → افزایش → کاهش → کاهش



دیاگرام بودی زیر متعلّق به کدام تابع تبدیل است؟

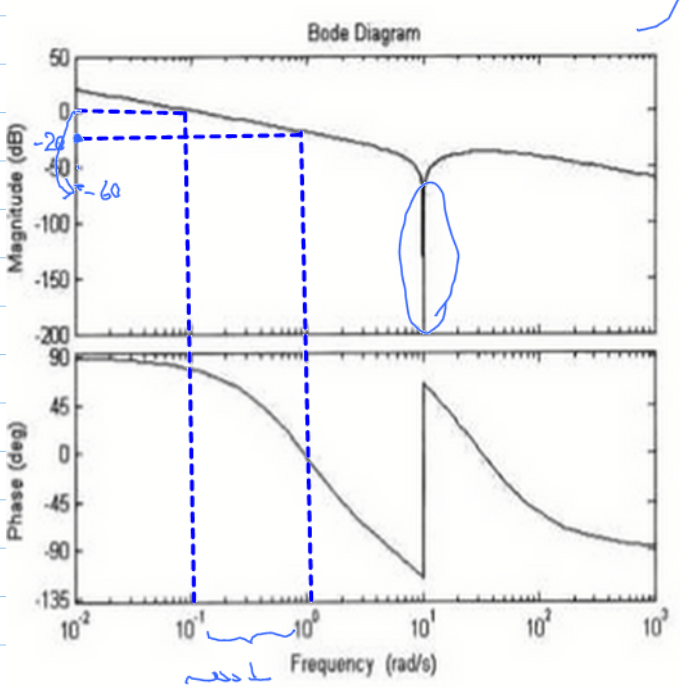


۱) $G(s)=\dfrac{(s-1)(s+30)^2}{s(s^2+10)(s+1)}$

۲) $G(s)=\dfrac{(1-s)(s^2+10)}{s^3(s+30)}$

۳) $G(s)=\dfrac{(s-1)(s^2+10)}{s(s+1)(s+30)^2}$

۴) $G(s)=\dfrac{(1-s^2)(s+30)^2}{s^3(s^2+10)}$



$$G(s)=\frac{(s-1)(s+30)^2}{s(s^2+10)(s+1)}$$ (1 — 3-4=-1

$$G(s)=\frac{(1-s)(s^2+10)}{s^3(s+30)}$$ (2 — 3-4=-1

$$G(s)=\frac{(s-1)(s^2+10)}{s(s+1)(s+30)^2}$$ (3 — 3-4=-1

$$G(s)=\frac{(1-s^2)(s+30)^2}{s^3(s^2+10)}$$ (4 — 4-5=-1

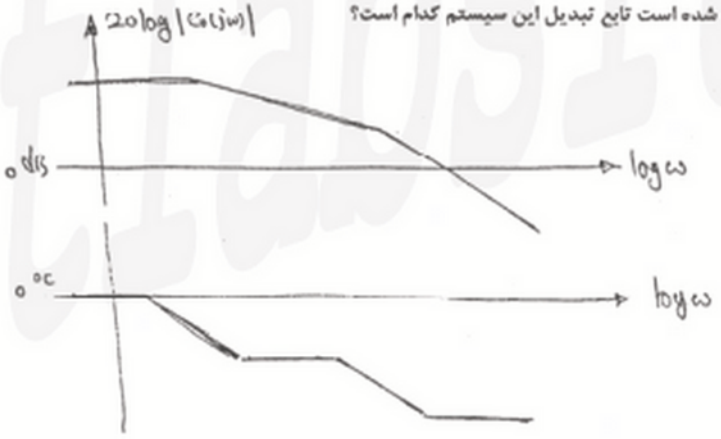
1, 3) → سيب اولية = 20(0 − 1) = −20 dB/dec

2, 4) → " " = 20(0 − 2) = −60 dB/dec

→ s^2+a^2 — s^2+ عددثابت

۸۴ بردی

دیاگرام بدی سیستمی در شکل مقابل داده شده است تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



۱) $\frac{1}{(s+1)(s+100)}$

۲) $\frac{1000}{(s+1)(s+100)}$

۳) $\frac{100}{(s+0/1)(s+100)}$

۴) $\frac{1000}{(s+1)(s+1000)}$

جلسه 52 کنترل خطی

سیستم کمینه فاز و غیر کمینه فاز:

سیستمی که در آن در هنگام کاهش سیگنال خروجی اندازه، فاز کاهش یابد و در هنگام افزایش سیگنال خروجی اندازه، فاز افزایش یابد را کمینه فاز گویند.

عوامل پایه:

عامل	تأثیر روی اندازه	تأثیر روی فاز	کمینه یا غیر کمینه فاز
صفر سمت چپ	افزایش	افزایش	کمینه فاز
قطب سمت چپ	کاهش	کاهش	کمینه فاز
صفر سمت راست	افزایش	کاهش	غیر کمینه فاز
قطب سمت راست	کاهش	افزایش	غیر کمینه فاز
صفر روی محور $j\omega$	افزایش	تغییر ناگهانی	غیر کمینه فاز
قطب روی محور $j\omega$	کاهش	" "	غیر کمینه فاز
تأخیر	بدون تأثیر	کاهش یا افزایش	غیر کمینه فاز

مثال:

غ ک $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$

غ ک $G(s) = \dfrac{(s-1)(s+1)}{s^2+3s+9}$

غ ک $G(s) = -\dfrac{s^2+10s+20}{s(s+1)(s+10)}$

غ ک $G(s) = \dfrac{-2s+2}{s^2+10s+20}$

قطب یا صفر در مبدأ کمینه فاز

نکته: فقط در سیستم های کمینه فاز از روی نمودار اندازه می‌توان نمودار فاز را بدست آورد و از روی نمودار فاز هم می توان نمودار اندازه را بدست آورد.

یعنی در سیستم های کمینه فاز، داشتن نمودار فاز یا اندازه برای تو هسب سیستم کافی است.

۵- کدام گزینه زیر صحیح است؟

✓۱) اگر همه قطب‌های یک سیستم درجهٔ ۲ در سمت چپ خط $\sigma = -2$ باشند زمان نشست سیستم کوچکتر از ۲ ثانیه است.

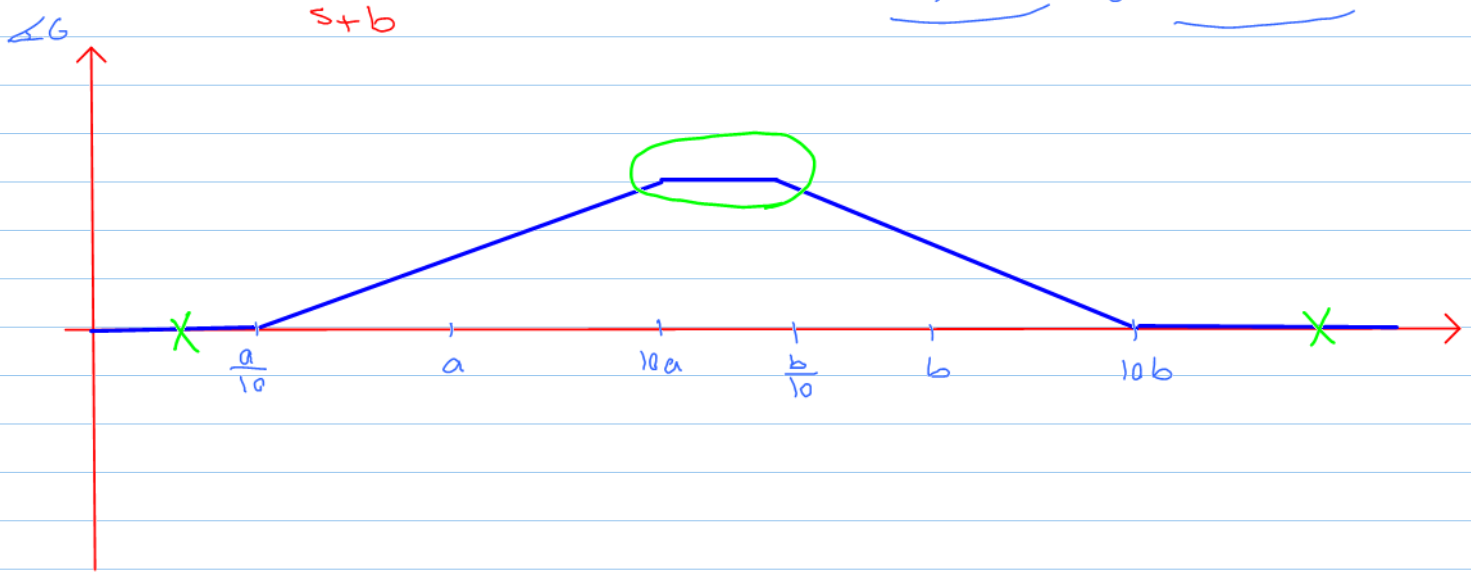
۲) وجود سطر صفر در آرایه راث بیانگر ریشه‌های روی محور $j\omega$ است.

۳) مکان هندسی ریشه‌های سیستم درجه ۳ نقطه ترک مختلط ندارد.

✓۴) اگر همه قطب‌ها و صفرهای یک سیستم در سمت چپ صفحهٔ s باشند آنگاه منحنی فاز به طور یکتا از منحنی اندازه به دست می آید.

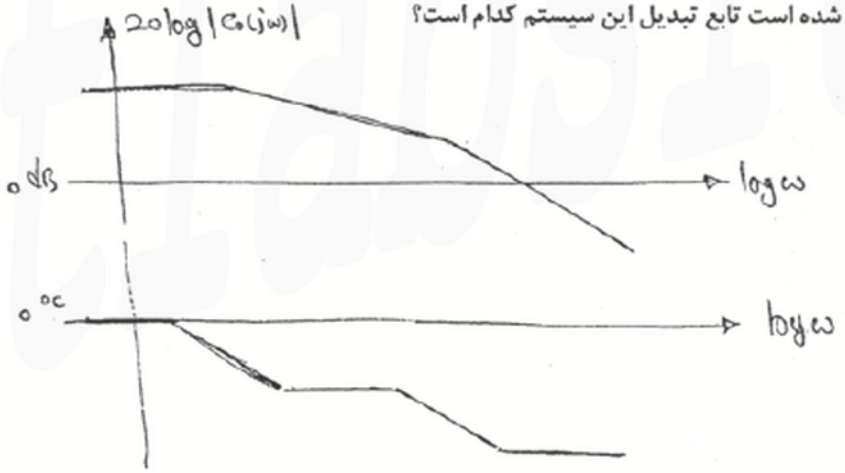
نکته. اگر در نمودار فاز یک سیستم، در میانه نمودار فاز قسمت بدون شیب داشته باشیم یعنی فاصله فرکانسی گوشه بیشتر از دو دهه است.

$G(s) = \frac{s+a}{s+b}$ $\quad b, a \quad$ $b > 100a$ یا $a > 100b$



بدون ۸۴

دیاگرام بدی سیستمی در شکل مقابل داده شده است تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



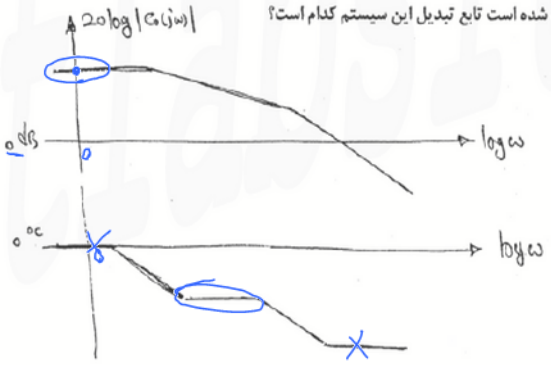
۱) $\frac{1}{(s+1)(s+100)}$

۲) $\frac{1000}{(s+1)(s+100)}$

۳) $\frac{100}{(s+0/1)(s+100)}$

۴) $\frac{1000}{(s+1)(s+1000)}$

دیاگرام بدی سیستمی در شکل مقابل داده شده است تابع تبدیل این سیستم کدام است؟



1) $\frac{1}{(s+1)(s+100)}$

2) $\frac{1000}{(s+1)(s+100)}$

3) $\frac{100}{(s+0.1)(s+100)}$

4) $\frac{1000}{(s+1)(s+1000)}$

$G(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)}$

$\times 3 \quad \times 2 \quad \times 1$

نقطه شروع $\rightarrow \omega : 0$

$20\log|G(s)| > 0$

1) $20\log\left|\frac{1}{100}\right| = -40\,dB$ ✗

2) $20\log|G(0)| = 20\log|10| = 20$ ✓

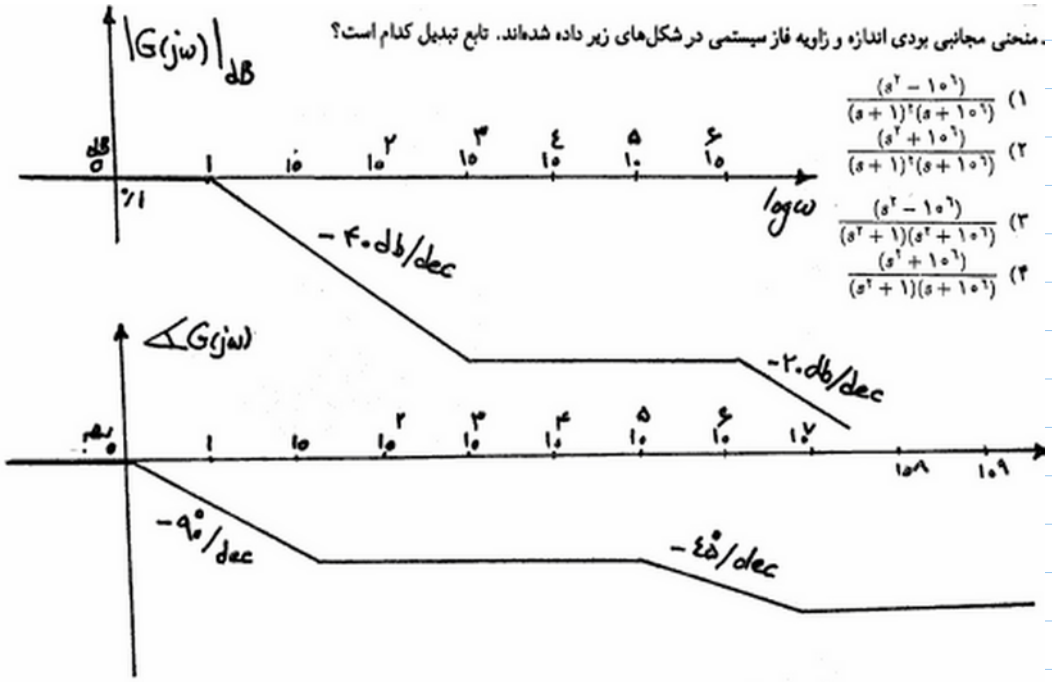
3) $\rightarrow 20\log|G(0)| = 20\log|10| = 20$ ✓

4) $20\log|G(0)| = 20\log 1 = 0$ ✗

$b > 100a$

2) $a = 1, b = 100$ $\quad 100 > 100 \times 1$ ✗

۸۲. منحنی مجانبی بودی اندازه و زاویه فاز سیستمی در شکل‌های زیر داده شده‌اند. تابع تبدیل کدام است؟



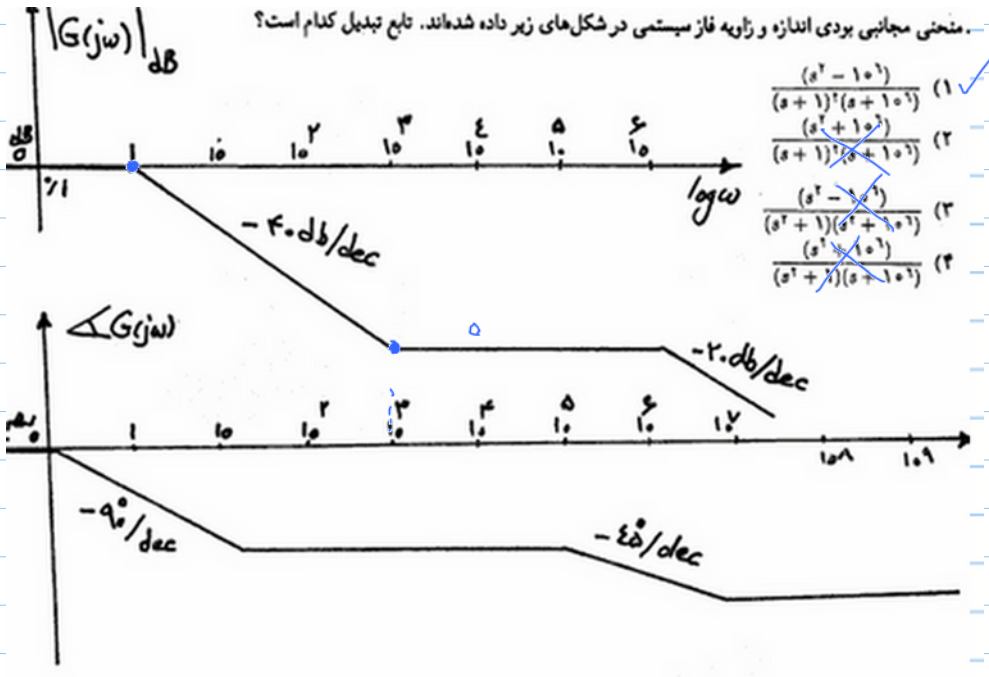
۱) $\frac{(s^2-10^3)}{(s+1)^2(s+10^3)}$

۲) $\frac{(s^2+10^3)}{(s+1)^2(s+10^3)}$

۳) $\frac{(s^2-10^3)}{(s^2+1)(s^2+10^3)}$

۴) $\frac{(s^2+10^3)}{(s^2+1)(s+10^3)}$

منحنی مجانبی بودی اندازه و زاویه فاز سیستمی در شکل‌های زیر داده شده‌اند. تابع تبدیل کدام است؟



۱) $\frac{(s^2-10^1)}{(s+1)^2(s+10^1)}$ ✓

۲) $\frac{(s^2+10^1)}{(s+1)^2(s+10^1)}$

۳) $\frac{(s^2-10^1)}{(s^2+1)(s^2+10^1)}$

۴) $\frac{(s^2+10^1)}{(s^2+1)(s+10^1)}$

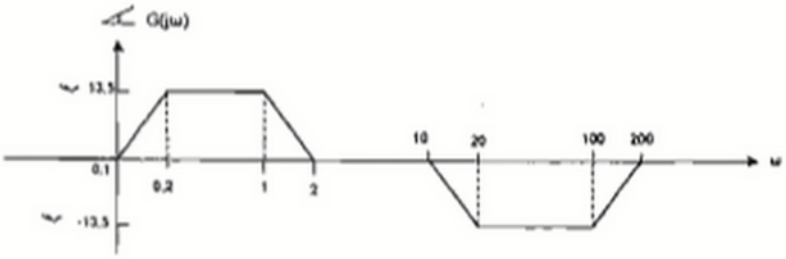
X13 X12 X11

14

$G(s) = \frac{s^2-(10^3)^2}{(s+1)^2}$

$s^2-a^2 \rightarrow w=a$

منحنی مجانبی زاویه فاز یک تابع تبدیل می‌نیمم فاز $G(s)$ در شکل مقابل داده شده است. تابع تبدیل آن کدام است؟

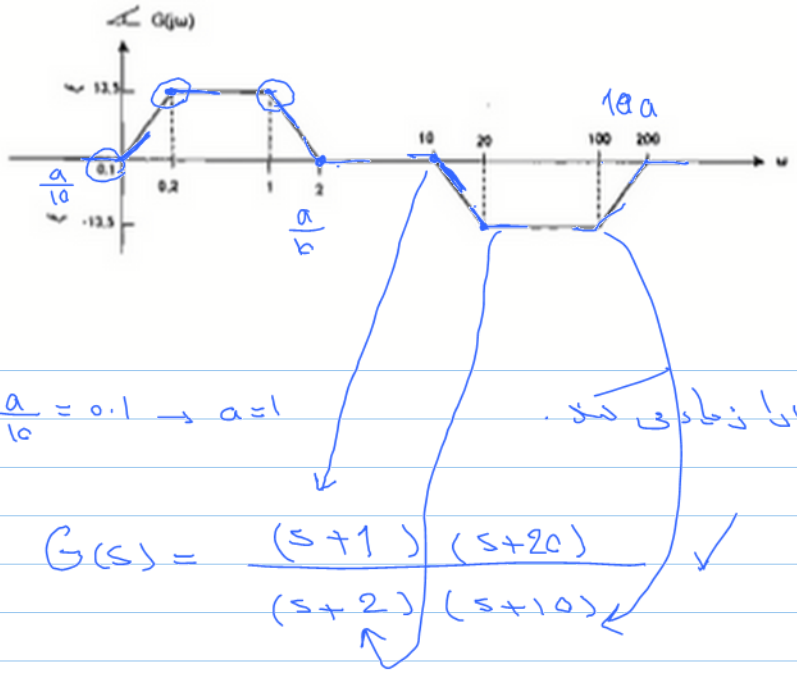


۱) $\frac{(1+10s)(2+s)(20+s)(100+s)}{(1+20s)(1+s)(10+s)(200+s)}$

۲) $\frac{(s+1)(s+20)(s+100)}{(s+2)(s+10)(s+200)}$

۳) $\frac{(s+1)(s+20)}{(s+2)(s+10)}$

۴) هیچ‌کدام



$s+a$ ← از فرکانس $\frac{a}{10}$ شیب $+1$ زیاد می‌شود

$10a$ شیب $+1$ زیادی شده در فرکانس

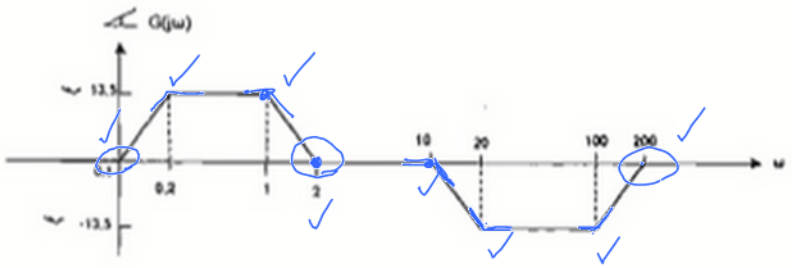
را کاهش می‌دهد ($+45°/dec$)

$\frac{1}{s+a}$: از فرکانس $\frac{a}{10}$ شیب -1 زیاد

$\frac{a}{10}=0.1 \rightarrow a=1$ کاهش داده و در فرکانس $10a$ شیب را زیادی کند. $45°/dec$

$$G(s)=\frac{(s+1)(s+20)}{(s+2)(s+10)}$$ ✓

هرگاه بخواهیم از روی کوارد خارج تابع تبدیل بدست آوریم نقطه شروع $\frac{a}{10}$ و انتها $10a$ را باید در نظر بگیریم.



$\omega=0.1$ ↑ $\frac{a}{10}=0.1 \rightarrow a=1$

↓ $10a$

$\omega=0.2$ ↓ $\frac{a}{10}=0.2 \rightarrow a=2$

↑ 10×2

$\omega=1$ ↓ $\frac{a}{10}=1 \rightarrow a=10$

↑ 10×10

$\omega=2$ ↑ $\frac{a}{10}=2 \rightarrow a=20$

↓ 10×20

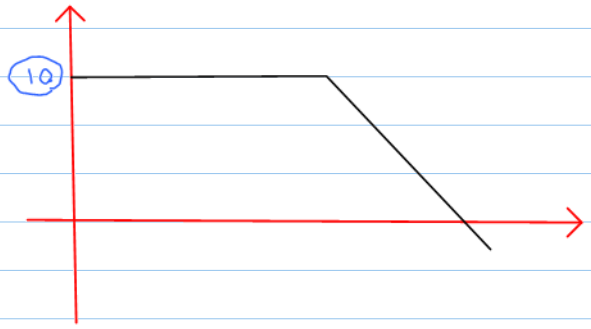
$$G(s)=\frac{(s+1)(s+20)}{(s+2)(s+10)}$$ ✓

خطای حالت دائمی در عوذار بودی :

تعیین نوع سیستم از روی عوذار بودی :

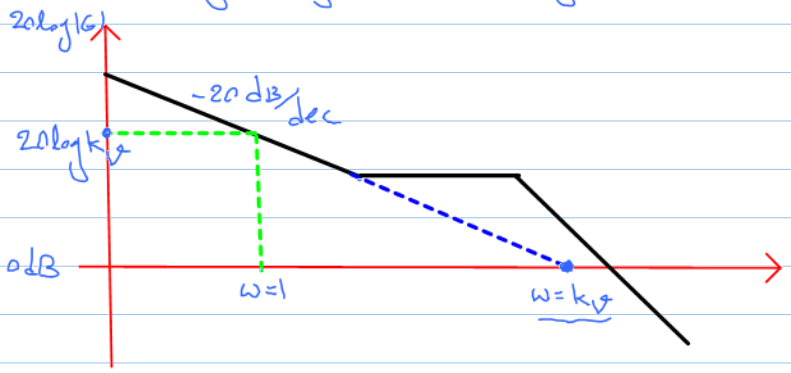
① شیب اولیه اندازه = 0 → نوع 0

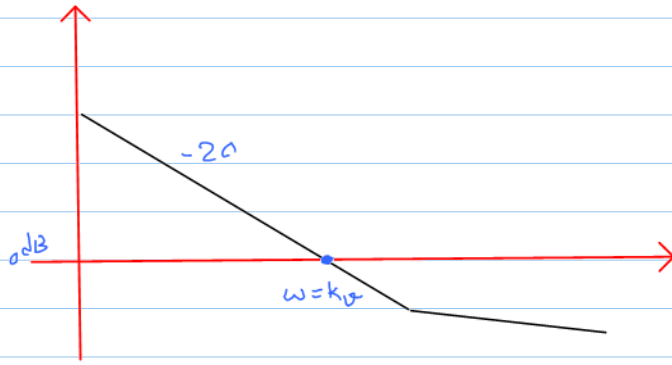
$20 \log k_p$ = نقطه شروع اندازه برحسب dB



② شیب اولیه اندازه = $-20\ dB/dec$ → نوع 1

$20 \log |G(j1)| = 20 \log k_v$

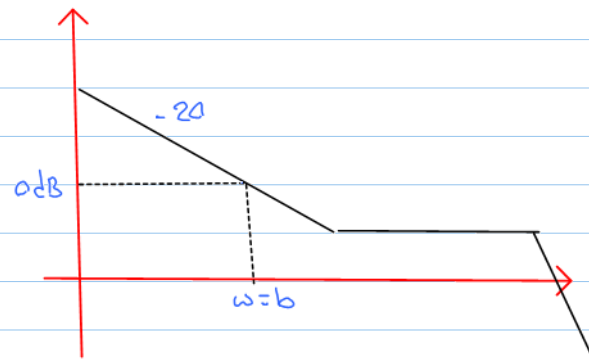




③ شیب اولیه اندازه = $-40\ dB/dec$ → نوع 2







① در فرکانس $\omega=1$ اندازه را بدست میاریم.

$20\log k_p = a \rightarrow k_p = 10^{a/20}$

② تقاطع نمودار اندازه با 0dB را میدهد

$k_p = \underline{b}$

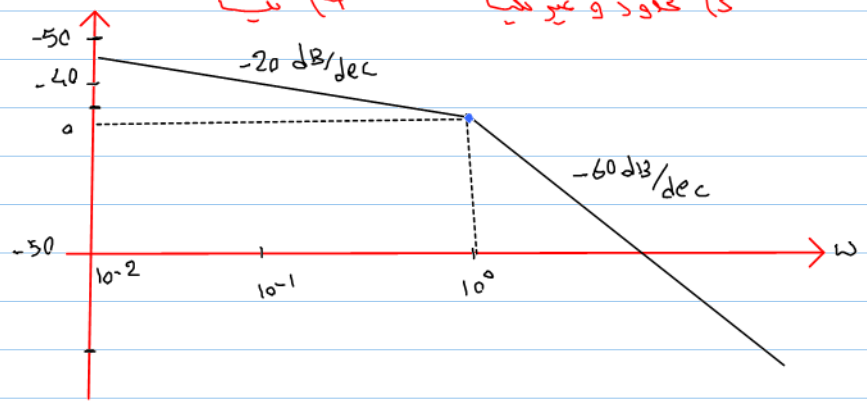
③ امتداد خط با شیب اولیه با 0dB ←

$k_p = b$

مثال: نمودار بودی تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد منفی در شکل داده شده است. خطای حالت ماندگار این سیستم به ورودی $r(t)=t\,u(t)$ ..... است.

۱) نامحدود ۲) صفر ۳) محدود و غیر صفر ۴) یک

X

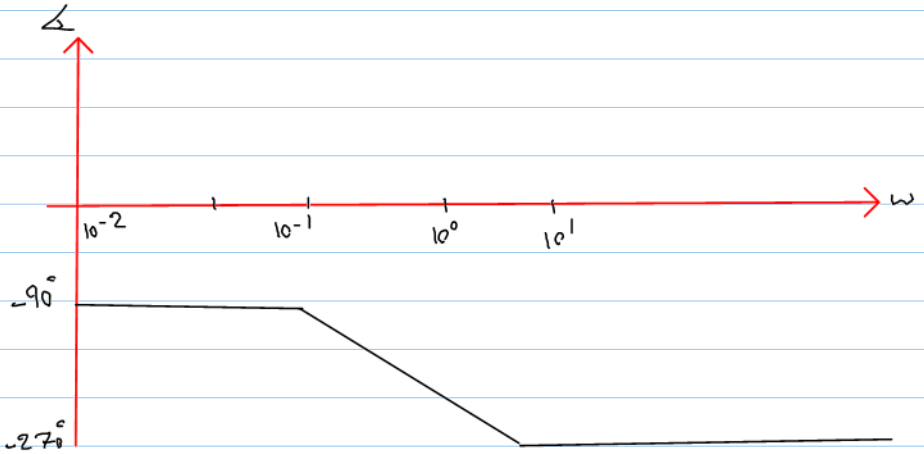


خطای حالت داریم ←

حلقه باز ←

نوع ورودی = 1

← خطا محدود غیر صفر



نوع سیستم = 1

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)^2}$$

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

$$20\log|G(j\omega)|=0 \rightarrow |G(j\omega)|=1 \rightarrow \frac{k}{1\times(\sqrt{2})^2}=1 \rightarrow k=2$$

$$G(s)=\frac{2}{s(s+1)^2} \rightarrow$$

$$\Delta(s)=1+\frac{2}{s(s+1)^2}=0 \rightarrow \Delta(s)=s^3+2s^2+s+2=0$$

$$2\times1=1\times2 \rightarrow$$ ناپایدار

↓

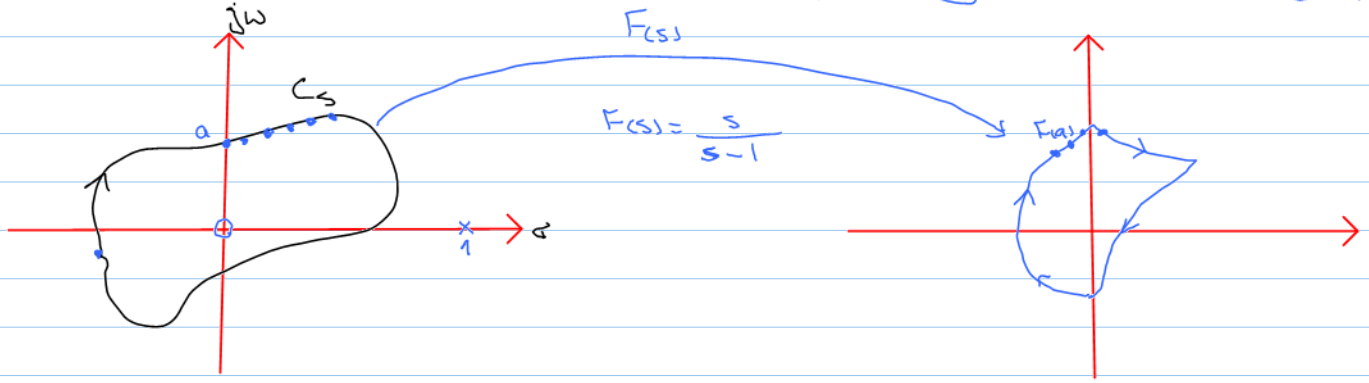
خطا محدود و غیر صفر

قضیه نگاشت:

اگر منحنی بسته C_s در صفحه s از روی هیچ قطبی از $F(s)$ عبور نکند آنگاه داریم:

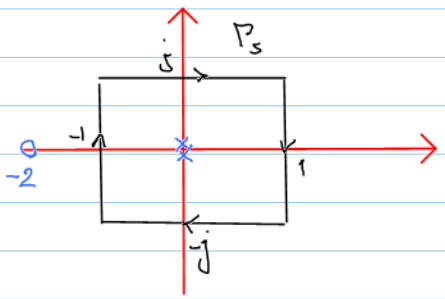
نگاشت C_s تحت $F(s)$ به یک منحنی هم جهت با C_s تبدیل می‌شود که به تعداد N بار حول مبدأ مختصات را دور می‌زند. $N = Z - P$ است که Z تعداد صفرهای P تعداد قطبهای $F(s)$ است که داخل C_s باشد.

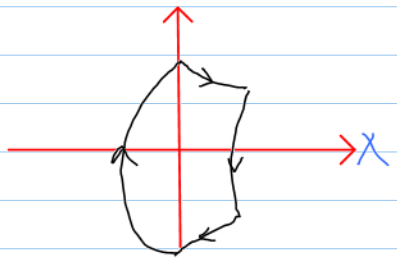
$N = 1 - 0 = 1$

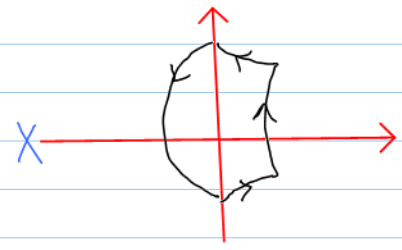


مثال برق ۸۵

اگر مسیر مستطیلی C_s توسط تابع $F(s) = \frac{s+2}{s^2}$ به صفحه $F(s)$ نگاشته شود، کدام شکل حاصل می‌شود؟

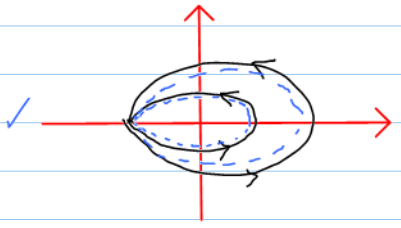




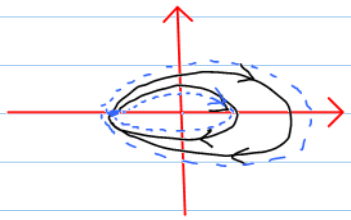


$F(s) = \frac{s+2}{s^2}$

$N = 0 - 2 = -2$

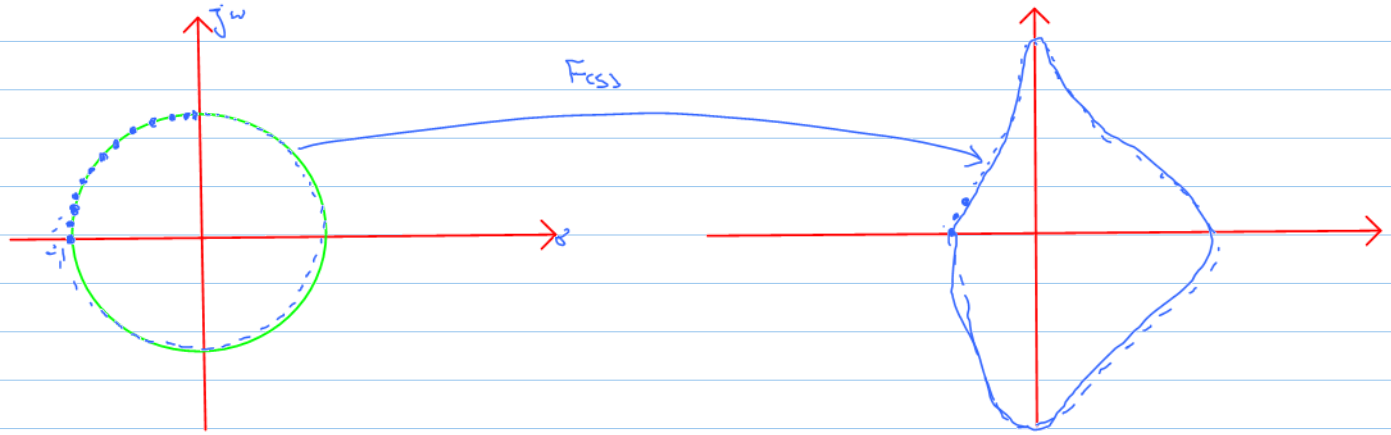


$N = -2$ ✓



$N = 2$

نگاشت C_s تحت $F(s)$ به تعداد 2 بار در خلاف جهت ساعتگرد مبدأ را دور می‌زند.



$F(s) = \frac{s}{s^2+1}$ $\quad F(-1) = \frac{-1}{2}$

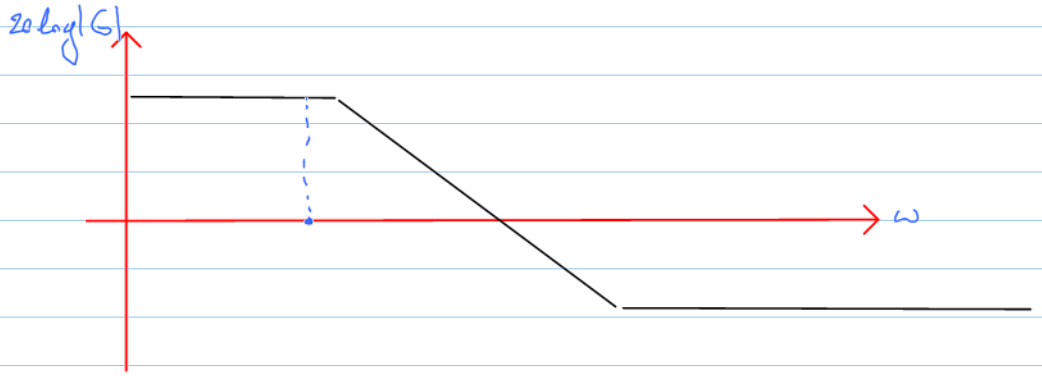
اگر $N<0$ باشد یعنی مبدأ را در جهت پاد ساعتگرد دور می‌زند.

" $N>0$ " " " " " ساعتگرد " "

معادله نایکوئیست:

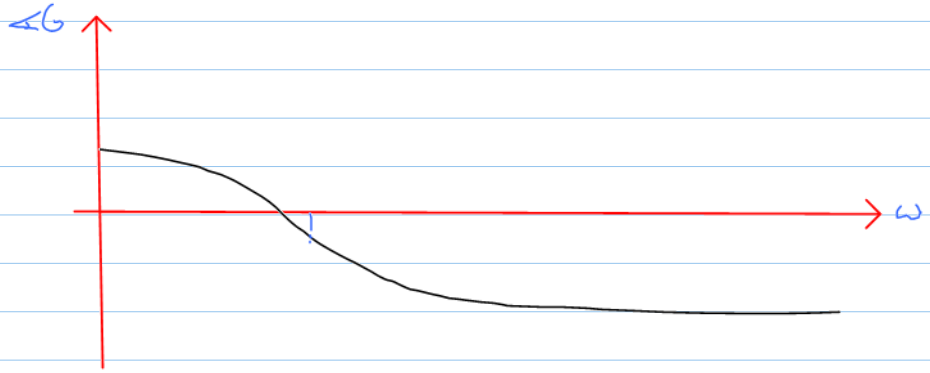
$G(s)$ ← پاسخ فرکانسی ← تکان هندسی

نمودار بودی ← $|G|$, $\angle G$ ← نایکوئیست.



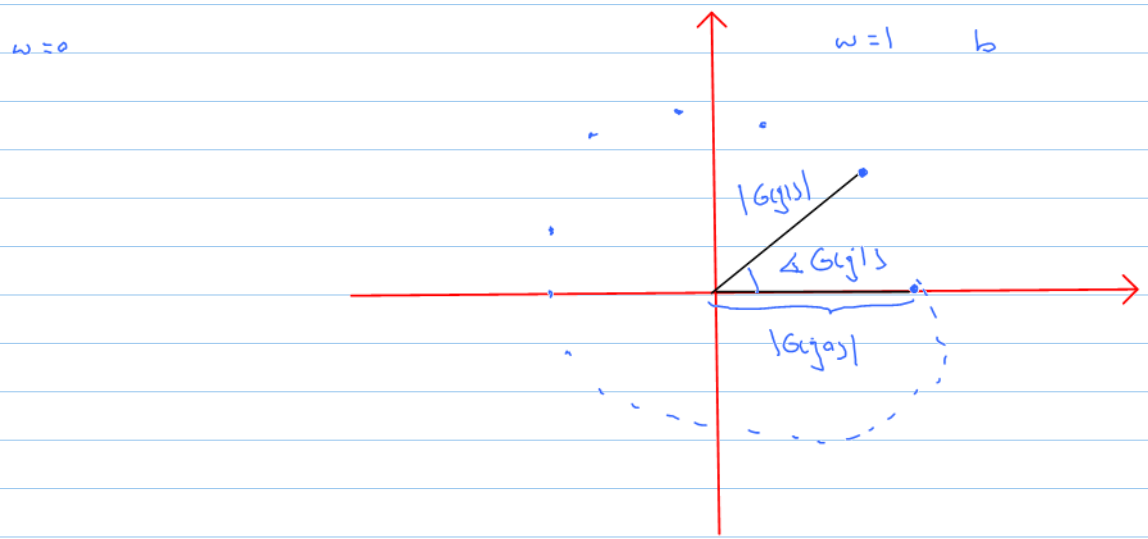
$G(j\omega)$

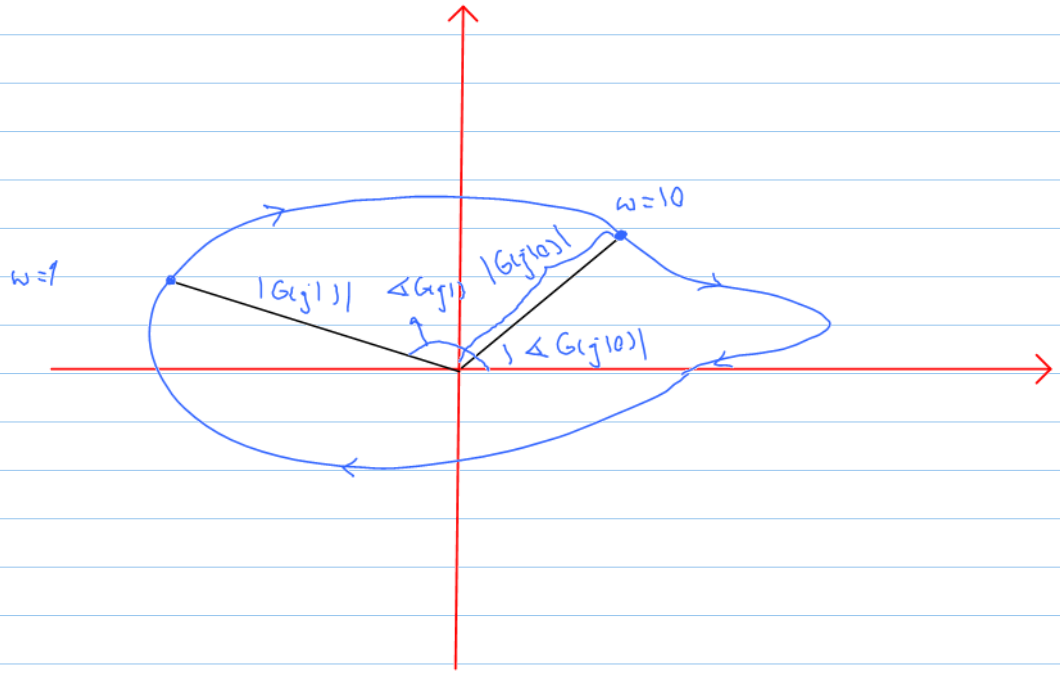
$\omega = 10$



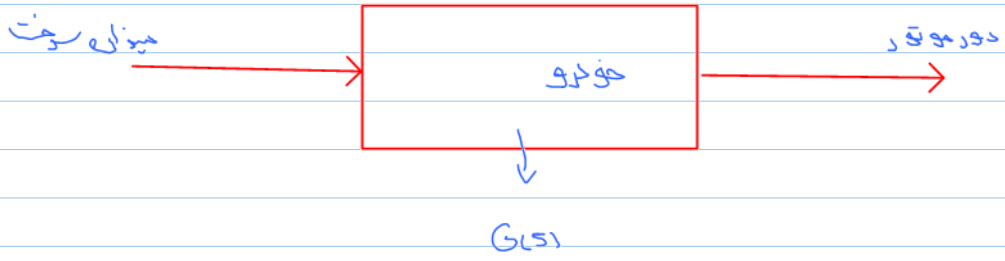
$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)}$

$\omega = 0 \quad a = |G(j0)| e^{j \angle G(j0)}$





هدف پاسخ فرکانسی: تحلیل پایداری:



$\omega_1 = 0$ $\quad x = A_1 \sin(\omega_1 t)$ $\quad y(t) = B_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

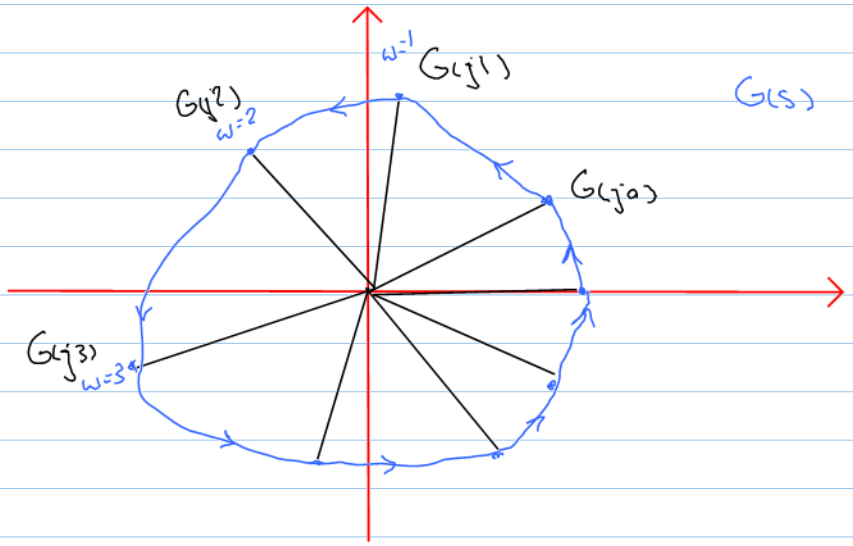
$\omega_2 = 1$ $\quad x = A_2 \sin(\omega_2 t)$ $\quad y(t) = B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$\vdots$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{G(s)} y(t) = A_1 |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle G(j\omega_0))$$

$$B_1 = A_1 |G(j\omega_1)| \rightarrow \begin{cases} |G(j0)| = \dfrac{B_1}{A_1} \\ \angle G(j0) = \varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G(j1)| = \dfrac{B_2}{A_2} \\ \angle G(j1) = \varphi_2 \end{cases}$$

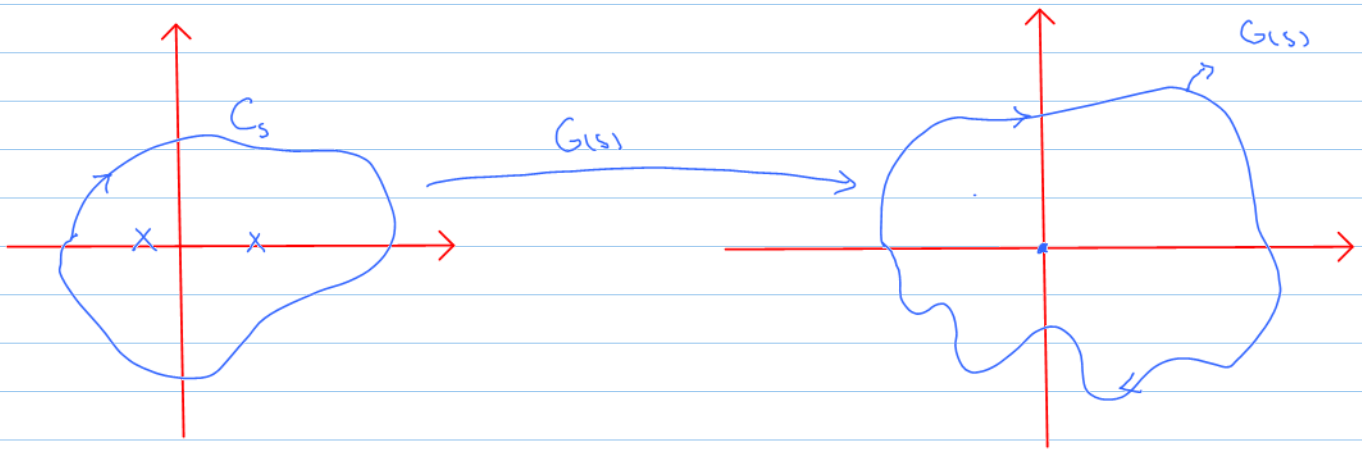


$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \angle G(j\omega)}$$

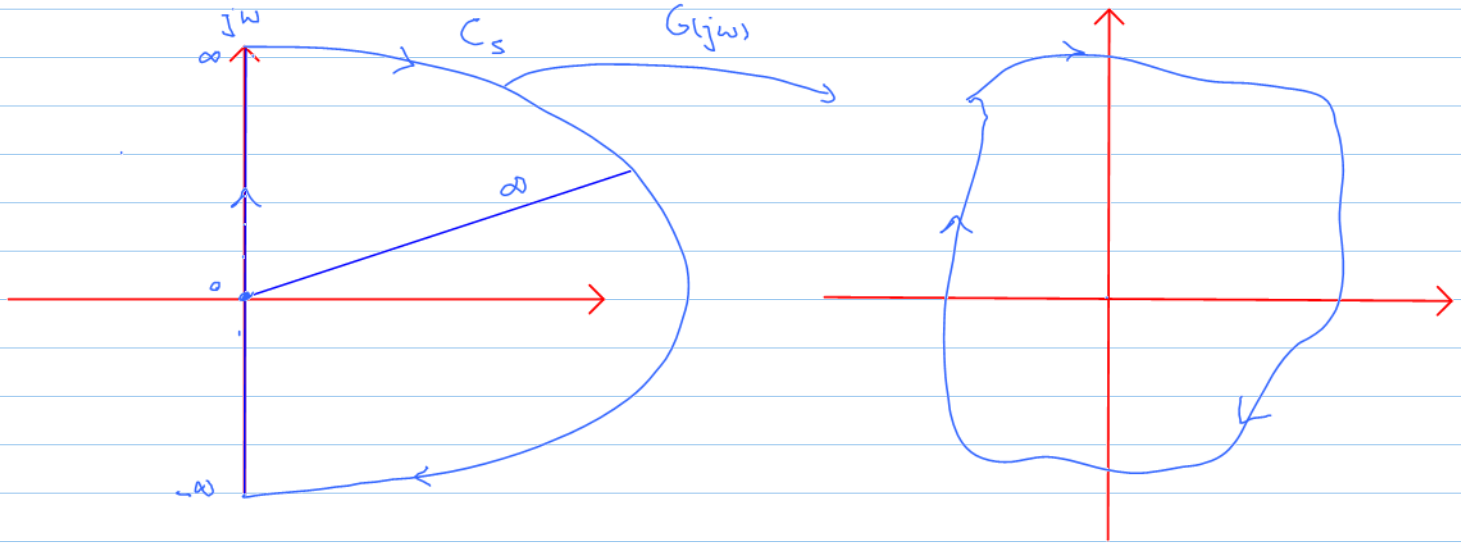
$G(s) \leftarrow G(j\omega)$ به ازای ω های مثبت

$G(j\omega) = \frac{?}{?}$ شکل $G(j\omega)$ را برای سه‌های قطب دارم.

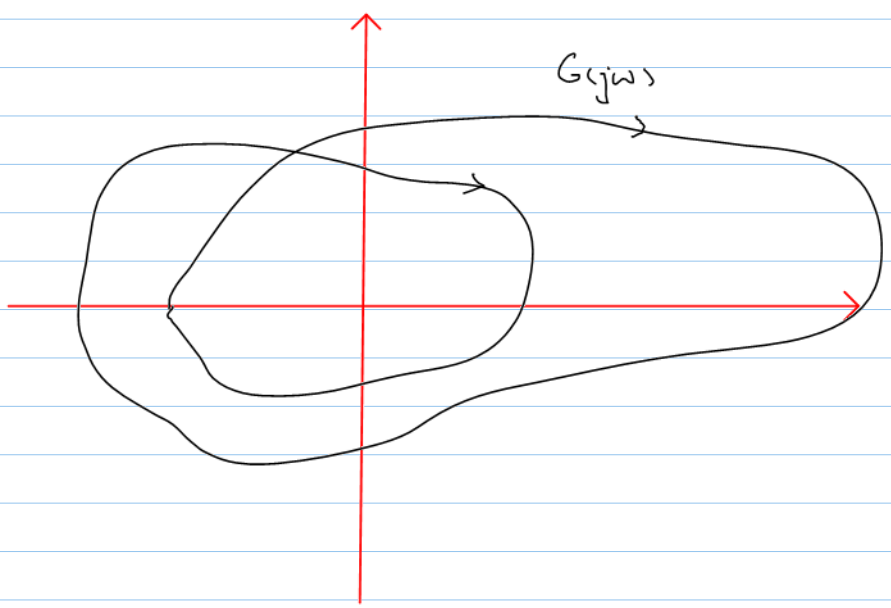
$G(s)$ ← چندتا قطب $G(s)$ در سمت راست صفحه s است؟



$N = 0 - 1 = -1$



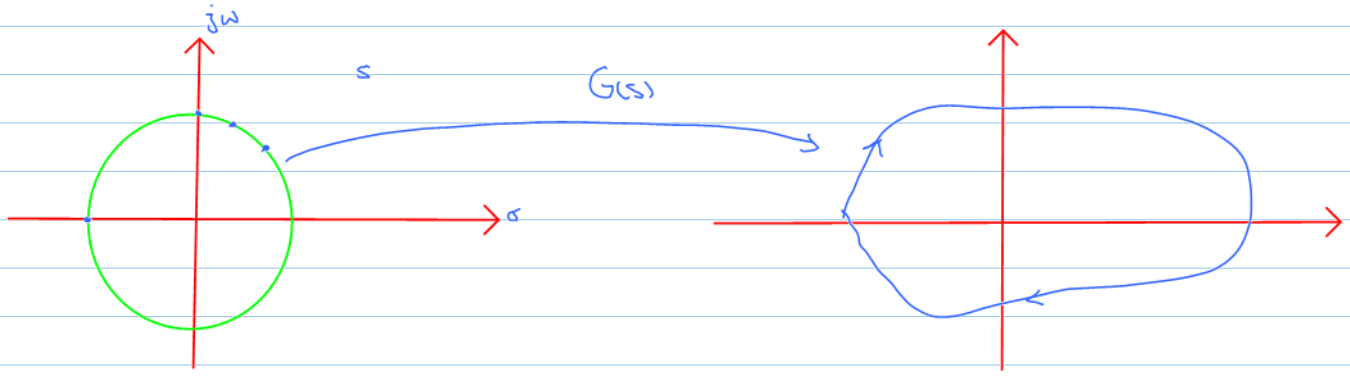
بدون بدست آوردن $G(s)$ ← چندتا قطب و صفر $G(s)$ داخل هم صفحه راست پیداست



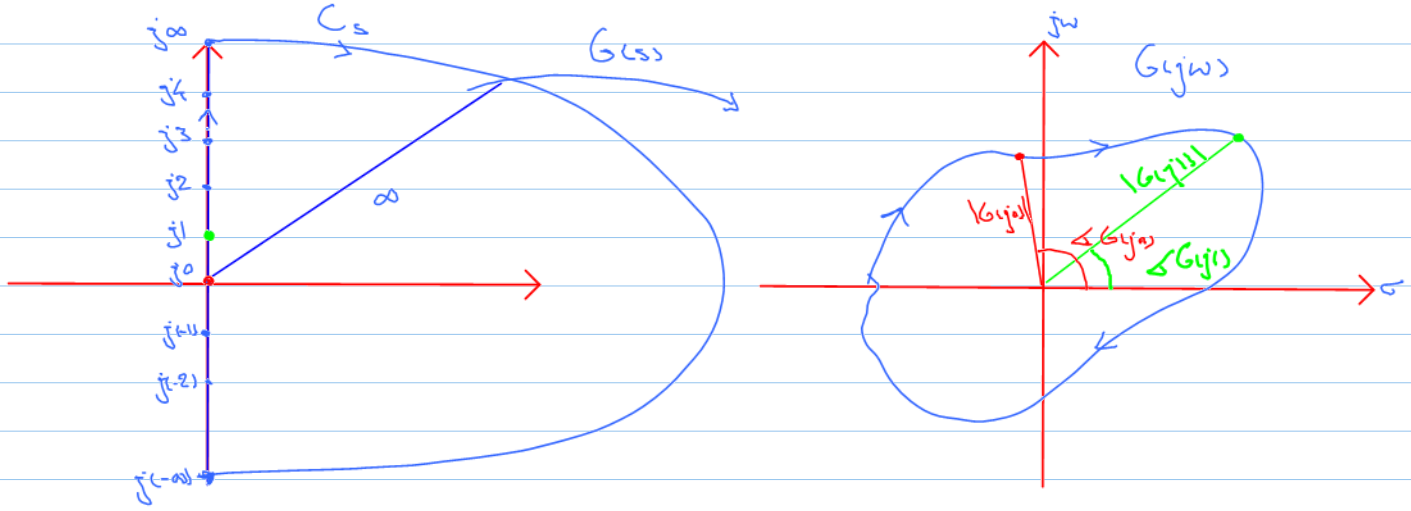
دلیل یادگیری نایکوئیست؟ مهارت کافی برای تحلیل نمودار نایکوئیست.

نحوه رسم نمودار نایکوئیست؟

نمودار $G(jw)$ را بازای تمام wها از $-\infty$ تا ∞ بدست آوریم.



نمودار $G(s)$ بازای تمامیه که روی دایره است.



$G(s)$ بازای $s=jw$ هایی که w از $-\infty$ تا ∞ است.

$s=j(-\infty) \longrightarrow j(\infty)$

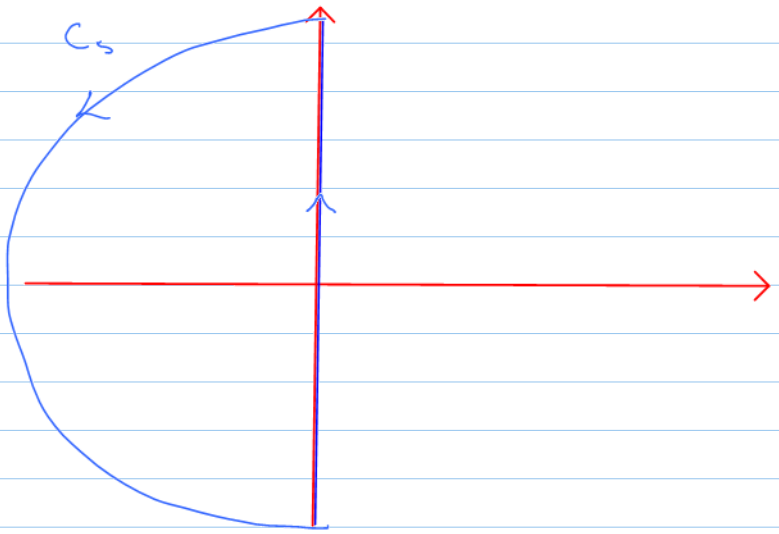
نگاشت خط $s=jw$ تحت $G(s)$ ← نمودار $G(jw)$ بازای $w:-\infty \to \infty$

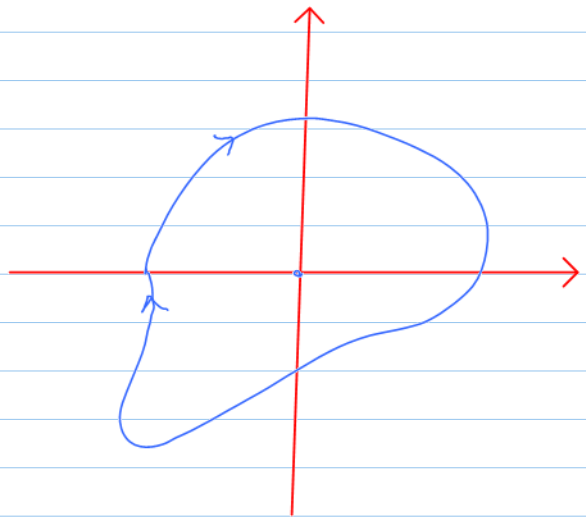
منحنی بسته‌ای را در صفحه s بدست آوریم که شود $j(\omega) \to G(j\omega)$ را پوشش دهد.

مسیر نایکوئیست: منحنی بسته‌ای که ما خواهیم تصویر آن را بدست آوریم $G(s)$

منحنی نایکوئیست: " " که تصویر مسیر نایکوئیست بدست میآید $G(s)$ است.

* مسیر نایکوئیست را تواند هر شکلی باشد اما باید $(j\omega) \to (j\omega)$ را پوشش دهد.





$N = ?$

$N = Z - P$

$G(s)$ ← پایداری کلی

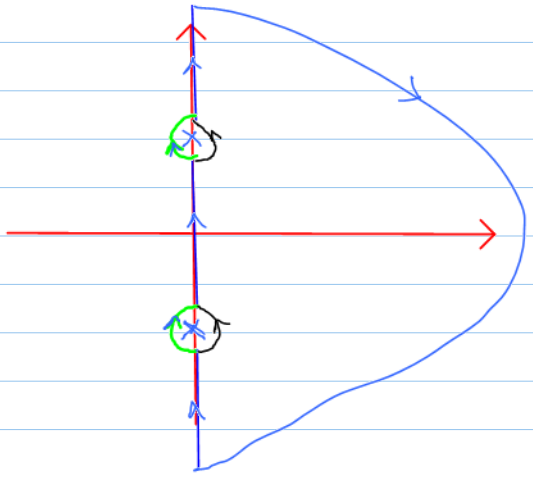
$G(s)$ تعداد قطبهای سمت راست

" " " چپ

۴ قطب سمت راست دارد.

۱ " " چپ دارد.

$$G(s) = \frac{s}{s^5 + 4s^2 + 3s + 10}$$

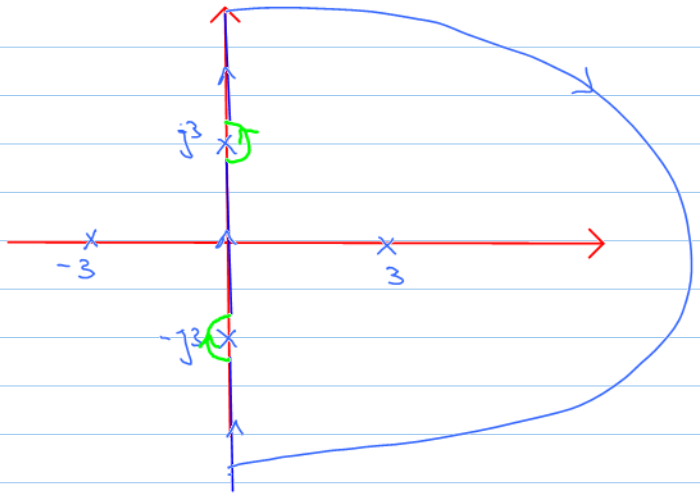


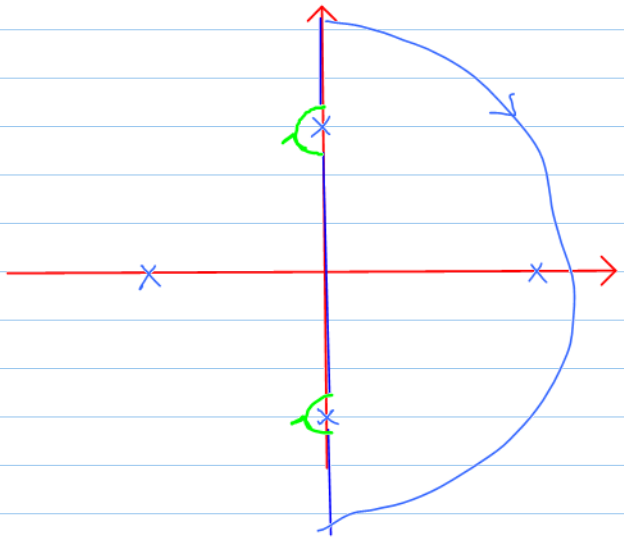
$$G(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

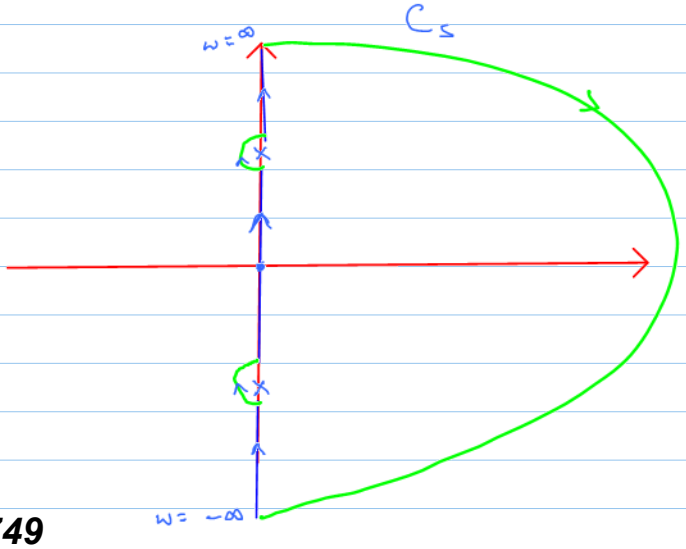
در انتخاب مسیر نایکوئیست اگر به قطبهای $G(s)$ بر خورد کنیم میتوانیم دایره به شعاع $\varepsilon \to 0^+$ در سمت راست یا چپ رسم کنیم که از روی قطب عبور نکنیم.

همانطور که در بالا دیدید

$$G(s) = \frac{s+1}{(s^2+9)(s^2-9)}$$

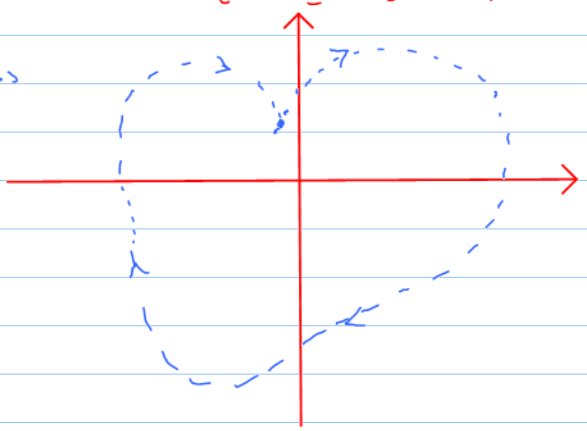






رسم نمودار نایکوئیست:

$G(s)$



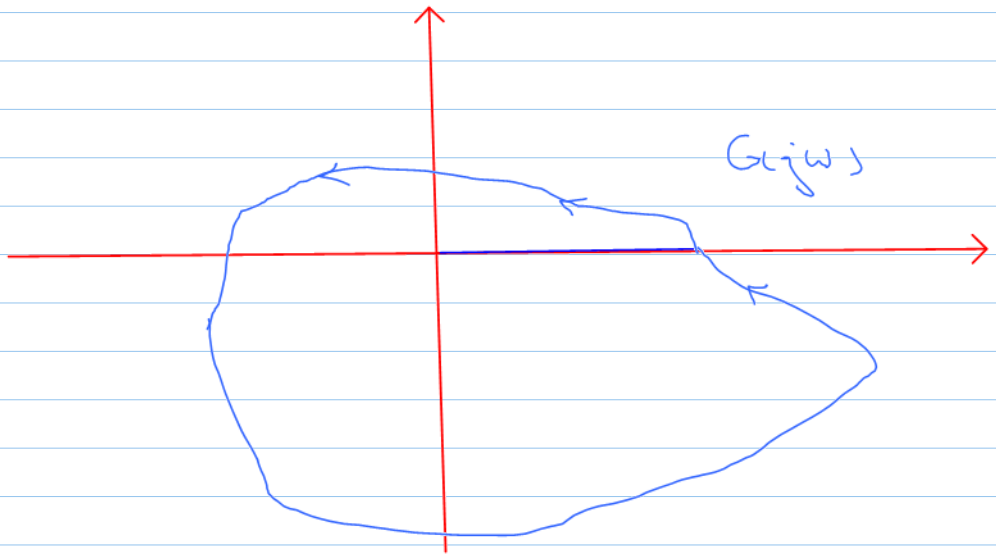
$G(jw) \rightarrow$ $\quad w: -\infty \rightarrow \infty$

$$G(jw) = \frac{jw+2}{(-w^2-9)(-w^2+9)} = \frac{jw+2}{w^4-81} = \frac{2}{w^4-81} + j\frac{w}{w^4-81}$$

$$|G(jw)| \quad , \quad \angle G(jw)$$

$$|G(jw)| = \sqrt{\frac{4}{(w^4-81)^2} + \frac{w^2}{(w^4-81)^2}}$$

$$\angle G(jw) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{w}{w^4-81}}{\frac{2}{w^4-81}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{w}{2}\right)$$



«جلسه 54 کنترل فعلی»

رسم نمودار نایکوئیست

① روش تشریحی:

برای رسم نمودار نایکوئیست مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

1- حل قطب‌های $G(s)$ را مشخص کنید.

2- اگر صورت سؤال مسیر نایکوئیست را نداده است، مسیر نایکوئیست را مشخص کنید.

3- $G(s)$ را به ازای $\omega=0^+$ و $\omega=\infty$ تعیین کنید.

4- به ازای همه‌ی قسمت‌های روی مسیر نایکوئیست، $G(s)$ را تعیین کنید. ($\omega=0^+ \rightarrow \omega=\infty$)

5- در حل مسیر هرگاه به دیتور رسیدید از نکته زیر استفاده کنید:

* اگر یک دیتور شامل m قطب باشد تصویر آن به نیم‌دایره با شعاع ∞ و دوران $180\times m$ درجه در خلاف جهت دیتور می‌شود.

6- تصویر نیم‌دایره با شعاع ∞، به یکی از حالت‌های زیر خواهد بود:

درجه صورت $G(s)$ > درجه مخرج $G(s)$ ← مبدأ مختصات

" " = " " " " ← یک عدد محدود = $G(s)$

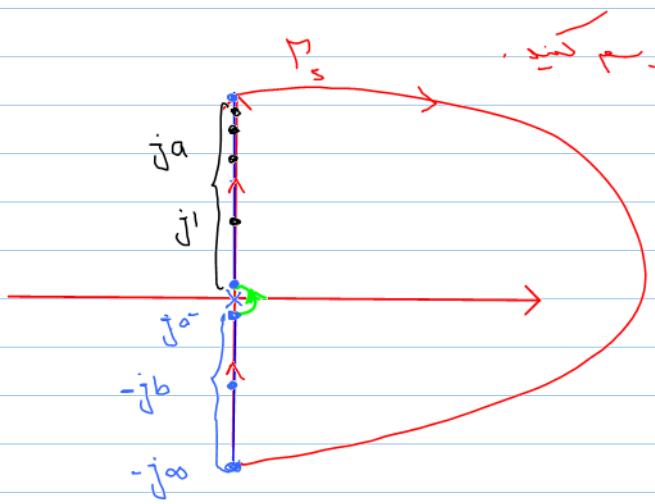
" " < " " " " ← 0

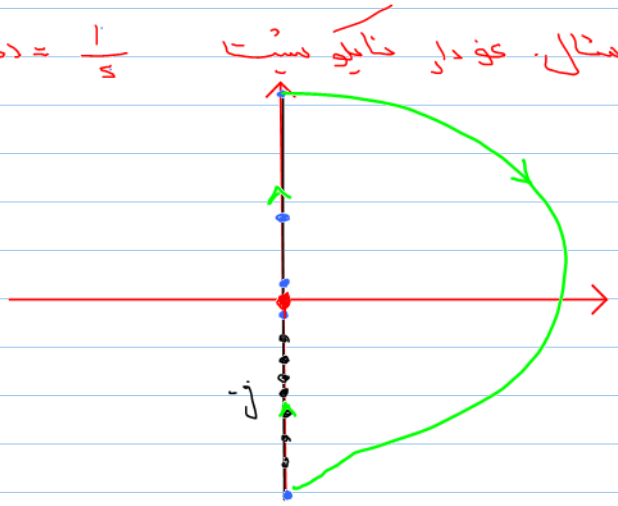
7- پس از تکمیل نمودار نایکوئیست به ازای $\omega=0 \rightarrow \infty$، برای رسم نمودار به ازای $\omega=0 \rightarrow -\infty$ از نکته زیر استفاده کنید.

* نمودار نایکوئیست به ازای $\omega=0 \rightarrow -\infty$، قرینه نمودار به ازای $\omega=0 \rightarrow +\infty$ است.

جهت نمودار نیز به همان نحوی تعیین می‌شود که از $G(j\omega)$ شروع شده و در $G(j\omega)$ خاتمه می‌یابد.

مثال: کونتور نایکوئیست $G(s)=\frac{1}{s}$ را رسم کنید.





$s=j\omega \rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$

180 x 1

$s=j0^+ \rightarrow G(j0^+)=\frac{1}{j0^+}=\frac{1}{j}\times\frac{1}{0^+}=-j\infty$

$s=j\infty \rightarrow G(j\infty)=\frac{1}{j\infty}=\frac{1}{j}\times\frac{1}{\infty}=-j0^+$

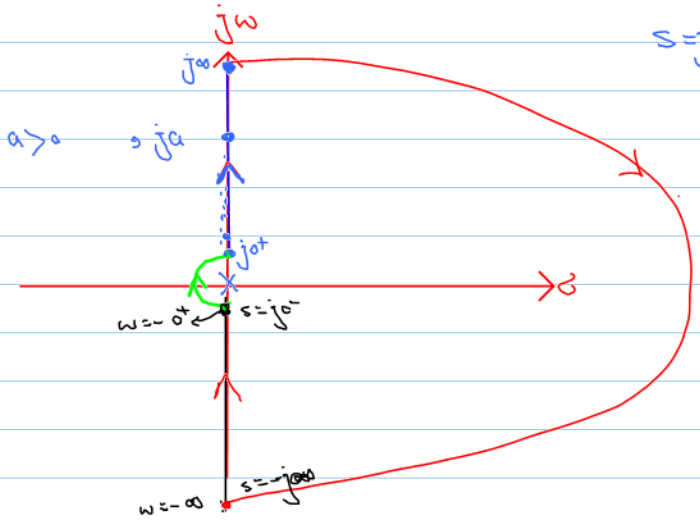
$s=j1 \rightarrow G(j1)=\frac{1}{j1}=-j$

$s=ja \rightarrow G(ja)=\frac{1}{ja}=-j\frac{1}{a} \rightarrow$

$s=-j\infty \rightarrow G(-j\infty)=\frac{1}{-j\infty}=j0^+$

$s=-jb \rightarrow G(-jb)=\frac{1}{-jb}=j\frac{1}{b}$

$s=j0^- \rightarrow G(j0^-)=\frac{1}{j0^-}=+j\infty$



$s = j\alpha^+ \rightarrow G(s) = \frac{1}{j\alpha^+} = \frac{1 \times 1}{j \times \alpha^+} = \frac{1}{j} \times \frac{1}{\alpha^+} = -j\infty$ 180 x 1

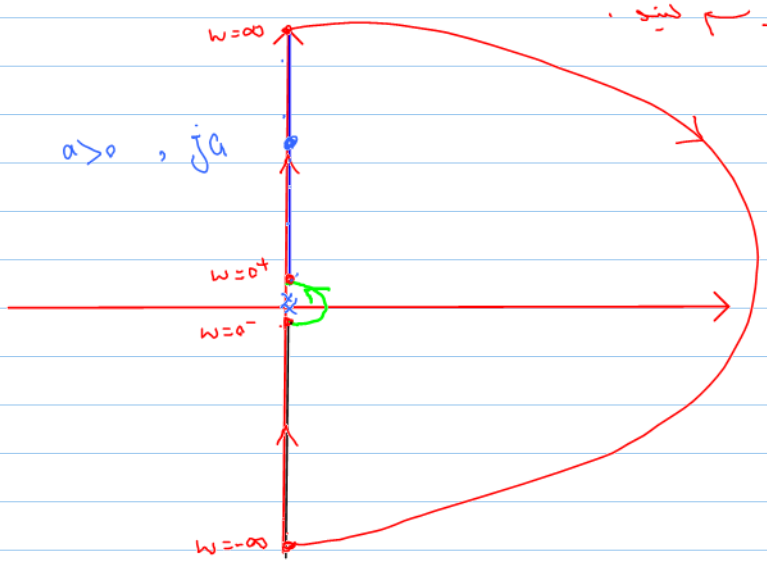
$s = j\infty \rightarrow G(j\infty) = \frac{1}{j\infty} = \frac{1}{j} \times \frac{1}{\infty} = -j\alpha^+$

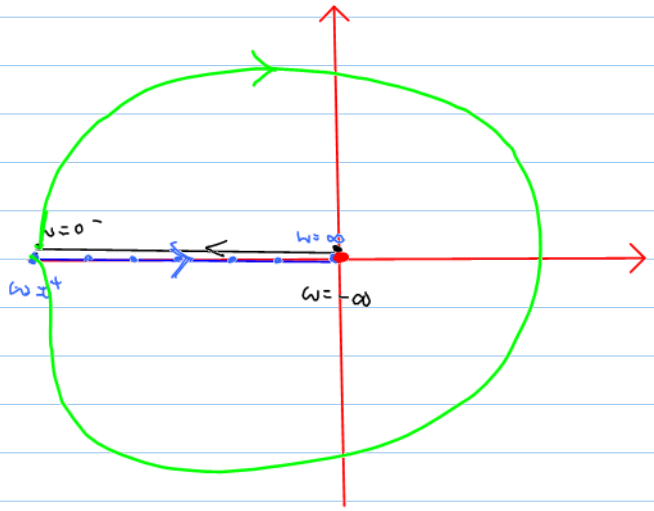
$s = j\alpha \rightarrow G(j\alpha) = \frac{1}{j\alpha} = \frac{1}{j} \times \frac{1}{\alpha} = -j \times \frac{1}{\alpha}$ $\quad a>0 \quad \frac{1}{\alpha} > 0$

$G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow s = \infty \rightarrow G(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$

$s = j\omega$

مثال: نمودار نایکوئیست $G(s) = \frac{1}{s^2}$ را رسم کنید.





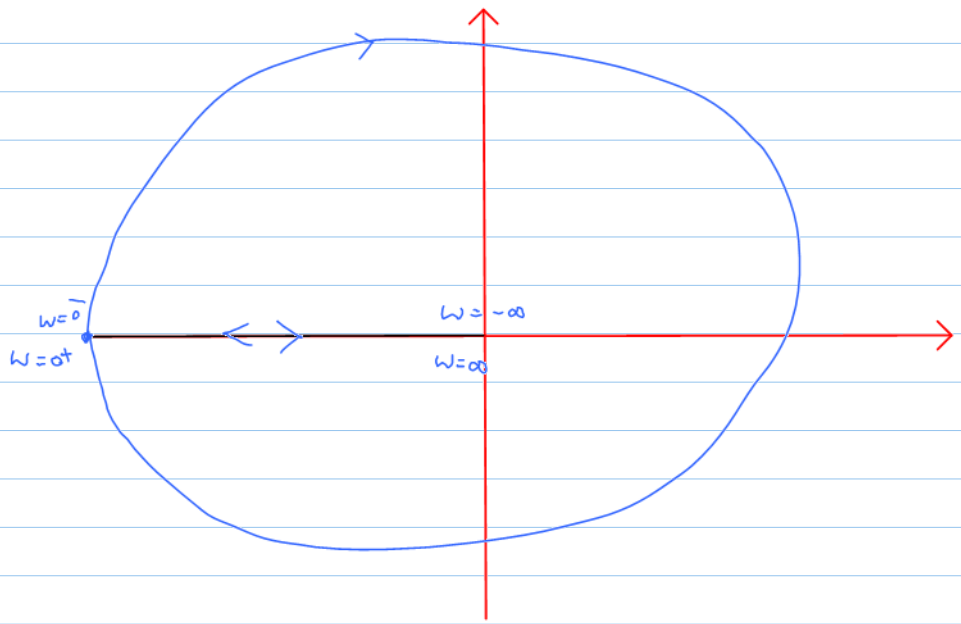
$s = j0^+ \rightarrow G(j0^+) = \frac{1}{(j0^+)^2} = \frac{1}{-1 \times 0^+} = -\infty$

$180 \times 2 = 360^\circ$

$s = j\omega \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j^2\omega^2} = -\frac{1}{\omega^2} = -0^+$

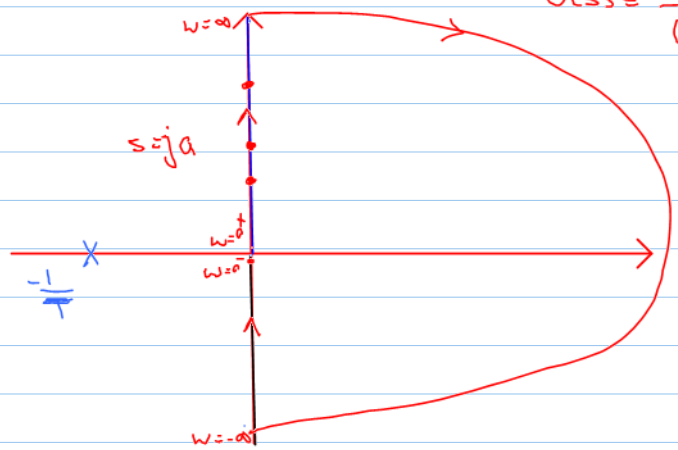
$s = ja \rightarrow G(ja) = \frac{1}{j^2 a^2} = -\frac{1}{a^2} < 0$

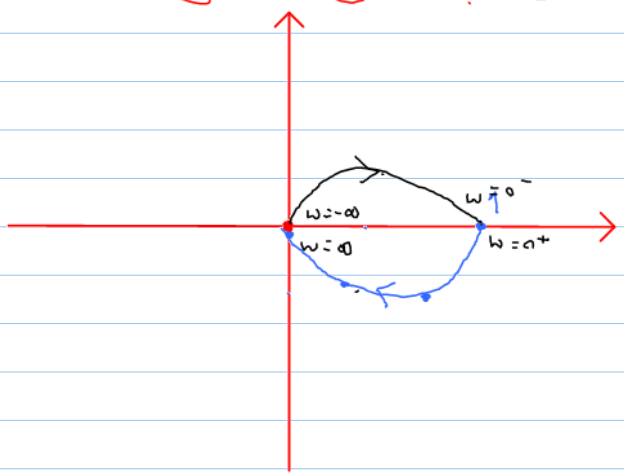
$s = \infty \rightarrow G(\infty) = \frac{1}{\infty^2} = 0$



$G(s) = \frac{1}{(1+Ts)}$

نمودار قطبی عوامل مرتبه اول:





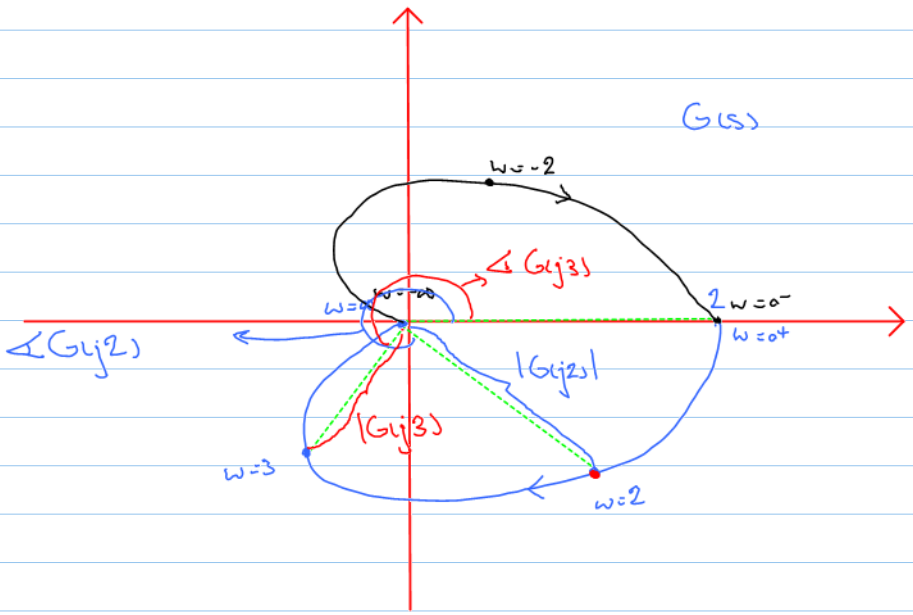
$s = j0^+ \rightarrow G(j0^+) = 1$

$s = j\infty \rightarrow G(j\infty) = \frac{1}{\infty + jT\times\infty} = -j0^+$

$s = j\omega \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+jT\omega}$

$\omega = \frac{1}{T} \rightarrow G(j1) = \frac{1}{1+j1} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$

$G(s) = (1+Ts)$ مثال



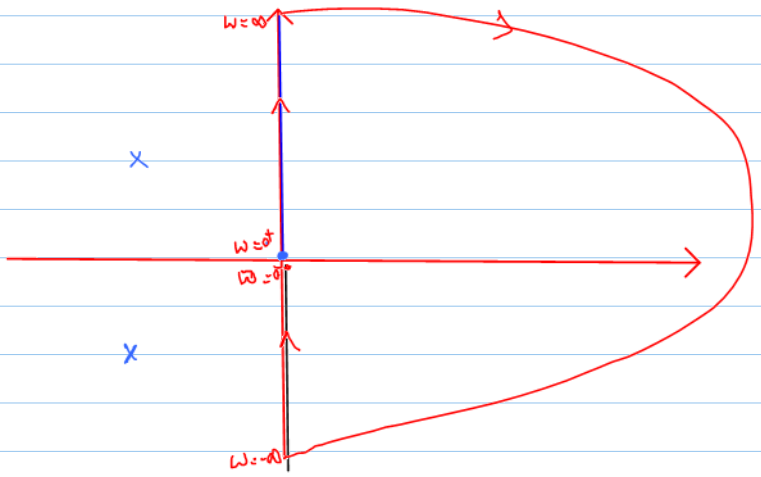
$G(j0^+) = 2 \rightarrow |G(j0^+)| = 2 \quad \angle G(j0^+) = 0$

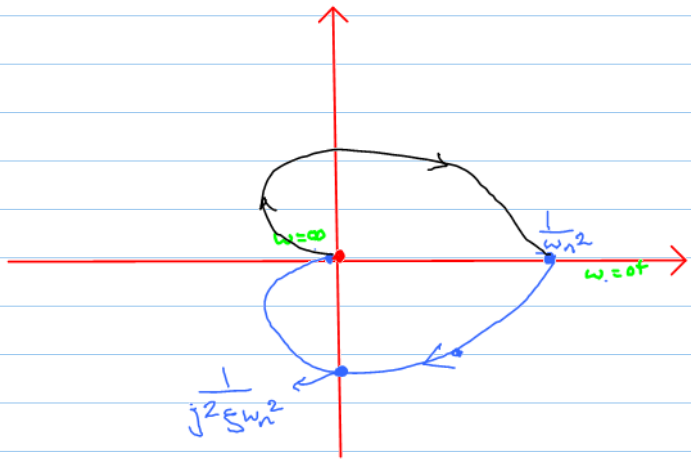
نمودار قطبی عامل مرتبه دوم

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$0 < \xi < 1$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega\omega_n} \Rightarrow$$





$\omega = 0^+ \longrightarrow G(j0^+) = \frac{1}{\omega_n^2 - 0^{+2} + j2\xi \times 0^+ \times \omega_n} = \frac{1}{\omega_n^2}$

$\omega = \infty \longrightarrow G(j\infty) = \frac{1}{\omega_n^2 - \infty^2 + j2\xi \times \infty \times \omega_n} = \frac{1}{-\infty^2} = 0^-$

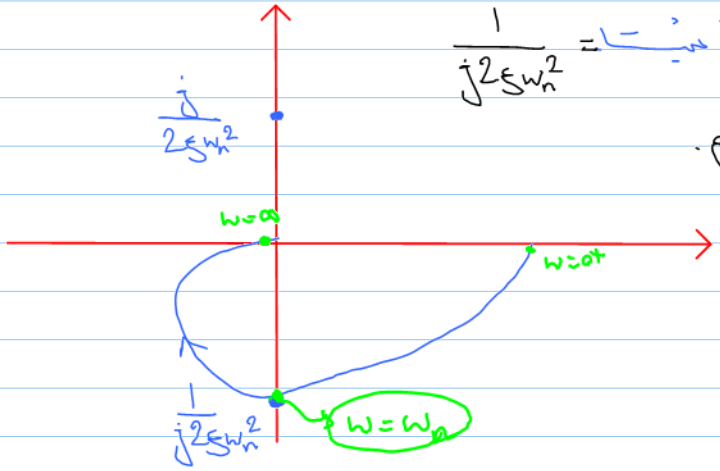
$\omega = a \longrightarrow G(ja) = \frac{1}{\omega_n^2 - a^2 + j2\xi\omega_n a}$

$\omega = \omega_n \longrightarrow G(j\omega_n) = \frac{1}{j2\xi\omega_n^2}$

نکات نمودار قطبی مرتبه دوم:

① محل برخورد نمودار با محور موهومی $= \frac{1}{j2\xi\omega_n^2}$

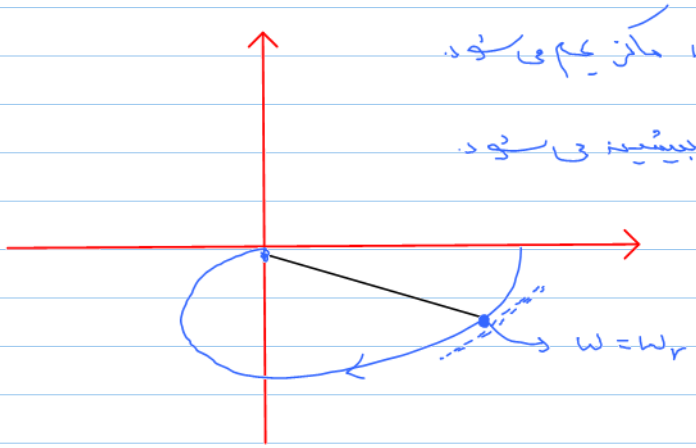
به ازای فرکانس $\omega = \omega_n$ برخورد داریم.



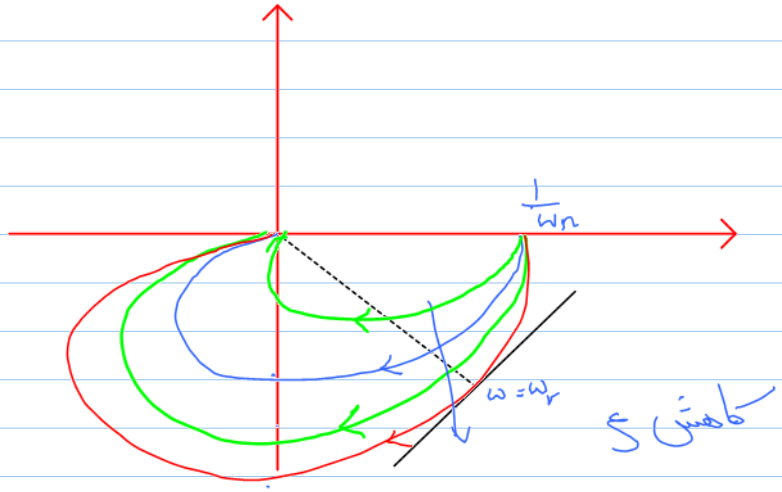
$$G(j\omega_n) = \frac{1}{j2\zeta\omega_n^2}$$

② فاصله نمودار از مبدأ به ازای $\omega = \omega_r$ ماکزیمم می‌شود.

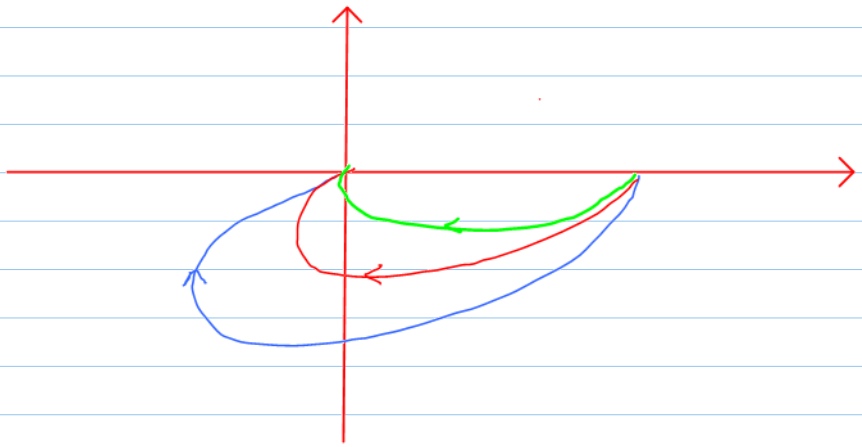
جایی که خط مماس بر نمودار قطبی بیشینه می‌شود.



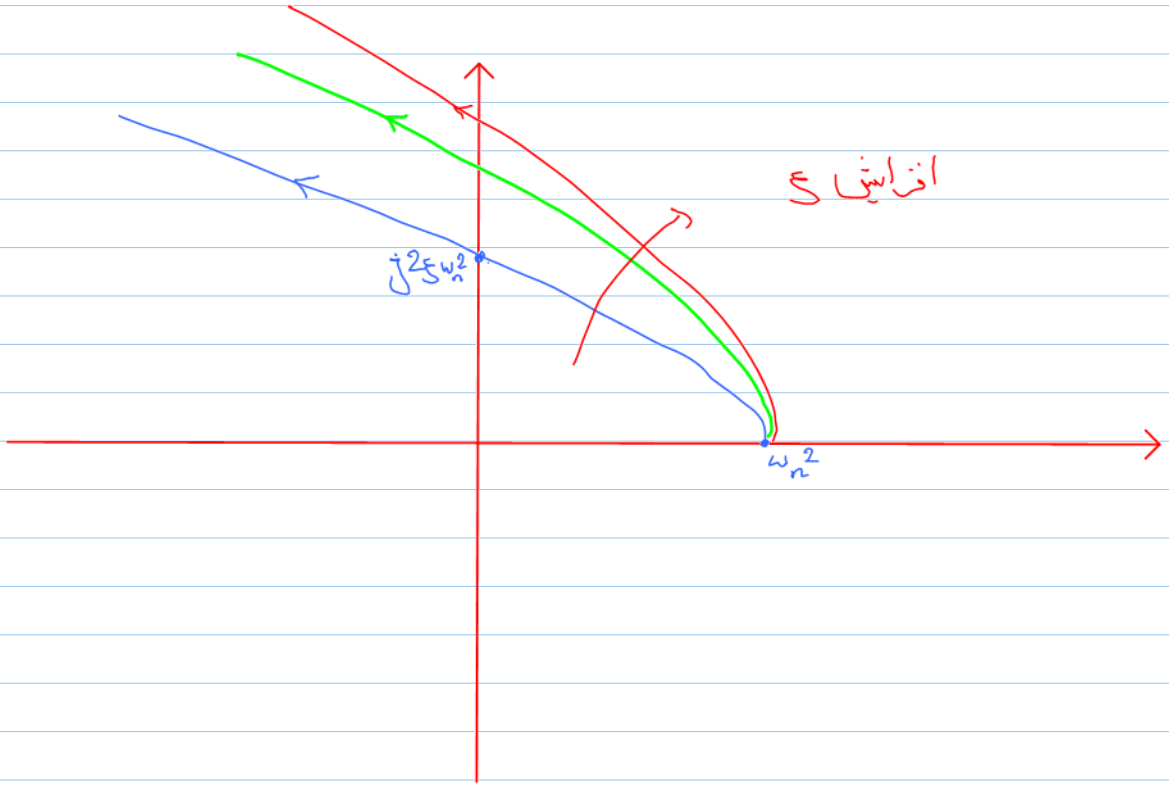
③ تأثیر ζ روی نمودار:

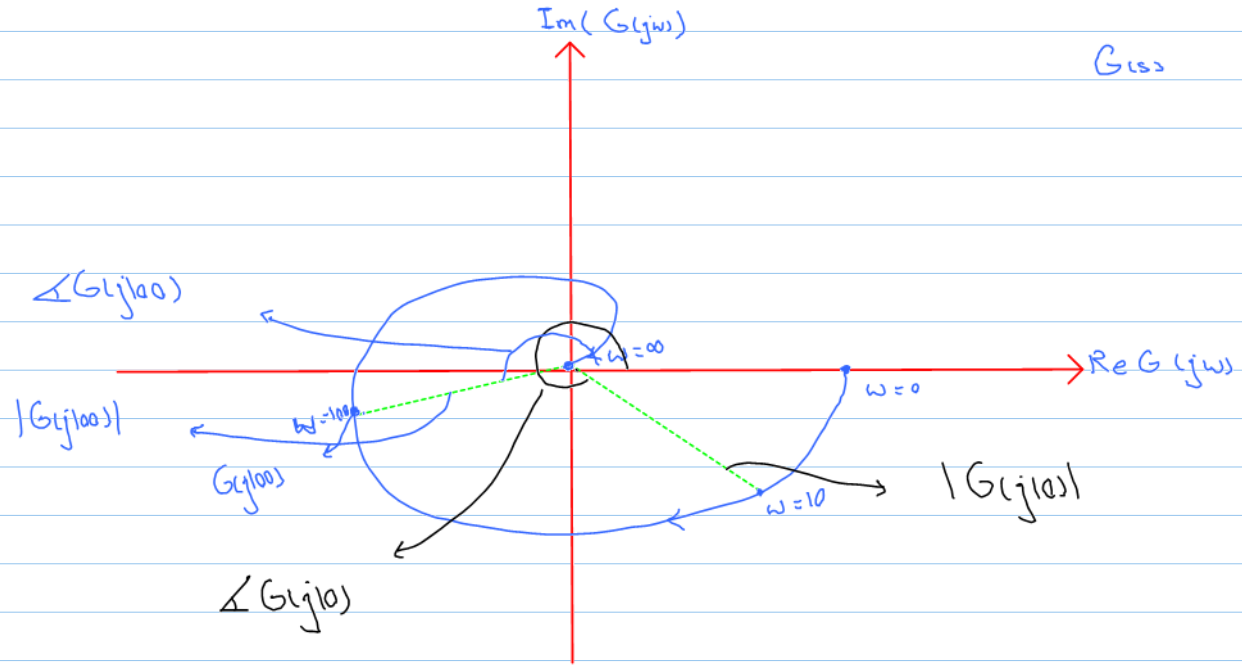


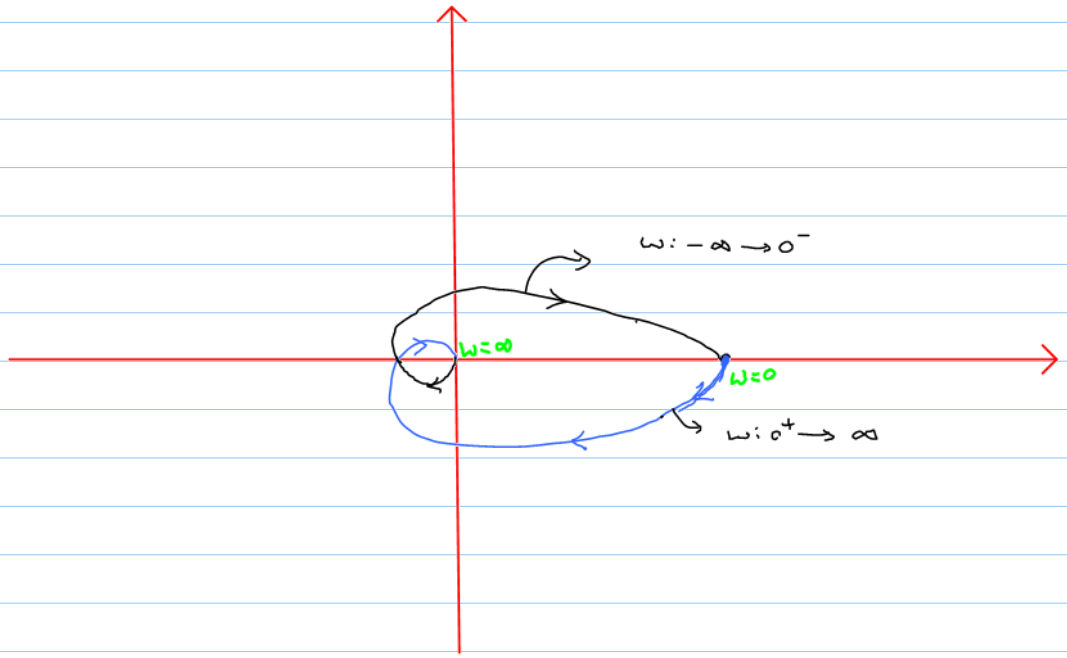
حالت میرایی بحرانی یا فوق میرا ← هرچه ζ بزرگتر ← شکل نمودار به



$G(s)H(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$







① تابع تبدیل ← نمودار نایکوئیست

② نمودار قطبی ← تابع تبدیل

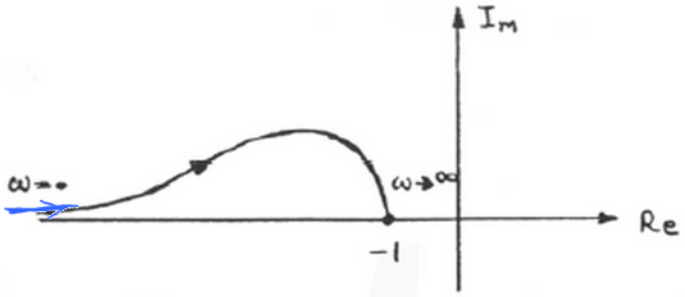
« جلسه 55 کنترل خطی »

روش سنتی نمودارهای نایکوئیست:

در سؤالاتی که نمودار نایکوئیست بدهد و تابع تبدیل را بخواهد یا برعکس، از این روش استفاده می‌کنیم.

عموماً ω مورد بررسی از $0^+ \to +\infty$ بررسی می‌شود.

کدامیک از سیستم‌های داده شده در گزینه‌ها دارای دیاگرام نایکوئیست زیر است؟



۱) $\frac{-(s+1)(s+2)}{s^2}$

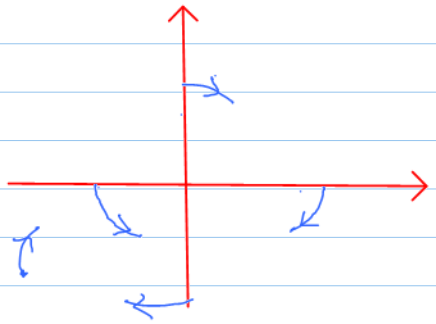
۲) $\frac{-(s-1)(s-2)}{s^2}$

۳) $\frac{-(s+1)(s-2)}{s^2}$

۴) $\frac{-(s-1)(s+2)}{s^2}$

برای حل این تیپ سؤالات از رویکرد زیر استفاده کنید. (به ترتیب سوالات)

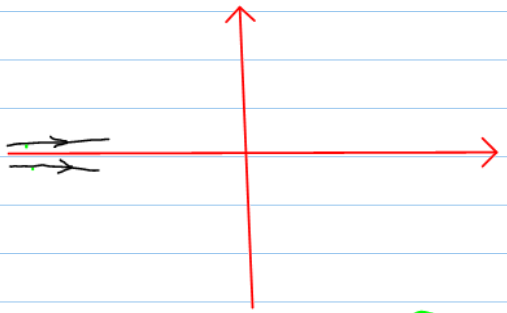
① نقطه شروع:



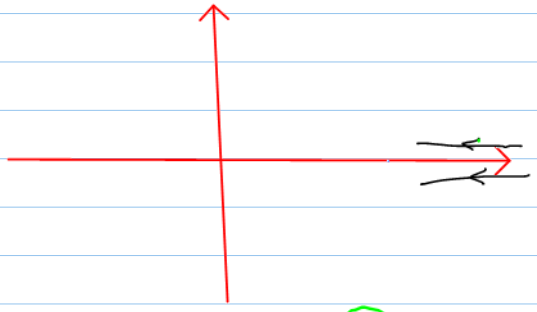
نقطه شروع از ∞ ⟷ قطب در مبدأ دارد

" " مبدأ ⟷ صفر در مبدأ دارد.

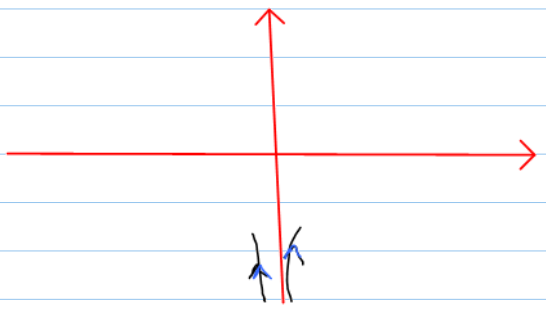
" " عدد غیرصفر ⟷ صفر یا قطب در مبدأ ندارد.



2 یا 6 یا 10 ... قطب در مبدأ



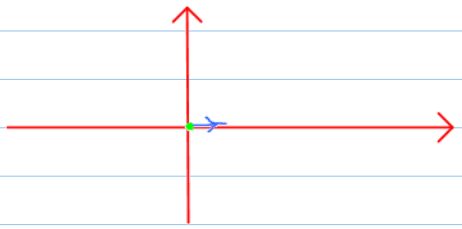
4 یا 8 یا 12 ... قطب در مبدأ



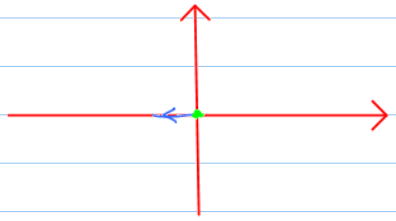


1) یا 5 یا 9 یا ... مقلب

3) یا 7 یا 11 ... مقلب



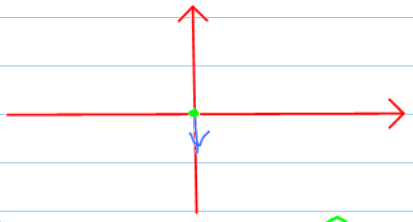
2) یا 6 ... صفر در مبدأ



4) یا 8 ... صفر در مبدأ

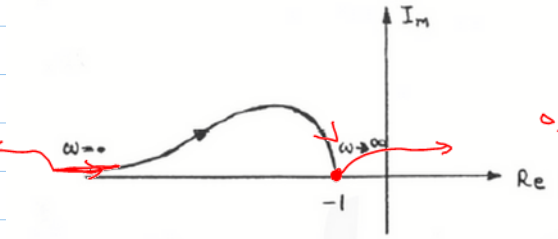


1) یا 5 ... صفر در مبدأ



3) یا 7 یا ... صفر در مبدأ

کدامیک از سیستم‌های داده شده در گزینه‌ها دارای دیاگرام نایکوئیست زیر است؟



2 قطب در مبدأ

سوه

۱) $\frac{-(s+1)(s+2)}{s^2}$ ۲) $\frac{-(s-1)(s-2)}{s^2}$ ۳) $\frac{-(s+1)(s-2)}{s^2}$ ۴) $\frac{-(s-1)(s+2)}{s^2}$

2) نقطه پایان نمودار: m درجه صورت تابع و n درجه مخرج تابع ($\omega: 0^+ \to \infty$)

$n > m$ ⟺ مبدأ مختصات ← ایدآل سره

$n = m$ ⟺ عدد محدود غیرصفر = سره

$n < m$ ⟺ ∞ ← نا سره

3) زاویه شروع و پایان:

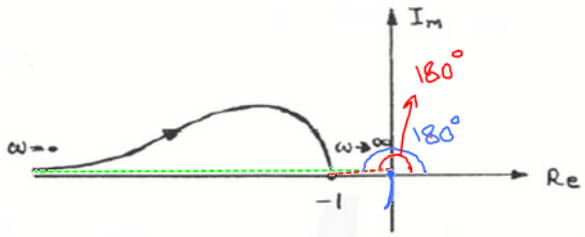
هاشت نمودارهای بودی زاویه اولیه و نهایی را یقین می‌کنیم و با نمودار تطبیق می‌دهیم.

زاویه نهایی و زاویه اولیه

* زاویه شروع مجذار = زاویه خط واصل از مبدأ به نقطه شروع

* " " نهایی " " = زاویه خط " " " " " " " انتها

کدامیک از سیستم‌های داده شده در گزینه‌ها
دارای دیاگرام نایکوئیست زیر است؟



۱) $\frac{-(s+1)(s+2)}{s^2}$ ✗ ۲) $\frac{-(s-1)(s-2)}{s^2}$ ✗ ۳) $\frac{-(s+1)(s-2)}{s^2}$ ۴) $\frac{-(s-1)(s+2)}{s^2}$

زاویه نهایی = 180° زاویه شروع = 180

$G(s) \Rightarrow$ { $G(\omega) \rightarrow \angle G(\omega)$ = زاویه شروع

$\bar{G}(s) \rightarrow \bar{G}(\omega) \rightarrow$ زاویه شروع = $\angle \bar{G}(0) + 90 \times$ تعداد قطب مبدأ $+ 90 \times$ تعداد صفر در مبدأ

زاویه نهایی = زاویه شروع + $90 \times$ تعداد قطب‌های سمت چپ $+ 90 \times$ تعداد قطب راست $+ 90 \times$ تعداد صفرهای سمت چپ

$+ 90 \times$ " " راست

1) $G(s) = -\frac{(s+1)(s+2)}{s^2} \rightarrow \bar{G}(s) = -(s+1)(s+2) \quad \bar{G}(0) = -2$

زاویه شروع = $0 \times 90 + 2 \times -90 + 180 = 0$

2) $G(s) = -\frac{(s-1)(s-2)}{s^2} \quad \bar{G}(s) = -(s-1)(s-2) \rightarrow \bar{G}(0) = -2$

زاویه شروع = $0 \times 90 + 2 \times -90 + 180 = 0$

3) $G(s) = -\frac{(s+1)(s-2)}{s^2} \quad \bar{G}(s) = -(s+1)(s-2) \rightarrow \bar{G}(0) = 2$

زاویه شروع = $0 \times 90 + 2 \times -90 + 0 = -180 = 180$ ✓

" نهایی = $180 + 0 \times -90 + 0 \times 90 + 1 \times 90 + 1 \times -90 = 180$ ✓

4) $G(s) = \frac{-(s-1)(s+2)}{s^2}$ $\bar{G}(s) = -(s-1)(s+2)$ $\bar{G}(0) = 2$

زاویه شروع $= 0 \times 90 + 2 \times -90 + 0 = -180 = +180$ ✓

تعداد $n = 180 + 0 \times -90 + 0 \times 90 + 1 \times 90 + 1 \times -90 = 180$ ✓

⑦ تعیین روند تغییرات فاز:

همانند عوامل بودی زمانی می‌گوئیم راوست و روند تغییر فاز در هرکدام را بررسی می‌کنیم.

پس روند کلی تغییرات فاز را با گزینه‌ها مطابقت می‌دهیم.

صفر سمت راست ⟵ کاهش فاز

" " چپ ⟵ افزایش "

قطب " " ⟵ کاهش فاز

" " راست ⟵ افزایش فاز

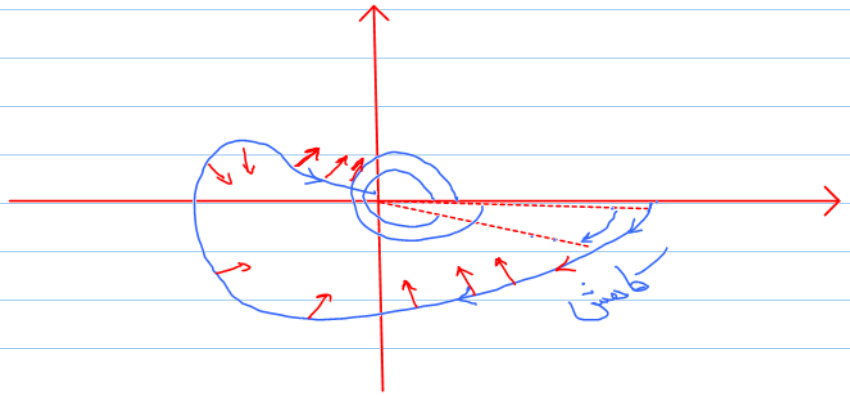
$$G(s) = \frac{(s-1)(s+10)}{s^2(s^2+8s+25)(s-40)(s+60)}$$

صفرها و قطب‌ها:

- صفر $s=1 \longrightarrow \omega = 1$
- $s=-10 \longrightarrow \omega = 10$
- قطب $s=0,0 \longrightarrow \omega = 0$
- $s=-3 \pm j4 \longrightarrow \omega = 5$
- $s=40 \longrightarrow \omega = 40$
- $s=-60 \longrightarrow \omega = 60$

ω : 0 ⟶ 1 ⟶ 5 ⟶ 10 ⟶ 40 ⟶ 60

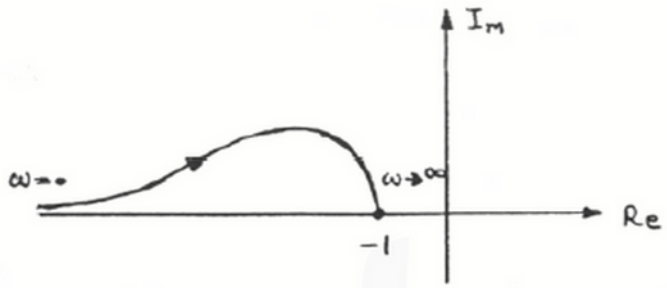
فاز ⟶ کاهش ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶ افزایش ⟶ کاهش ⟶



* هرجا تحدب یا تقعر (شکم) تغییر کند یعنی نوع دمتار فاز تغییر کرده است.

* برای بررسی روند تغییر فازروی نمودار، ابتدا به چند نقطه روی نمودار دقت می‌کنیم و زاویه فاز واصل را بررسی می‌کنیم.

کدامیک از سیستم‌های داده شده در گزینه‌ها دارای دیاگرام نایکوئیست زیر است؟



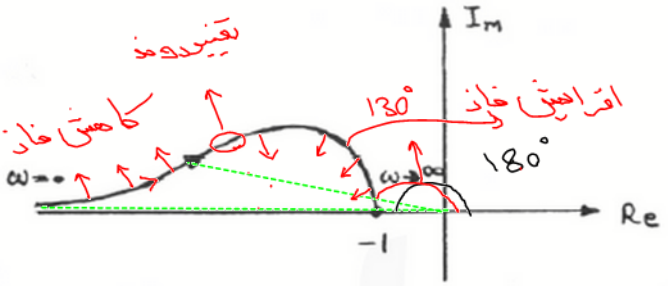
۱) $\frac{-(s+1)(s+2)}{s^2}$

۲) $\frac{-(s-1)(s-2)}{s^2}$

۳) $\frac{-(s+1)(s-2)}{s^2}$

۴) $\frac{-(s-1)(s+2)}{s^2}$

کدامیک از سیستم‌های داده شده در گزینه‌ها دارای دیاگرام نایکوئیست زیر است؟



۱) $\frac{-(s+1)(s+2)}{s^2}$ ✗

۲) $\frac{-(s+1)(s-2)}{s^2}$ ✗

۳) $\frac{-(s-1)(s-2)}{s^2}$ ✗

۴) $\frac{-(s-1)(s+2)}{s^2}$ ✓

فاز : ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶

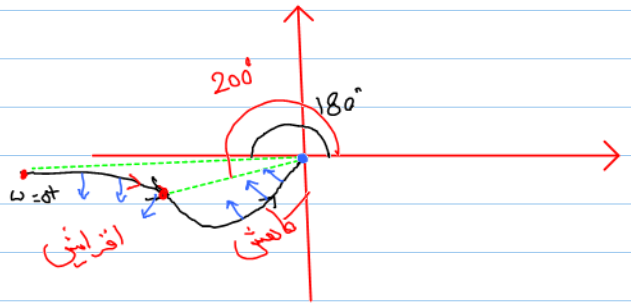
ω : ۰ ⟶ ۱ ⟶ ۲ ⟶

۳) فاز ⟶ افزایش ⟶ کاهش ⟶

۴) فاز ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶

مثال: دیاگرام قطبی مقابل مربوط به کدام تابع تبدیل است؟ ($K>0$)

1) $\frac{k(s+4)}{s^2}$ 2) $\frac{k(s+1)}{s(s+4)}$ 3) $\frac{k(s+4)}{s^2(s+1)}$ 4) $\frac{k(s+1)}{s^2(s+4)}$



① 2 تا قطب در مبدأ ← گزینه 2 حذف

② نقطه شروع = مبدأ ← گزینه 3 حذف

③ زاویه شروع و نهایی آزاد هم ←

④ دو تا پیشروی فاز

فاز: ⟶ افزایش ⟶ کاهش ⟶

1) $\omega: 0 \longrightarrow 4 \longrightarrow \infty$

فاز ⟶ افزایش ⟶

3) $\omega: 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow$

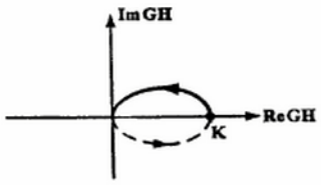
فاز ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶ X

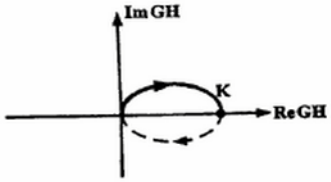
4) $\omega: 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow$ ✓

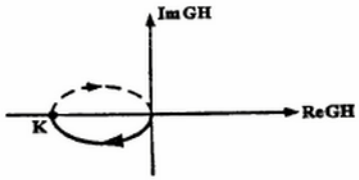
فاز ⟶ افزایش فاز ⟶ کاهش ⟶

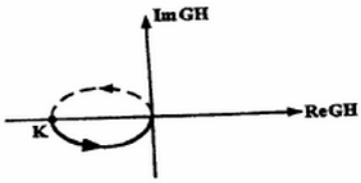
برق ۸۵

کدام گزینه دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز $GH = \frac{ks(s+1)}{s^2+2s+2}$ را به ازاء $k > 0$ نشان می‌دهد؟ (مسیر متعارف نایکوئیست را انتخاب کنید.)

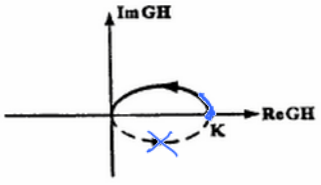
۱)


۲)


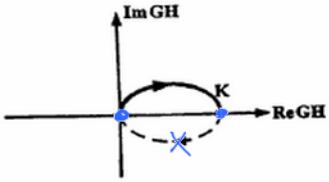
۳)


۴)


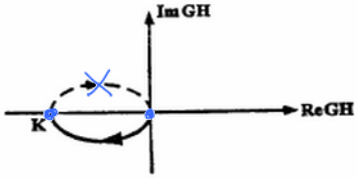
کدام گزینه دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز $GH = \frac{ks(s+1)}{s^2+2s+2}$ را به ازاء $k<0$ نشان می‌دهد؟ (مسیر متعارف نایکوئیست را انتخاب کنید.)

۱) 

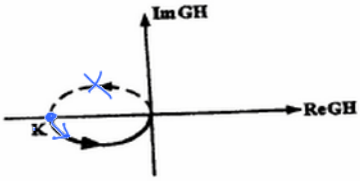
✗

۲) 

✗

۳) 

✓

۴) 

✗

(1) مبدأ مشعبات ← صفر در مبدأ

(2) سوم ← عددی محدود = $G(\omega) = \frac{k\omega(\omega+1)}{\omega^2+2\omega+2} = \frac{k\omega^2}{\omega^2} = k$

برق ۹۴

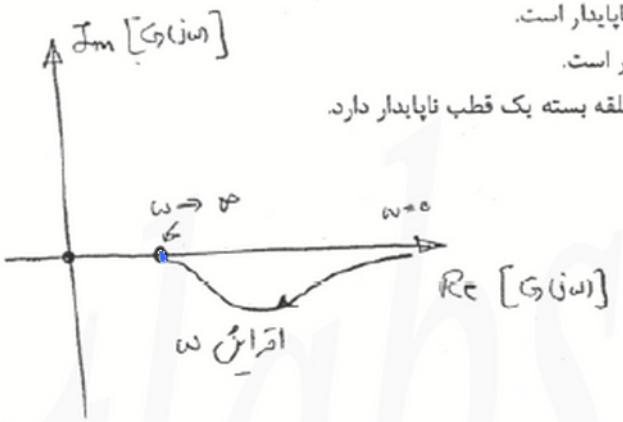
دیاگرام قطبی سیستمی در شکل زیر داده شده است. کمترین تعداد قطب‌ها و صفرهای سیستم چیست. چه تعداد از قطب‌های حلقه بسته با فیدبک منفی واحد در سمت راست قرار دارد؟

۱) یک صفر و یک قطب دارد ـ قطب حلقه بسته ناپایدار ندارد.

۲) صفر ندارد و چهار قطب دارد ـ یکی از قطب‌های حلقه بسته ناپایدار است.

۳) دو صفر و دو قطب دارد ـ یکی از قطب‌های حلقه بسته ناپایدار است.

۴) صفر ندارد و دو قطب دارد و بهره فرکانس بالا منفی است ـ حلقه بسته یک قطب ناپایدار دارد.



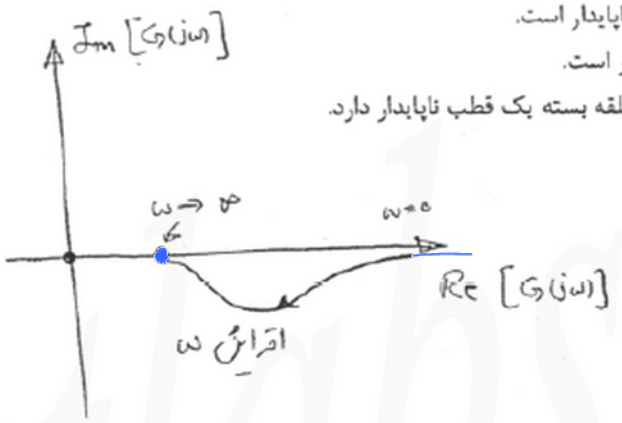
دیاگرام قطبی سیستمی در شکل زیر داده شده است. کمترین تعداد قطب‌ها و صفرهای سیستم چیست. چه تعداد از قطب‌های حلقه بسته با فیدبک منفی واحد در سمت راست قرار دارد؟

۱) یک صفر و یک قطب دارد ـ قطب حلقه بسته ناپایدار ندارد.

۲) صفر ندارد و چهار قطب دارد ـ یکی از قطب‌های حلقه بسته ناپایدار است.

۳) دو صفر و دو قطب دارد ـ یکی از قطب‌های حلقه بسته ناپایدار است.

۴) صفر ندارد و دو قطب دارد و بهره فرکانس بالا منفی است ـ حلقه بسته یک قطب ناپایدار دارد.



① ④ → $G(s) = \frac{s^4 + \dots}{s^4}$ ✗

② سره → تعداد صفر = تعداد قطب

✗ $G(s) = k\frac{s+b}{s}$ → $k\frac{s}{s} = k$ $\bar{G}(0) = k \times b$ ✗

$\bar{G}(0) = \begin{cases} -90 \\ +90 \end{cases}$ ∠ $\bar{G}(0)$ = 0 یا 180° = 0×90 + 1×−90 + 0 یا 180 = فازاویه

3) $G(s) = k\frac{(s+a)(s+b)}{s^2}$ $\bar{G}(s) = k(s+a)(s+b)$ $\bar{G}(0) = kab$ حقیقی

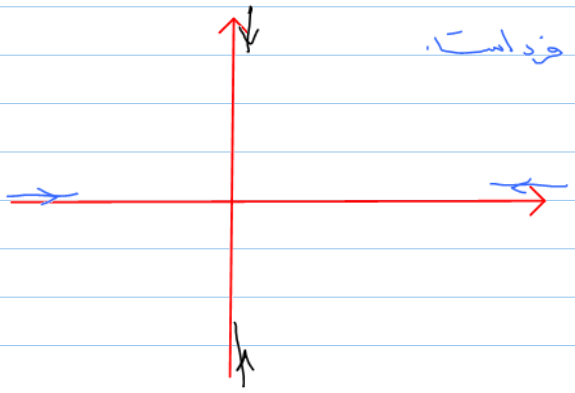
$\begin{cases} -180^\circ \\ 0 \end{cases}$ = 0×90 + 2×−90 + 0 یا 180 = فازاویه ✓

نکته تکمیلی:

اگر نقطه شروع از ∞ باشد:

نقطه شروع روی خط افقی ← تعداد قطب در مبدأ صفر است.

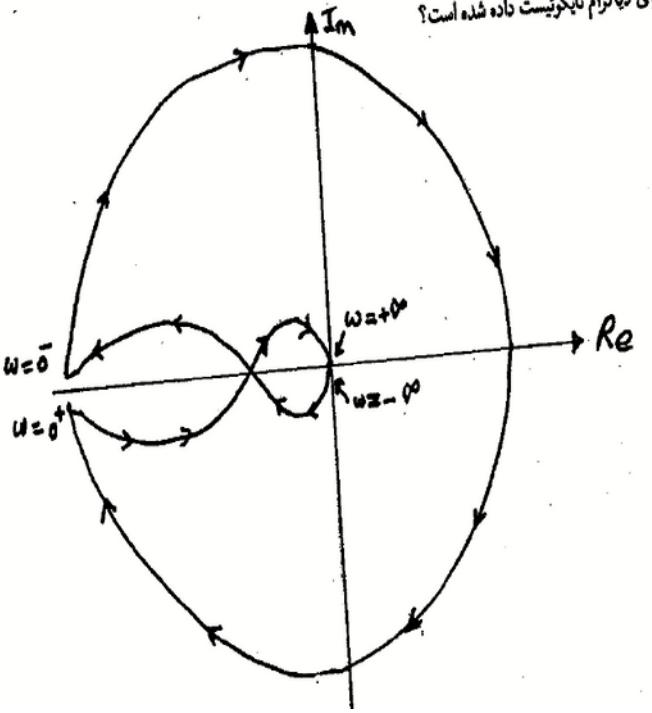
" " " عمودی ← " " " وزد است.



برق ۸۷

۲۰ (۲

کدام گزینه بیانگر تابع تبدیل حلقه باز برای دیاگرام نایکوئیست داده شده است؟



۱) $\frac{(s+1)}{s^2(s+10)}$

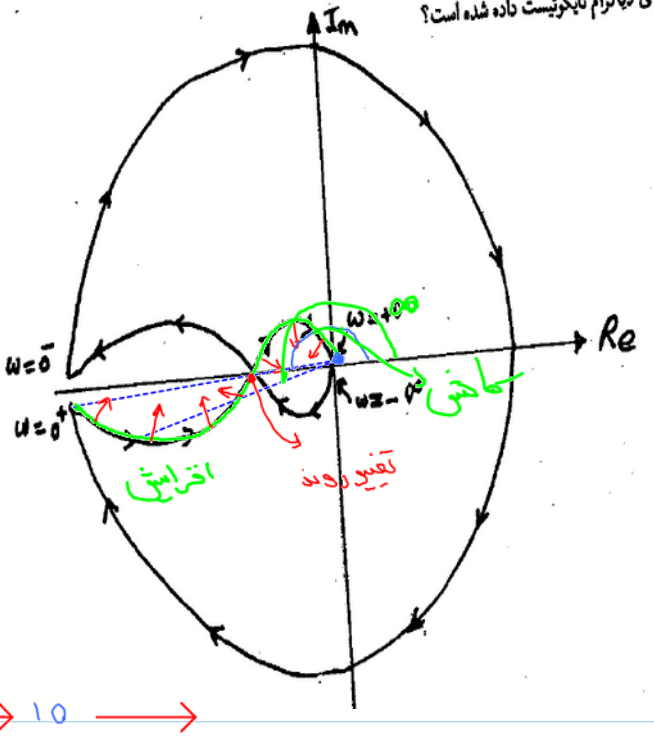
۲) $\frac{1}{s(s+10)(s+100)}$

۳) $\frac{1}{s^2(s+10)(s+100)}$

۴) $\frac{(s+1)}{s^2(s+10)(s+100)}$

۲۰ (۲

کدام گزینه بیانگر تابع تبدیل حلقه باز برای دیاگرام نایکوئیست داده شده است؟



۱) $\frac{(s+1)}{s^2(s+10)}$

۲) ~~$\frac{1}{s(s+10)(s+100)}$~~

۳) $\frac{1}{4}$ ~~$\frac{1}{s^2(s+10)(s+100)}$~~

۴) $\frac{1}{4}\frac{(s+1)}{s^2(s+10)(s+100)}$

$\omega: 0 \longrightarrow \infty$

①

② آپیدآسوه

③

فاز: → افزایش → کاهش →

۱) ω: 0 → 1 → 10 →

فاز → افزایش → کاهش →

۳) ω: 0 → 10 → 100 →

فاز → کاهش → کاهش →

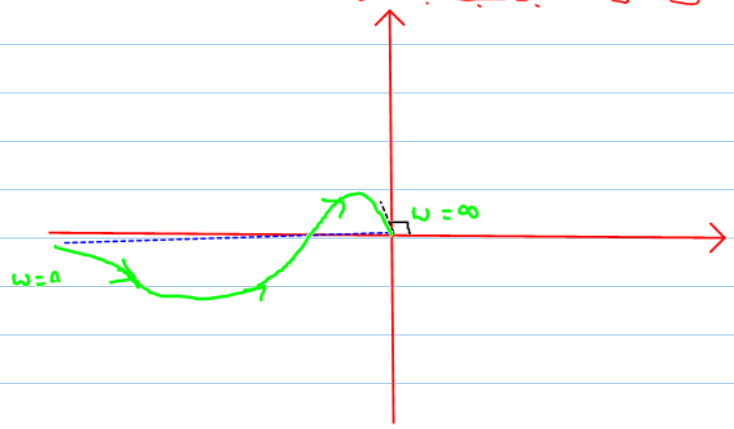
۴) ω: 0 → 1 → 10 → 100 →

→ افزایش → کاهش → کاهش →

کاهش

گزینه ۱ و ۴ هر دو جواب هستند.

③ فاز اولیه و نهایی:



زاویه شروع = 180°

زاویه نهایی ~ = 90°

1) $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)}$ $\quad \bar{G}(s) = \frac{s+1}{s+10}$ $\quad \bar{G}(0) = \frac{1}{10} > 0$

زاوية توقع $= 0 \times 90 + 2 \times -90 + 0 = -180 = 180^\circ$ ✓

زاوية تفاعل $= +180 + 1 \times 90 + 0 \times -90 + 1 \times -90 + 0 \times 90 = +180^\circ$ ✗

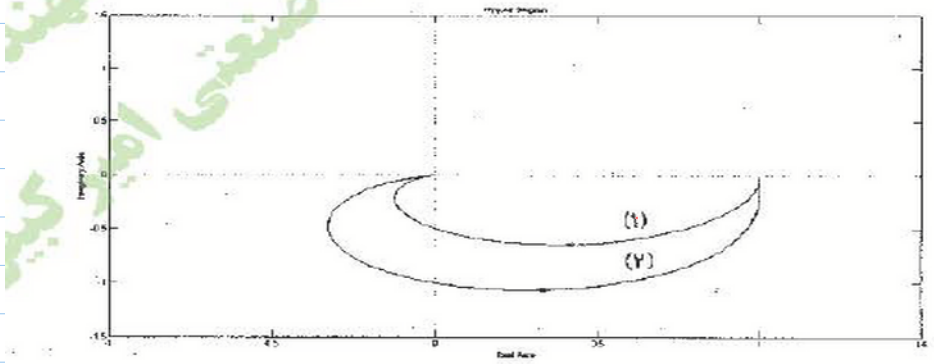
4) $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+10)(s+100)}$ $\quad \bar{G}(s) = \frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$ $\quad \bar{G}(0) = \frac{1}{1000} > 0$

زاوية توقع $= 0 \times 90 + 2 \times -90 + 0 = +180 = -180^\circ$ ✓

زاوية تفاعل $= 180^\circ + 1 \times 90 + 0 \times -90 + 2 \times -90 + 0 \times 90 = 90^\circ$ ✓

برق ۹۳

نمودار قطبی یک سیستم مرتبه دوم نوعی $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ در دو حالت زیر ترسیم شده است. در این صورت کدام عبارت صحیح می‌باشد؟



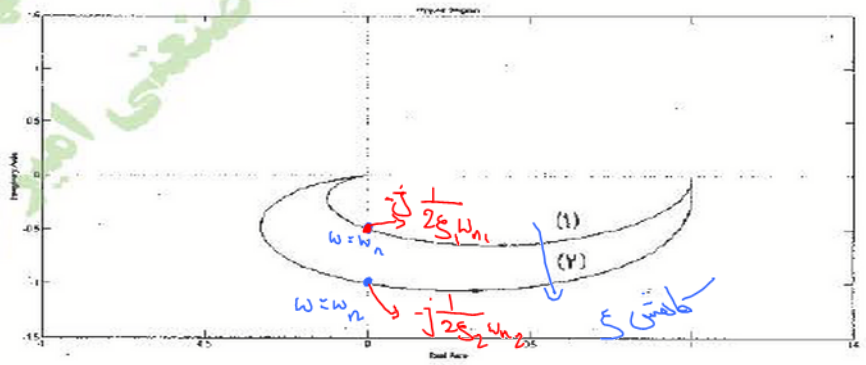
۱) فراجهش سیستم (۱) بیشتر از فراجهش سیستم (۲) است.

۲) پاسخ سیستم (۲) سریع‌تر از پاسخ سیستم (۱) می‌باشد.

۳) فرکانس محل تلاقی با محور موهومی نشان دهنده فرکانس نوسانات میرای سیستم است.

۴) هر سه عبارت صحیح است.

نمودار قطبی یک سیستم مرتبه دوم نوعی $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ در دو حالت زیر ترسیم شده است. در این صورت کدام عبارت صحیح می‌باشد؟



۱) فراجهش سیستم (۱) بیشتر از فراجهش سیستم (۲) است.

۲) پاسخ سیستم (۲) سریع‌تر از پاسخ سیستم (۱) می‌باشد.

۳) فرکانس محل تلاقی با محور موهومی نشان دهنده فرکانس نوسانات میرای سیستم است.

۴) هر سه عبارت صحیح است.

$\xi_1 > \xi_2$

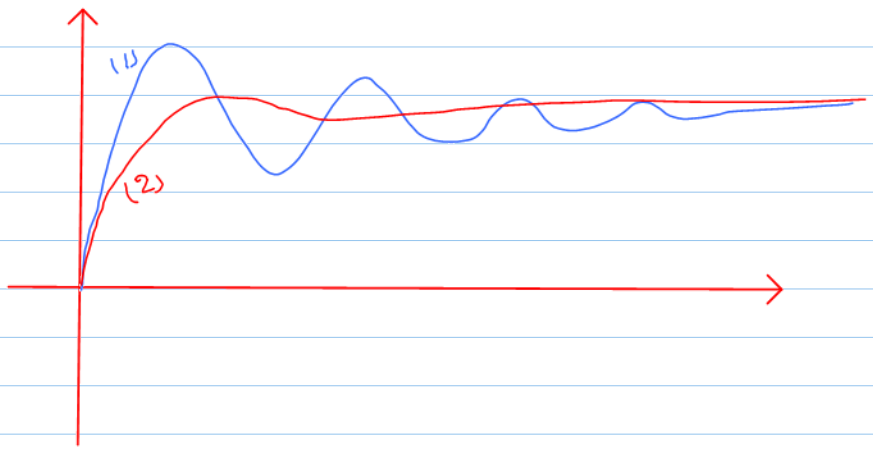
$OS_1 < OS_2$

$T_{s_2} < T_{s_1}$

$\frac{4}{\xi_2\omega_{n_2}} < \frac{4}{\xi_1\omega_{n_1}}$

$\xi_2\omega_{n_2} > \xi_1\omega_{n_1}$

$\frac{1}{2\xi_2\omega_{n_2}} > \frac{1}{2\xi_1\omega_{n_1}} \rightarrow 2\xi_2\omega_{n_2} < 2\xi_1\omega_{n_1} \rightarrow \xi_2\omega_{n_2} < \xi_1\omega_{n_1}$



T_s

سرعت سیستم ← ξ

سرعت پاسخ ← $\xi\omega_n$

T_s

سرعت سیستم (۱) < سرعت سیستم (۲)

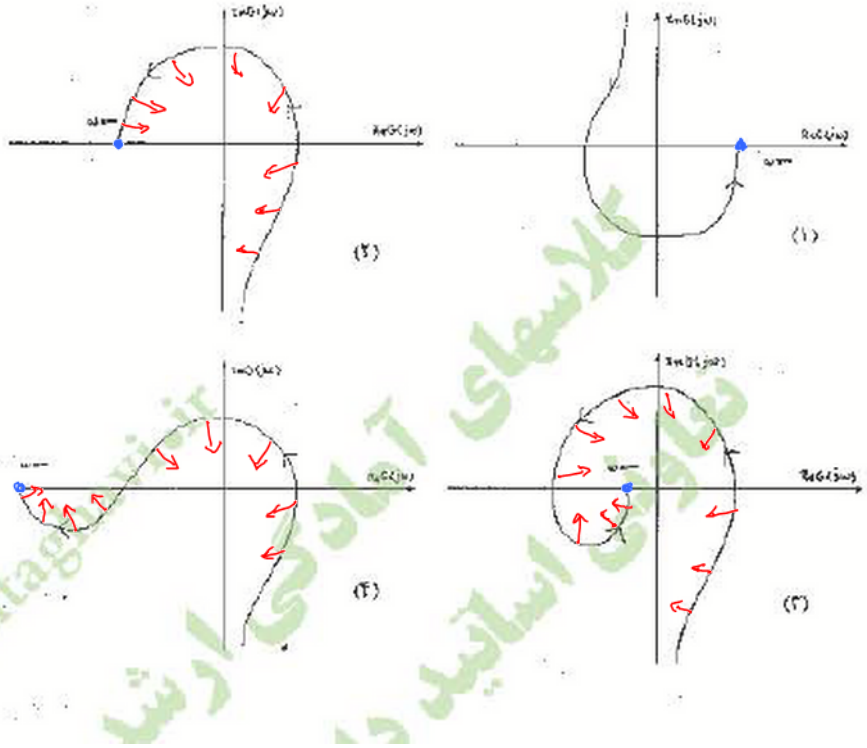
سرعت پاسخ (۲) < سرعت پاسخ (۱)

برق ۹۳

تابع تبدیل سیستمی به صورت زیر است:

$$G(s)=\frac{-(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{s^{3}(s+100)}$$

کدام دیاگرام می‌تواند منحنی نایکوئیست این سیستم باشد؟



$$G(s)=\frac{-(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{s^3(s+100)} = \frac{-s^4}{s^4}$$

(1) ✓

(2) $G(\infty) = -1$ حذف گزینه ۱

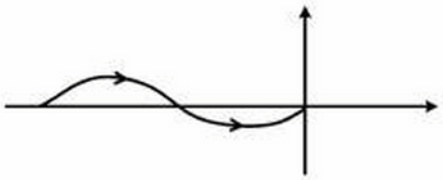
(4)

$\omega: 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 100 \longrightarrow$

فاز: $\longrightarrow$ افزایش $\longrightarrow$ افزایش $\longrightarrow$ افزایش $\longrightarrow$ افزایش $\longrightarrow$ کاهش $\longrightarrow$

تغییر روند فاز ← تغییر شکل ← گزینه ۴

دیاگرام قطبی زیر، مربوط به کدام تابع تبدیل می‌تواند باشد؟



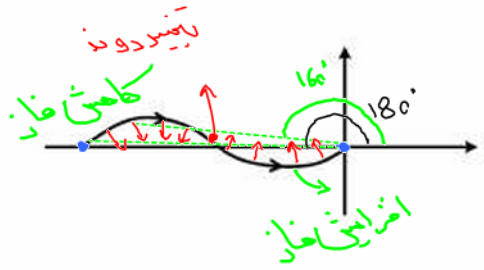
۱) $G(s)=\frac{k(s+۴)(s-۲)}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$

۲) $G(s)=k\frac{-(s+۴)(s-۲)}{(s-۱)(s+۲)(s+۳)}$

۳) $G(s)=k\frac{s+۴}{(s-۱)(s+۲)}$

۴) $G(s)=k\frac{s+۴}{(s+۱)(s+۲)}$

دیاگرام قطبی زیر، مربوط به کدام تابع تبدیل می‌تواند باشد؟



۱) $G(s)=\frac{k(s+4)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

۲) $G(s)=k\frac{-(s+4)(s-2)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$

۳) $G(s)=k\frac{s+4}{(s-1)(s+2)}$

۴) $G(s)=k\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$

① ✓ ② ایکد آموه ✓ ④

فاز ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶

2) ω: ⟶ 1 ⟶ 2 ⟶ 3 ⟶ 4 ⟶ ✗

افزایش

3) ω: ⟶ 1 ⟶ 2 ⟶ 4 ⟶ ✗

افزایش

1) ω: ⟶ 1 ⟶ 2 ⟶ 3 ⟶ 4 ⟶

فاز ⟶ کاهش ⟶ کاهش ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶ ✓

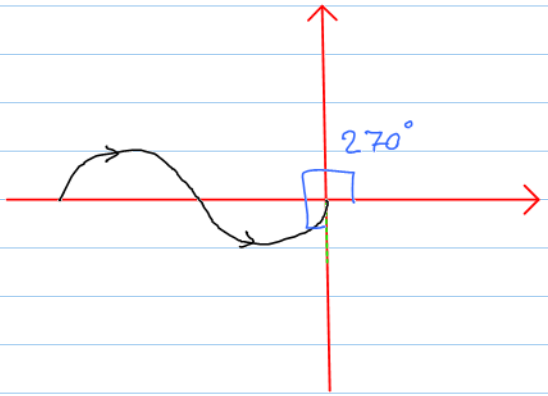
4) ω: ⟶ 1 ⟶ 2 ⟶ 4 ⟶ ✓

فاز ⟶ کاهش ⟶ کاهش ⟶ افزایش ⟶

③ زاویه نهایی و زاویه شروع

زاویه نهایی = 270° − 90°

زاویه شروع = 180°



4) $G(s) = k\ \dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)}$ $\qquad G(0) = \dfrac{k \times 4}{1 \times 2}$

زاویه شروع $= \begin{cases} 0 & k>0 \\ 180^\circ & k<0 \end{cases}$

زاویه مجانبی $= \begin{cases} 0 \\ 180 \end{cases} + 0 \times -90 + 1 \times 90 + 2 \times -90 + 0 \times 90 = \begin{cases} -90 & k>0 \\ 90 & k<0 \end{cases}$

1) $G(s) = \dfrac{k(s+4)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ $\qquad G(0) = \dfrac{k \times 4 \times -2}{1 \times 2 \times 3}$

زاویه شروع $= \begin{cases} 180^\circ & k>0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$

$k>0 \begin{cases} \text{شروع} = 0 \ \text{X} \\ \text{مجانبی} = -90^\circ \end{cases}$ $\qquad k<0 \begin{cases} 180^\circ = \text{شروع} \ \checkmark \\ 90^\circ = \text{مجانبی} \ \text{X} \end{cases}$ $\qquad \leftarrow$ تایید شد

✓1) زاویه مجانبی $= \begin{cases} 180 \\ 0 \end{cases} \begin{matrix} k>0 \\ k<0 \end{matrix} + 1 \times -90 + 1 \times 90 + 0 \times 90 + 3 \times -90^\circ = \begin{cases} -90^\circ & k>0 \\ -270 = 90^\circ & k<0 \end{cases}$

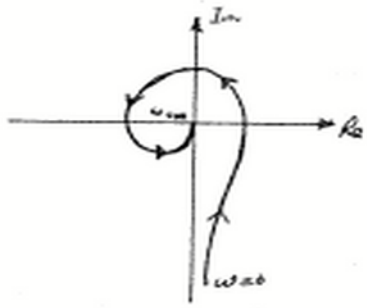
✓$k>0 \rightarrow \begin{cases} 180^\circ = \text{شروع} \ \checkmark \\ -90^\circ = \text{مجانبی} \ \checkmark \end{cases}$ $\qquad k<0 \begin{cases} \text{شروع} = 0 \\ \text{مجانبی} = 90 \end{cases}$

جلسه 56 کنترل مقدماتی

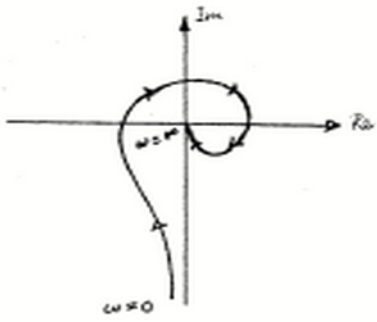
برق ۸۸

تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت $kG(s)H(s) = \frac{k(s^2+2s+4)}{s(s+10)(s+20)}$ است. منحنی نایکوئیست این سیستم کدام است؟ $(k > 0)$

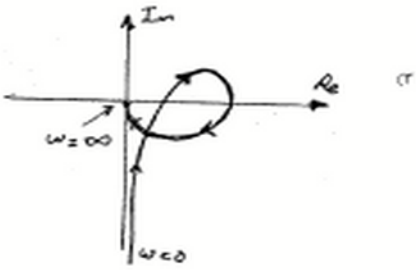
۱)



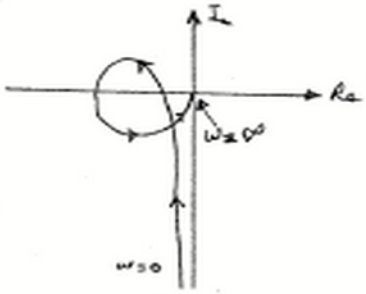
۲)



۳)



۴)



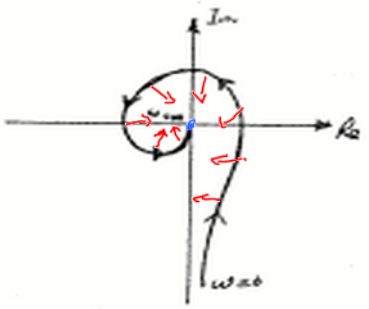
۱) نقطه شروع ✓

۲) ∞ نهایی ✓

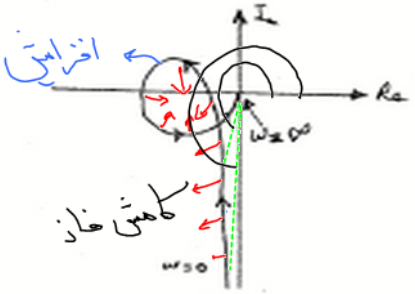
۴) تغییرات فاز

تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت $kG(s)H(s) = \frac{k(s^2+2s+4)}{s(s+10)(s+20)}$ است. منحنی نایکوئیست این سیستم کدام است؟ $(k > 0)$

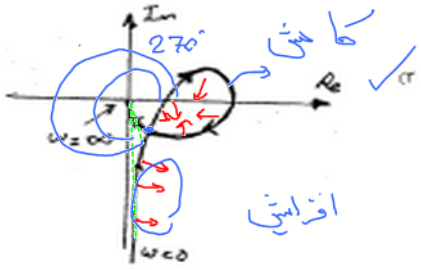
۱) ✗



۲) ✗



۳) ✓



$L(s) = \frac{k(s^2+2s+4)}{s(s+10)(s+20)}$

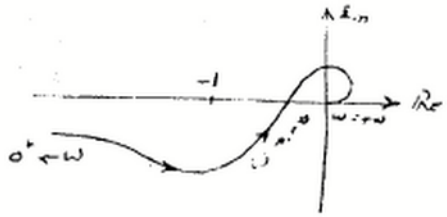
$s=0$	$\longrightarrow$	$\omega=0$	قطب
$s=-10$	$\longrightarrow$	$\omega=10$	قطب بهره
$s=-20$	$\longrightarrow$	$\omega=20$	قطب بهره
$s=-1\pm j\sqrt{3}$	$\longrightarrow$	$\omega=2$	صفر بهره

ω : 0 $\longrightarrow$ 2 $\longrightarrow$ 10 $\longrightarrow$ 20 $\longrightarrow$

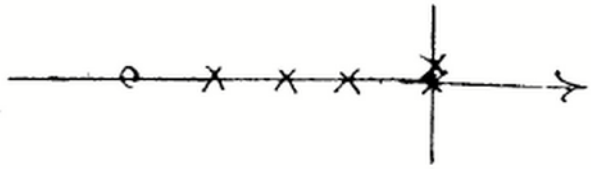
فاز : $\longrightarrow$ افزایش $\longrightarrow$ کاهش $\longrightarrow$ کاهش $\longrightarrow$

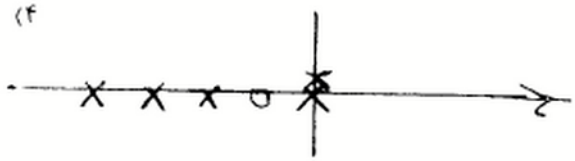
تغییر روند فاز $\longrightarrow$ تغییر قطب

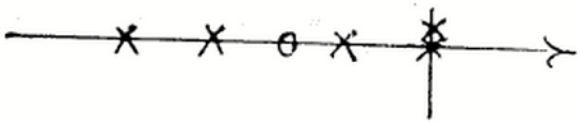
کدام توپولوژی صفر و قطب برای سیستمی با دیاگرام قطبی زیر صحیح می‌باشد؟



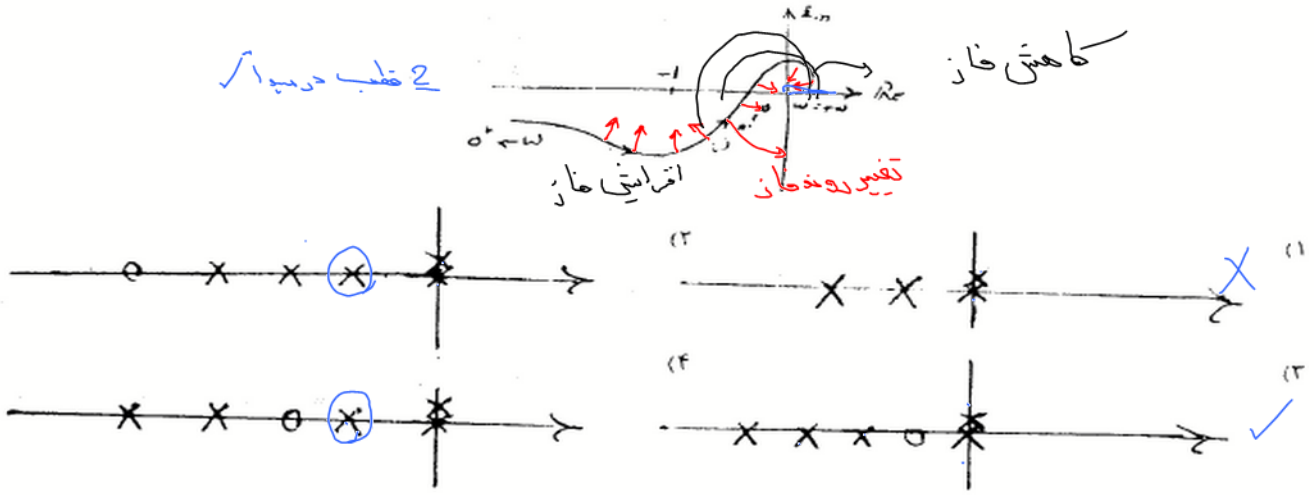
۱)


۲)


۳)


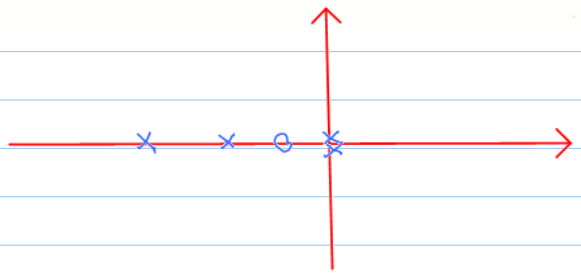
۴)


کدام توپولوژی صفر و قطب برای سیستمی با دیاگرام قطبی زیر صحیح می‌باشد؟



درجه صورت < درجه مخرج

تعداد صفرها < تعداد قطب‌ها ✓

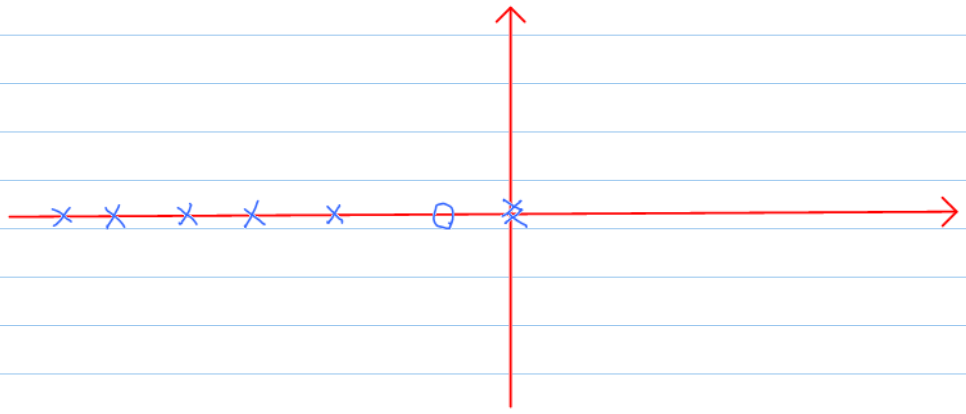


(۴) فاز: کاهش → افزایش

$\omega: 0 \rightarrow$ مزمستاجب $\rightarrow$ قطب ستاجب

$\omega: \infty \rightarrow$ +10 $\rightarrow$ 20 → 30 → 40 →

$s=-10$ $s=-20$ $s=-30$ $s=-40$

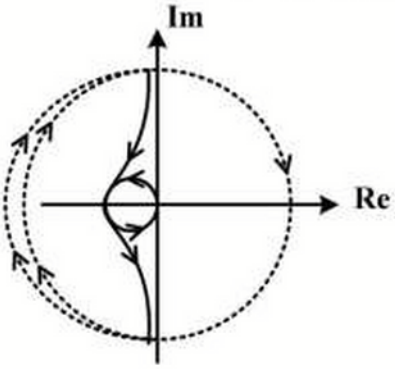


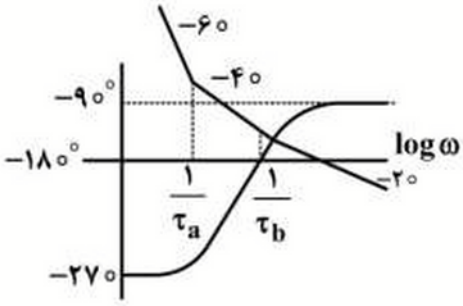
فاز زاویه $= 180$ فاز خالی $= 360 = 0^\circ$

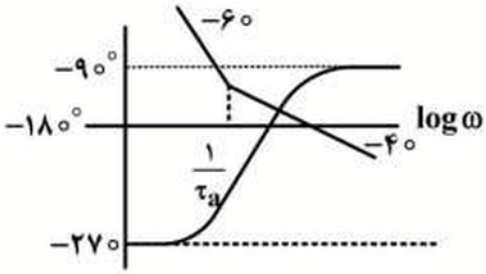
$0 = 180 + 1 \times (+90) + ? \times -90^\circ$ → (3)

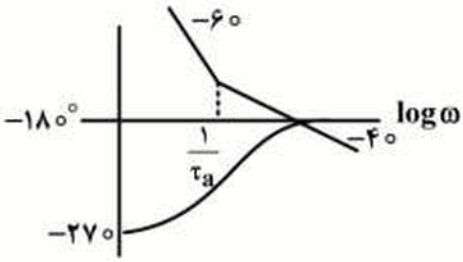
دکتری ۹۸

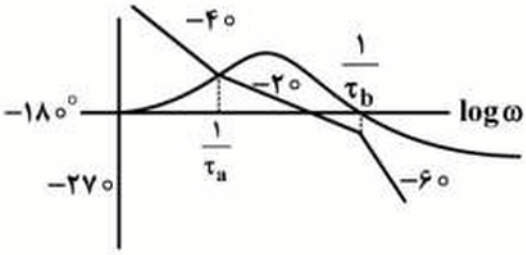
نمودار نایکوئیست یک سیستم مینیمم فاز به‌صورت زیر است. نمودار بود مربوط به آن کدام است؟



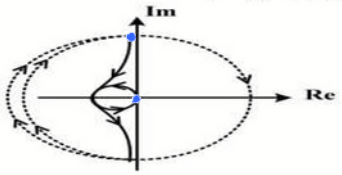
۱)


۲)


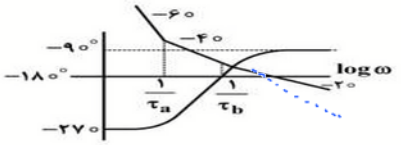
۳)


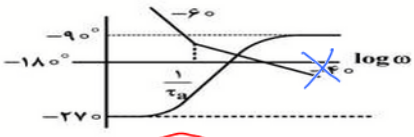
۴)


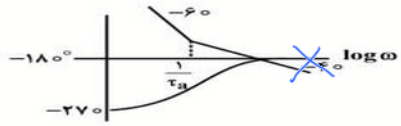
نمودار نایکوئیست یک سیستم مینیمم فاز به‌صورت زیر است. نمودار بود مربوط به آن کدام است؟

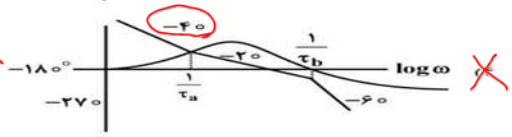


$G(s) = \frac{1}{s^3}$

۱)


۲)


۳)


۴)


① $\frac{1}{s^3}$ تا قطب در مبدأ

② درجه صورت < درجه مخرج

④

فاز: ــــ کاهش ــــ افزایش ــــ

ω: ۰ ــــ منفی ــــ قطب ــــ



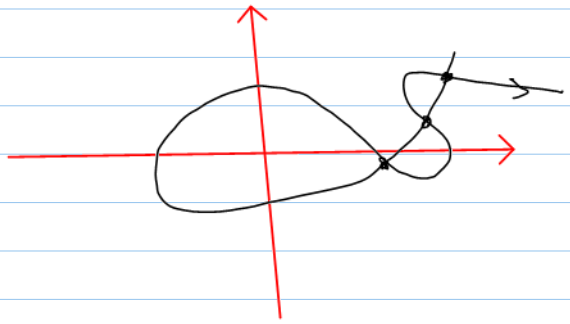
نکته: هرگاه عبارتهای s^2+a^2 یا s^2-a^2 درصورت یا مخرج باشد و با تغییرات تا آخر

نتوانیم به جواب برسیم، به تغییرات اندازه دقت کنید (نقاط حساس)

↓

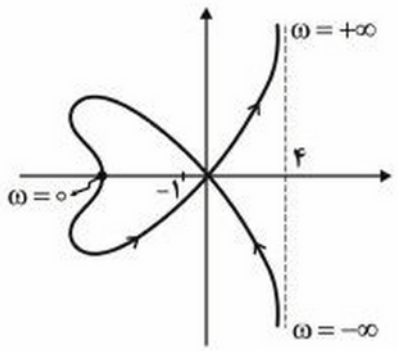
نمودار با حرکت تقاطع دارد

نمودار از مبدا عبور می‌کند.



دکتری ۹۷

کدام تابع تبدیل می‌تواند دارای نمودار نایکوئیست زیر باشد؟



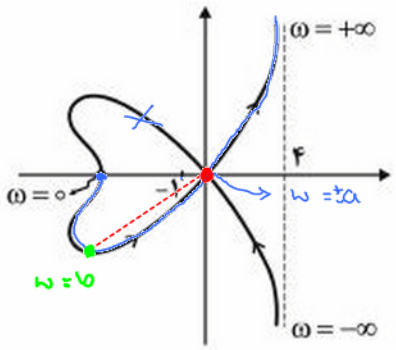
۱) $\frac{k(s^2-3)(s^2+16)}{(s^2-9)(s-4)}$

۲) $\frac{k(s^2+3)(s^2+16)}{(s^2-9)(s+4)}$

۳) $\frac{-k(s^2-3)(s^2-16)}{(s^2-9)(s-5)}$

۴) $\frac{k(s^2+3)(s^2-16)}{s(s^2-9)}$

کدام تابع تبدیل می‌تواند دارای نمودار نایکوئیست زیر باشد؟



۱) $\frac{k(s^2-3)(s^2+16)}{(s^2-9)(s-4)}$ ✓

۲) $\frac{k(s^2+3)(s^2+16)}{(s^2-9)(s+4)}$ ✗

۳) $\frac{-k(s^2-3)(s^2-16)}{(s^2-9)(s-5)}$ ✗

۴) $\frac{k(s^2+3)(s^2-16)}{s(s^2-9)}$ ✗

۱) قطب ندارد ← هزینا قطب در مبدأ ندارد

۲) ~ اسفا ← درجه صورت < درجه مخرج ✓

۳ و ۴) خارج ← طبق نکته به اندازه حساس ی شروع.

$\omega = \pm a \rightarrow |G(ja)| = 0 \quad \angle G(ja) = 0$

$|G(jw)| = \frac{|\text{صورت}|}{|\text{مخرج}|} = 0 \rightarrow |\text{صورت}|_{(w=\pm a)} = 0$

صورت →
- $s^2 - a^2$
- $s^2 + a^2$
- $s^2 + b^2$
- $s^2 - b^2$

3) $G(jw) = \frac{-k(-w^2-3)(-w^2-16)}{(-w^2-9)(jw-5)} \rightarrow |\text{صورت}| = |-k||(w^2+3)(w^2+16)| = 0$

$\rightarrow \begin{cases} w = \pm j\sqrt{3} \\ w = \pm j\sqrt{16} \end{cases}$ ✗

2) $G(jw) = \frac{k(-w^2+3)(-w^2+16)}{(-w^2-9)(jw-5)} \quad |\text{صورت}| = |+k||(-w^2+3)(-w^2+16)| = 0$

$\begin{cases} w = \pm\sqrt{3} \rightarrow \\ w = \pm\sqrt{16} \rightarrow \end{cases}$

1) $G(jw) = \dfrac{k(-w^2-3)(-w^2+16)}{(-w^2-9)(jw-4)}$ $\qquad |G(jw)| = \dfrac{|k|\,|-w^2-3|\,|-w^2+16|}{|-w^2-9|\,\sqrt{w^2+16}} = 0$

$|k| = 0$ X

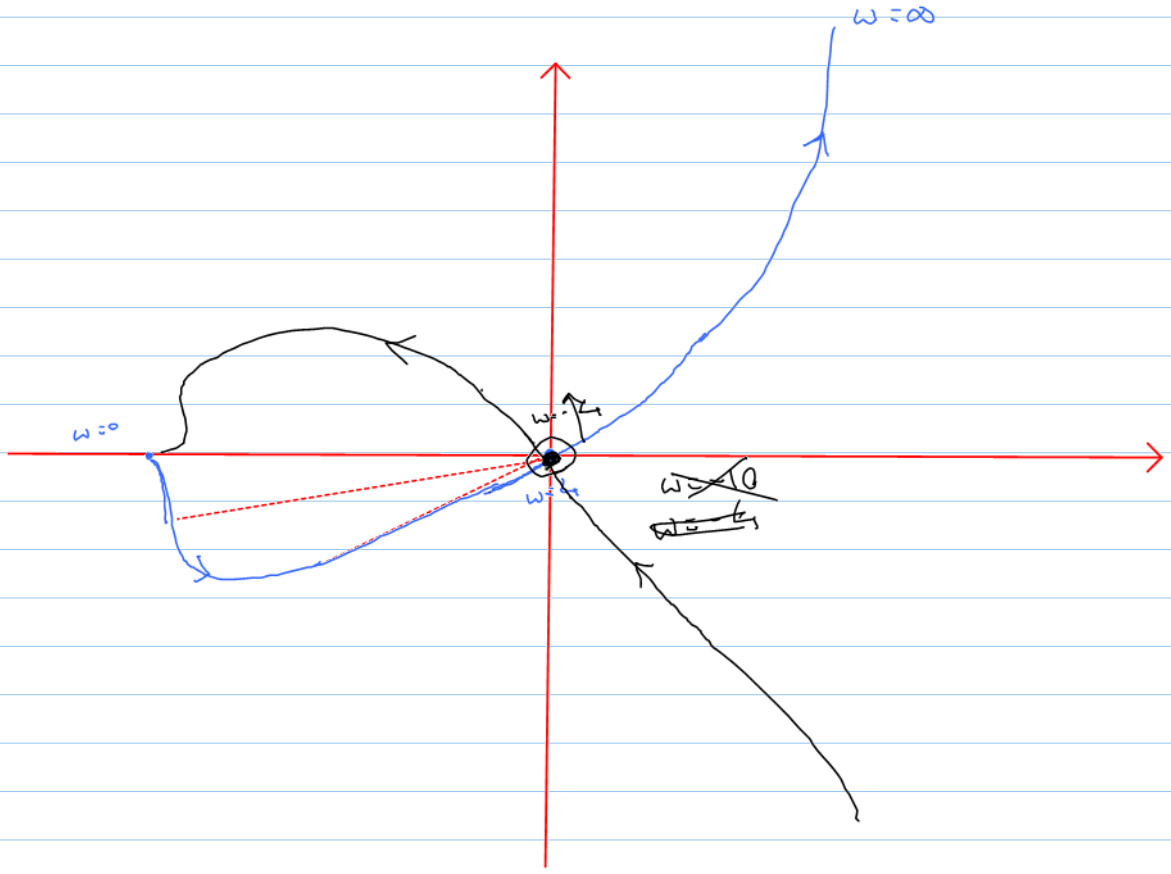
$|-w^2-3| = 0 \rightarrow |-(w^2+3)| = w^2+3 = 0 \rightarrow w = \pm j\sqrt{3}$ X

$|-w^2+16| = 0 \rightarrow -w^2+16 = 0 \rightarrow w = \pm 4$

$-\infty \rightarrow -4 \rightarrow 0^-$

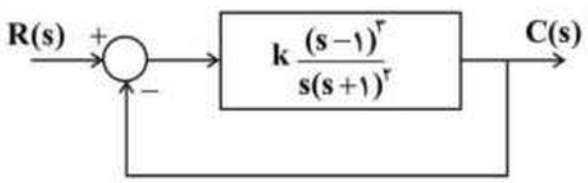
$w: 0 \rightarrow 4 \rightarrow \infty$

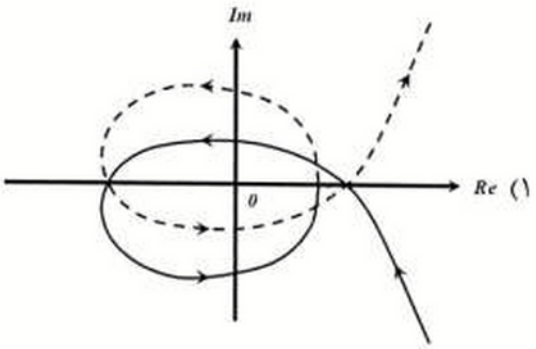
$|G| = 0$



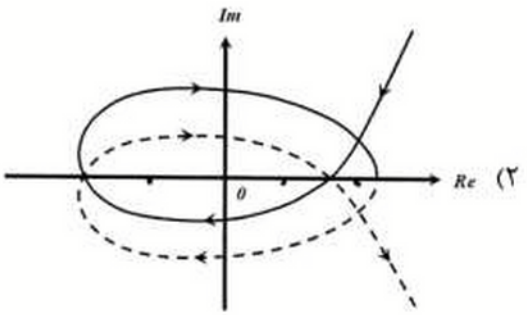
برق ۹۷

نمودار نایکوئیست سیستم زیر به ازای $k > 0$، کدام است؟

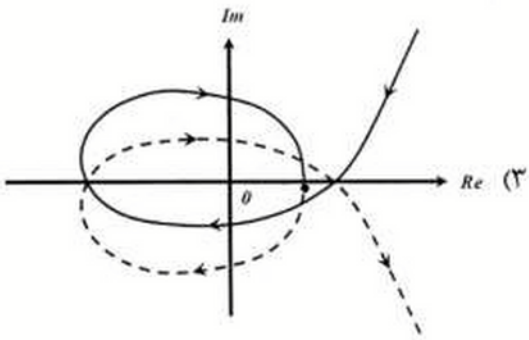




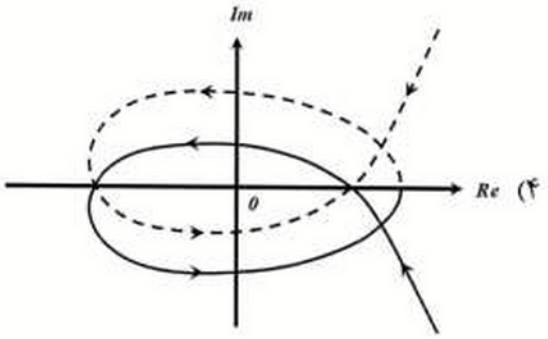
(۱



(۲

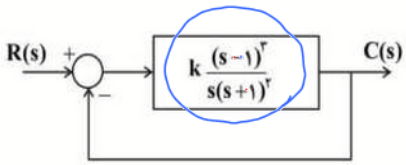


(۳

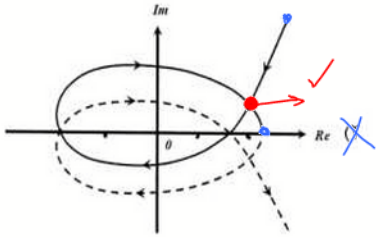


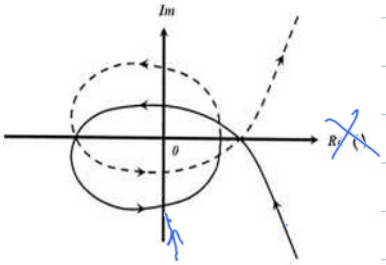
(۴

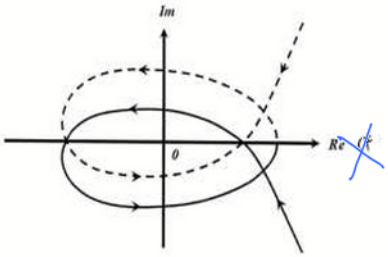
نمودار نایکوئیست سیستم زیر به ازای $k > 0$، کدام است؟

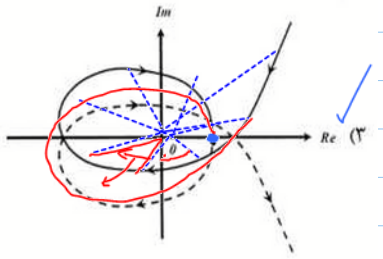


$G(s) = k\frac{(s-1)}{s}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2$









① 1 قطب در مبدا

$\bar{G}(s) = \frac{k(s-1)^3}{(s+1)^2}$ ⇒ فاز اولیه

$\bar{G}(0) = -k < 0$

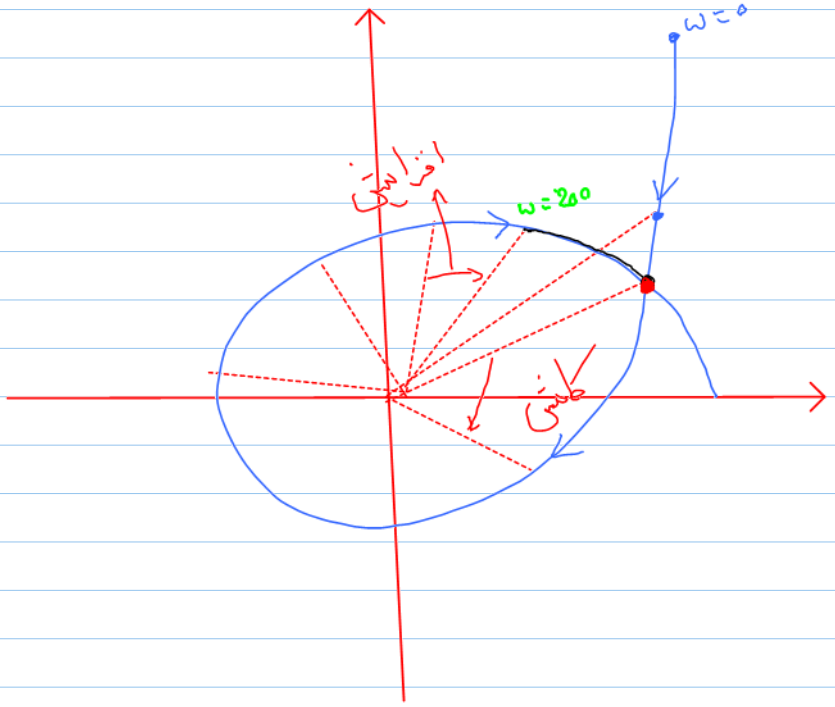
فاز اولیه $= 1\times(-90) + 180^\circ = 90^\circ$

② ✓

③ تغییرات فاز

$w: 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow$

$\longrightarrow$ کاهش فاز $\longrightarrow$



$|G|: w=0\to\infty$

$|G|$

$w=20 \longrightarrow 100$

$w=30 \longrightarrow 40$

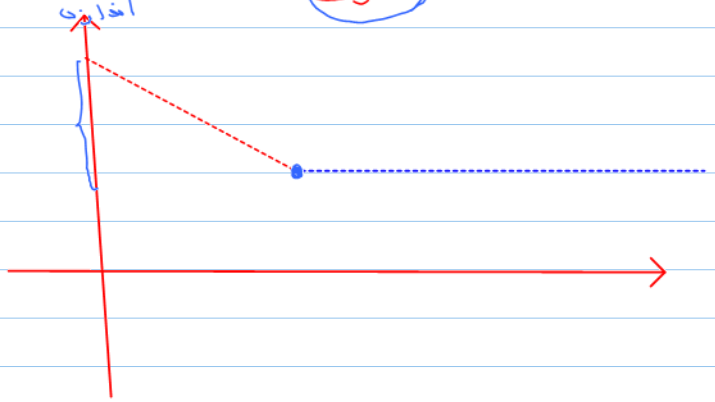
$w=50 \longrightarrow 10$

$w=200 \longrightarrow 0$

$w=1000 \longrightarrow 40$

اندازه : $\longrightarrow$ کاهش $\longrightarrow$ افزایش $\longrightarrow$

$G(s) = k\frac{(s-1)}{s}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)^2$

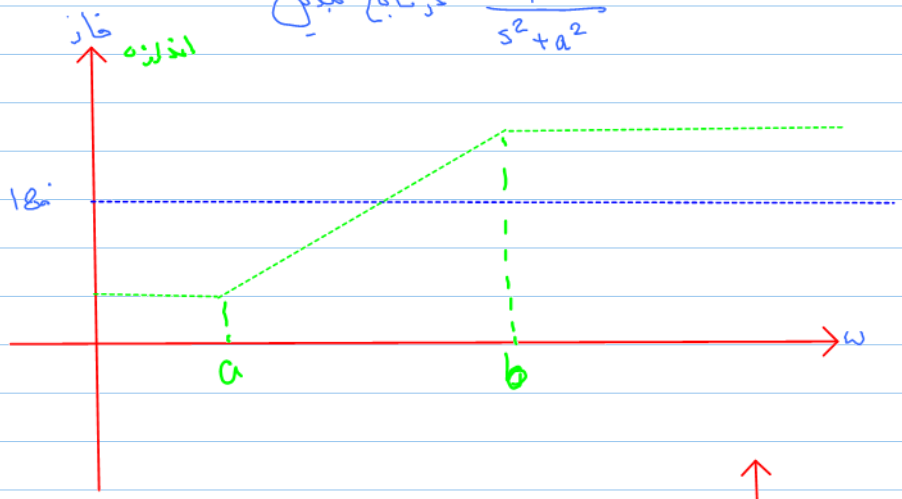


نکته ← هرگاه در شکل ها مبدا ایره با شعاع a دیدید بهتر است با روش شتری حل کنید.

نکته ← هرگاه نمودار نایکوئیست روی محور افقی یا عمودی باشد (غیر از مبدا ایره با شعاع a) بهتر است نمودار بودی آن را رسم کنید و با عوامل پایه ها فاز را بررسی کنید (s^2-a^2 یا s^2+a^2)

مبدا ایره با شعاع a ←

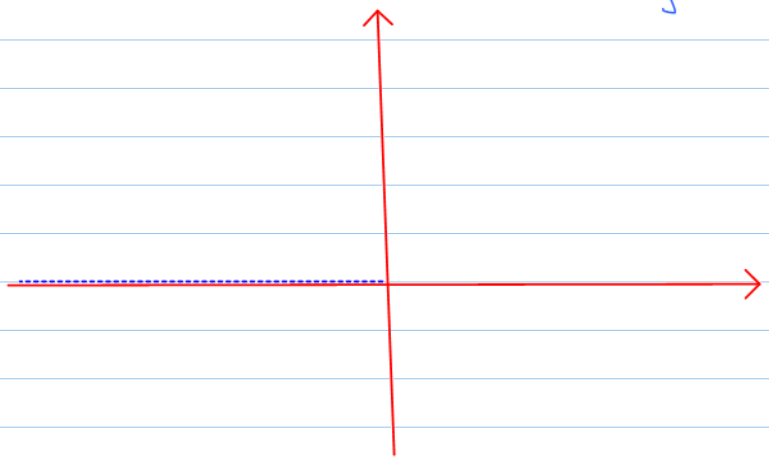
تابع تبدیل $\frac{1}{s^2+a^2}$



$$G(s) = \frac{s^2-a^2}{s^2+b^2}$$

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{-\omega^2-a^2}{\omega^2+b^2}\right| = \frac{\omega^2+a^2}{\omega^2+b^2}$$

$$\angle G(j\omega) = 180^\circ - 0 = 180^\circ$$



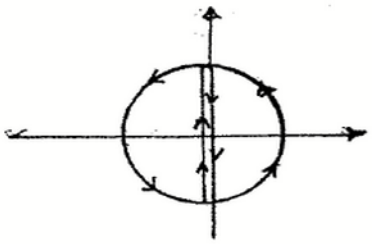
۱) بستگی به منحنی فاز سیستم دارد.

تابع تبدیل حلقه باز در یک سیستم کنترل به صورت زیر است:

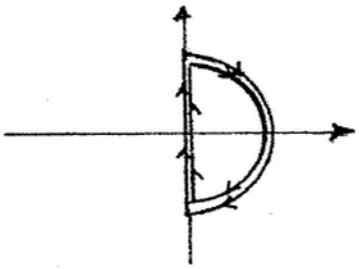
$$G(s)H(s)=\frac{ks}{s^{۲}+۱}\ ;\ k>۰$$

کدام دیاگرام نایکوئیست متناظر با یک مسیر نایکوئیست مناسب برای این سیستم می‌باشد؟

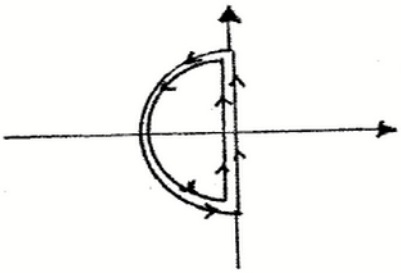
۱)



۲)



۳)



۴) هر دو گزینه ۲ و ۳ می‌تواند صحیح باشد.

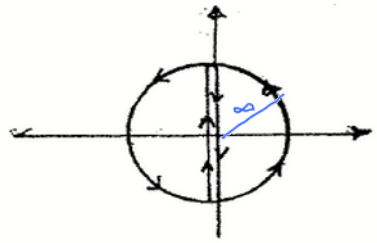
۱) بستگی به منحنی فاز سیستم دارد.

تابع تبدیل حلقه باز در یک سیستم کنترل به صورت زیر است:

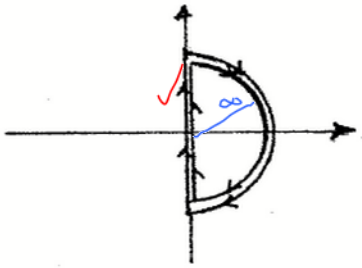
$$G(s)H(s)=\frac{ks}{s^2+1}\ ;\ k>0$$

کدام دیاگرام نایکوئیست متناظر با یک مسیر نایکوئیست مناسب برای این سیستم می‌باشد؟

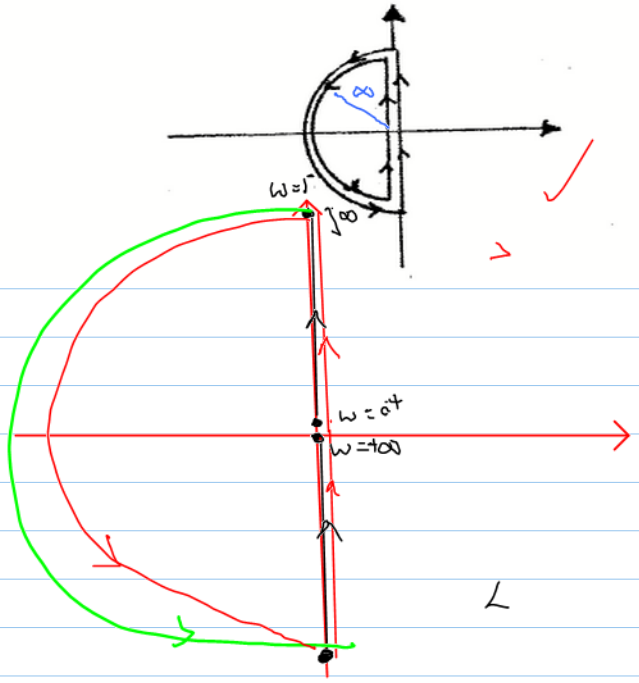
۱)



۲)

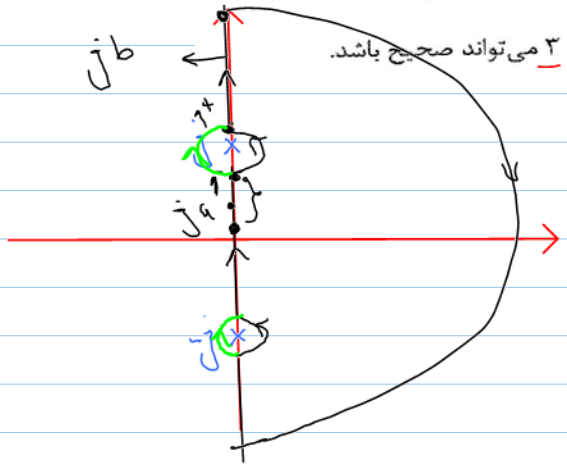


۳)



۴) هر دو گزینه ۲ و ۳ می‌تواند صحیح باشد.

$G(s)=\frac{ks}{s^2+1}$



$\omega=0^+ \longrightarrow G(j0^+)=\frac{kj0^+}{1-0^{+2}}=j(\varepsilon)\longrightarrow$

$\omega=\infty \longrightarrow G(j\infty)=\frac{kj\infty}{1-\infty^2}=0$

$\omega=1^- \longrightarrow G(j1^-)=\frac{kj1^-}{1-(1^-)^2}=\frac{jk\times1^-}{0^+}=j\infty$

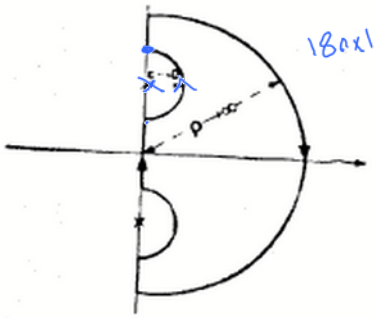
$\omega=a \longrightarrow G(ja)=\frac{jka}{1-a^2}=j(\text{عدد مثبت})$

$\omega=1^+ \longrightarrow G(j1^+)=\frac{jk\times1^+}{1-(1^+)^2}=j\frac{k\times1^+}{0^-}=j(-\infty)$

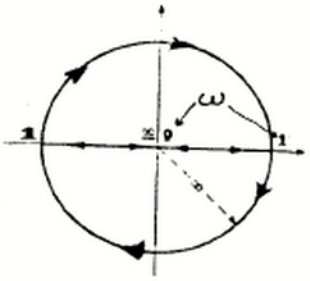
$\omega=b>1 \longrightarrow G(jb)=\frac{jk\times b}{1-b^2}=j(\text{عدد منفی})$

۹۹

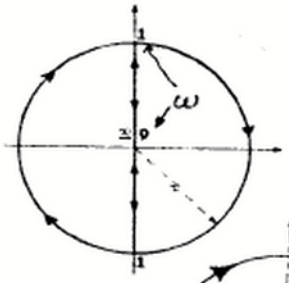
۱۳- تابع تبدیل حلقه باز در یک سیستم کنترل $GH = \frac{ks^2}{s^2+1}$ است. کدام گزینه دیاگرام نایکوئیست متناظر با مسیر نایکوئیست شکل مقابل را به ازاء $k = 1$ و همچنین وضعیت پایداری سیستم حلقه بسته را به ازاء تغییرات k نشان می‌دهد؟



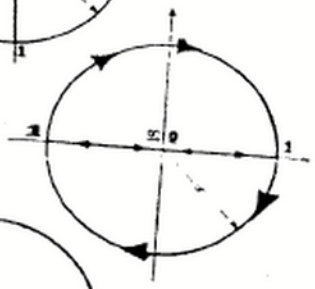
۱) ناپایدار با یک ریشه سمت راست $-\infty < k < \infty$



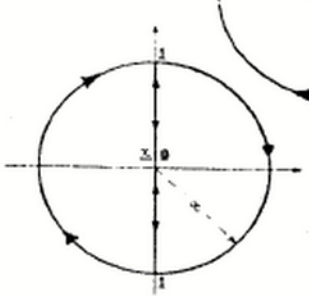
۲) ناپایدار با یک ریشه سمت راست $-\infty < k < \infty$



۳) پایدار مرزی به ازاء $-1 < k < \infty$ و ناپایدار به ازاء $-\infty < k < -1$



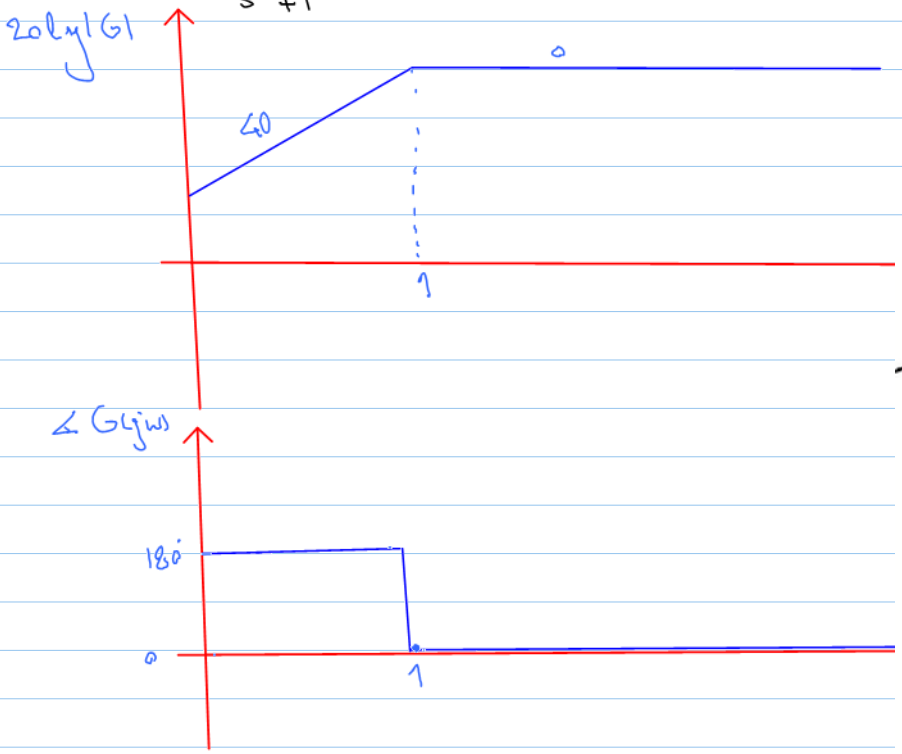
۴) پایدار مرزی به ازاء $-1 < k < \infty$ و ناپایدار به ازاء $-\infty < k < -1$

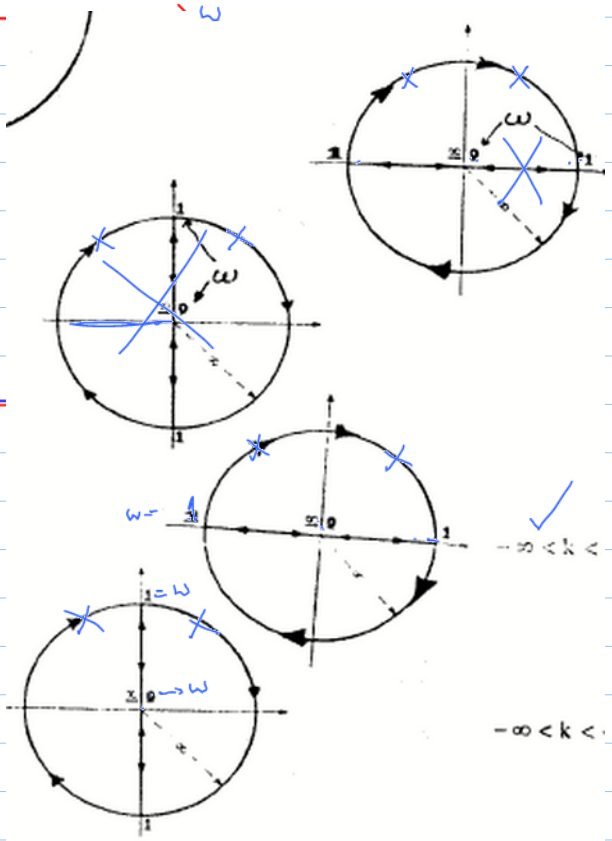


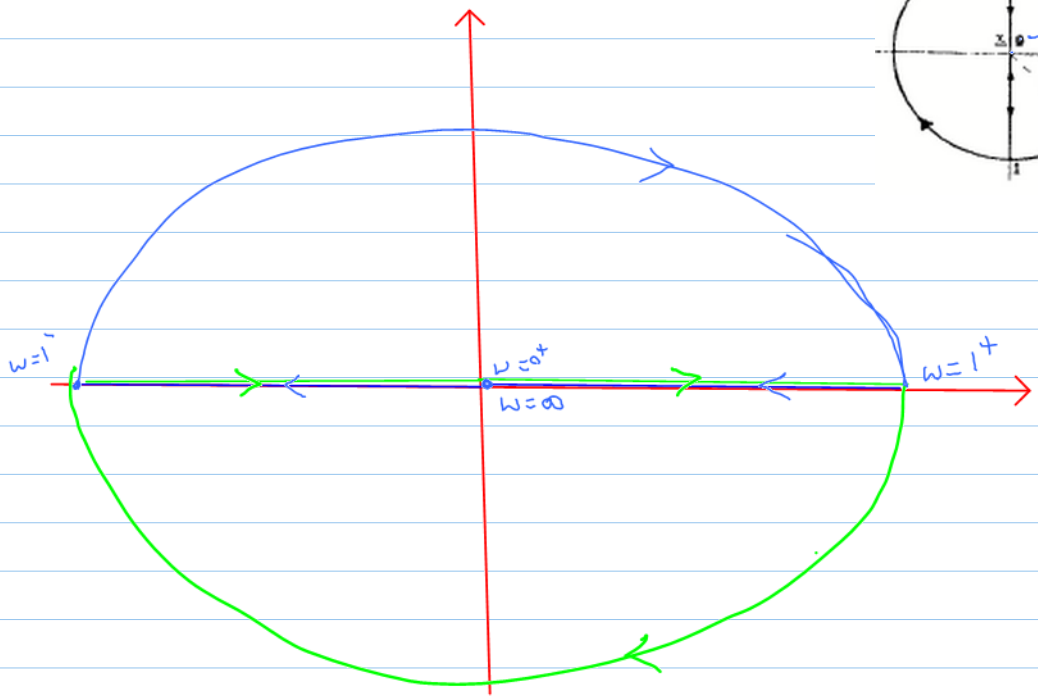
$G(s) = \frac{ks^2}{s^2+1}$ ⟶ $G(s) = \frac{s^2}{s^2+1}$ $\bar{G}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

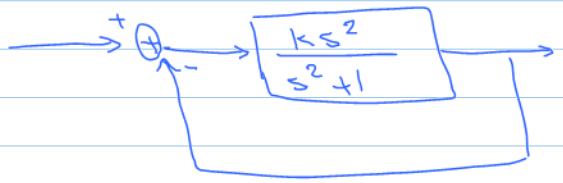
$\bar{G}(0) = 1 > 0$

تابع فاز $= 2 \times 90 + 0 = 180°$









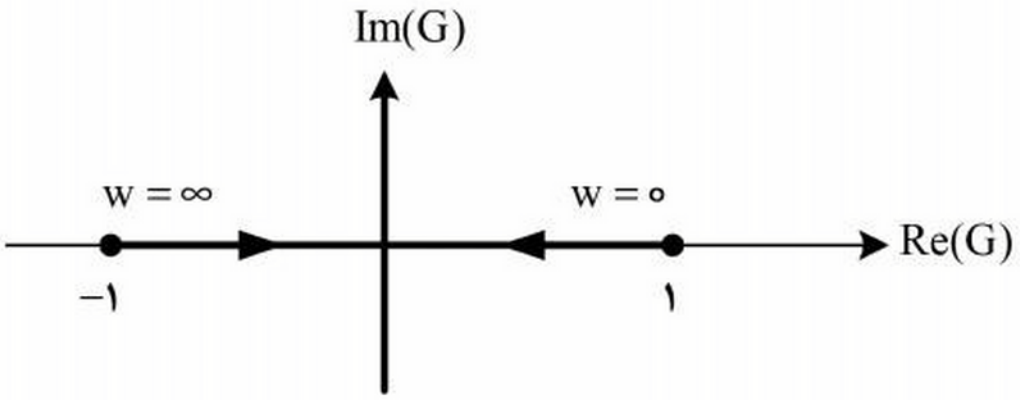
$\Delta(s) = s^2 + 1 + ks^2 = 0 \longrightarrow s^2 = \frac{-1}{k+1}$

$k > -1 \longrightarrow s = \pm j\sqrt{\frac{1}{1+k}}$

$k < -1 \longrightarrow s = \pm\left(\frac{-1}{k+1}\right)$

آزاد ۹۴

کدام گزینه در مورد پایداری سیستم فیدبک واحدی با سیستم حلقه باز درجه دوی $G(s)$، درست است؟
دیاگرام قطبی $G(s)$ ، در شکل زیر نشان‌داده شده است.

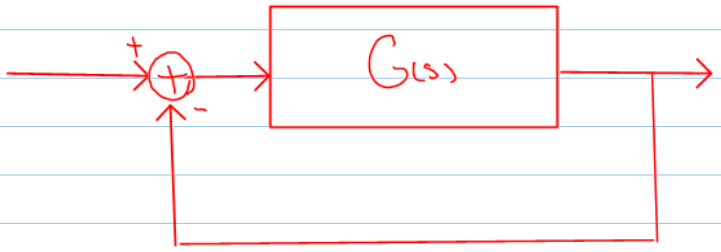


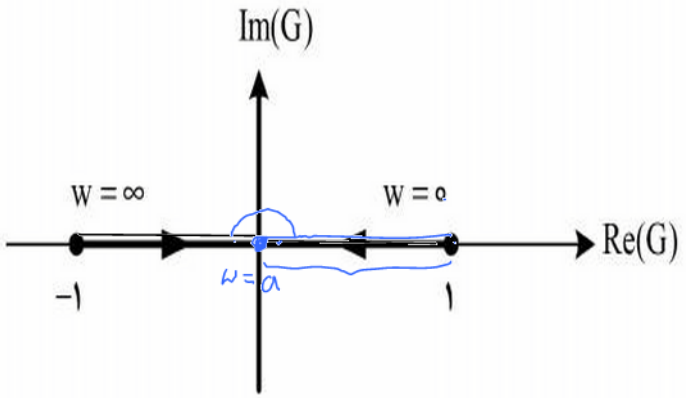
۱) پایدار مرزی به ازای $|k|<1$

۲) پایدار مرزی به ازای $|k|>1$

۳) ناپایدار به ازای $0<k<\infty$ با دو قطب سمت راست

۴) ناپایدار به ازای $0>k>-\infty$ با دو قطب سمت راست





G(s) = 2 دوره



$$G(s)=\frac{s^2+a^2}{\underset{-1}{e}s^2+ds+a^2}$$

$$G(0)=1 \rightarrow \frac{a^2}{e}=1 \rightarrow e=a^2$$

$$G(\infty)=\frac{\infty^2+a^2}{c\infty^2+d\infty+a^2}=\frac{\infty^2}{c\infty^2}=-1 \rightarrow c=-1$$

$$G(s)=\frac{s^2+a^2}{-s^2+\underset{0}{\not d}s+a^2}$$

s^2+b^2 , s^2+a^2 } ← فقط قطبی حول ω روی محور

s^n

↓

G(s) → فقط قطبها و صفرها یا روی محور یا جفتی متقارن یا روی مبدا

شرط مرز

$a \neq 0$

$$G(s)=\frac{s^2+a^2}{-(s^2-\not d s-a^2)}$$

$$s^2-ds-a^2=0$$

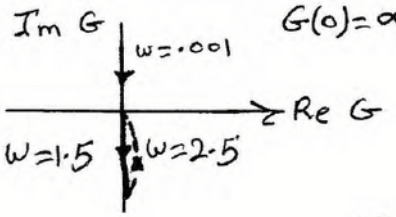
s^2	1	$-a^2$
→ s^1	$-d$	$0 \rightarrow d=0$
s^0	$-a^2$	

$$G(s) = \frac{s^2 + a^2}{-(s^2 - a^2)} \qquad \Delta(s) = 1 + \frac{s^2 + a^2}{-s^2 + a^2} = 0$$

$$=$$

۹۱

یک سیستم فیدبک واحد با تابع تبدیل $G(s)$ که دیاگرام قطبی آن در شکل نشان داده شده است را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد پایداری سیستم حلقه بسته به ازاء $-\infty < k < \infty$ درست است؟ (دقت کنید که دیاگرام قطبی تماماً موهومی است و تکه خطچین تنها برای وضوح خارج از محور موهومی نمایش داده شده است، $G(s)$ قطب یا صفری در RHP ندارد و درجهٔ آن کمتر از ۷ می‌باشد.)

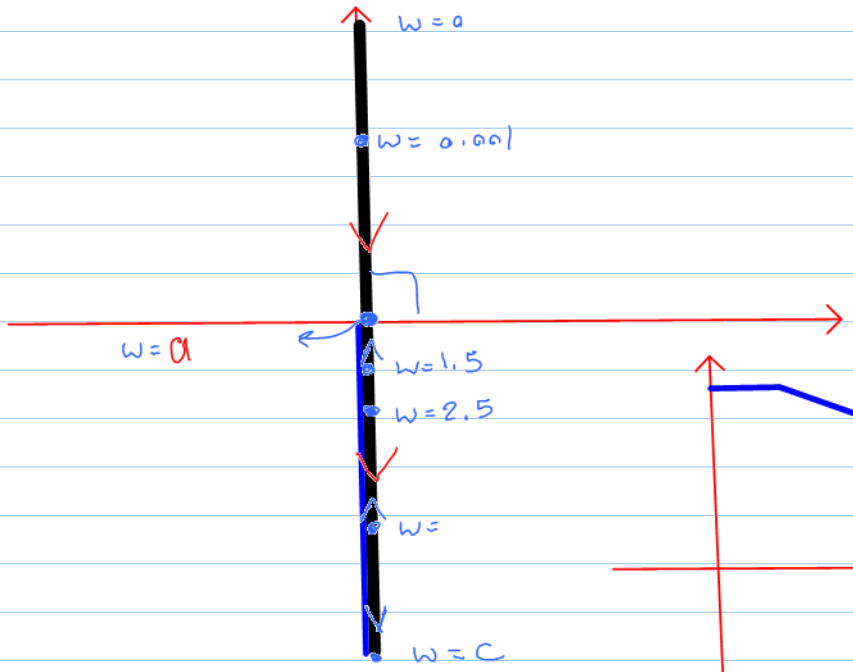


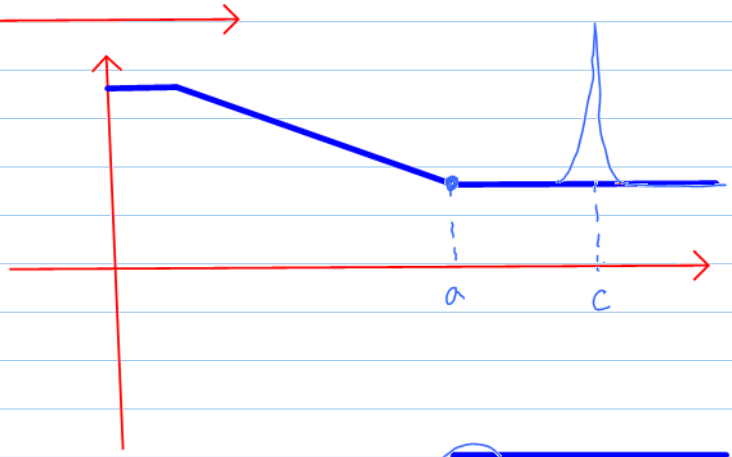
۱) همواره پایدار

۲) همواره ناپایدر ۲ قطب برای $0 < k < \infty$ و یک قطب برای $-\infty < k < 0$

۳) پایدار به ازاء $0 < k < \infty$ و ناپایدار با یک قطب برای $-\infty < k < 0$

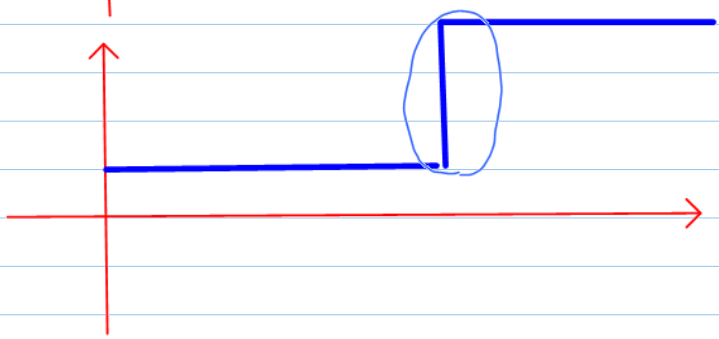
۴) همواره ناپایدر و ۲ قطب در RHP برای $-\infty < k < \infty$





$$G(s) = \frac{s^2 + a^2}{?}$$

s^n $\quad$ ~~$s^2 + a^2$~~ $\quad$ $s^2 - c^2$



$$G(s) = \frac{s^2 + a^2}{s^n (s^2 - c^2)} \qquad \bar{G}(s) = \frac{s^2 + a^2}{s^2 - c^2} \qquad \bar{G}(0) = -\frac{a^2}{c^2}$$

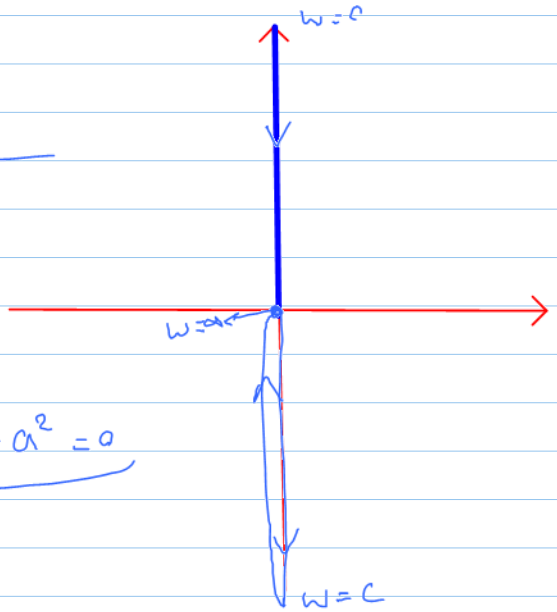
زاویه $= n \times -90 + 180^\circ = 90^\circ$

$$n = \frac{-90}{-90} = 1$$

$$G(s) = \frac{s^2 + a^2}{s(s^2 - c^2)}, \quad c > a \qquad G(\infty) = 0$$

$20 \log|\infty| = 20 \log \infty = \infty$

s^3	1	$-c^2$
s^2	1	a^2
s^1	$-c^2 - a^2$	
s^0	a^2	

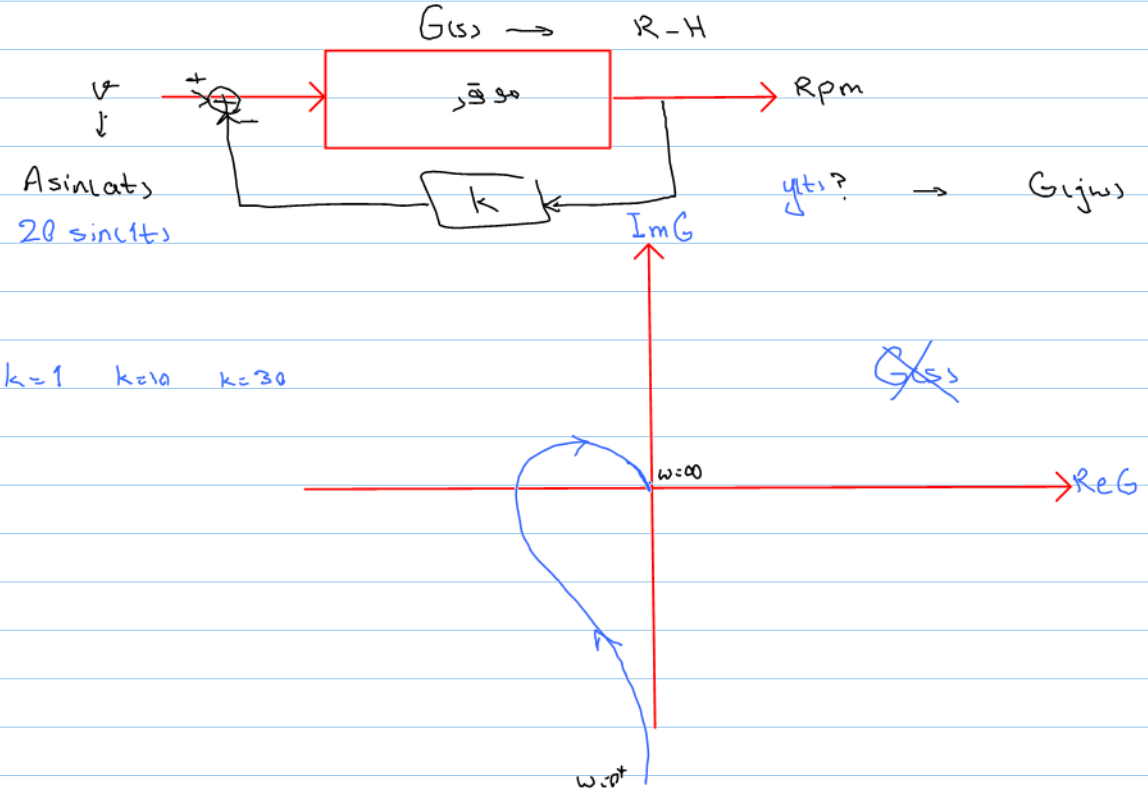


$$\Delta(s) = 1 + \frac{s^2 + a^2}{s(s^2 - c^2)} = 0 \rightarrow s^3 + s^2 - c^2 s + a^2 = 0$$

«جلسه 57 کنترل خطی»

«پایداری مایکوسیستم»

هدف: تعیین پایداری سیستم حلقه‌بسته از روی دیاگرام قطبی حلقه‌باز

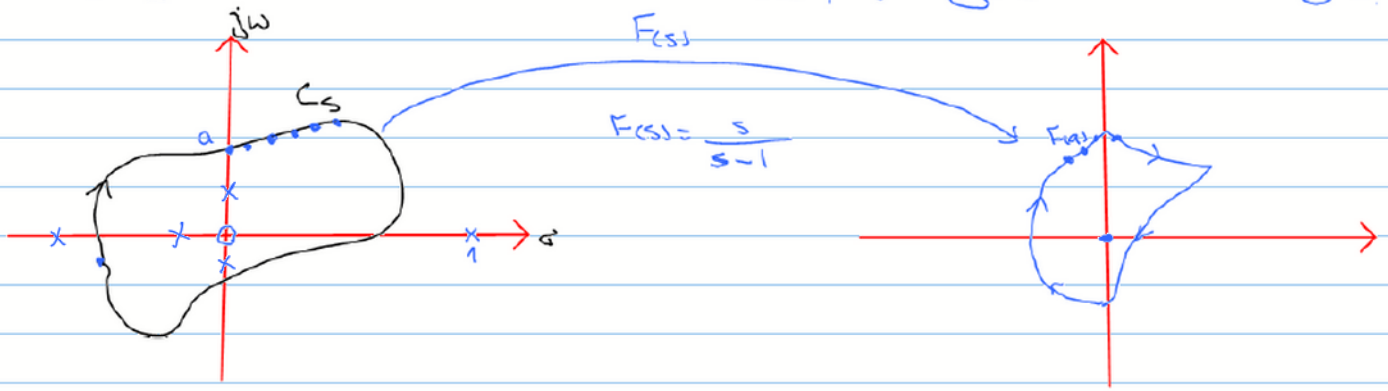


قضیه نگاشت:

اگر متغیر بسته C_s برحسب s از روی هیچ قطبی از $F(s)$ عبورنکند آنگاه داریم:

نگاشت C_s تحت $F(s)$ به یک منحنی هم جهت با C_s تبدیل می‌شود که به تعداد N بار بدور مبدأ مختصات دوران دارد. $N = Z - P$ است که Z تعداد صفرهای و P تعداد قطبهای $F(s)$ است که داخل C_s باشد.

$N = 1 - 0 = 1$



$F(s) = 0 \rightarrow$ نقطه بحرانی $= 0$

$Z = F$ تعداد ریشه های صورت

$P = F$ مخرج $\sim$ $\sim$

$N = Z - P \rightarrow Z = N + P$

$\Delta(s) = 1 + k\,G(s) = 0 \rightarrow$ نقطه بحرانی $= 0$

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{A(s)}{B(s)} = 0$$

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$\Delta(s) = \underbrace{\frac{B(s) + kA(s)}{B(s)}}_{F(s)} = 0$$

$Z =$ تعداد ریشه های $B + kA$ داخل Σ_s $\rightarrow$ قطبهای حلقه بسته

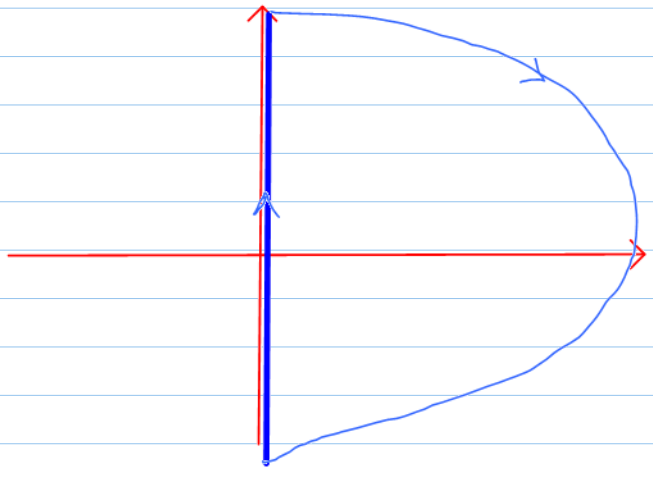
$P =$ B داخل Σ_s $\sim$ $\sim$ $\rightarrow$ $\sim$ $\sim$ باز

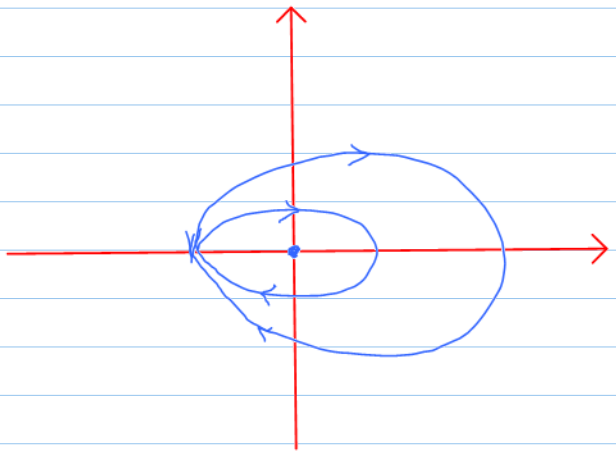
$Z = N + P \rightarrow$

تعداد قطبهای حلقه بسته داخل = تعداد دوران + تعداد قطبهای حلقه باز داخل

مسیر ناایکوئیست نقطه بحرانی مسیر ناایکوئیست

مسیر ناایکوئیست = حرکت در جهت عقربه های ساعت





$\Delta(s) = 1 + k\,G(s) = 0 \rightarrow$ $G(s) = \frac{-1}{k}$

نقطه بحرانی $= \frac{-1}{k}$

تعداد قطبهای داخل مسیر حلقه باز + دفعات دوران حول نقطه بحرانی $-\frac{1}{k}$ = تعداد قطبهای داخل مسیر نایکوئیست حلقه بسته

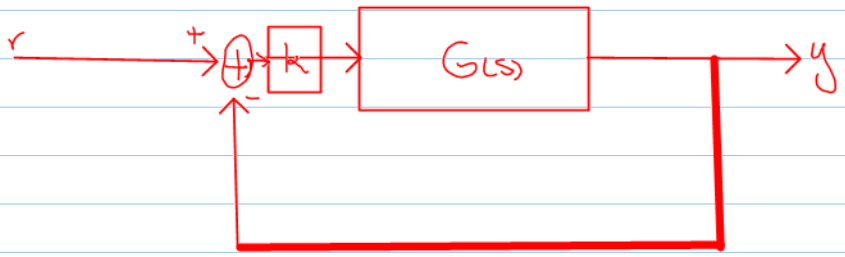
$$Z = N + P$$

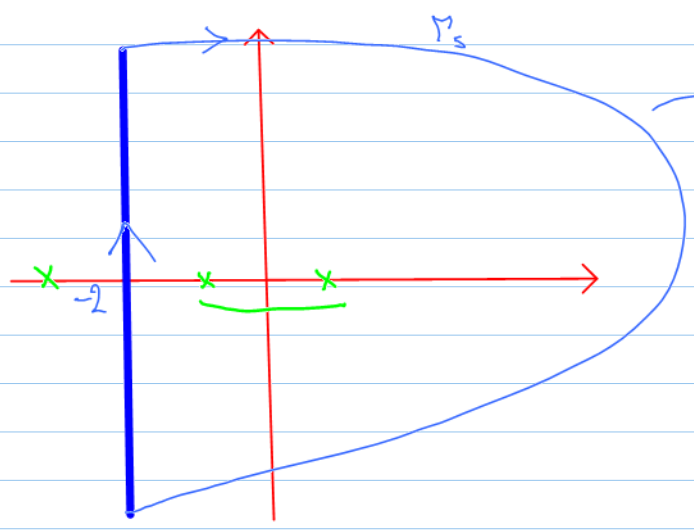
Z = تعداد قطبهای حلقه بسته داخل مسیر نایکوئیست

P = " " " " باز " " " "

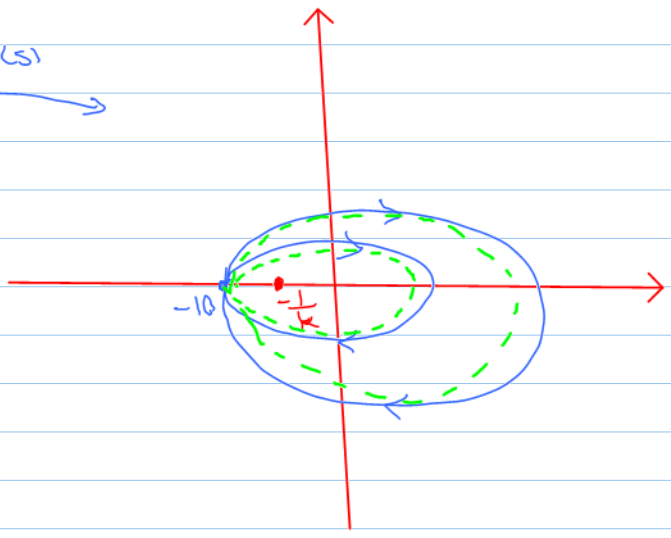
N = تعداد دفعات دوران حول نقطه بحرانی $-\frac{1}{k}$

پایداری نایکوئیست: در سیستم حلقه بسته، اگر مسیر بسته نایکوئیست Γ_s را تحت تابع تبدیل حلقه باز تصویر کرده و نمودار نایکوئیست را بدست آوریم و نمودار نایکوئیست نقطه بحرانی $-\frac{1}{k}$ حلقه بسته برای تابع تبدیل حلقه باز ($\Delta(s)$) را N بار (هر دور ساعتگرد $+1$ و هر دور پادساعتگرد -1) دور بزند آنگاه تعداد قطبهای حلقه بسته داخل مسیر نایکوئیست برابر $N+P$ است که P تعداد قطبهای حلقه باز داخل Γ_s است.





$G(s)$



$\Delta(s) = 1 + kG(s) = 0 \longrightarrow G(s) = -\frac{1}{k}$ $\quad k = 5 \quad N = 1+1 = 2$

$P = 2$

خلاصه بحث پایداری نایکوئیست:

هرگاه در سوالات عودار نایکوئیست داده باشند و در مورد مباحث مرتبط با پایداری یا روی سوال کند یا مکان هندسی ریشه ها را بخواهد و یا روی محور افقی عدد داده باشد و تابع تبدیل بخواهد از پایداری نایکوئیست استفاده می‌کنیم.

روش حل سوالات:

① ابتدا مسیر نایکوئیست را مشخص کنید.

اگر مسیر نایکوئیست را نداده باشند، مسیر را نیم صفحه راست (ناحیه ناپایداری) در نظر می‌گیریم. محور $j\omega$

② عودار نایکوئیست را به ازای $\omega: 0 \to \infty$ و $\omega: -\infty \to 0$ بدست آورید. (اگر عودار کامل نبسته بماند)

اگر شکل داده شده بسته نباشد، قرینه عودار بسته به محور افقی را بدست آورده و عودار را تکمیل می‌کنیم. همچنین در صورت وجود دیفرانسیل تعداد آن را هم بدست آورید.

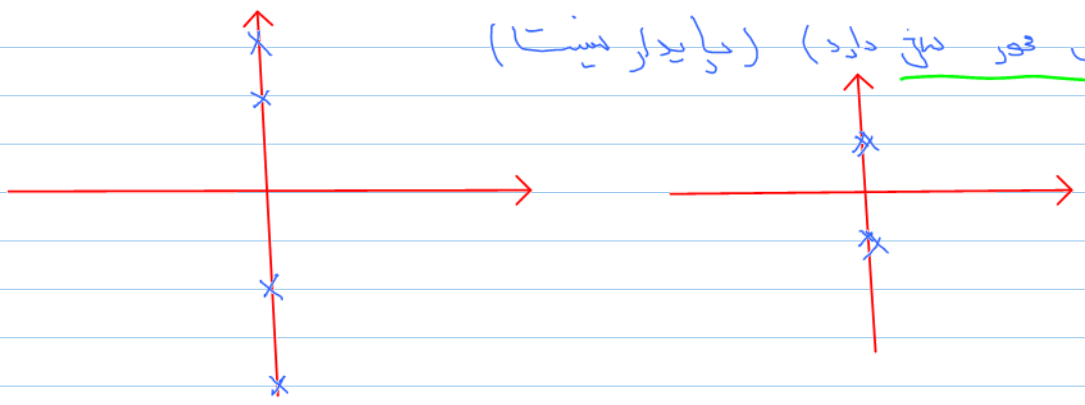
③ تعیین پایداری را بدست آورید. (به ازای مقادیر مختلف k، قطبهای حلقه بسته ناپایدار)

- با توجه به تابع تبدیل داده شده، تعداد پایداری را از جدول R-H بدست آورید.
- اگر مکان هندسی داده است، تعداد آن را بدست آورید.
- اگر نایکوئیست داده شده و گزینه ها تابع تبدیل، از روی نایکوئیست N را بدست آورید.

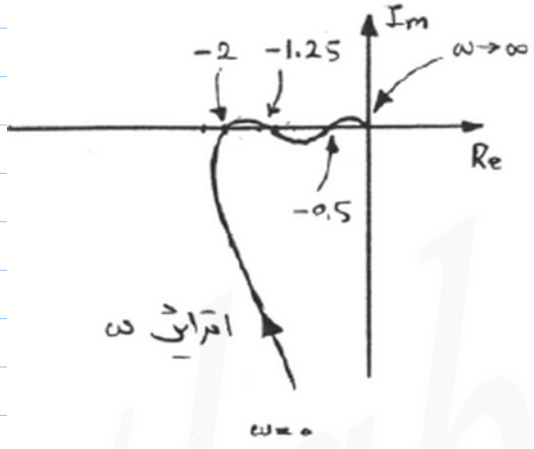
④ نتیجه مرحله ③ را با Z بدست آمده از نایکوئیست مقایسه کنید.

نکته! هرگاه $N > 0$ باشد یعنی به ازای P و Z، سیستم قطعاً ناپایدار است.

نکته! هرگاه عودار نایکوئیست از روی نقطه $(-1,0)$ عبور کند، سیستم حلقه بسته یا پایدار مرزی است یا ناپایدار (قطب روی محور $j\omega$ دارد) (پایدار نیست)



دیاگرام نایکوئیست سیستم حداقل فازی به ازای $k = ۱$ (بهره فرکانس بالا) در شکل داده شده است. محدوده k را طوری پیدا کنید تا سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد (منفی) پایدار باشد.



۱) $k < -۲$ یا $-۱/۲۵ < k < -۰/۵$

۲) $k > -۰/۵$ یا $-۲ < k < -۰/۸$

۳) $k < ۰/۵$ یا $۰/۸ < k < ۲$

۴) $k > ۲$ یا $۰/۵ < k < ۱/۲۵$

دیاگرام نایکوئیست سیستم حداقل فازی به ازای $k = 1$ (بهره فرکانس بالا) در شکل داده شده است. محدوده k را طوری پیدا کنید تا سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد (منفی) پایدار باشد.

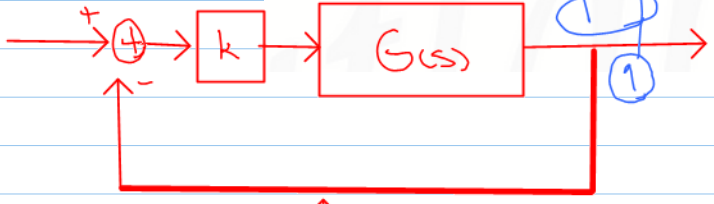


۱) $k < -0/5$ یا $-1/25 < k < -2$

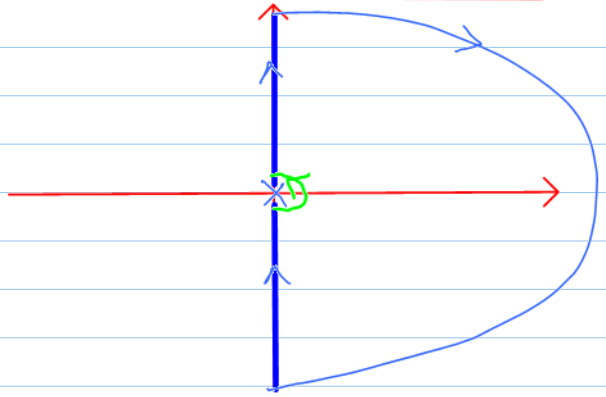
۲) $k > -0/5$ یا $-2 < k < -0/8$

۳) $k < 0/5$ یا $0/8 < k < 2$ ✓

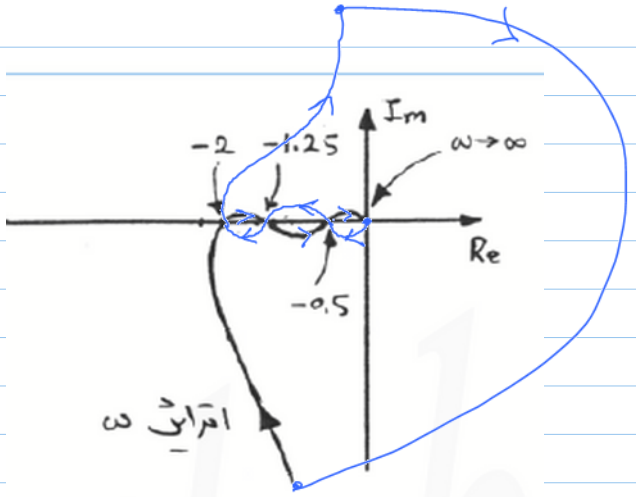
۴) $k > 2$ یا $0/5 < k < 1/25$

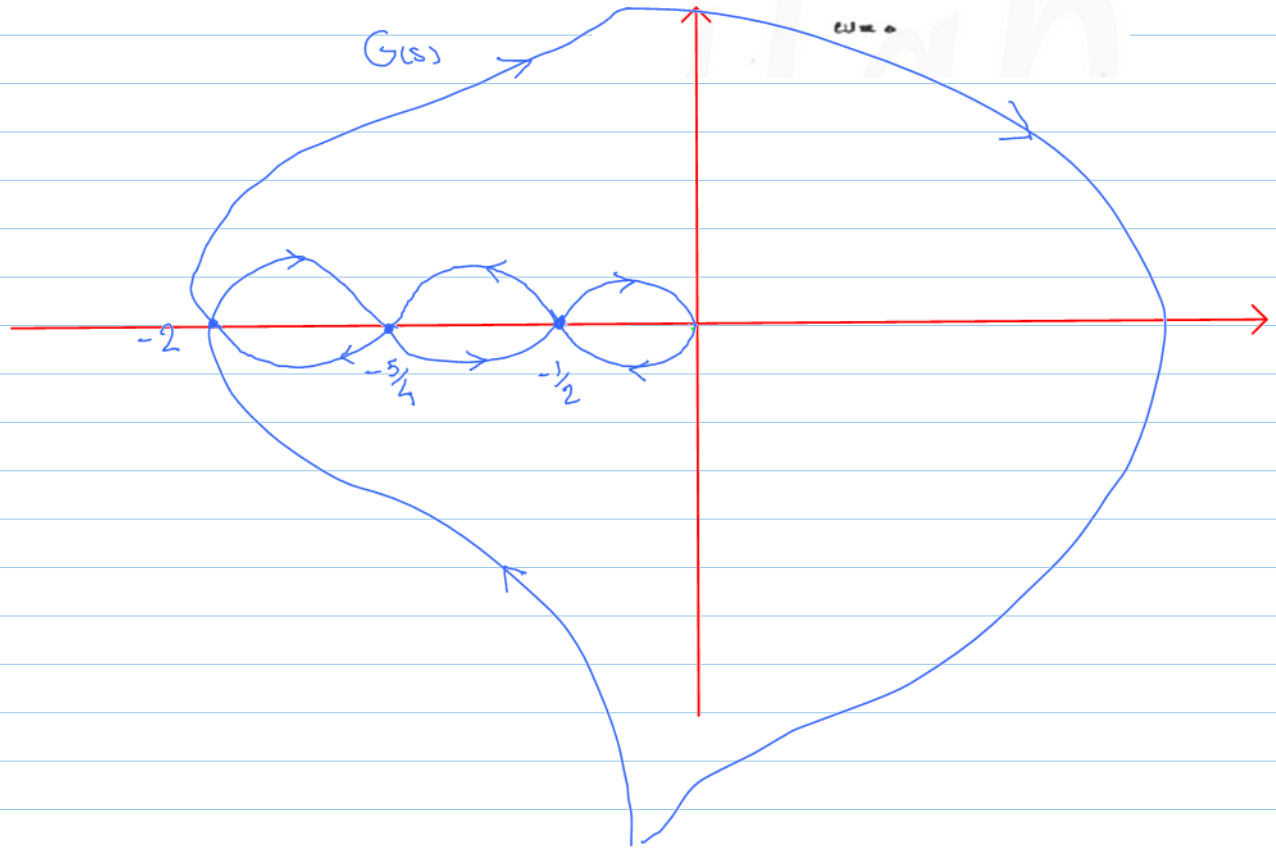


قطب یا صفر سمت راست همینه فاز ندارد.



180×1





$Z = N + P$

$P = 0$ قطب $G(s)$

$Z = 0$ هدف $\rightarrow$ $k = ?$

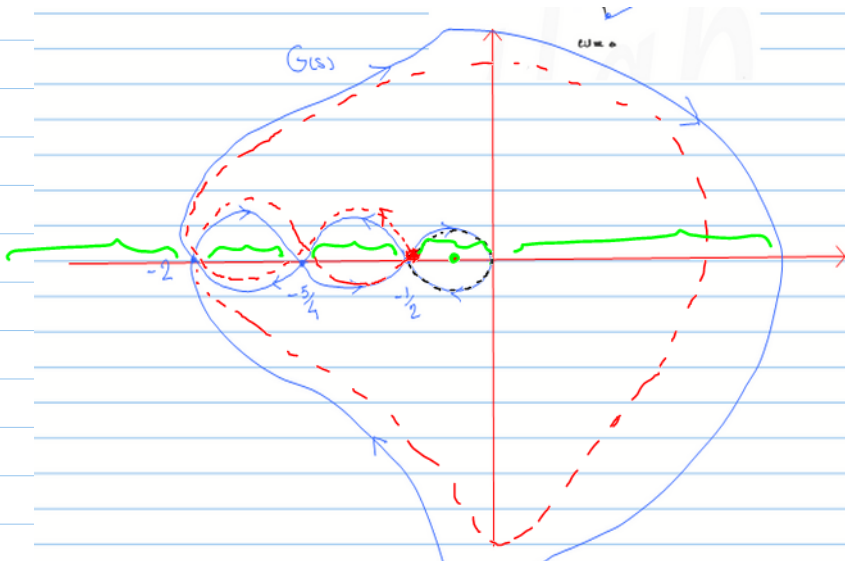
$Z = 0 \rightarrow 0 = N + 0 \rightarrow N = 0$

k را طوری تعیین کنید که $N = 0$ باشد.

N: تعداد دورهای حول نقطه $\frac{-1}{k}$

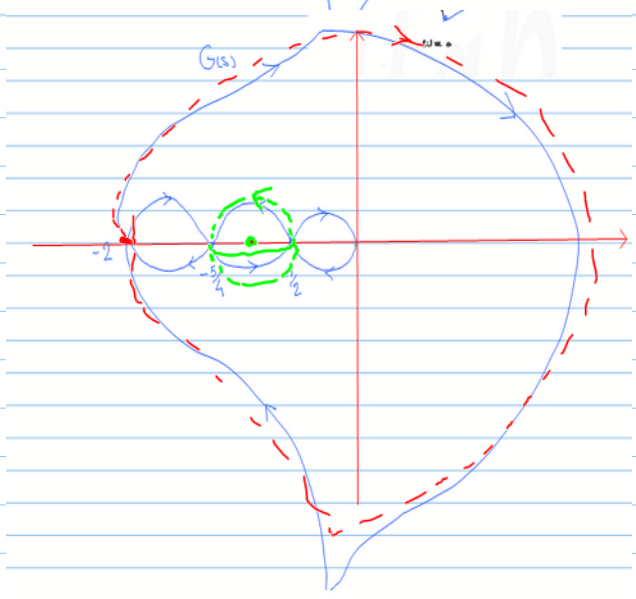
$\Delta(s) = 1 + kG(s) = 0$

$G(s) = \frac{-1}{k}$



$k \rightarrow \frac{-1}{k} > \frac{-1}{2} \rightarrow N =$

$N = +1 + 1 = 2 \rightarrow$ ✗



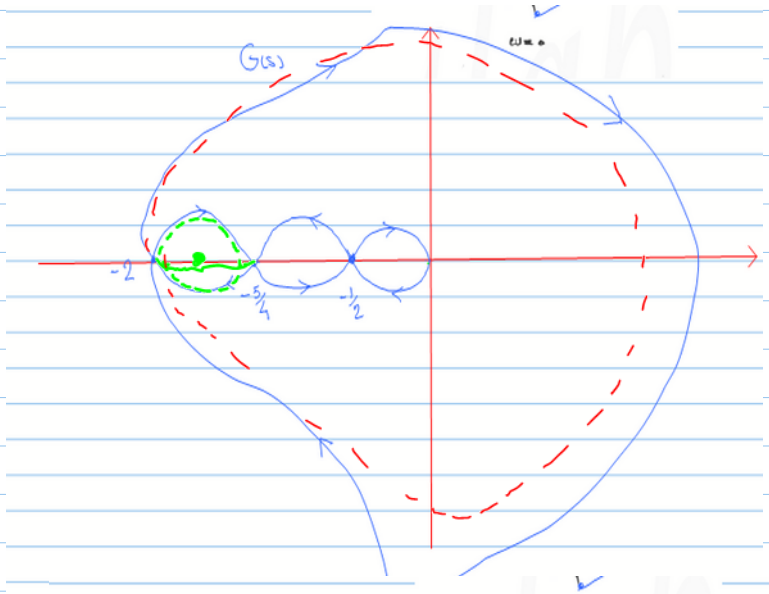
$\frac{-5}{4} < \frac{-1}{k} < \frac{-1}{2} \rightarrow N = -1 + 1 = 0$ ✓

$\frac{5}{4} > \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4}{5} < k < \frac{2}{1}$

$0.8 < k < 2$ ✓

$-2 < \frac{-1}{k} < -\frac{5}{4} \rightarrow$

$N = +1 + 1 = 2$ ✗

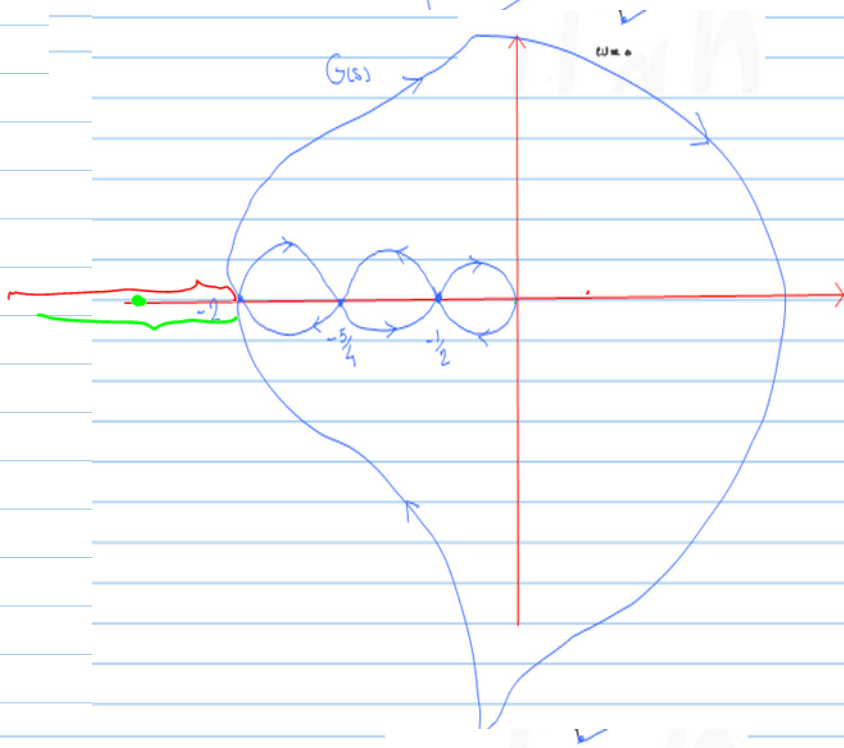


$\frac{-1}{k} < -2 \rightarrow N = 0$ ✓

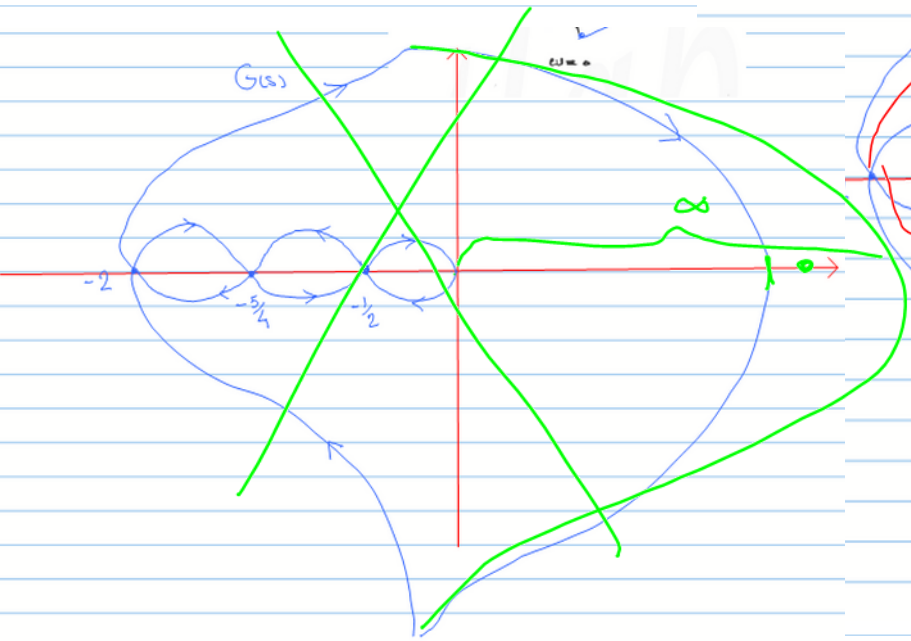
$\frac{1}{k} > 2 \rightarrow 0 < k < \frac{1}{2}$ ✓

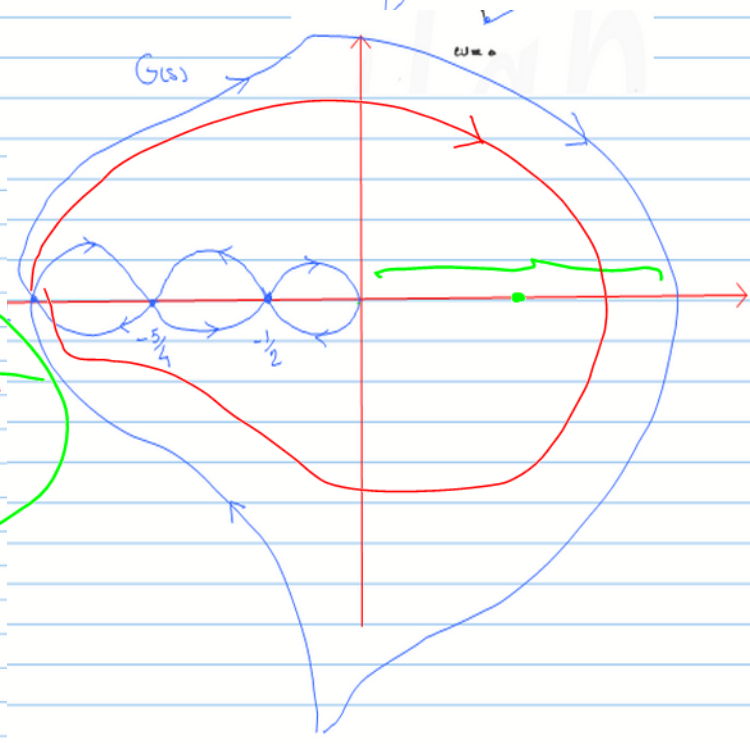
~~$k = 2$~~

$0 < k < 0.5$



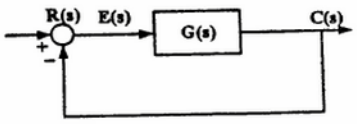
$N = +1$ ✗

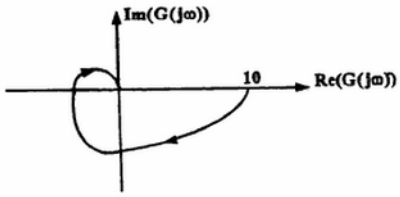




www.PTO2

سیستم کنترل حلقه بستهٔ مقابل را در نظر بگیرید که نمودار نایکوئیست G (s) آن به صورت زیر داده شده است. خطای حالت ماندگار به ورودی پلهٔ واحد عبارتست از:





۱) ۰

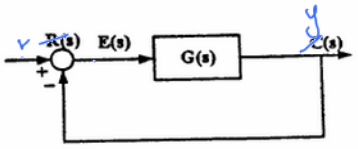
۲) $\frac{۱}{۱۱}$

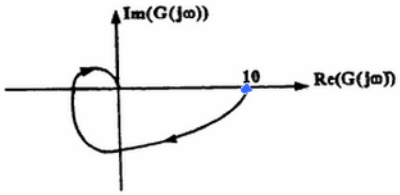
۳) $\frac{۱}{۱۵}$

۴) اطلاعات داده شده کافی نیست.

www.PTO2

سیستم کنترل حلقه بستهٔ مقابل را در نظر بگیرید که نمودار نایکوئیست G (s) آن به صورت زیر داده شده است. خطای حالت ماندگار به ورودی پلهٔ واحد عبارتست از:



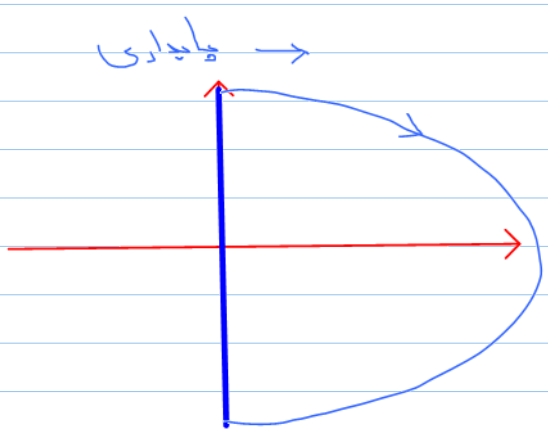


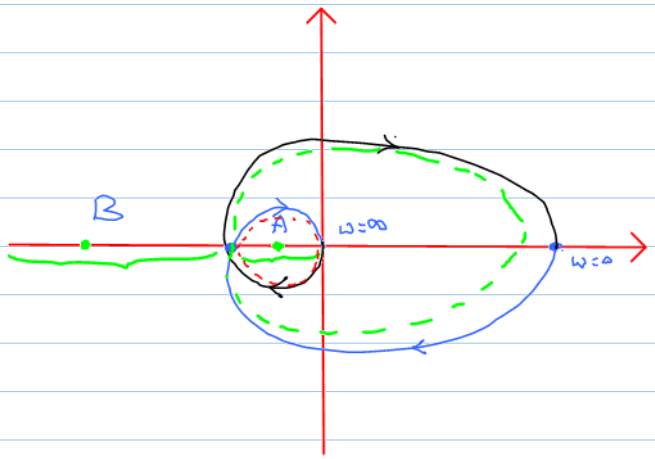
۱) ۰

۲) $\frac{1}{11}$

۳) $\frac{1}{10}$

۴) اطلاعات داده شده کافی نیست.

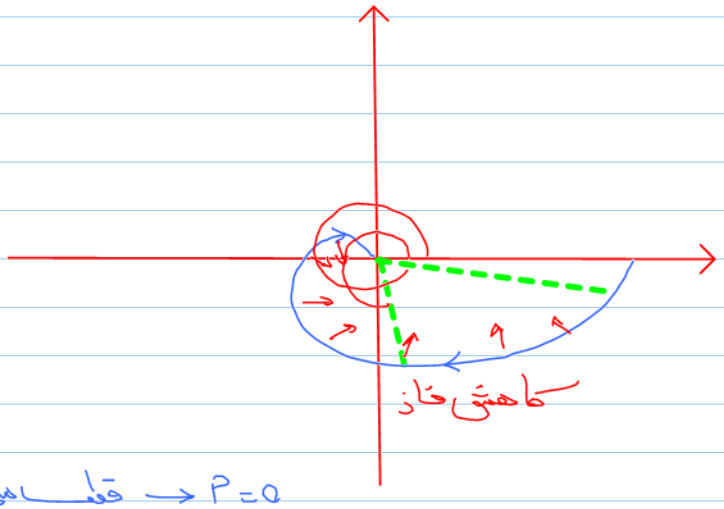




$\Delta = 1 + G(s) = 0 \longrightarrow G(s) = -1 \longrightarrow$ نقطه بحرانی $= -1$

$-1 \in A \longrightarrow N = +1 +1 = 2 > 0 \longrightarrow$ ناپایدار $\rightarrow e_{ss} = \infty$

$-1 \in B \longrightarrow N = 0 \longrightarrow Z = 0 + P \longrightarrow$ ؟



$w: 0 \longrightarrow \infty$

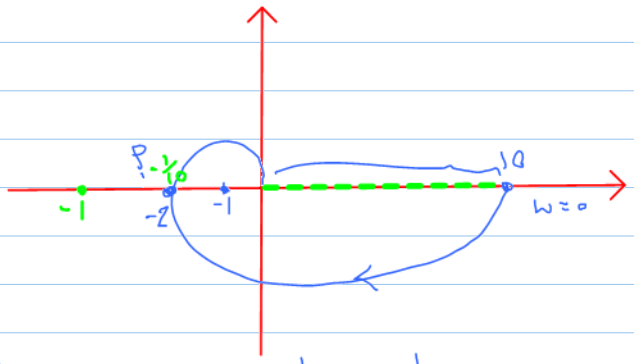
کاهش فاز $0 \rightarrow$ فاز $\longrightarrow$

$P=0 \rightarrow$ قطب سمت راست ندارد $\longrightarrow$ قطب سمت چپ / صفر سمت راست

$-1 \in B \longrightarrow Z = 0 + 0 = 0 \longrightarrow$ پایدار

$$G(j0) = 10\, e^{j0} = 10$$

$$G(0) = 10$$



$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \longrightarrow \quad k_p = G(0) = 10 \longrightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$$

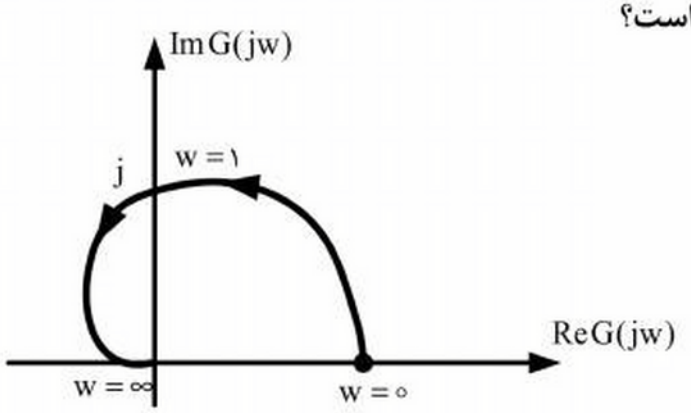
$-1 \in A \longrightarrow \quad e_{ss} = \infty$

$-1 \in B \longrightarrow \quad e_{ss} = \frac{1}{11}$

$\longrightarrow$ اطلاعات مسأله کافی نیست

کنترل ۹۴

شکل زیر، دیاگرام یک سیستم قطبی حلقه‌باز مرتبه ۲ تمام قطب با فیدبک واحد را نشان می‌دهد. خطای ماندگار سیستم حلقه بسته به ورودی پله واحد، کدام است؟

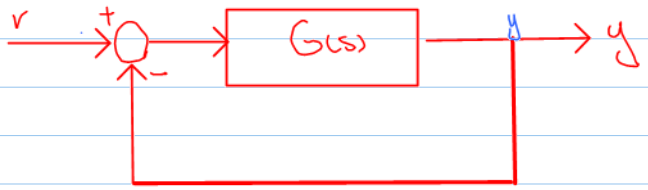


۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) ۲

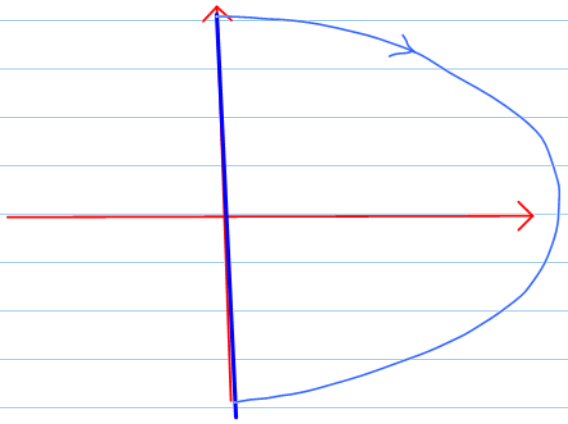
۴) ∞

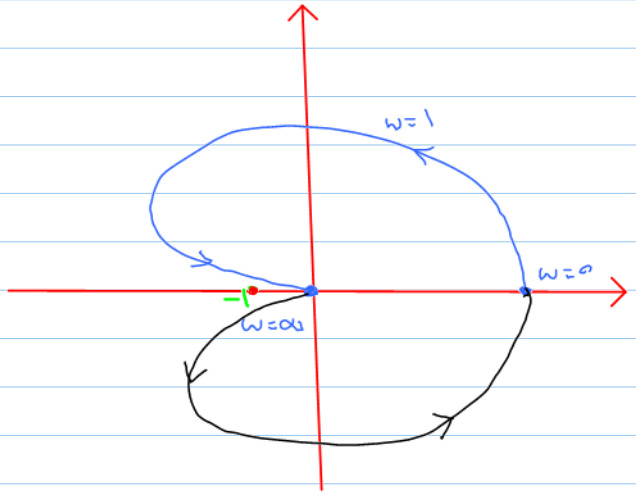


خطای تعریفی $= r - y$ → حلقه باز

خطای واقعی $= r - y$

① پایداری



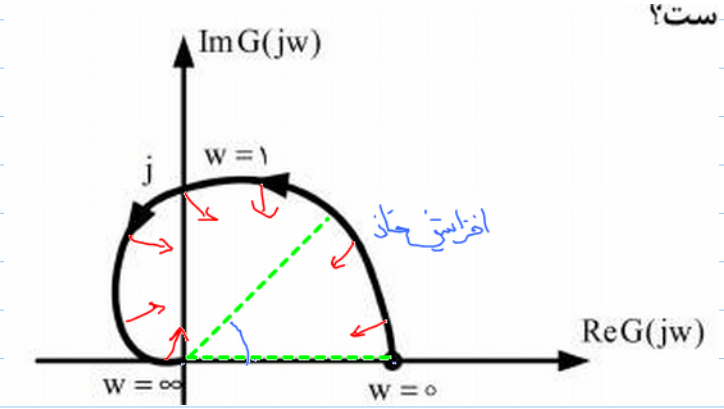


$\Delta(s) = 1 + G(s) = 0 \longrightarrow G(s) = -1$ نقطه بحرانی $= -1$

$N = 0$ ✓

$Z = 0 + P$ $P = ?$

ست؟



$w: 0 \longrightarrow \infty$

افزایش فاز ← فاز

↓

عقب سمت راست

~~سمت چپ~~

$w: 0 \longrightarrow \infty$ $G(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$

← عقب سمت راست

$P = 2 \longrightarrow Z = 0 + 2 = 2$ ← 2 عقب سمت راست ← سیستم حلقه بسته

↓

ناپایدار ← $e_{ss} = \infty$

کنترل ۹۱

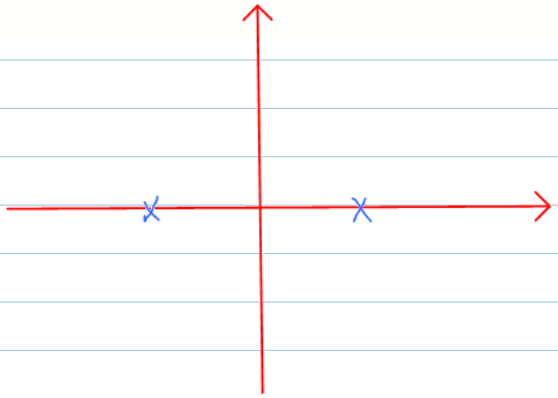
کدام یک از جملات زیر درست است؟

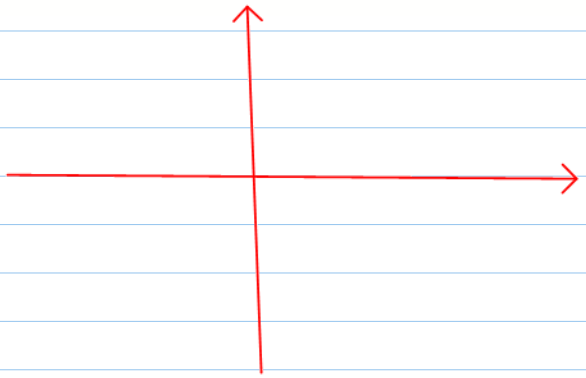
۱) وجود سطر صفر در آرایه راث بیانگر پایداری مرزی سیستم است.

۲) اگر منحنی نایکوئیست از نقطه ۱- عبور کند نمایانگر پایداری مرزی سیستم حلقه بسته است.

۳) برای بررسی پایداری سیستم حلقه بسته، کانتورنایکوئیست متناظر می‌تواند از صفرهای موهومی سیستم حلقه باز $GH(s)$ عبور کند.

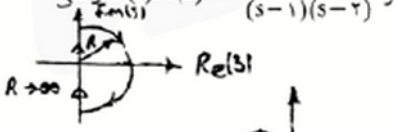
۴) موارد ۲ و ۳ صحیح است.

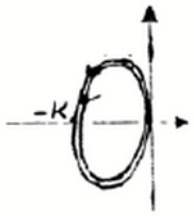


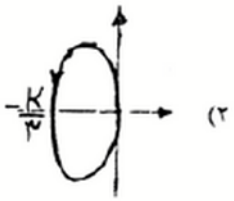


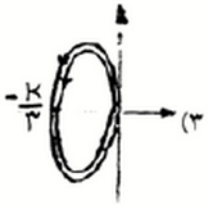
برق ۸۲

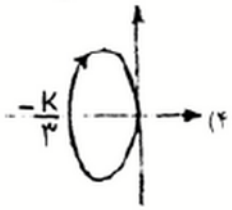
با توجه به مسیر نایکوئیست انتخاب شده در شکل مقابل، دیاگرام نایکوئیست متناظر با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{ks}{(s-1)(s-2)}$ و فتی $k>0$ اختیار شود، کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

نکته! هرگاه تابع تبدیل بده و خواهد آن روی محور حقیقی عدد داده است:

① از جدول R-H پایداری را به ازای مقادیر مختلف k بررسی کنید.

$$\Delta(s) = 1 + GH(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{ks}{(s-1)(s-2)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 - 3s + 2 + ks = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + (k-3)s + 2 = 0$$

s^2	1 +	2
s^1	k-3 +	0
s^0	2 +	

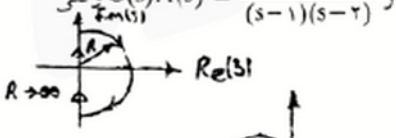
$k>3 \rightarrow$ ۰ قطب سمت راست هفته ← پایدار $\rightarrow Z=0$

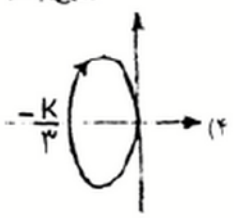
$k<3 \rightarrow$ 〃 〃 〃 〃 2 $\rightarrow Z=2$

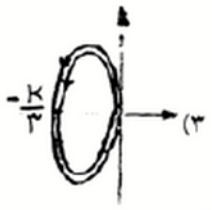
به ازای $k>3$ یا $k<3$ تغییر پایداری داریم ←

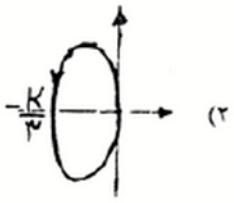
روی محور افقی باید $\frac{-k}{a}$ را داشته باشیم ← a: معادلی که به ازای تغییر پایداری دارم.

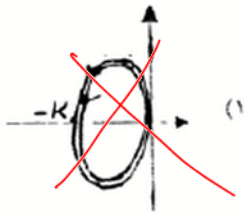
با توجه به مسیر نایکوئیست انتخاب شده، در شکل مقابل، دیاگرام نایکوئیست متناظر با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{ks}{(s-1)(s-2)}$ و $k>0$ اختیار شود، کدام است؟





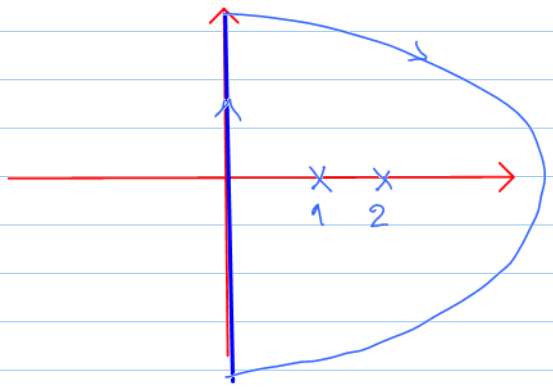






$k>3 \rightarrow Z=0$

$k<3 \rightarrow Z=2$



② N را بدست آورید.

$$GH(s) = \frac{ks}{(s-1)(s-2)}$$

$P=2$

$Z = P + N$

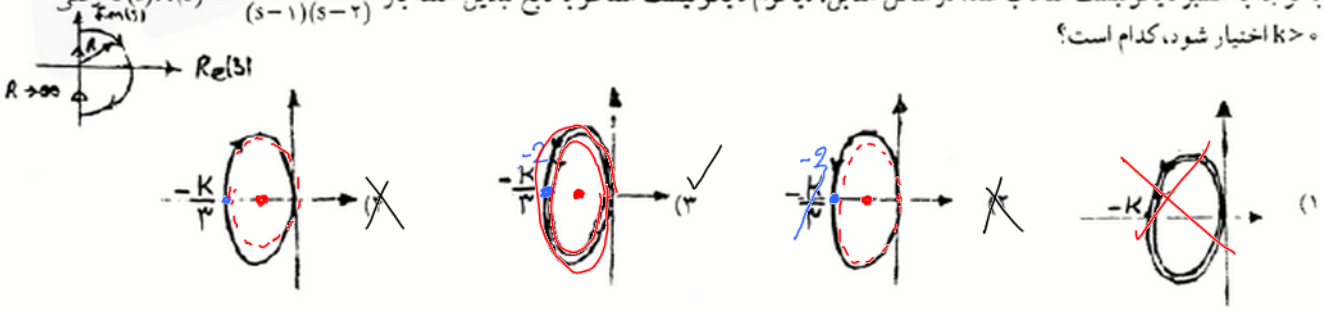
$k>3 \longrightarrow \quad 0 = 2 + N \longrightarrow \quad N = -2$

$k<3 \longrightarrow \quad 2 = 2 + N \longrightarrow \quad N = 0$

$k>3 \longrightarrow \quad N = -2$

$k<3 \longrightarrow \quad N = 0$

با توجه به مسیر نایکوئیست انتخاب شده در شکل مقابل، دیاگرام نایکوئیست متناظر با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{ks}{(s-1)(s-2)}$ و قتی $k>0$ اختیار شود، کدام است؟



(۱) (۲) (۳) (۴)

$N=1$ $N=-2$ $N=1$

$k>3 \Rightarrow k=6$

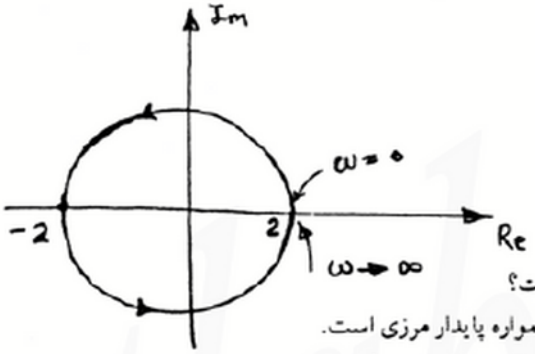
$\Delta(s) = 1 + GH(s) = 0 \longrightarrow GH(s) = -1$ نقطه بحرانی

جلسه 58 کنترل خطی

پایداری نایکوئیست

برق ۸۲

۱- دیاگرام نایکوئیست یک سیستم درجه دوم به ازای $k = 1$ بصورت شکل مقابل است. سیستم حلقه باز دارای ... قطب سمت راست محور $j\omega$ است و سیستم حلقه بسته به ازای ... پایدار است.



۱) دو، $\frac{1}{2} < k$ ۲) یک، $0 < k < \frac{1}{2}$

۳) دو، $0 < k < \frac{1}{2}$ ۴) یک، $\frac{1}{2} < k$

۲- اگر دیاگرام نایکوئیست سیستمی از نقطه $(-1, 0)$ عبور کند کدام گزینه درست است؟

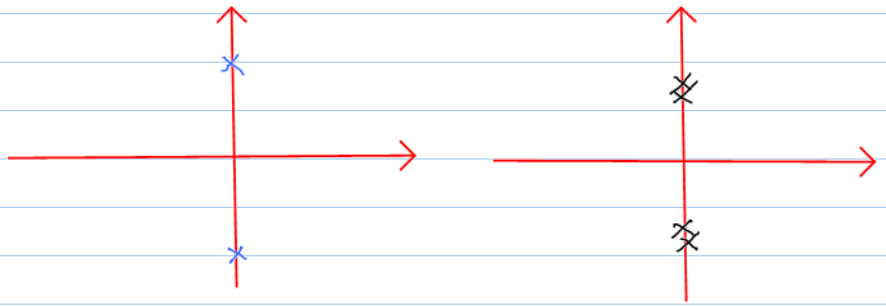
۱) سیستم همواره ناپایدار است. ۲) سیستم همواره پایدار مرزی است.

۳) سیستم همواره روی محور $j\omega$ ریشه دارد. ۴) گزینه‌های «۳» و «۲» درست است.

۲- اگر دیاگرام نایکوئیست سیستمی از نقطه (۰ ، ۱−) عبور کند کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم همواره ناپایدار است.
۲) سیستم همواره پایدار مرزی است.
۳) سیستم همواره روی محور jω ریشه دارد.
۴) گزینه‌های «۳» و «۲» درست است.

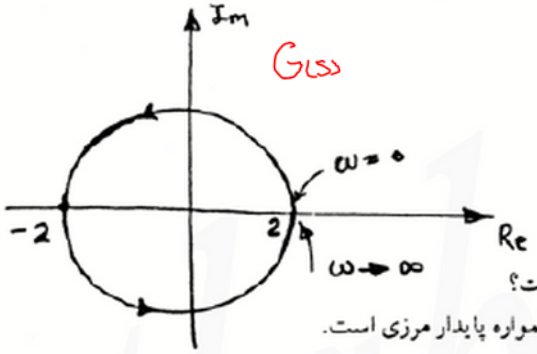
اگر دیاگرام قطبی از نقطه (-۱,۰) عبور کند سیستم قطب روی محور jω دارد ← مرزی ناپایدار



پایداری مرزی

ناپایدار

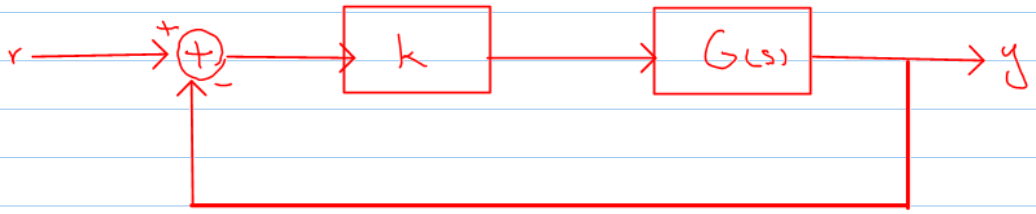
دیاگرام نایکوئیست یک سیستم درجه دوم به ازای $k = 1$ بصورت شکل مقابل است. سیستم حلقه باز دارای ... قطب سمت راست محور jω است و سیستم حلقه بسته به ازای ... پایدار است.

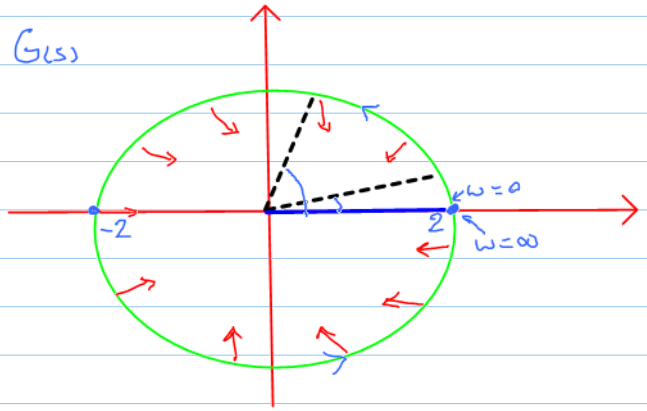


۱) دو، $\frac{1}{2} < k$
۲) یک، $0 < k < \frac{1}{2}$
۳) دو، $0 < k < \frac{1}{2}$
۴) یک، $\frac{1}{2} < k$

اگر دیاگرام نایکوئیست سیستمی از نقطه (۰ ، ۱−) عبور کند کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم همواره ناپایدار است.
۲) سیستم همواره پایدار مرزی است.
۳) سیستم همواره روی محور jω ریشه دارد.
۴) گزینه‌های «۳» و «۲» درست است.





$\omega : 0 \to \infty$

① نقطه شروع ← صفر یا قطب در مبدأ ندارد

② ∼ انتهایی ← $G(s) = 2$ ←

درجه صورت = درجه مخرج

③ تغییرات فاز ←

فاز : ← افزایش ←

↓

صفر ست ها در قطب ست راست

$$G(s)=\frac{(s+a)(s+b)}{(s-c)(s-d)}$$

② درجه صورت = درجه مخرج = 2

چون نمودار قطبی دایره‌است یعنی همواره افزایش فاز بدون تغییر اندازه دارم.

$$\frac{s+a}{s-a}$$

↓

قدر مطلق صفرها و قطبها باهم برابرند.

$$G(s)=C\frac{(s+a)}{(s-a)}\times\frac{s+b}{(s-b)}=C\frac{(s+a)(s+b)}{(s-a)(s-b)} \qquad G(\infty)=2,\ G(0)=2$$

$$G(0)=C\times\frac{a\times b}{-a\times -b}=C=2\rightarrow C=2\rightarrow G(s)=\frac{2(s+a)(s+b)}{(s-a)(s-b)}$$

حلقه باز ← 2 تا قطب سمت راست دارد.

راه حل اول ←

$$\Delta(s)=1+kG(s)=0$$

$$=1+k\frac{2(s^2+(a+b)s+ab)}{s^2-(a+b)s+ab}=0$$

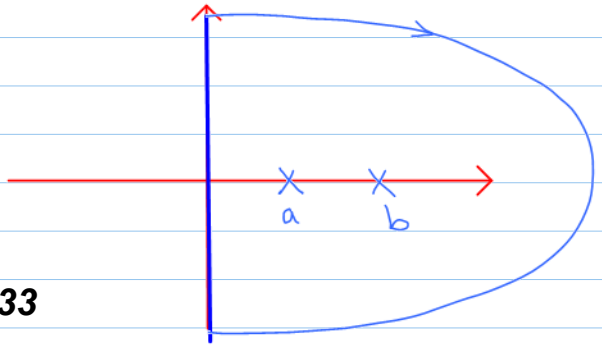
$$\Delta(s)=(1+2k)s+(2k-1)(a+b)s+(2k+1)ab=0 \qquad a,b>0$$

(+) (+) (+) (+)

$$\begin{cases}2k+1>0\rightarrow k>-1/2\\ 2k-1>0\quad k>1/2\end{cases}\Longrightarrow k>1/2\ \checkmark$$

$$\begin{cases}2k+1<0\\ 2k-1<0\end{cases}\rightarrow k<-1/2\ \checkmark$$

راه حل دوم: پایداری نایکوئیستی:



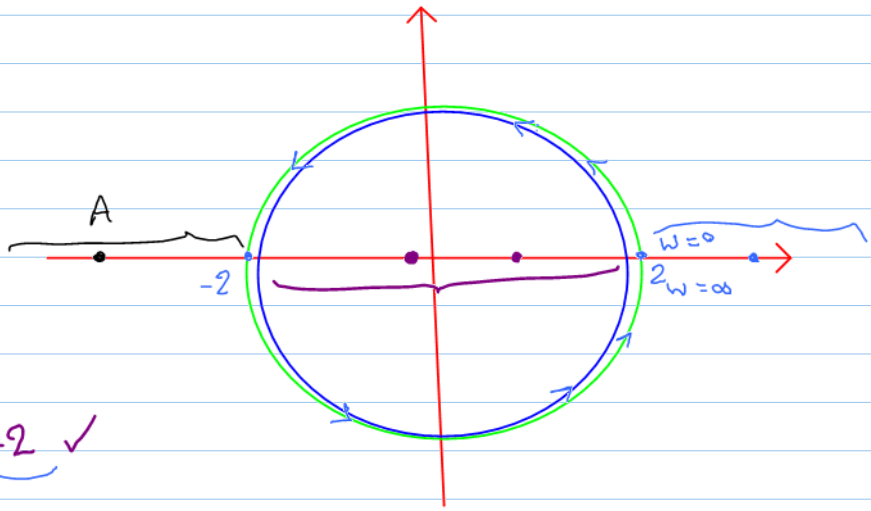
$P=2$

$Z = 0$ ← مطلوب $\quad Z = N+P \rightarrow 0 = N+2 \rightarrow N = -2$

k یا طوری تعیین کنید که $N = -2$ شود.

$\Delta(s) = 1 + kG(s) = 0 \longrightarrow G(s) = \frac{-1}{k}$ نقطه بحرانی

$w : -\infty \rightarrow \infty$



1) $\frac{-1}{k} < -2 \rightarrow N = 0$ ✗

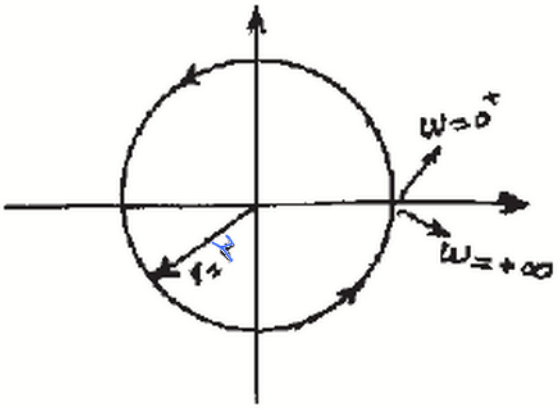
2) $-2 < \frac{-1}{k} < 2 \rightarrow N = -1 - 1 = -2$ ✓

3) $\frac{-1}{k} > 2 \rightarrow N = 0$ ✗

$-2 < \frac{-1}{k} < 2 \rightarrow$ $\quad k < \frac{-1}{2}$ یا $k > \frac{1}{2}$ ✓

دی ۹۲

نمودار قطبی یک سیستم مرتبه ۲، در شکل زیر، رسم شده است. با توجه به این منحنی کدام مورد نادرست است؟

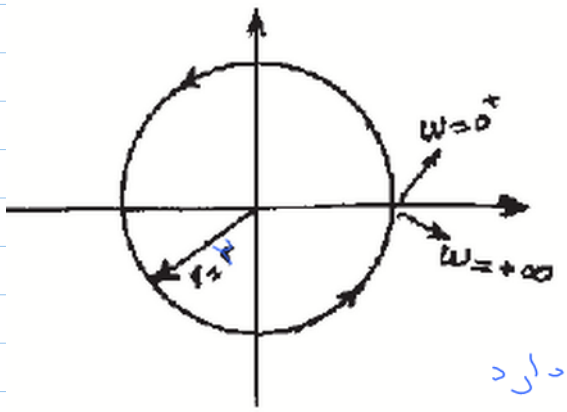


۱) سیستم حلقه باز ناپایدار با دو قطب سمت راست محور موهومی است.

۲) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی پایدار است.

۳) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی غیرمینیمم فاز است.

۴) سیستم حلقه باز سره است.



۱) سیستم حلقه باز ناپایدار با دو قطب سمت راست محور موهومی است.

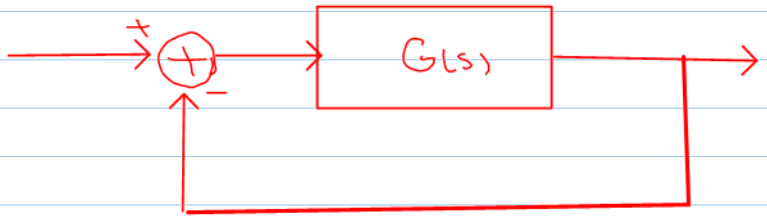
۲) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی پایدار است.

۳) سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی غیرمینیمم فاز است.

۴) سیستم حلقه باز سره است.

قطب یا صفر سمت راست دارد

$$G(s) = 2\,\frac{(s+a)(s+b)}{(s-a)(s-b)}$$



$$\frac{Y}{R} = \frac{2(s+a)(s+b)}{3s^2+(a+b)s+3ab} \qquad a,b>0$$

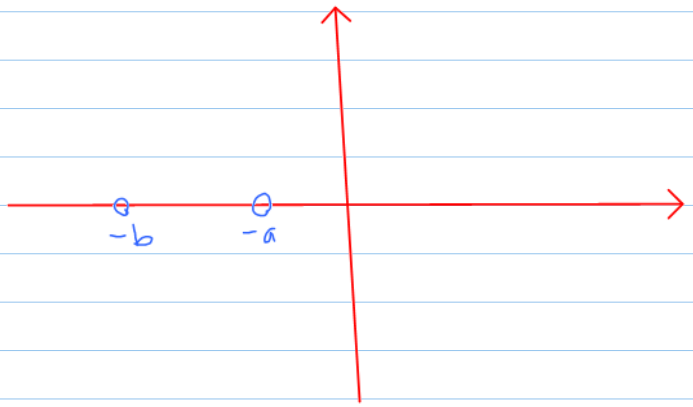
$$\Delta(s) = 3s^2 + (a+b)s + 3ab = 0$$

پایدار

صفر سمت راست ندارد

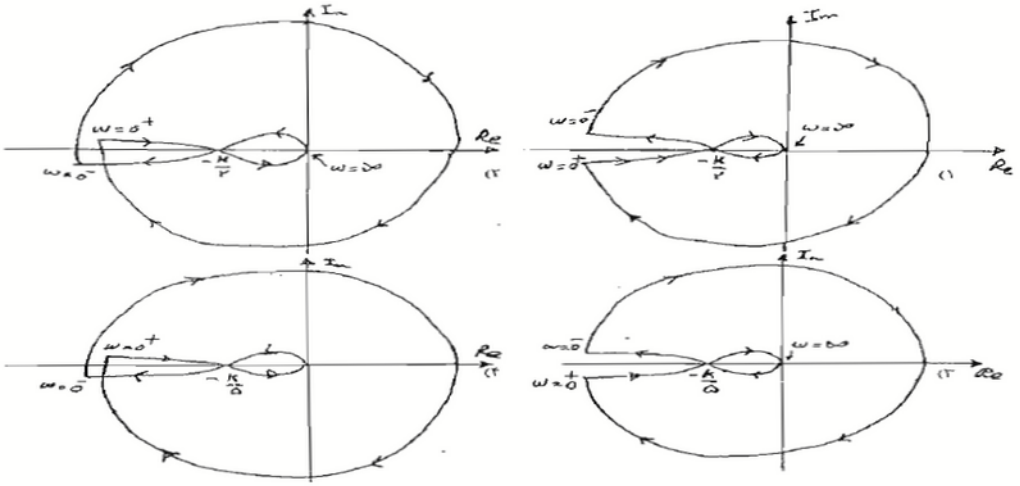
قطب " " "

مینیمم فاز



برق ۱۹

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $KGH(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$ است. منحنی نایکوئیست این سیستم کدام است؟



① تعیین پایداری از جدول R-H

$$\Delta(s) = 1 + k G(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^4 + 5s^3 + 6s^2 + ks + k = 0$$

s^4	1 +	6	k
s^3	5 +	k	0
s^2 (5×)	$\frac{30-k}{5}$ +++	− 5k	
s^1	$\frac{(5-k)k}{30-k}$	−+−	0
s^0	5k	+ +−	+

$$\frac{30k - k^2 - 25k}{30-k}$$

$5 < k < 30$ ⟶ 2 تا قطب ناپایدار

$k: -\infty \longrightarrow \textcircled{0} \longrightarrow \textcircled{5} \longrightarrow 30 \longrightarrow \infty$

$0 < k < 5$ ⟶ 〃 〃 〃 0 — 1 قطب ناپایدار ⟶ 0 ⟶ 2 ⟶ 2

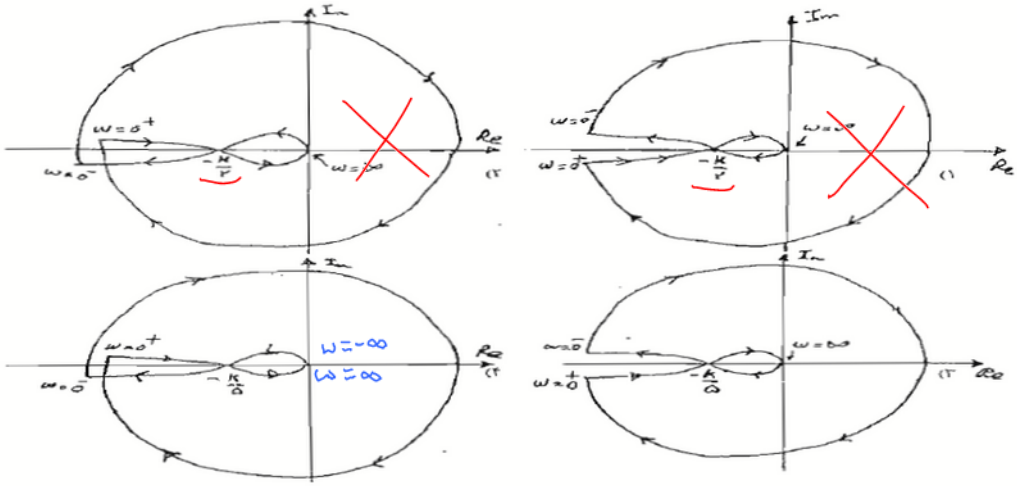
$k < 0$ ⟶ 〃 〃 〃 1

$k > 30$ ⟶ 〃 〃 〃 2

به ازای $k=0$ و $k=5$ نوع پایداری عوض می‌شود.

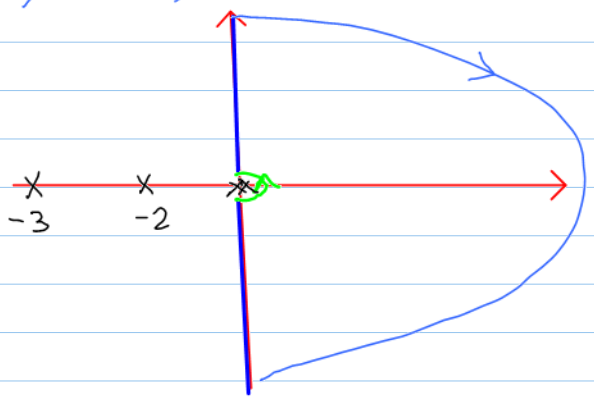
روی محور حقیقی باید عدد $-k$ را بیابیم. $\frac{-k}{5}$ ✓ و ~~$\frac{-k}{0}$~~

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $KGH(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$ است. منحنی نایکوئیست این سیستم کدام است؟



$0<k<5 \longrightarrow \quad Z=0$

$k>5 \longrightarrow \quad Z=2$

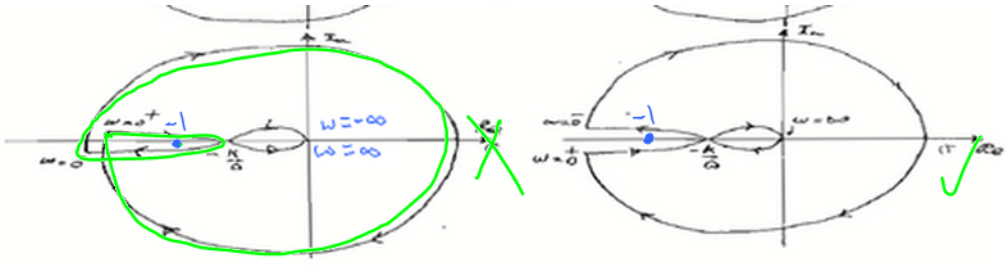


$P=0 \qquad Z=N+P$

$k<5 \longrightarrow \quad 0=N+0 \longrightarrow \quad N=0$

$k>5 \longrightarrow \quad 2=N+0 \longrightarrow \quad N=2$

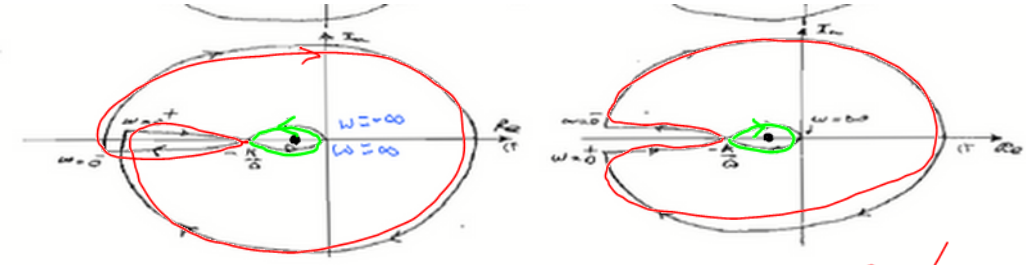
① $k<5 \longrightarrow \quad \frac{k}{5}<1 \longrightarrow \quad -\frac{k}{5}>-1$



$N=1$ $\qquad$ $N=0$

$\Delta(s)=1+G(s)=0 \qquad G(s)=-1 \longrightarrow$ نقطه بحرانی -1

$K > 5 \rightarrow \frac{K}{5} > 1 \rightarrow \frac{-K}{5} < -1$



$N = -1 + 1 = 0$

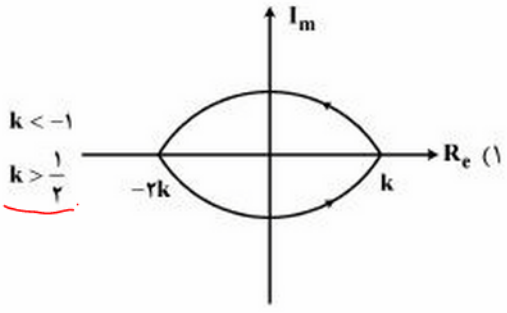
$N = 1 + 1 = 2$ ✓

کنترل ۹۶

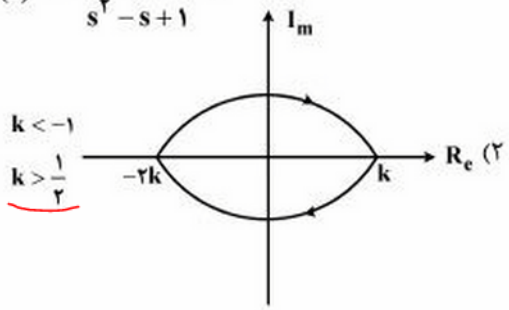
دیاگرام قطبی تابع تبدیل زیر و محدودهٔ پایداری سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد، کدام است؟

$$GH(s)=\frac{k(s^2+2s+1)}{s^2-s+1}$$

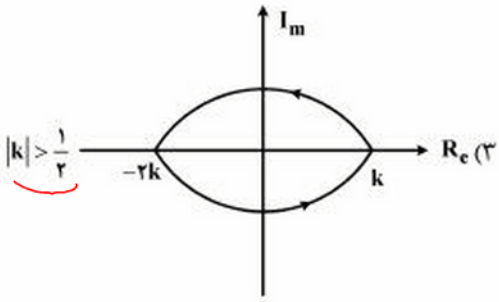
۱)



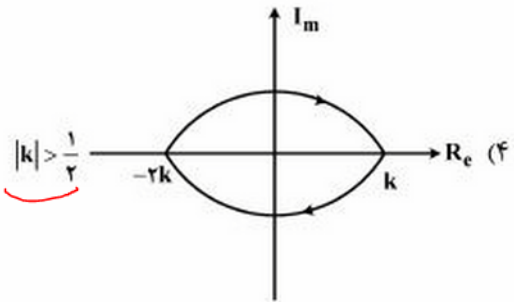
۲)



۳)



۴)



$$\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(s^2+2s+1)}{s^2-s+1} = 0$$

$$\Delta(s) = (1+k)s^2 + (2k-1)s + k+1 = 0$$

شرط پایداری $\rightarrow$

$k+1>0 \rightarrow k>-1$

$2k-1>0 \rightarrow k>\frac{1}{2}$

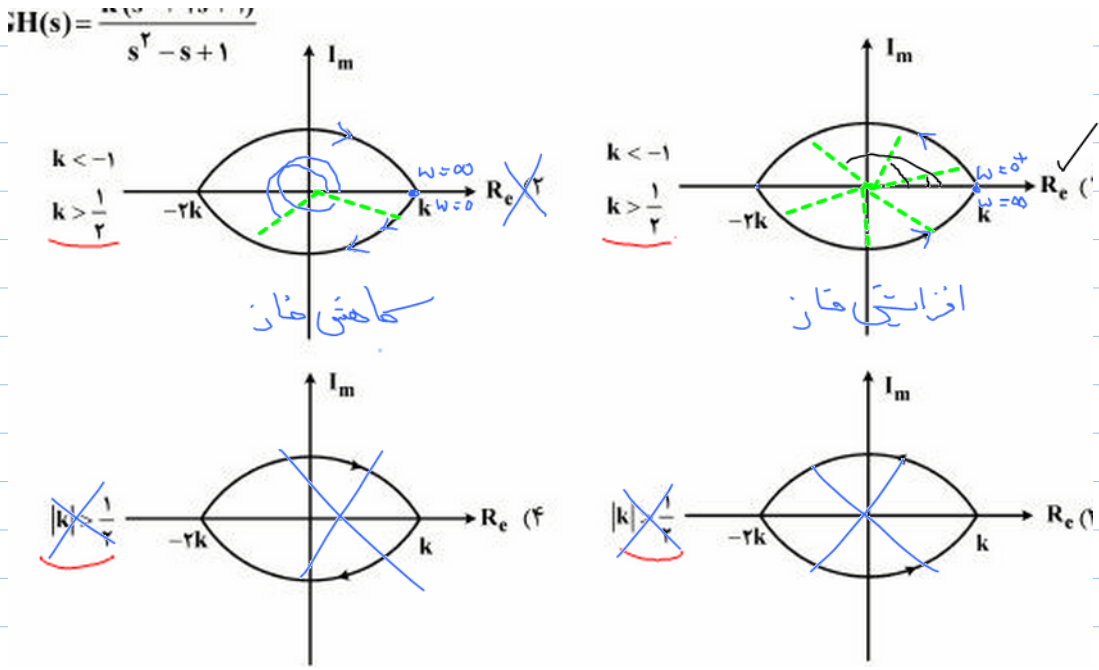
$\rightarrow k>\frac{1}{2}$

$k+1<0 \rightarrow k<-1$

$2k-1<0 \rightarrow k<\frac{1}{2}$

$\rightarrow k<-1$

شرط پایداری $\leftarrow$ $k<-1$ یا $k>\frac{1}{2}$



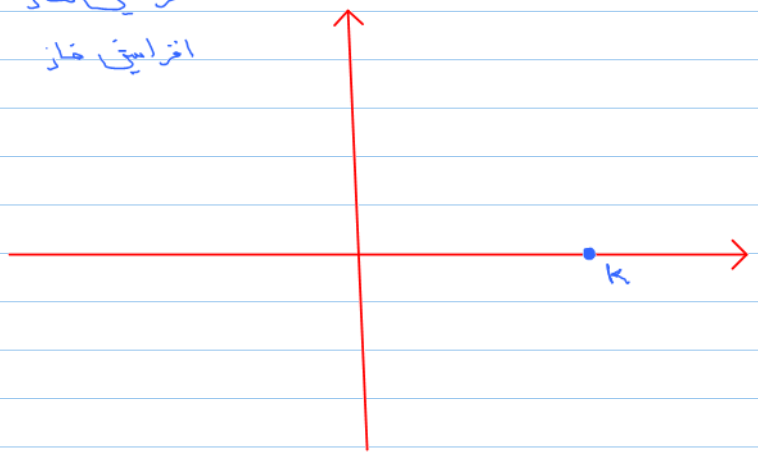
$$G(s) = \frac{k(s^2+2s+1)}{s^2-s+1}$$

صورت $\rightarrow$ افزایش فاز

مخرج $\rightarrow$ افزایش فاز

$G(0) = k$

$G(\infty) = k$

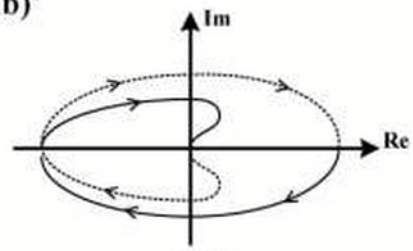


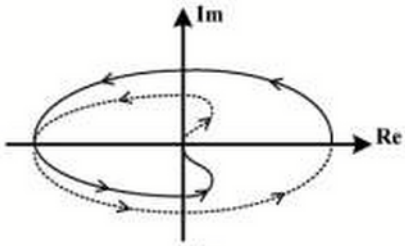
$w: 0 \rightarrow 1 \rightarrow \infty$

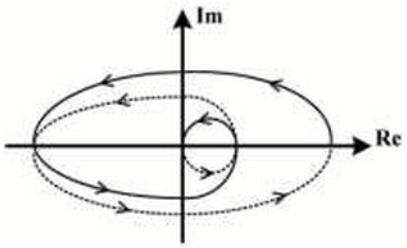
افزایش فاز $\rightarrow$ 0 : فاز $\rightarrow$

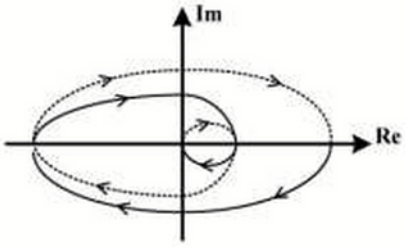
کنترل ۹۸

کدام گزینه نمودار نایکوئیست سیستمی با $G(s)=k\frac{(s-a)^{۲}}{(s+b)^{۳}}$، $(k>۰، a>۰, b>۰)$ و فیدبک واحد منفی است؟

۱)


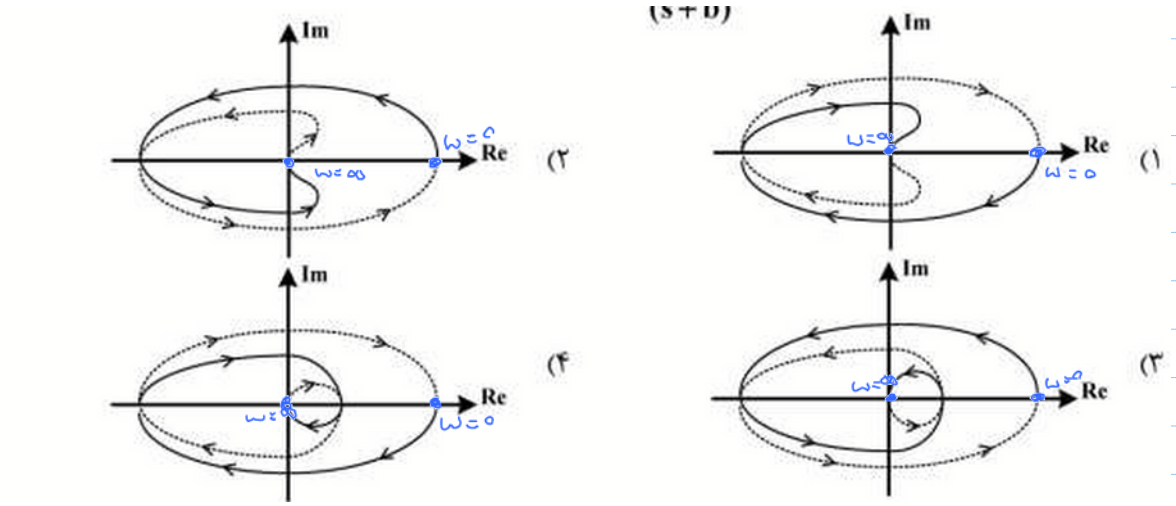
۲)


۳)


۴)


$$G(s) = \frac{k(s-a)^2}{(s+b)^3} \quad ; \quad a, b, k > 0$$

① نقطه شروع ← $G(0) = \frac{k(-a)^2}{b^3} > 0$



② نقطه نهایی ← ∞

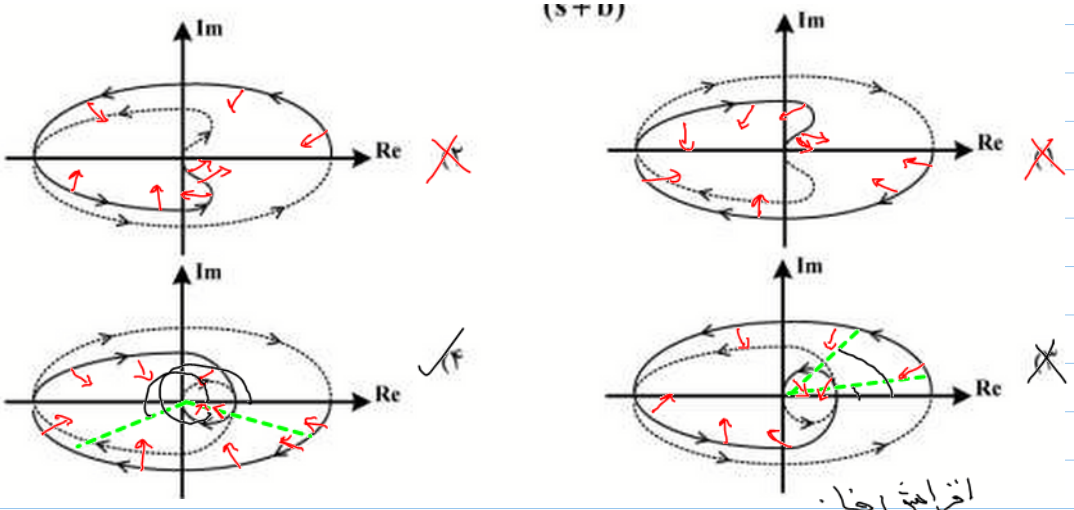
③ تغییر استقاق

$$\begin{cases} s=a \\ s=-b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega = a & \text{صفر مرتبه است} \\ \omega = b & \text{قطب مرتبه سوم} \end{cases}$$

$$\omega : 0 \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow \infty$$

$$\longrightarrow \text{کاهش فاز} \longrightarrow \text{کاهش} \longrightarrow \text{فاز}$$

فاز همواره در حال کاهش ← تغییر روند فاز (قطب) ندارد.

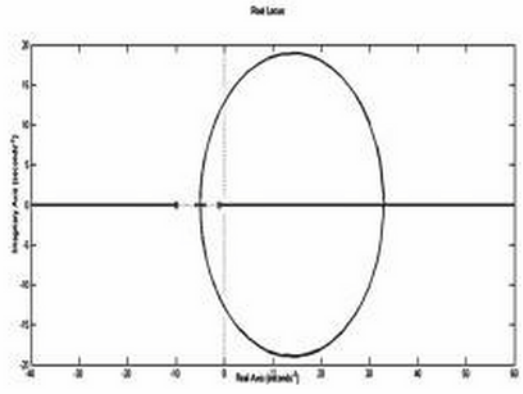


کاهش فاز

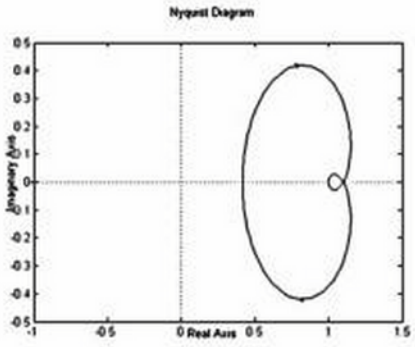
افزایش فاز

برق ۹۵

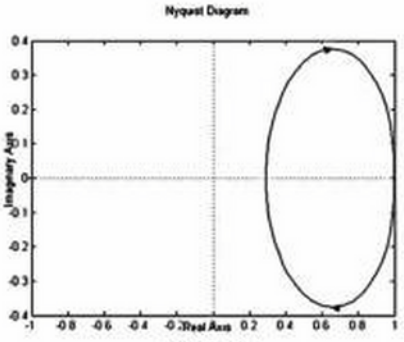
دیاگرام مکان هندسی ریشه‌های سیستمی برای $k > 0$ به شکل زیر داده‌شده است. منحنی نایکوئیست مربوط، کدام است؟



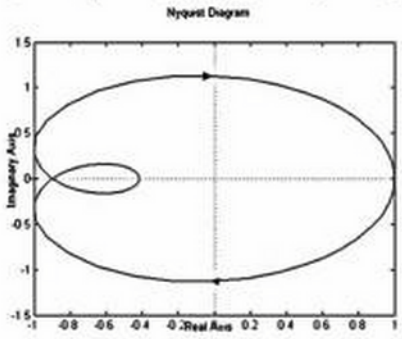
۱)



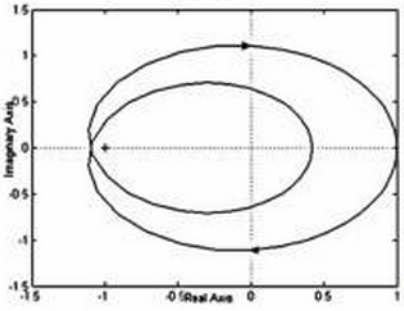
۲)



۳)



۴)

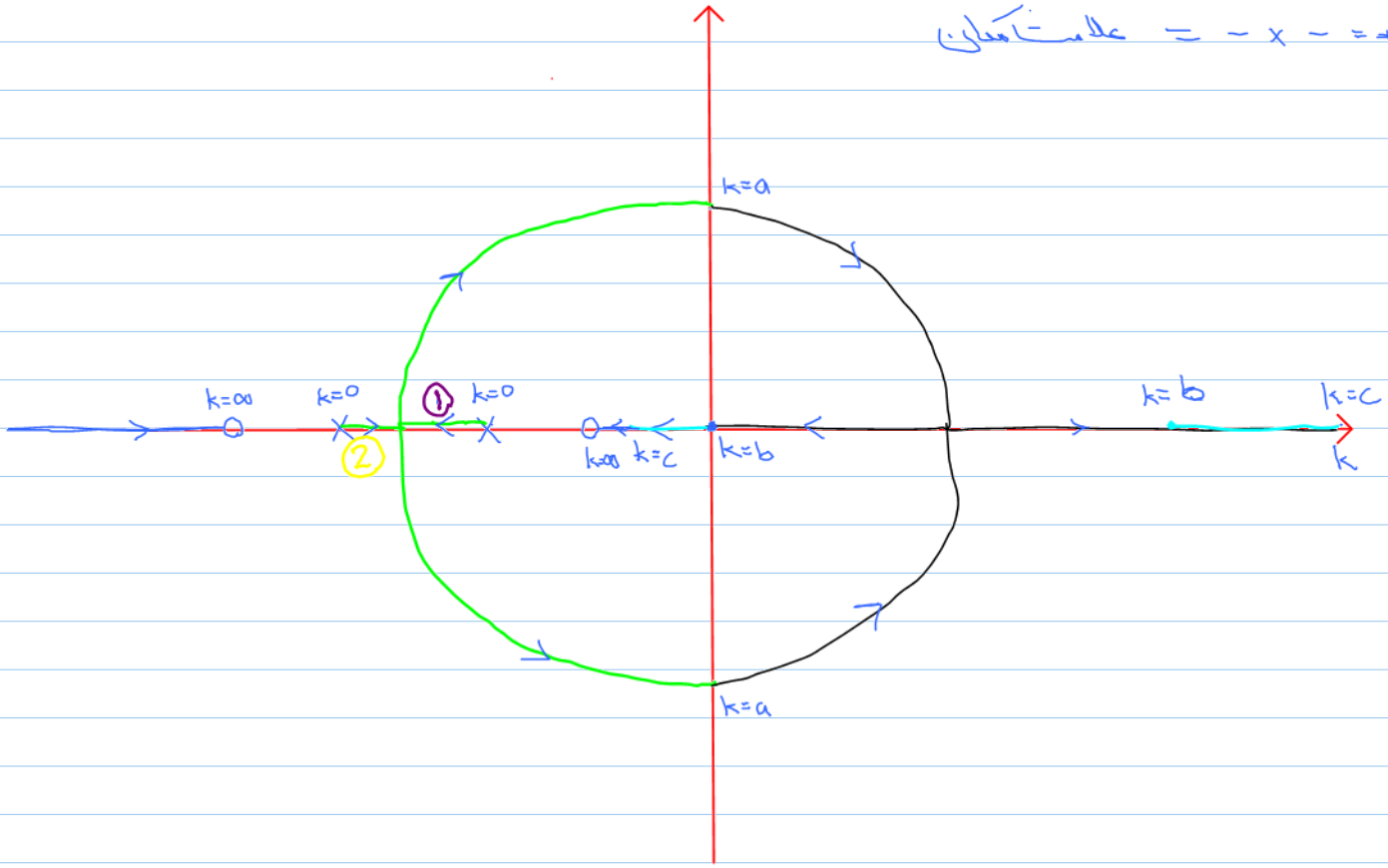


مکان هندسی + قطبی ← پایداری نایکوئیست

① بررسی مکان هندسی به ازای مقادیر k قبلی پایداری انجام دهید.

$k<0$ فیدبک منفی

علامت مکان = − x − = +



هر قطب = یک سئوال ← 2 قطب حقیقی

$a < k < 0$ → $Z = 0$ قطب سمت راست

$b < k < a$ → $Z = 2$

$c < k < b$ → $Z = 1$

$-\infty < k < c$ → $Z = 0$

$Z = N + P$ → $P = 0$ → $Z = N$

$a < k < 0 \longrightarrow N = 0 \qquad -2 < k < 0$

$b < k < a \longrightarrow N = 2 \qquad -10 < k < -2$

$c < k < b \longrightarrow N = 1 \qquad -100 < k < -10$

$k < c \longrightarrow N = 0 \qquad k < -100$

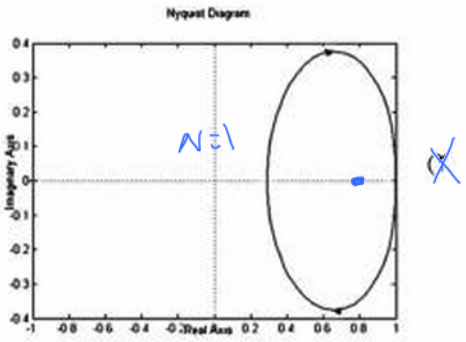
$\Delta(s) = 1 + k\,G(s) = 0 \longrightarrow G(s) = -\frac{1}{k} \longrightarrow$ نقطة بحرانية

$-2 < k < 0 \longrightarrow \frac{1}{2} <$ نقطة بحرانية $< \infty \longrightarrow N = 0$ ✓

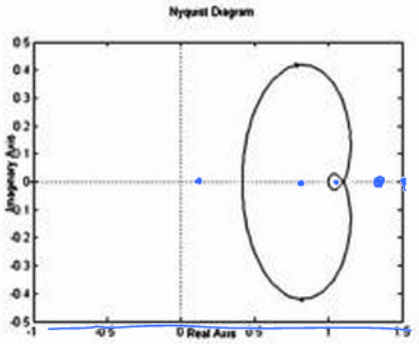
$-10 < k < -2 \longrightarrow \frac{1}{10} < \sim < \frac{1}{2} \longrightarrow N = 2$

$-100 < k < -10 \longrightarrow \frac{1}{100} < \sim < \frac{1}{10} \longrightarrow N = 1$

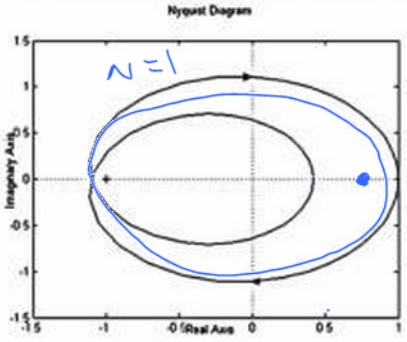
$k < -100 \longrightarrow \sim < \frac{1}{100} \longrightarrow N = 0$



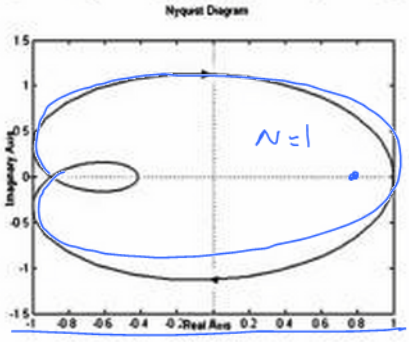
✗



✓



✗

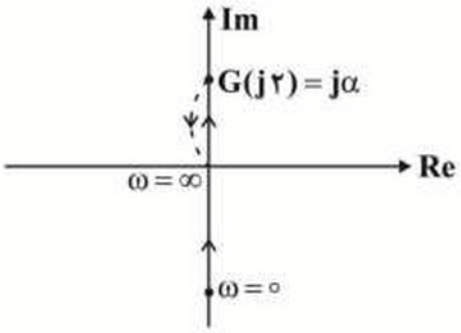


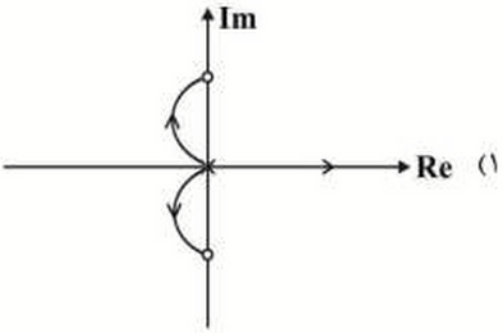
✗

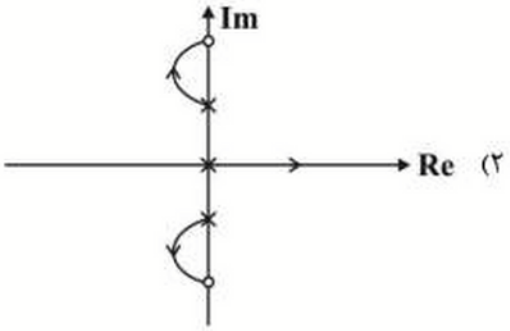
برق ۹۷

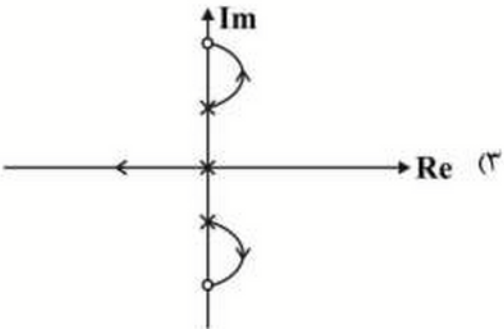
دیاگرام قطبی یک سیستم که دارای مرتبهٔ کوچک‌تر از شش بوده و دارای قطب یا صفری در نیم صفحهٔ راست نیست، در شکل زیر نشان داده شده است. منحنی قطبی کاملاً موهومی و قسمت نقطه‌چین نیز موهومی است، که برای وضوح، جدا از محور نشان داده شده است. مکان هندسی ریشه‌های سیستم فوق برای فیدبک مثبت کدام است؟

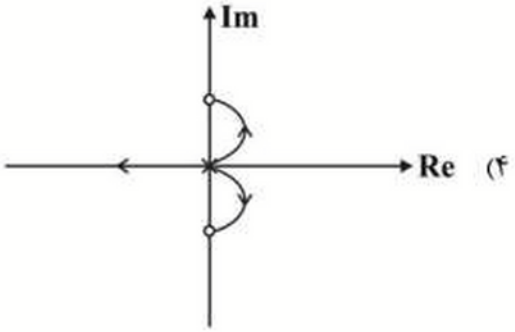
$|G(0)|=\infty, |\alpha|<\infty$

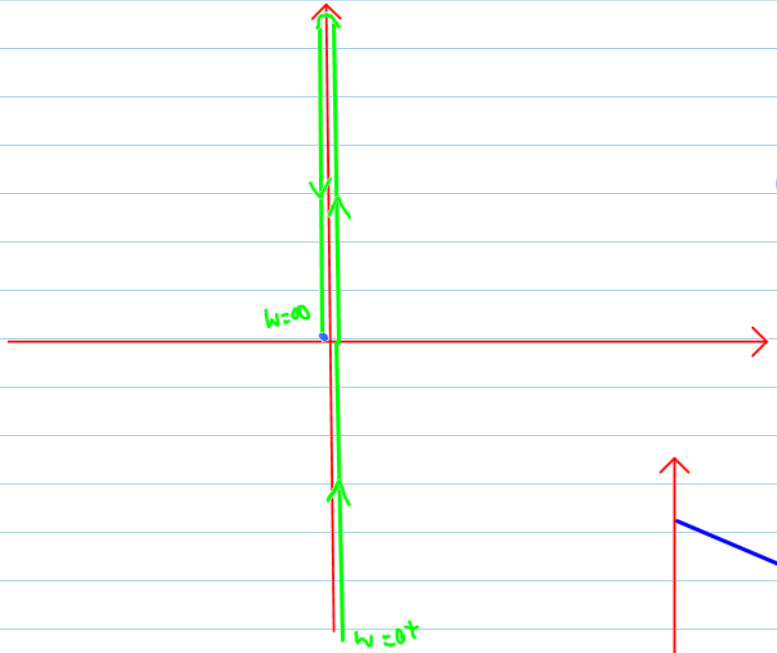


۱)


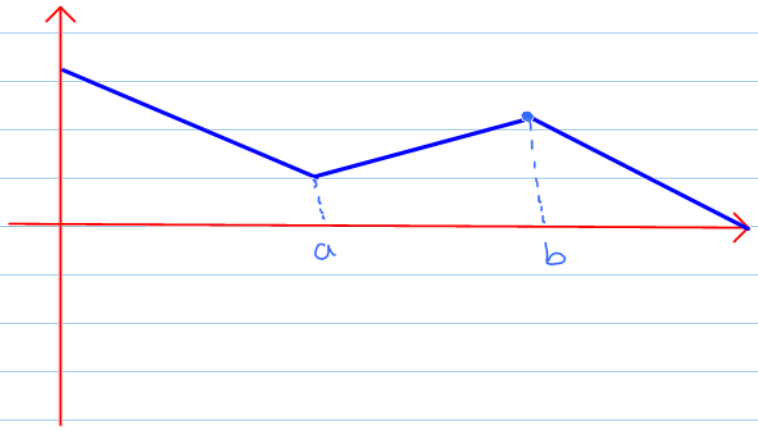
۲)


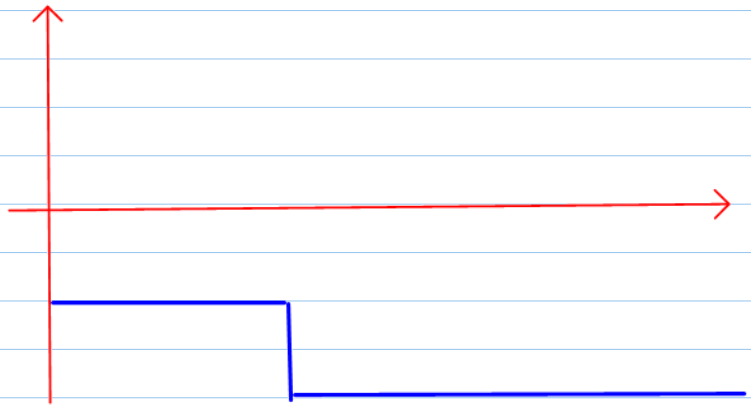
۳)


۴)


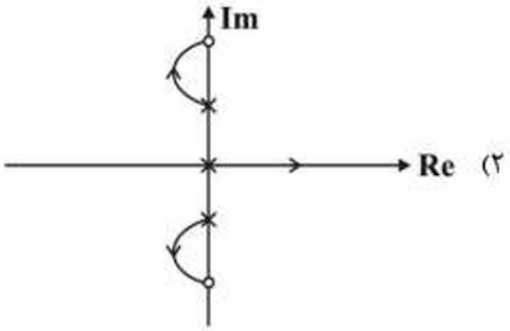


$$G(s) = \frac{(s^2 + a^2)}{s(s^2 + b^2)}$$

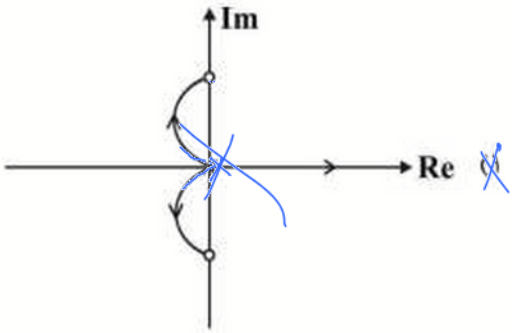




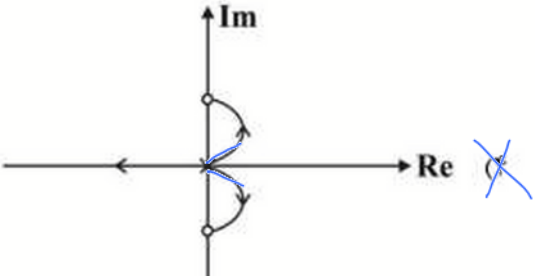
$$G(s) = \frac{s^2 + a^2}{s(s^2 + b^2)}$$



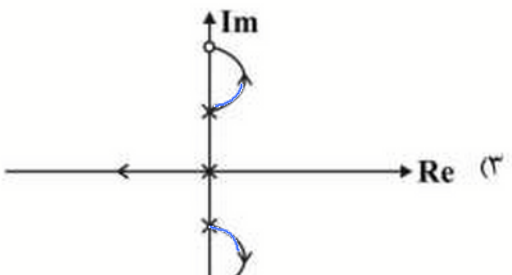
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

$$\Delta(s) = 1 - K\,G(s) = 0$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(s^2+a^2)}{s(s^2+b^2)} = 0$$

R-H ← G(s)

$$\Delta(s) = s^3 - ks^2 + b^2 s - ka^2 = 0$$

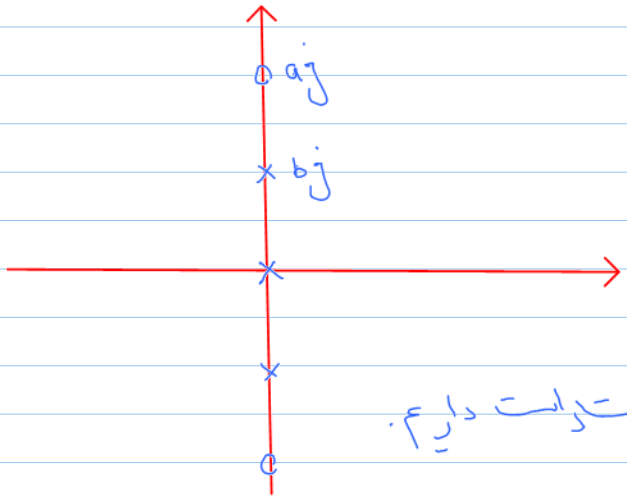
$k>0$ → قطب سمت راست → ناپایدار ✓

$k<0$ → ... ندارد → پایدار ✓

$k>0$ →

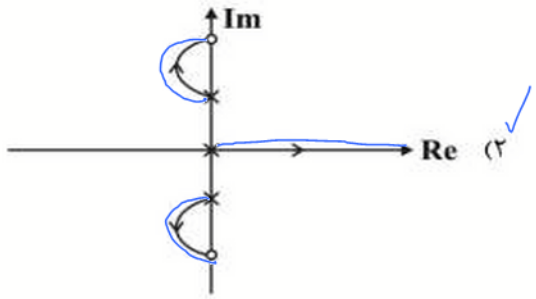
s^3	1	b^2	0
s^2	$-k-1$	$-ka^2-a^2$	0
s^1	$+b^2-a^2$	0	
s^0	$-a^2$		

$\frac{1}{k}$

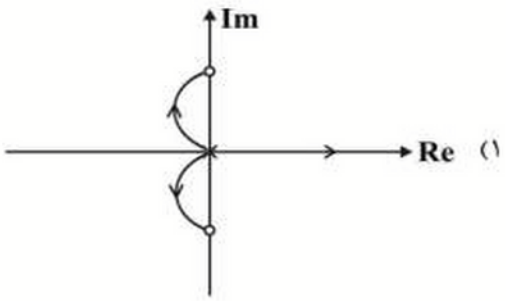


$a>b$ باتوجه به گزینه‌های

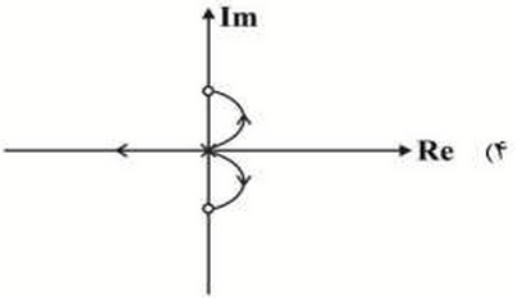
همواره بازای $k: 0 \to \infty$ یک قطب سمت راست داریم.



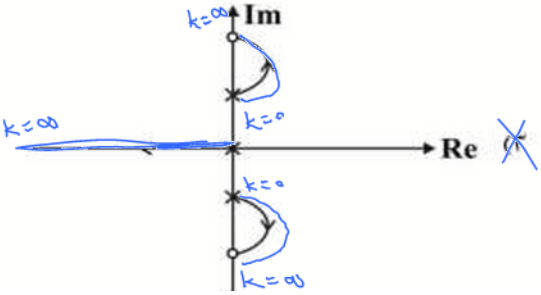
۲ ✓



۱



۴

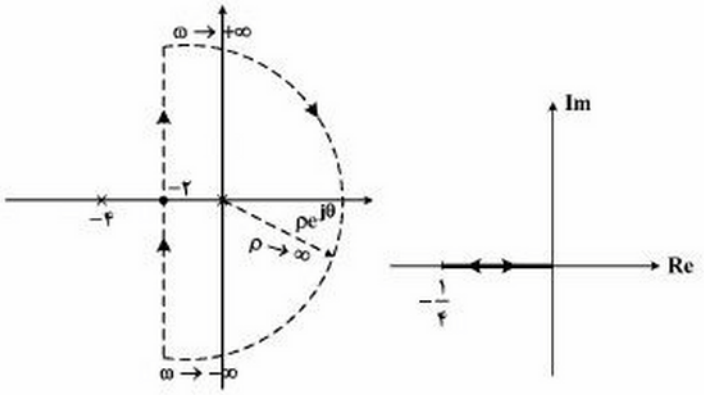


۳ ✗

جلسه 59 کنترل خطی

برق ۹۶

برای یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی، محل قطب‌های سیستم حلقه باز در شکل الف نشان داده شده است. شکل ب نگاشت کانتور نشان داده شده در شکل الف توسط تابع تبدیل حلقه باز را نشان می‌دهد. در این مورد گزینهٔ صحیح کدام است؟



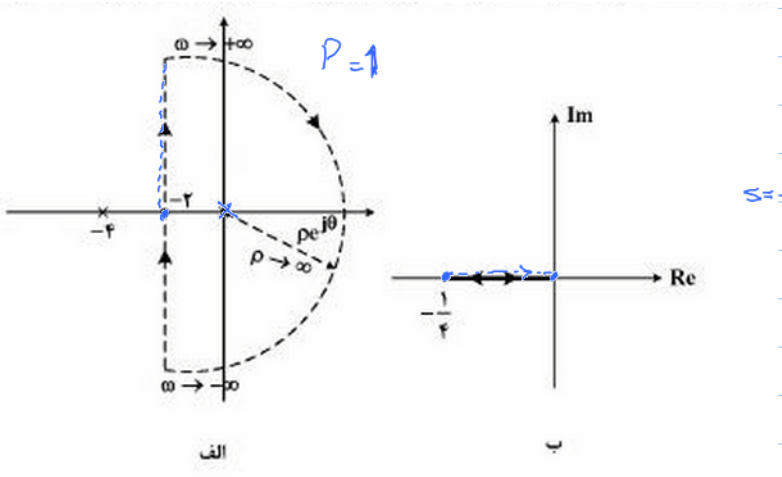
الف ب

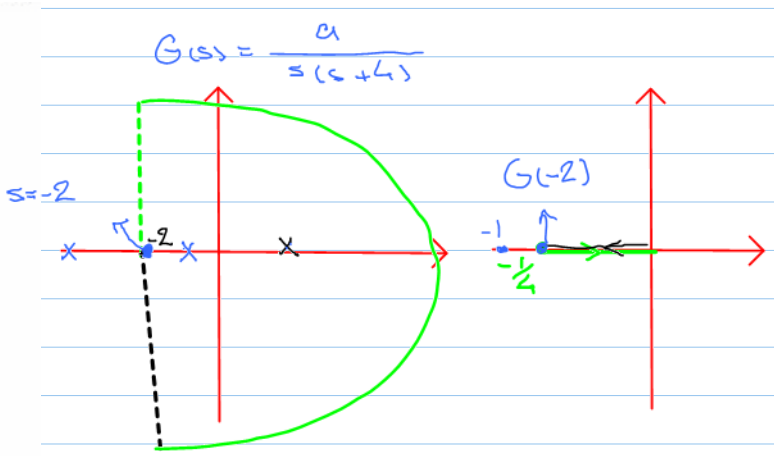
۱) زمان نشست پاسخ پله سیستم کمتر از ۲ ثانیه است.

۲) پاسخ پلهٔ سیستم حلقه بسته میرای قوی است.

۳) حد بهرهٔ سیستم کمتر از ۲۰ dB است.

۴) سیستم حلقه بسته ناپایدار است.





$P=1$ ، $N=0$ $\quad Z = N+P = 1$

سیستم حلقه بسته با قطب داخل مسیر ناپایدار خواهد بود.

۱۷ سیستم حلقه بسته ناپایدار است؟ X سیستم حلقه بسته می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد.

۱) $T_s < 2\,sec$ ← قطبها سمت چپ خط $s=-2$ هستند. X

۲) سیستم حلقه بسته فوق‌میرا است؟ ✓

$$G(-2) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{-2(-2+4)} = -\frac{1}{4} \rightarrow a = 1$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)} \rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{1}{s(s+4)+1} = \frac{1}{s^2+4s+1}$$

$2\xi\omega_n \quad \omega_n^2$

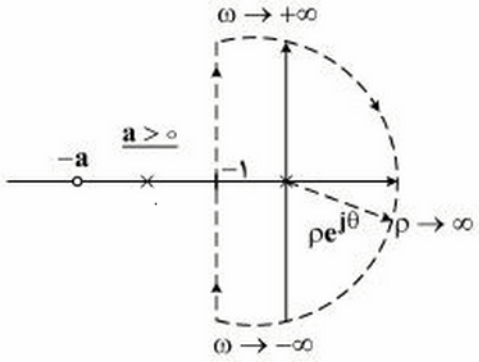
$$\omega_n^2 = 1 \rightarrow \omega_n = 1$$

$$2\xi \times 1 = 4 \rightarrow \xi = 2 \rightarrow$$ فوق میرا ✓

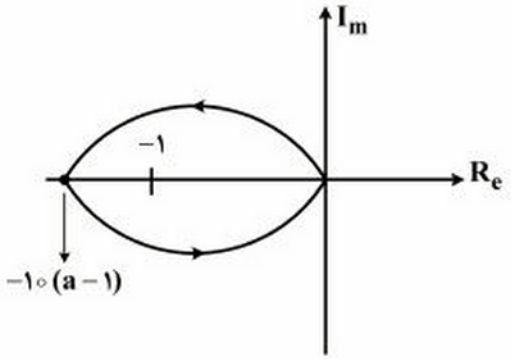
قطبها: $-2 \pm j\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{2\times 1} = 2\,s$

کنترل ۹۶

در شکل الف، مسیر بسته‌ای به همراه قطب و صفرهای حلقه باز یک سیستم مشخص شده است. نگاشت این مسیر توسط تابع تبدیل حلقه باز این سیستم در شکل ب نمایش داده شده است. کدام گزینه برای سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی صحیح است؟



(الف)



(ب)

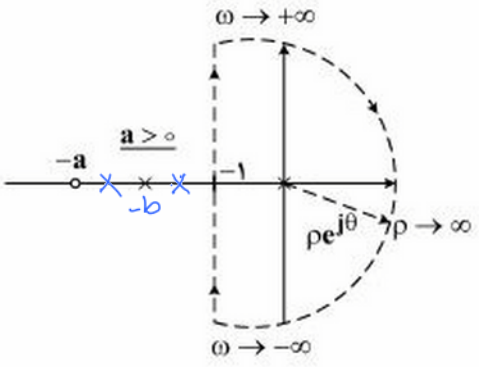
۱) برای $a > ۲$ خطای حالت دائم برای ورودی شیب بی‌نهایت می‌گردد.

۲) برای $a > ۱/۱$ زمان نشست تقریبی سیستم حلقه بسته کمتر از ۴ ثانیه است.

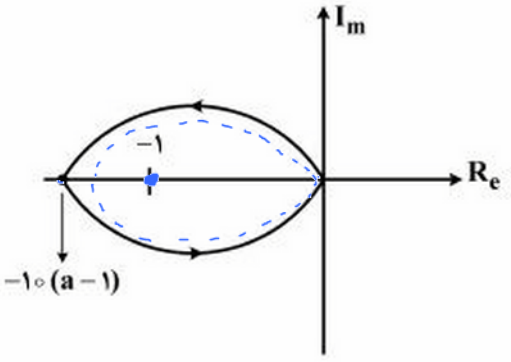
۳) برای $a < ۱/۱$ قطعاً بالازدگی در پاسخ پله وجود ندارد.

۴) برای $a > ۱/۱$ سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

فیدبک واحد منفی صحیح است؟



(الف)



(ب)

۱) برای $a > ۲$ خطای حالت دائم برای ورودی شیب بی‌نهایت می‌گردد.

۲) برای $a > ۱/۱$ زمان نشست تقریبی سیستم حلقه بسته کمتر از ۴ ثانیه است.

۳) برای $a < ۱/۱$ قطعاً بالازدگی در پاسخ پله وجود ندارد.

۴) برای $a > ۱/۱$ سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

$G(s) = \frac{s+a}{s(s+b)}$

$\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$

$G(s) = -1$

نقطه بحرانی $= -1$

$a > 2 \rightarrow a-1 > 1 \rightarrow -10(a-1) < -1$

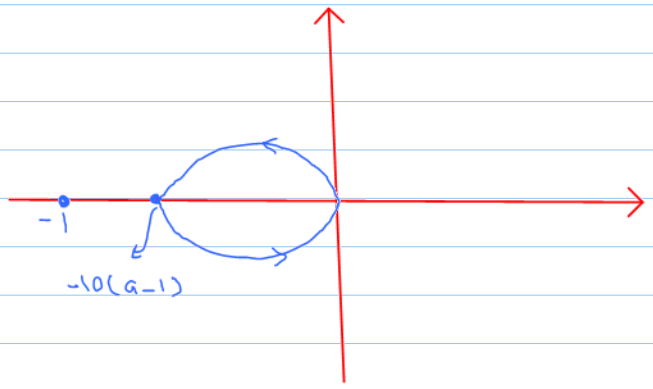
$P = 1 \quad N = -1 \rightarrow Z = 1 + -1 = 0 \rightarrow$ تعداد قطب‌های حلقه بسته خارج مسیر ناپایدار است

خطای ماندگار = محدود $\Rightarrow$ پایدار $\rightarrow$ نوع سیستم $= 1 \rightarrow$ نوع ورودی $= 1$

$a > 1.1 \rightarrow a-1 > 0.1 \rightarrow -10(a-1) < -1 \rightarrow Z = 0$

تعداد قطب‌های حلقه بسته سمت چپ خط $s=-1$ هستند $\rightarrow T_s < \frac{4}{|-1|} = 4s$

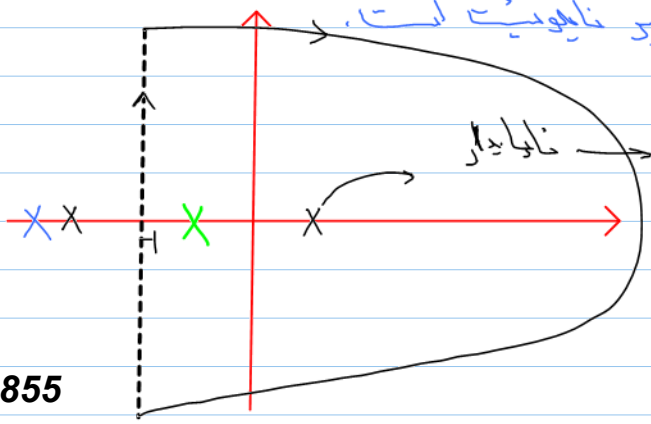
$a < 1.1 \rightarrow -10(a-1) > -1$



$N = 0$

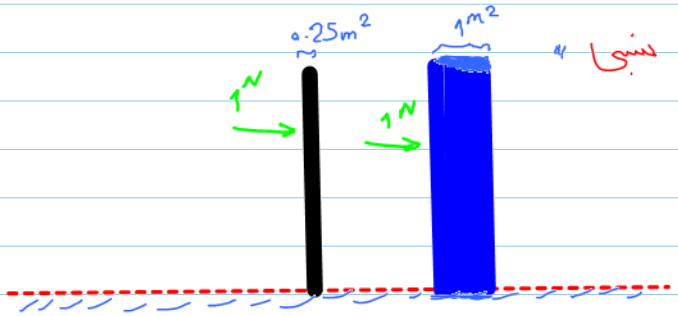
$Z = 0 + 1 = 1 \rightarrow$

یعنی ۱ قطب حلقه بسته داخل مسیر ناپایدار است.



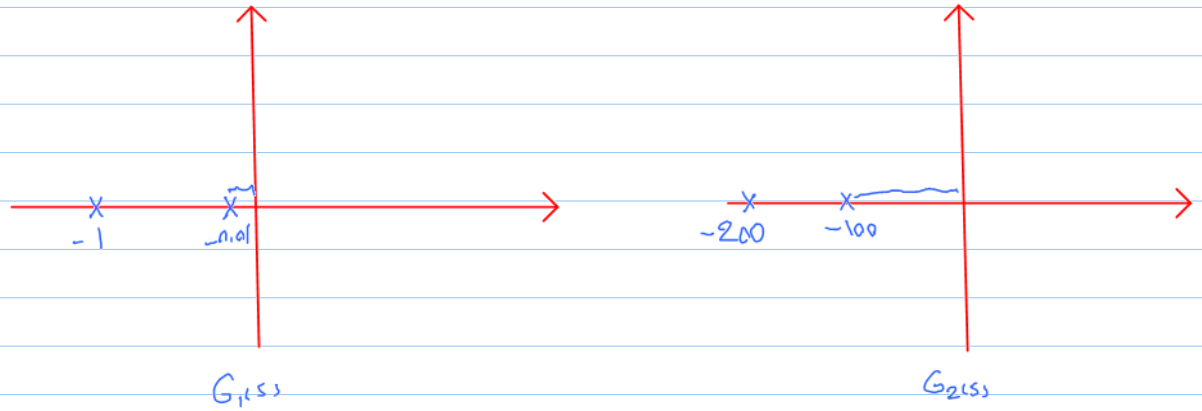
جلسه ۵۵ کنترل خطی

«پایداری نسبی»



پایدار است یا نه؟

دانشجو درس را با چه نمره‌ای قبول شد؟ ۱۵٫۲۵ / ۱۹ ✓

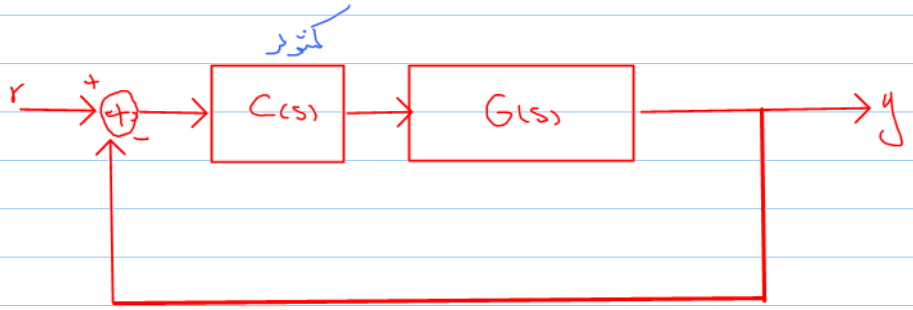


$G_1(s)$ $G_2(s)$

پایداری نسبی: فاصله از ناپایداری ← پایدارتر است



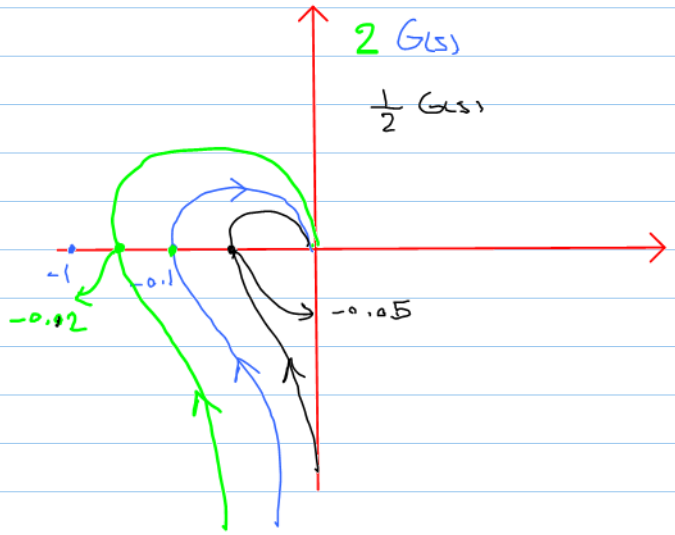
پایدار

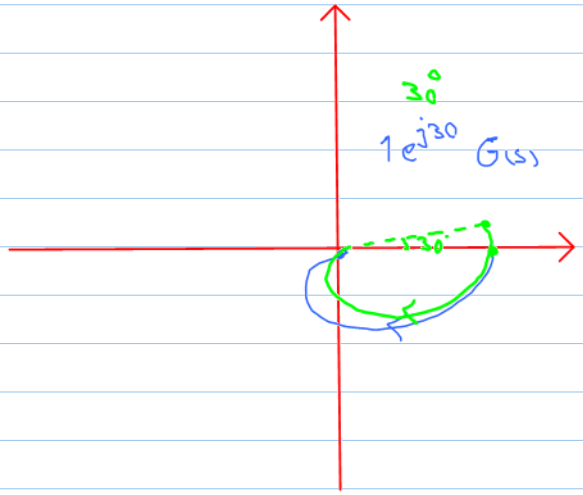


$C(s)\,G(s)$ → حلقه باز

$s=j\omega$ → $C(j\omega)\,G(j\omega)$ → $|C(j\omega)|e^{j\angle C(j\omega)}\;|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$

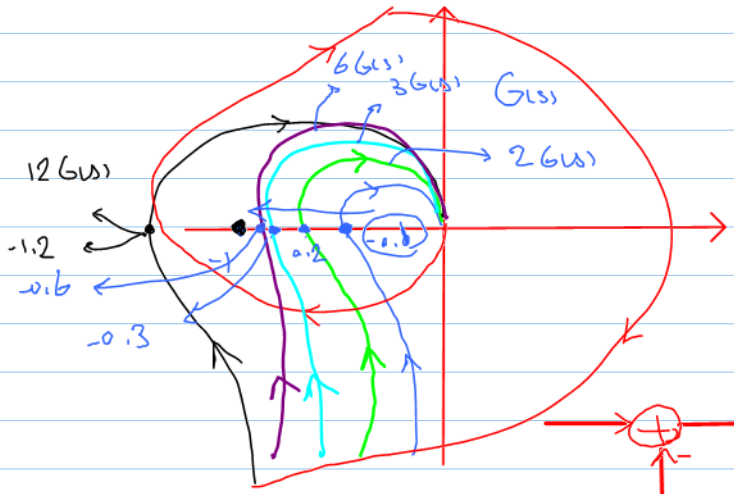
هر کنترلر به سیستم یک اندازه (بهره) و یک فاز اضافه می‌کند.





اندازه ← باعث بزرگ یا کوچک شدن می شود.

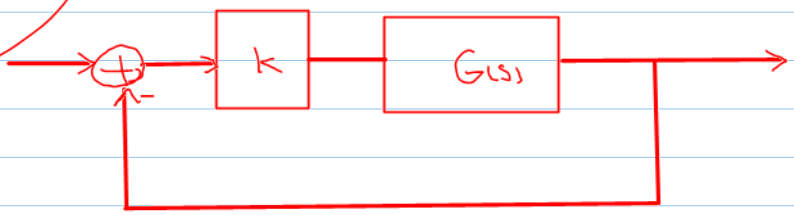
فاز ← ~ چرخش می شود.



$P=0$ $\quad Z=N+P=0+0=0$

یعنی قطبهای حلقه بسته عاماً ست جب خود سا

هستند.



k: حیقی ← چه مقدار بهره فازی به سیستم اضافه کنیم که سیستم به سمت ناپایداری برود.

$Z=N+0=N$

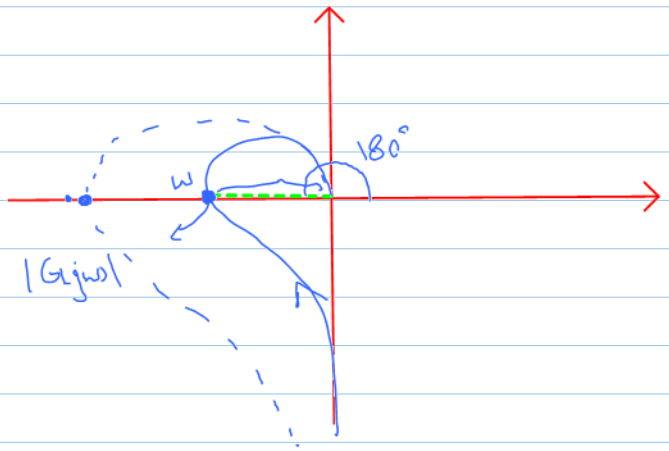
پایدار ← $k\times(-0.1)>-1$

ناپایدار ← $k\times(-0.1)<-1$

$N>0$ ← سیستم ناپایدار

مادامی که نقطه تلاقی نمودار مایکویست با محور حقیقی منفی x بهره k کمتر از ۱- سیستم پایدار است.

پایدار ← $-1 <$ نقطه تلاقی با محور حقیقی منفی $\times k$



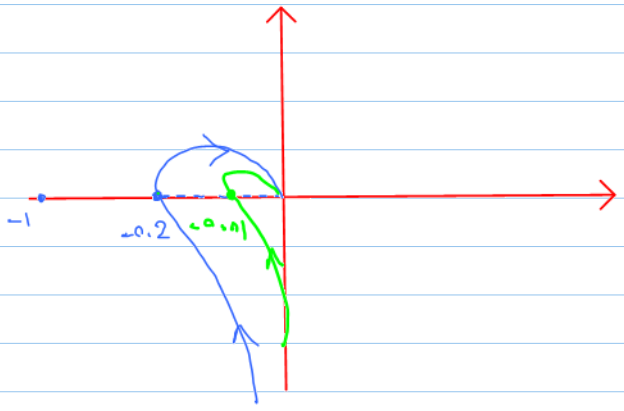
نقطه تلاقی با محور حقیقی منفی = جایی که (ω ای) فاز G(jω) برابر 180° می‌شود.

برای فاصله حداکثر بهره جاز ← $\angle G(j\omega) = 180 \rightarrow \omega = a$

نقطه تلاقی ← $|G(ja)|$

$k \times (-|G(ja)|) = -1 \rightarrow k = \frac{1}{|G(ja)|}$

$\frac{1}{|G(ja)|}$ ← حداکثر بهره جاز برای پایدار ماندن سیستم



$k = \frac{-1}{-0.2} = 5$ $\quad k = \frac{-1}{-0.01} = 100$

$k < 5$ ← پایدار

$k > 5$ ← ناپایدار

$k < 100$ ← پایدار

$k > 100$ ← ناپایدار

فرکانس قطع فاز (ω_{pc}): فرکانسی که در آن $\angle G(j\omega)$ برابر $\pm 180^\circ$ است.

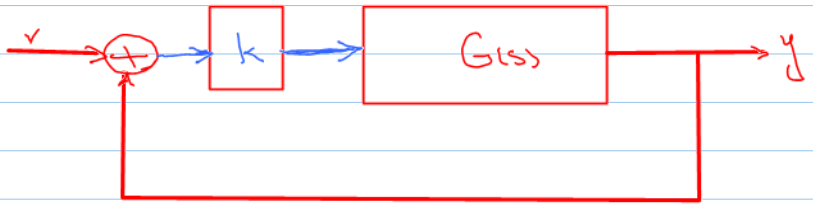
$$\angle G(j\omega) = 180^\circ \longrightarrow \omega = ?$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2(j\omega+1)}$$

$$\angle G(j\omega) = 0 - 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) = -180^\circ \longrightarrow \tan^{-1}(\omega) = 0 \longrightarrow \omega = \tan(0) = 0$$

$$\omega_{pc} = 0$$

حد بهره (GM): یعنی در چه حالتی بهره k را چقدر افزایش دهیم تا سیستم به مرز پایداری برسد.



روش کلی محاسبه GM:

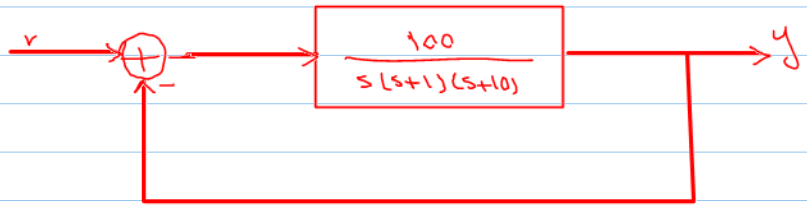
① تابع بهره حلقه ($L(s)$) را بدون بهره k پیدا کنید. $L(s) = G(s)$

② $L(j\omega) = L(s)\big|_{s=j\omega}$

③ فرکانس قطع فاز را حساب کنید. $\angle L(j\omega) = 180^\circ \longrightarrow \omega = ? \longrightarrow \omega_{pc}$

④ $|L(j\omega_{pc})|$ را حساب کنید.

$$G.M = \frac{1}{|L(j\omega_{pc})|}$$



① $L(s) = \dfrac{100}{s(s+1)(s+10)}$

② $L(jw) = \dfrac{100}{jw(jw+1)(jw+10)} = \dfrac{100}{jw(10-w^2+j11w)}$

③ $\angle L(jw) = 180^\circ$

$\angle 100 - [\angle jw + \angle (10-w^2+j11w)] = 180^\circ$

$0 - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\dfrac{11w}{10-w^2}\right) = 180^\circ$

$\tan^{-1}\left(\dfrac{11w}{10-w^2}\right) = -270^\circ \rightarrow \dfrac{11w}{10-w^2} = \infty \rightarrow 10-w^2 = 0$

$w = \sqrt{10}$

$w_{pc} = \sqrt{10}$

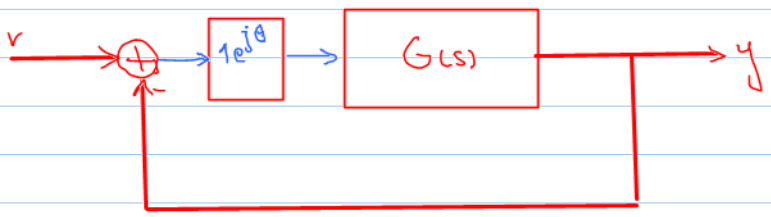
④ $|L(jw_{pc})| = \left|\dfrac{100}{j\sqrt{10}(10-\sqrt{10}^2+j11\times\sqrt{10})}\right| = \dfrac{100}{|-1\times 10\times 11|} = \dfrac{10}{11}$

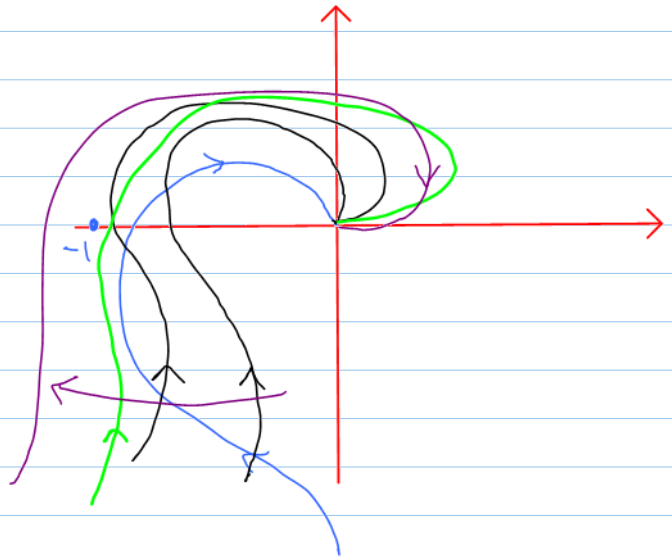
⑤ $G.M = \dfrac{1}{\frac{10}{11}} = \dfrac{11}{10} = 1.1 \rightarrow$

$k > 1.1 \rightarrow$ ناپایدار

$k < 1.1 \rightarrow$ پایدار

حالت دوم ← اضافه کردن خازن:



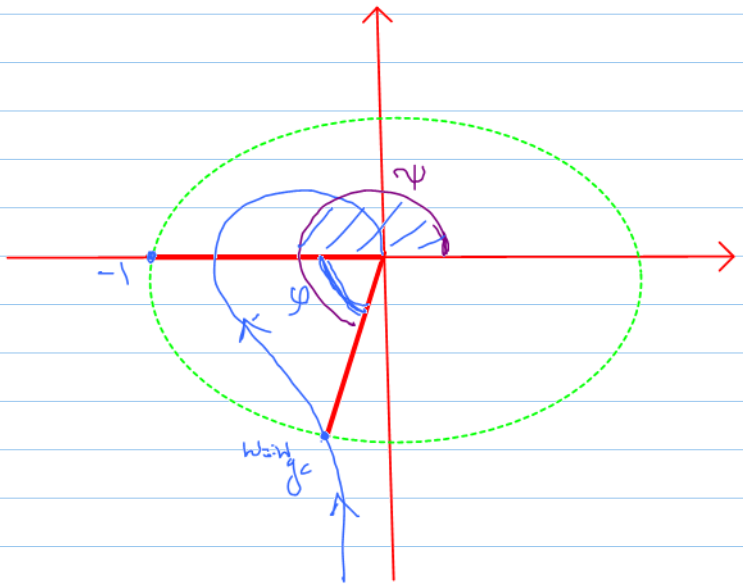


$P=0$

$Z = N + \overset{\circ}{P} = N$

$Z = N > 0 \longrightarrow$ ناپایدار

$Z = N = 0 \longrightarrow$ پایدار



حداکثر فاز مجاز برای پایدار ماندن سیستم، زاویه تقلیلی است که فاصله از مبدأ در آن برابر ۱ شده نسبت به محور حقیقی سمت چپ

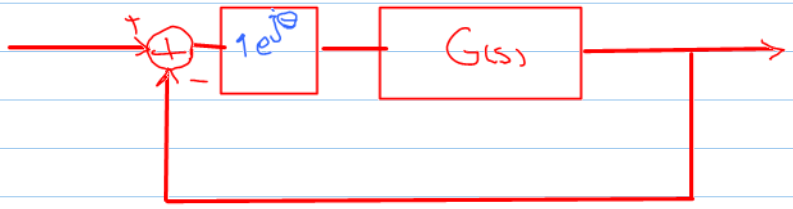
$\omega \longrightarrow$ فاصله بردار از مبدأ $= |G(j\omega)| = 1$

$\angle G(j\omega) = \psi$

حداکثر فاز $= \varphi = \psi - 180^\circ$

فرکانس قطع بهره (ω_{gc}): فرکانسی که به ازای آن اندازه تابع بهره خلته برابر 1 می‌شود.

حد فاز (P.M): حداکثر فازی که به صورت $1e^{j\theta}$ (فاز خالص) می‌توان به سیستم اضافه کرد تا سیستم به مرز پایداری برسد.



روش سنجی حاشیه حد فاز:

① $L(s)$ را حساب کنید.

② $L(j\omega)$ را حساب کنید.

③ ω_{gc} را حساب کنید. $|L(j\omega)| = 1 \longrightarrow \omega = ? \longrightarrow \omega_{gc}$

④ $P.M = \angle L(j\omega_{gc}) - 180^\circ$

به صورت عدد مثبت بیان شود.

$-90 \longrightarrow 270^\circ$

$$L(s) = \frac{2\sqrt{3}}{s(s+1)}$$

② $$L(j\omega) = \frac{2\sqrt{3}}{j\omega(j\omega+1)}$$

③ $$|L(j\omega)| = \frac{2\sqrt{3}}{\omega\sqrt{\omega^2+1^2}} = 1 \longrightarrow 2\sqrt{3} = \omega\sqrt{\omega^2+1} \longrightarrow$$

$$12 = \omega^4 + \omega^2 \longrightarrow \omega^4 + \omega^2 - 12 = 0 \longrightarrow (\omega^2+3)(\omega^2+4) = 0$$

$$\omega = \begin{cases} +\sqrt{3} \checkmark \\ -\sqrt{3} \times \\ \pm j\sqrt{4} \times \end{cases} \longrightarrow \omega_{gc} = \sqrt{3}$$

$$\angle L(j\sqrt{3}) = \angle \frac{2\sqrt{3}}{j\sqrt{3}(j\sqrt{3}+1)} = \angle 2\sqrt{3} - (\angle j\sqrt{3} + \angle j\sqrt{3}+1)$$

$$= 0 - (90^\circ + \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1}))$$

$$= -90 - 60^\circ = -150^\circ$$

$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \theta \rightarrow \sqrt{3} = \tan(\theta) \rightarrow \theta = 60^\circ$

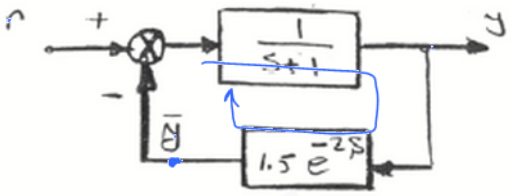
$\therefore$

$\angle L(jw_{gc}) = -150 + 360^\circ = 210^\circ$

$P.M = 210^\circ - 180^\circ = \underline{30^\circ}$

برق ۸۱

حدفاز و حدبهره از ورودی r به خروجی y درشکل زیر برابر PM = ۳/۷° و GM = ۱/۰۱ می‌باشد، مقادیر حدفاز و حدبهره از ورودی r به خروجی y چقدر هستند؟



۱) PM = ۳/۷° ، GM = ۱/۰۱

۲) PM = ۳/۷° ، GM = ۱/۵۲

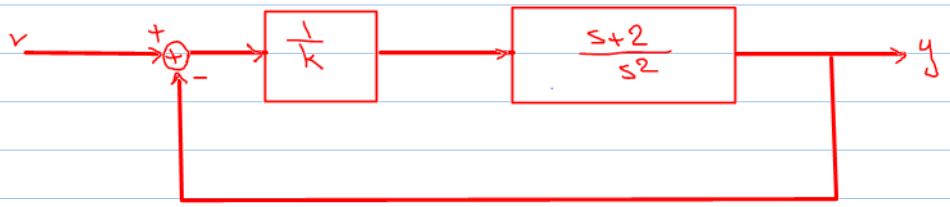
۳) PM = |۳| / ۸۱° ، GM = ۱/۵۲

۴) حدود خواسته شده از حدود داده شده قابل حصول نیست.

حدفاز و حدبهره از روی تابع بهره حلقه (L(s)) حاصل شد.

تابع بهره حلقه وابسته به خودی یا ورودی نیست. ← حدفاز و حدبهره وابسته به ورودی یا خروجی خواهد بود. ← P.M = 3.7° ، G.M = 1.01

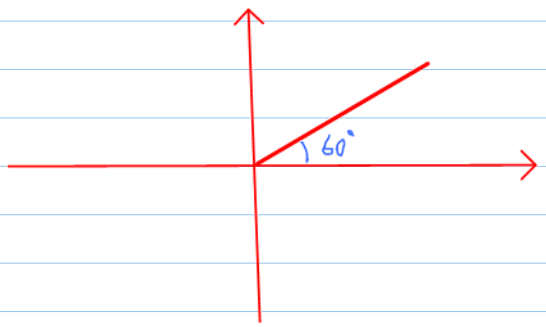
مثال: درچه بازه‌ای برای k حدفاز برابر 60° شود، بهره k چقدر است؟ (k>0)



$P.M = 60^\circ = \angle L(jw_{gc}) - 180^\circ \longrightarrow \angle L(jw_{gc}) = 240^\circ$

$L(s) = \frac{s+2}{ks^2} \qquad L(jw) = \frac{jw+2}{k \times (-w^2)} \qquad L(jw_{gc}) = \frac{jw_{gc}+2}{-k w_{gc}^2}$

$\angle L(jw_{gc}) = \tan^{-1}\left(\frac{w_{gc}}{2}\right) - 180^\circ = 240$



$\tan^{-1}\left(\frac{w_{gc}}{2}\right) = 420^\circ = 60^\circ$

$\frac{w_{gc}}{2} = \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

$w_{gc} = 2\sqrt{3} \longrightarrow$

$|L(j2\sqrt{3})| = 1 \longrightarrow$

$$\left| \frac{j2\sqrt{3}+2}{-k \times 12} \right| = \frac{\sqrt{16}}{k \times 12} = 1 \longrightarrow k = \frac{\sqrt{16}}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

«جلسه ۱۷ کنترل خطی»

پایداری نسبی:

حد بهره و حد فاز ←

محاسبه حد بهره و حد فاز از روی نمودار بودی:

حد بهره:

① فرکانس قطع فاز (جایی که فاز برابر $\pm 180^\circ$ شده است) را پیدا کنید.

② اندازه در فرکانس قطع فاز را حساب کنید.

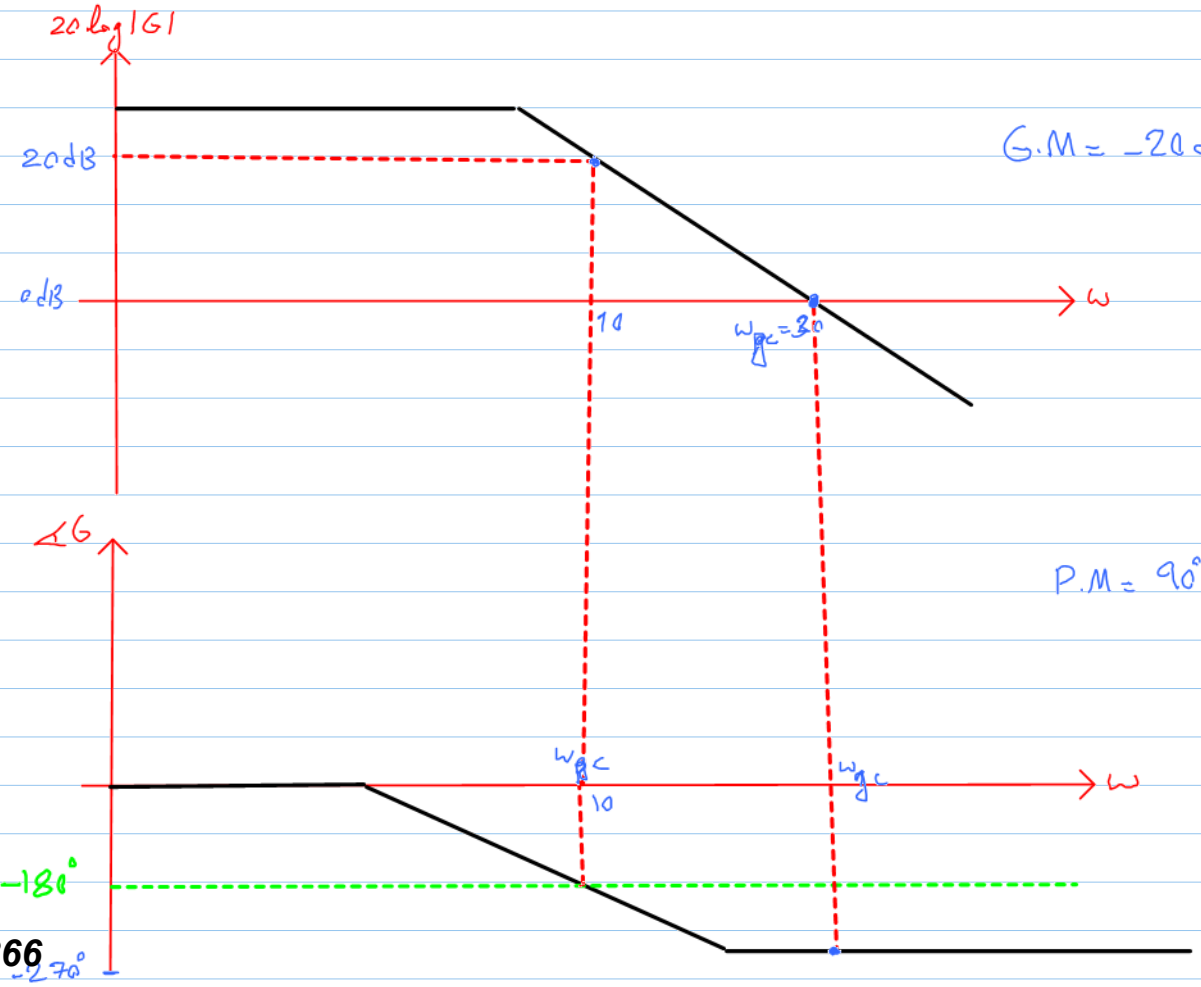
③ حد بهره برابر معکوس اندازه در فرکانس قطع فاز است.

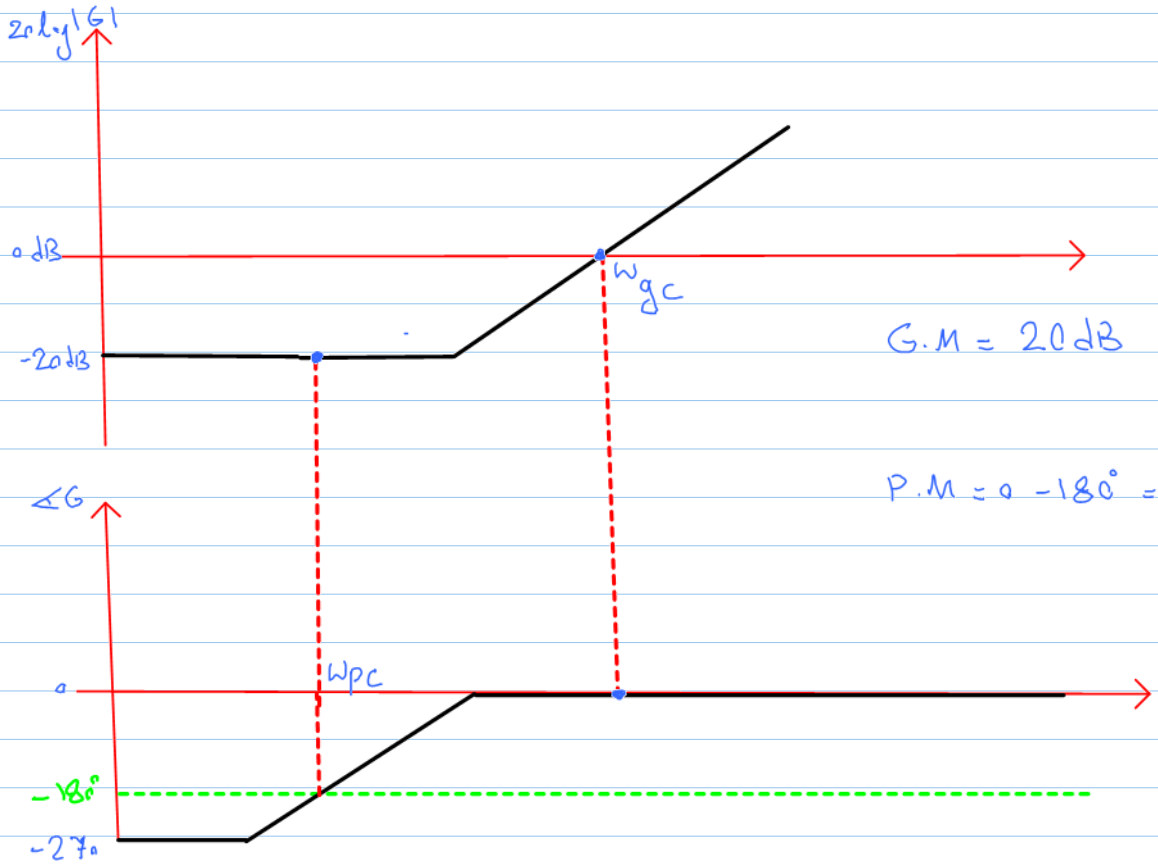
حد فاز:

① فرکانس قطع بهره (جایی که اندازه برابر 0dB شده است) را پیدا کنید.

② فاز در فرکانس قطع بهره را حساب کرده و به صورت عدد مثبت بیان کنید.

③ از عدد فوق 180° کم کنید تا حد فاز بدست آید.





$G.M = 20\ dB \longrightarrow G.M = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|}$

$20 = 20\log\frac{1}{|G(j\omega_{pc})|} \rightarrow 1 = \log\frac{1}{|G|} \rightarrow |G| = \frac{1}{10}$

* بهره به دو صورت عددی واحد یا dB بیان می‌شود.

بهره بر حسب dB = 20 log بهره به واحد

$G.M = 10 \longrightarrow G.M = 20\log 10 = 20\ dB$

$G.M = 40\ dB \longrightarrow$ اگر G.M=40dB باشد یعنی بهره حلقه تا چه عددی می‌تواند افزایش یابد؟

$G.M = \alpha \longrightarrow k < \alpha \longrightarrow$ پایدار

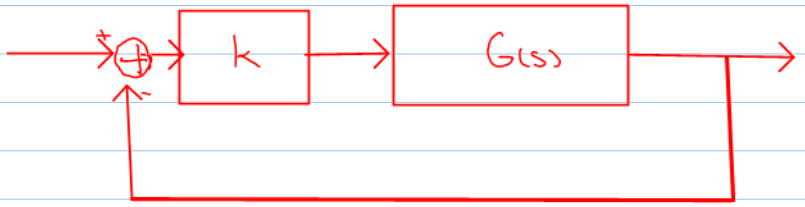
$k > \alpha \longrightarrow$ ناپایدار

$G.M_{dB} = 40\ dB = 20\log G.M \rightarrow \log G.M = 2 \rightarrow G.M = 10^2 = 100$

$k < 100$ پایدار

$k > 100$ ناپایدار

اگر $G.M = -20\,dB$ باشد در سیستم زیر بهره k چقدر باشد تا سیستم در مرز پایداری قرار گیرد؟



$$G.M_{dB} = -20 = 20 \log G.M$$

$$-1 = \log G.M$$

$$G.M = 10^{-1} = \frac{1}{10} \rightarrow$$

$k < \frac{1}{10}$ پایدار

$k > \frac{1}{10}$ ناپایدار

$k = \frac{1}{10} \rightarrow$ مرز پایداری

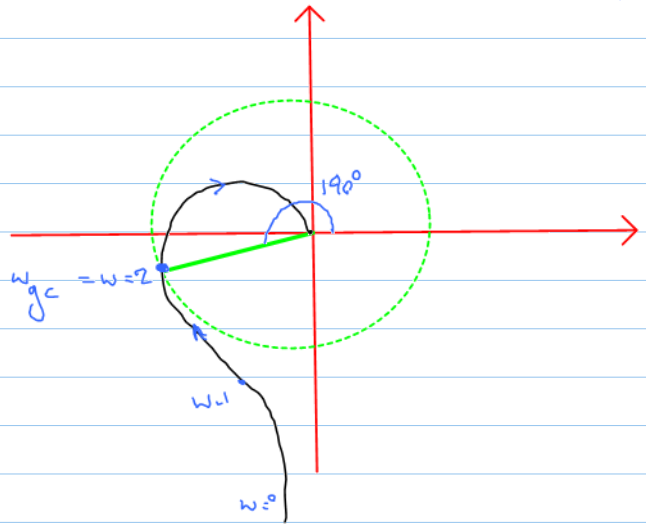
حد فاز از روی نمودار نایکوئیست:

① روی نمودار نایکوئیست یک دایره واحد رسم کنید.

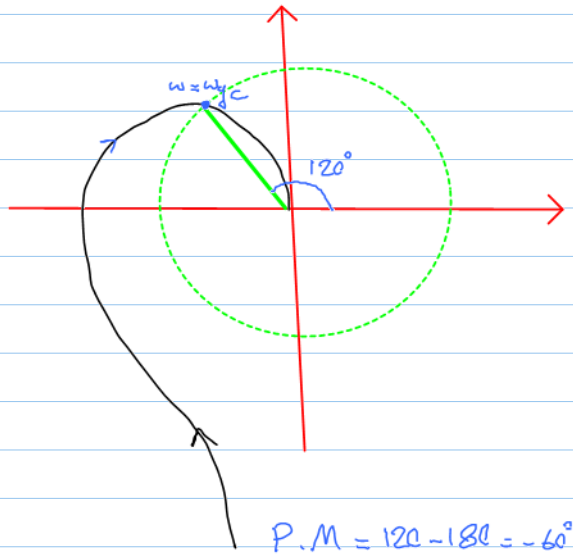
② فرکانس قطع تقاطع دایره با نمودار، فرکانس قطع بهره است.

③ زاویه تقاطع را بدست آورده و به صورت عدد مثبت بیان کنید.

④ از عدد فوق 180 کم کنید حد فاز بدست می‌آید.



$P.M = 190 - 180 = 10°$



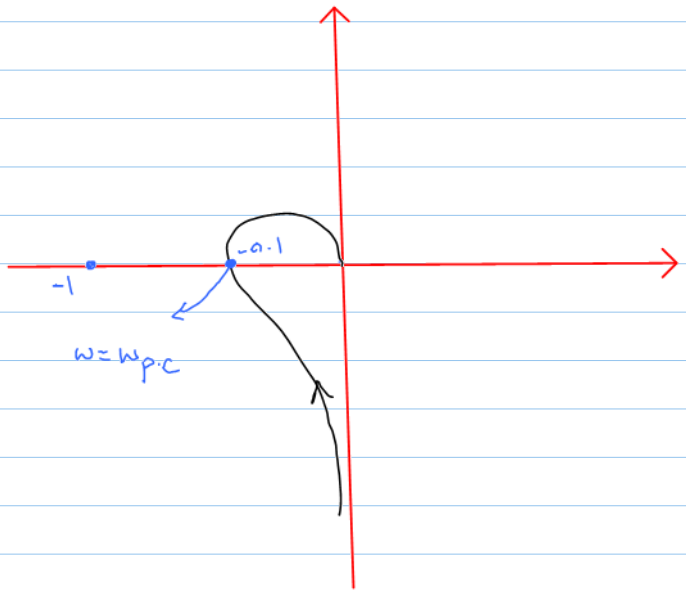
$P.M = 120 - 180 = -60°$

حد بهره:

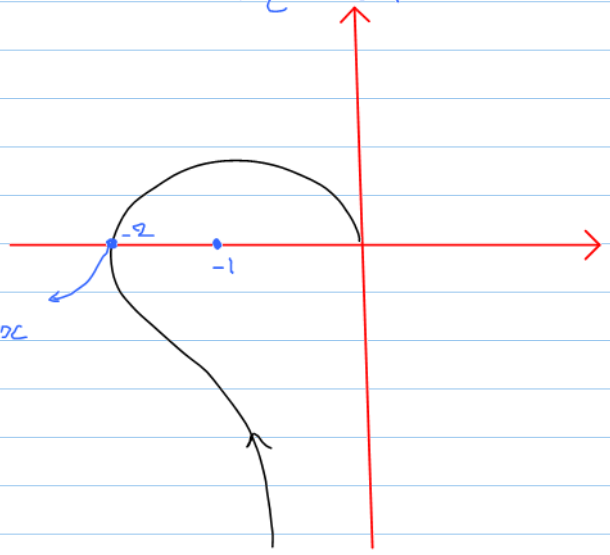
① محل تقاطع نمودار نایکوئیست با محور حقیقی منفی را پیدا کنید.

② فرکانس محل تقاطع فرکانس قطع بهره است.

③ $\text{حد بهره} = \frac{1}{\text{محل تقاطع}}$



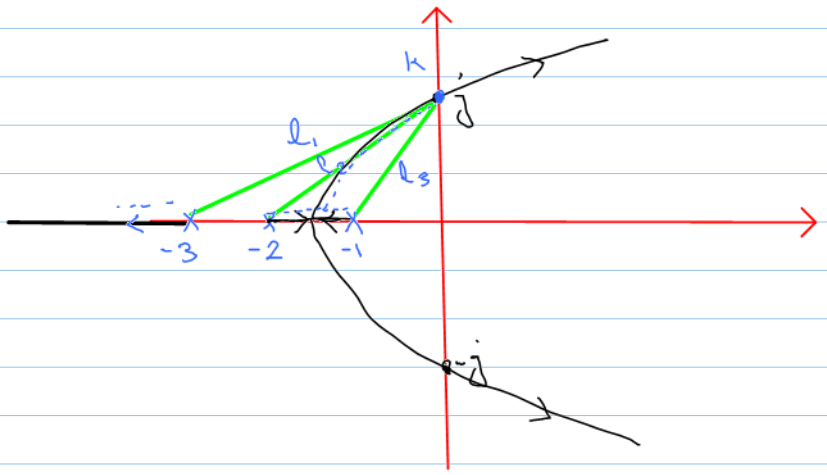
$G.M = \frac{1}{|-0.1|} = 10$

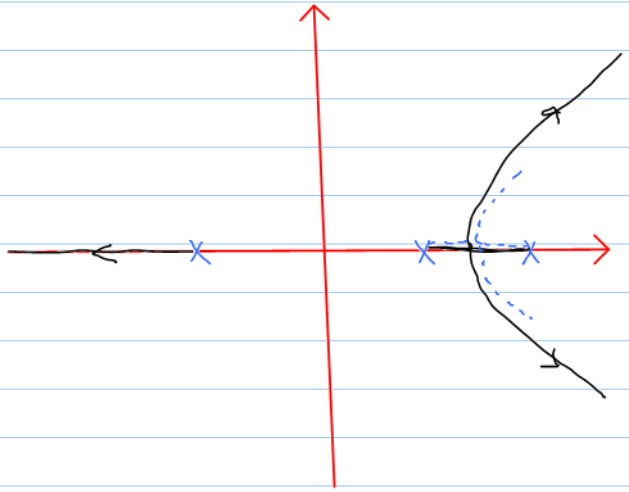


$G.M = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$

حد بهره از روی مکان هندسی:

بهره k را در حالت پایداری مرزی پیدا کنید. این بهره برابر حد بهره است.





حد بهره ندارد

$$k = \frac{l_1 \times l_2 \times l_3}{1}$$

جایی که حداقل یکی از ریشه ها وارد نیم صفحه راست می شود

حد بهره و حد فاز از روی نمودار اندازه - فاز:



$P.M = (360 - 170) - 180^\circ = 10^\circ$

$P.M = (360 - 200) - 180 = -20^\circ$

نکات اصلی درس:

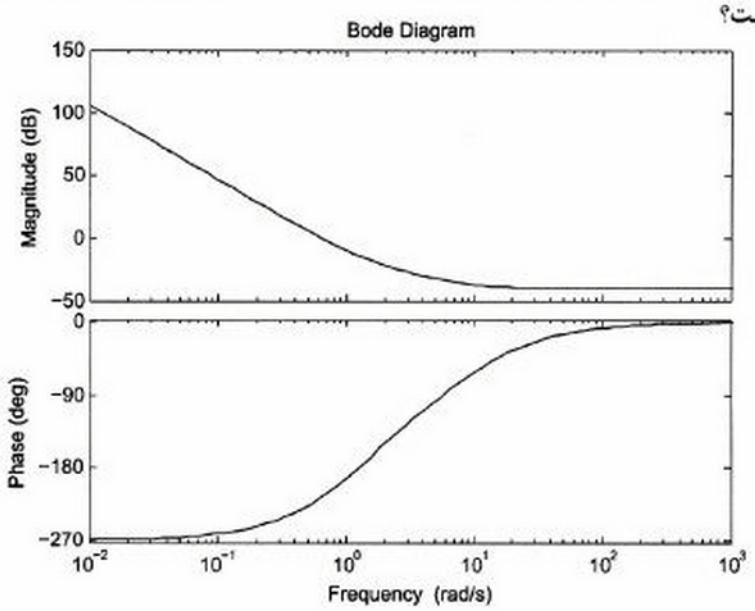
* شرط پایداری هر سیستم این است که هم حد بهره (بر حسب dB) و هم حد فاز هر دو مثبت باشند اگر یکی از آنها منفی شود سیستم ناپایدار است.

* حد بهره هر چه از ۱ ← بر حسب dB منفی است.

" " بزرگتر از ۱ ← " " " مثبت است.

برق ۹۶

دیاگرام بودی تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم مینیمم فاز در شکل زیر داده شده است. کدام گزینه برای سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد، صحیح است؟



۱) سیستم ناپایدار است. $0 < k < \infty$

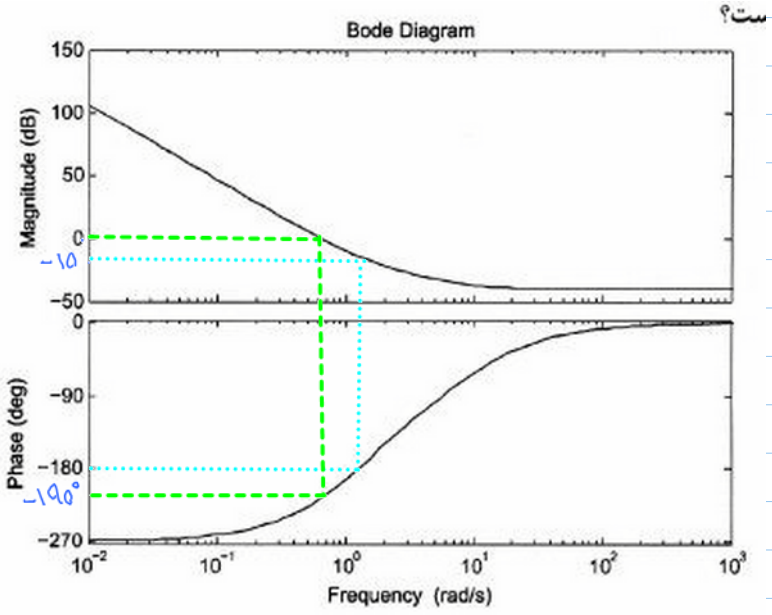
۲) سیستم مطلقاً پایدار است. $0 < k < \infty$

۳) سیستم به ازاء $-\infty < k < 0$ پایدار است.

۴) سیستم پایدار مشروط است.

نکته! هرگاه نمودار بودی بدهد و در مورد پایداری بپرسد، یعنی حد بهره و حد فاز را حساب کنید

ست؟



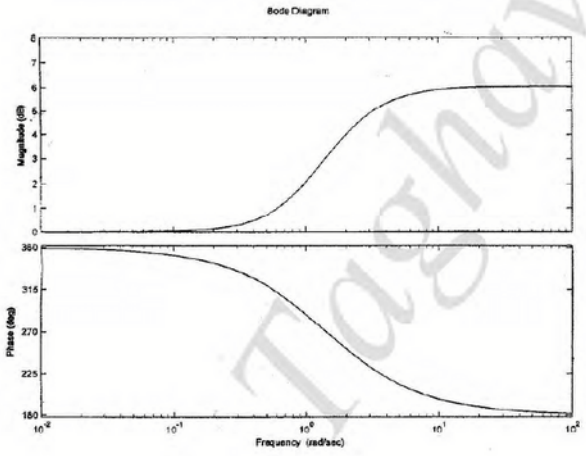
$G.M = +10\ dB > 0$

$P.M = (360^\circ - 190^\circ) - 180^\circ = -10^\circ < 0$

یعنی سیستم به حوزی حود ناپایدار است.

برق ۹۱

یک سیستم با فیدبک واحد با تابع تبدیل حلقه باز که دیاگرام بودی آن در شکل نشان داده شده است را **دو** نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد حد بهره و حد فاز سیستم صحیح است؟



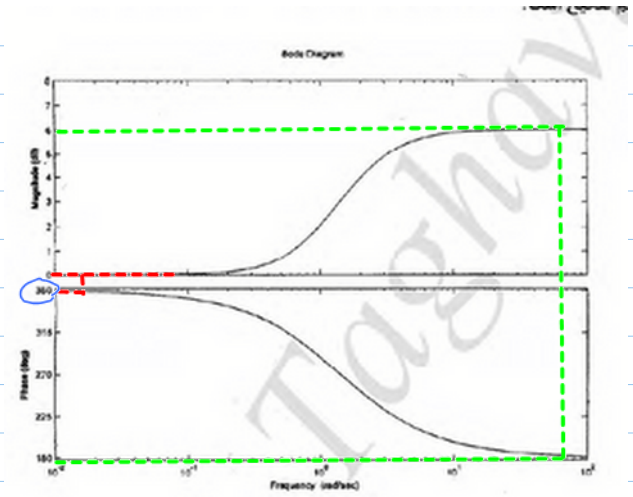
۱) حد بهره ۶ dB حد فاز ۱۳۵°

۲) حد بهره ۶ dB حد فاز ۱۸۰°

۳) حد بهره بی‌نهایت حد فاز ۱۸۰°

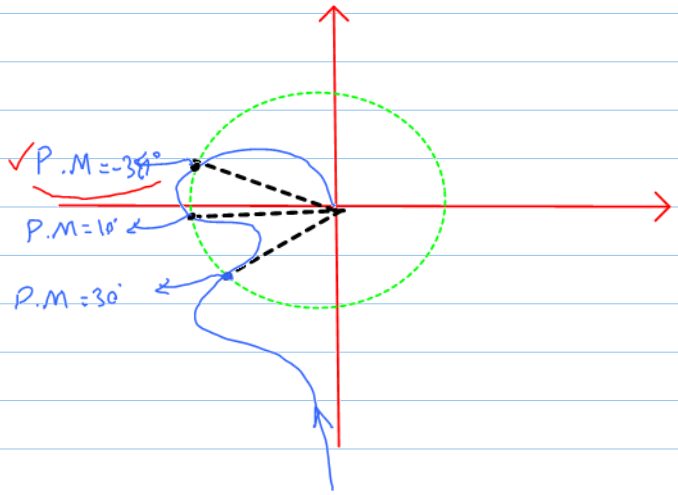
۴) سیستم ناپایدار است.

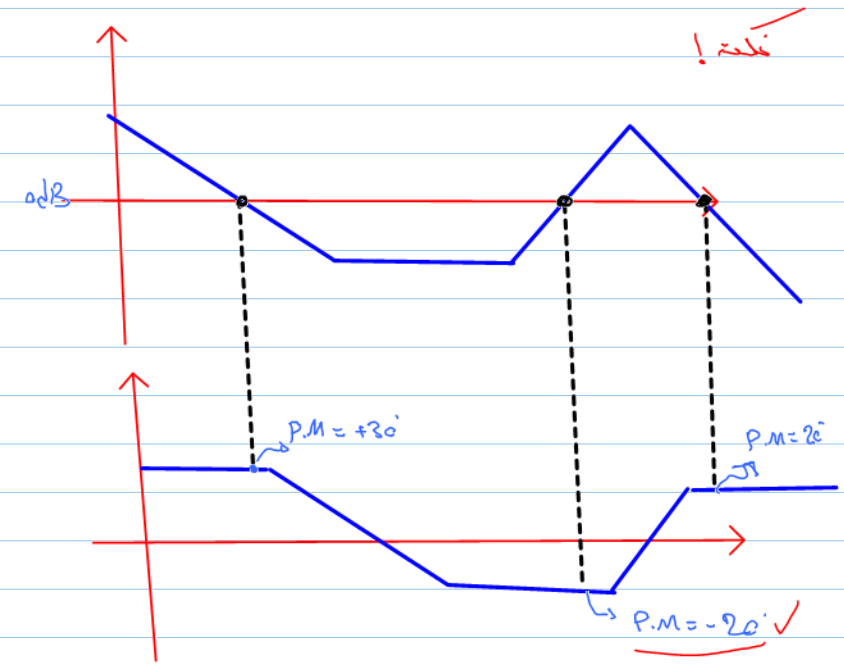
Taghva



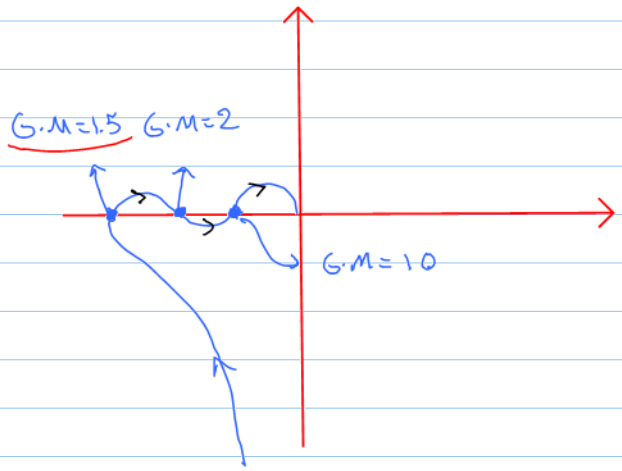
$G.M = -6\,dB < 0$ ناپایدار

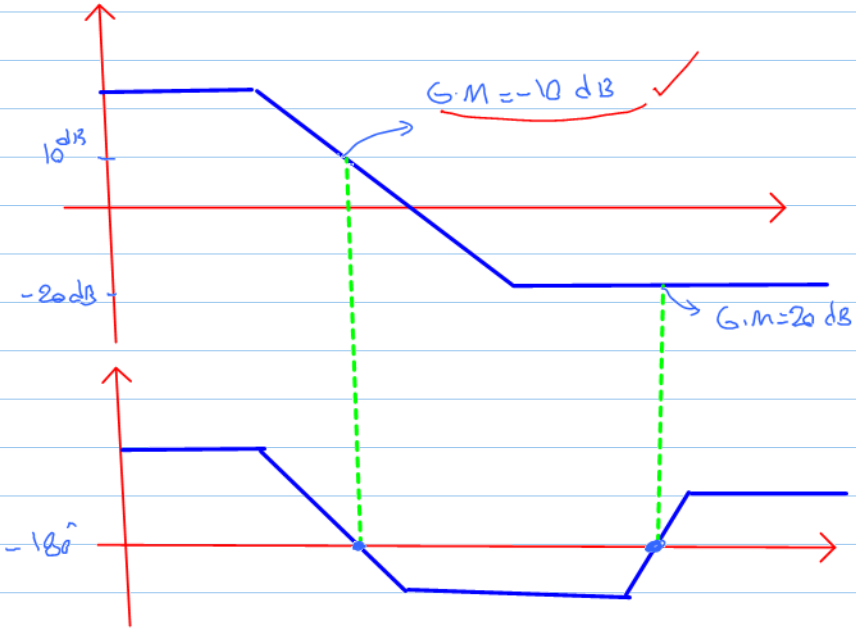
$P.M = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$

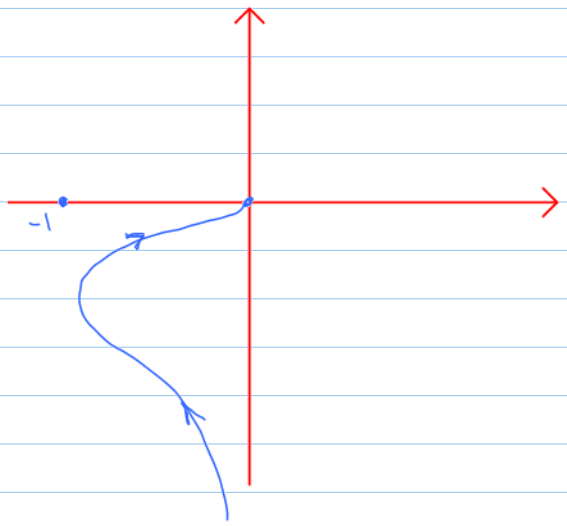


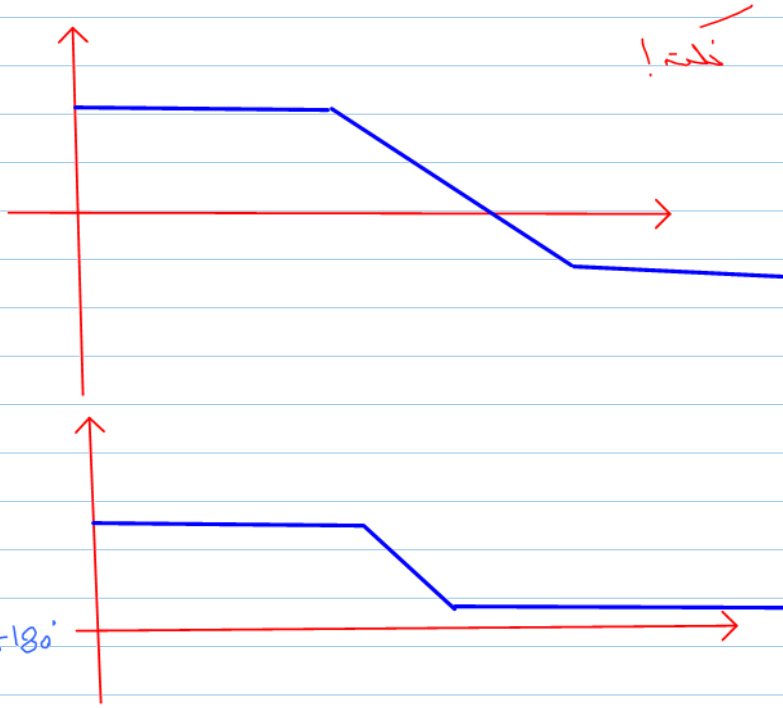


هرگاه بیش از یک فرکانس قطع فاز داشته باشیم، به ازای هرکدام از حوزه‌ها حداقل را حساب می‌کنیم و از بین اعداد حاصل کمترین (منفی‌ترین) عدد را به عنوان حداقل انتخاب می‌کنیم.





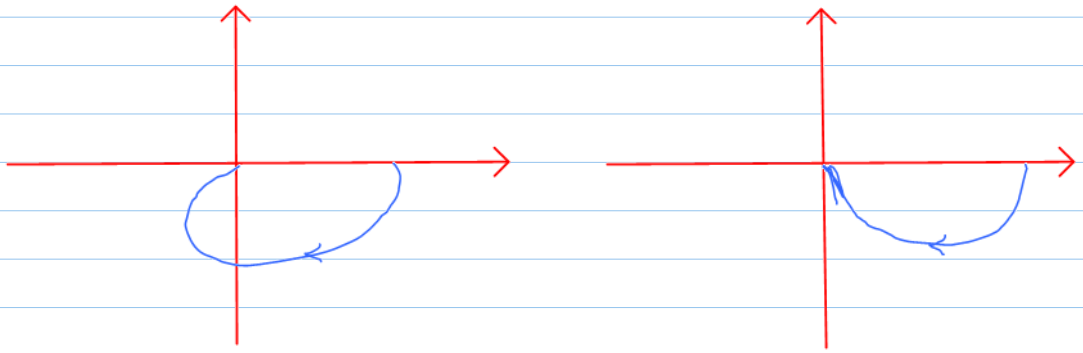




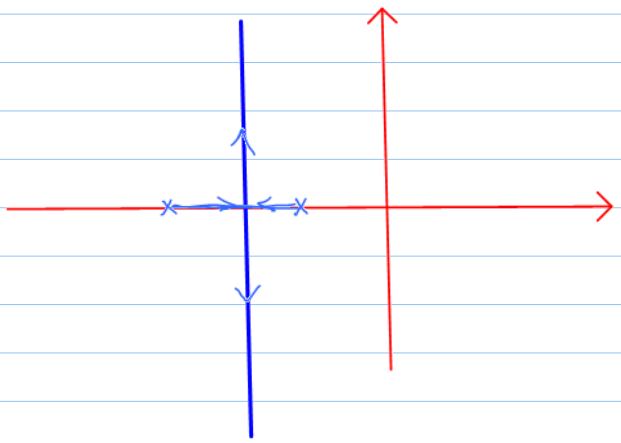
* هرگاه فرکانس قطع فاز نداشته باشیم و فاز هیچوقت $\pm 180°$ نشود، آنگاه $G.M = \infty$ است.

یعنی به ازای هر بهره‌ای $k < \infty$ سیستم پایدار می‌ماند. ← مثل سیستم مرتبه ۱ یا ۲ پایدار

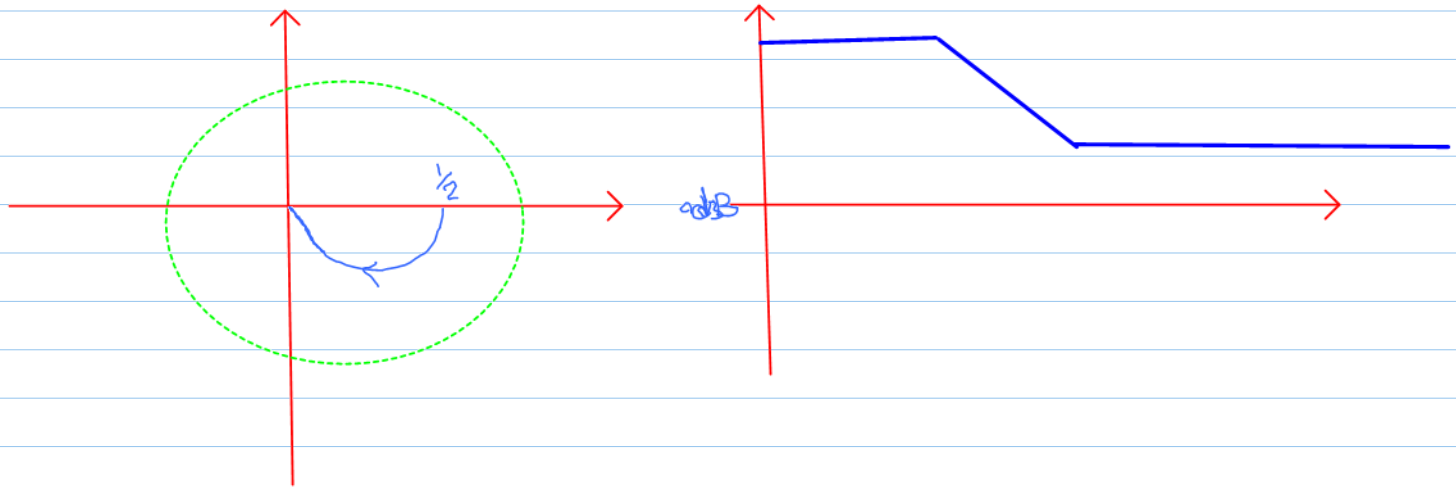
یعنی اگر حلقه باز یک سیستم مرتبه ۱ یا ۲ کمینه فاز باشد ← $G.M = \infty$



مثل حالتی که در نمودار مکان هندسی عکس شاخه‌ها همواره سمت چپ باشند ← $G.M = \infty$



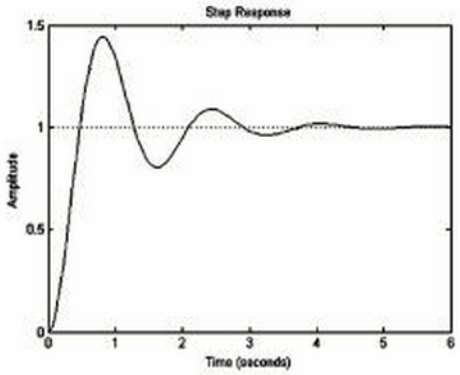
* هرگاه سیستم فرکانس قطع کمتر نداشته باشد (یعنی در نمودار نایکوئیست با دایره واحد تقاطع نداشته باشد یا در نمودار بودی اندازه 0dB نشود) در این موارد P.M = 180°

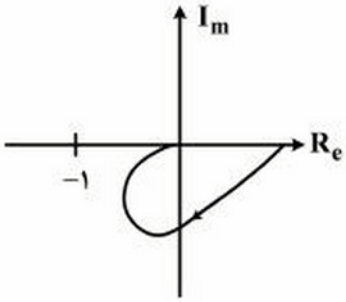


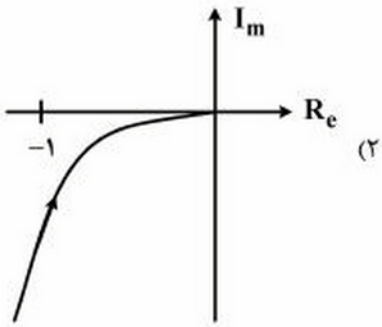
* هرگاه سیستم در حد پایداری باشد (نمودار نایکوئیست از -1 عبور کند) یعنی بهره بحرانی k_c ($k=1$) سیستم حلقه بسته نوسانی باشد آنگاه G.M = 0dB ، P.M = 0°

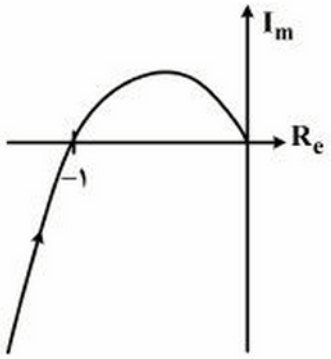
دکتری ۹۶

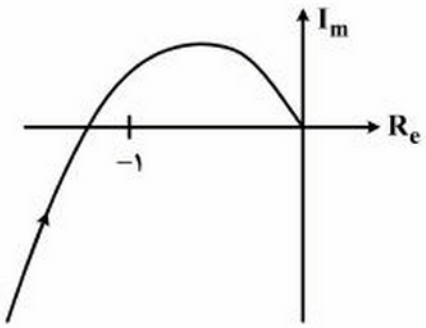
پاسخ پلهٔ یک سیستم با فیدبک واحد در شکل زیر نشان داده شده است. کدام گزینه نشان دهندهٔ دیاگرام قطبی تابع تبدیل حلقه باز این سیستم می‌باشد؟

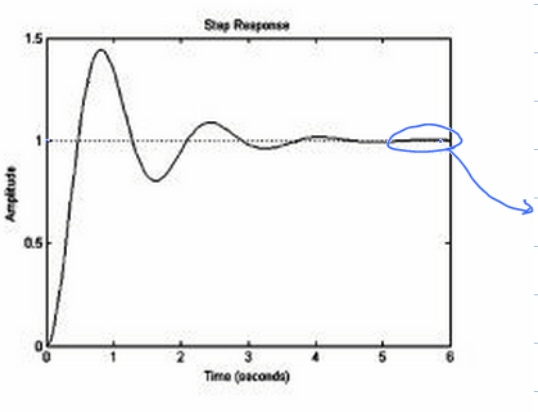


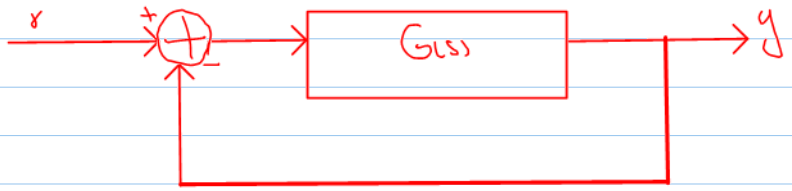
۱)


۲)


۳)


۴)




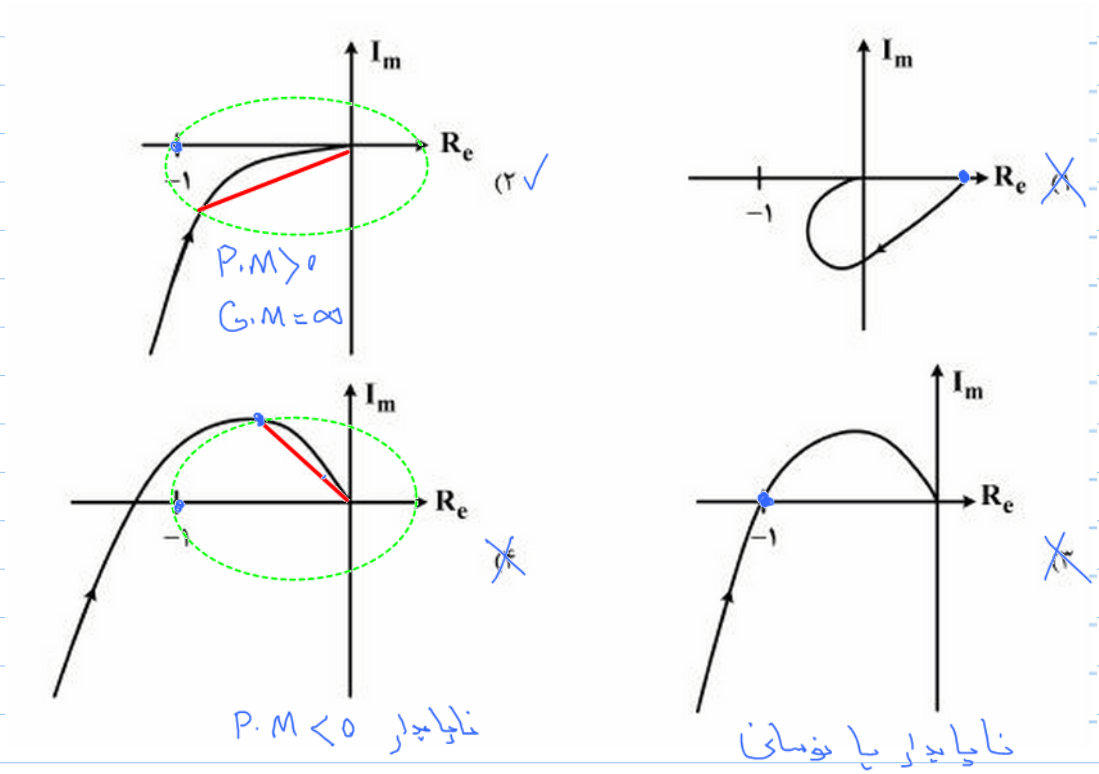


$e_{ss} = 0$ ← خطای ثابت $= r - y$ → حلقه باز

$y - r \sim$ تعریف

$e_{ss} = 0$ → نوع سیستم؟ > نوع ورودی $= 0$

نوع سیستم > 0 ← تعداد قطبهای در مبدأ $G(s) > 0$



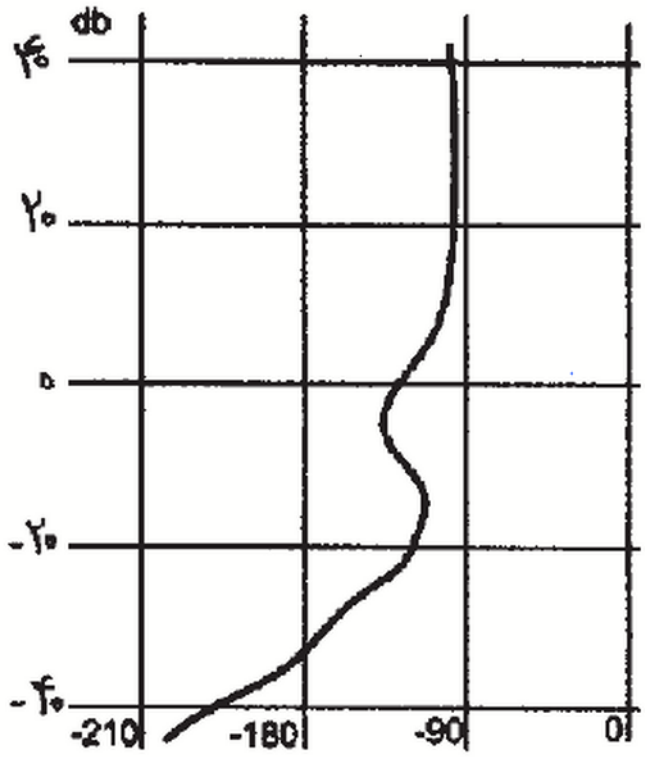
$\Delta(s) = 1 + G(s) = 0$

$G(s) = -1$

$e_{ss} = 0$ ← حلقه بسته پایدار بوده است.

دکتری ۹۲

دیاگرام magnitude-phase log یک سیستم مینیمم فاز به صورت شکل زیر، می‌باشد. خطای ماندگار سیستم به ورودی $V(t) = 2u(t) + 3V(t)$ چقدر است ($V(t)$ سیگنال شیب واحد است.)؟



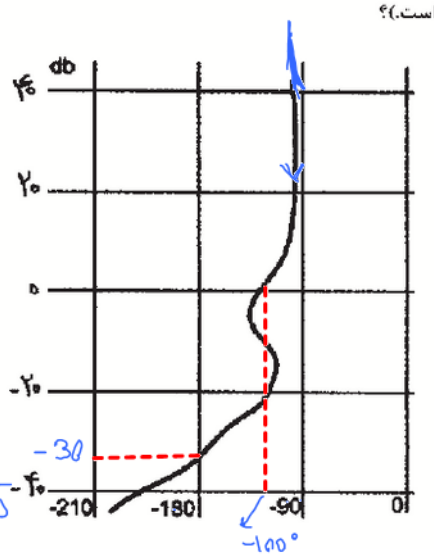
۱) برای تعیین خطا بهره در فاز -180° باید معلوم باشد.

۲) از دیاگرام داده شده نمی‌توان میزان خطا را به دست آورد ∞

۳) ۰٫۳

۴) صفر

دیاگرام magnitude-phase log یک سیستم مینیمم فاز به صورت شکل زیر، می‌باشد. خطای ماندگار سیستم به ورودی $V(t) = 2u(t) + 3t$ چقدر است ($V(t)$ سیگنال شیب واحد است.)؟



۱) برای تعیین خطا بهره در فاز -180° باید معلوم باشد.
۲) از دیاگرام داده شده نمی‌توان میزان خطا را به دست آورد.
۳) صفر
۴) صفر

$V(t) = 3r(t)$ ✓

حلقه باز ✓

نوع ورودی = 1

نوع سیستم = ? 1

$\rightarrow 0 < e_{ss} < \infty$ شرط پایداری

$|G(j\omega)| = \infty$

$\angle G(j\omega) = -90^\circ$ $\rightarrow$ $G(s) = \frac{1}{s(\ )}$

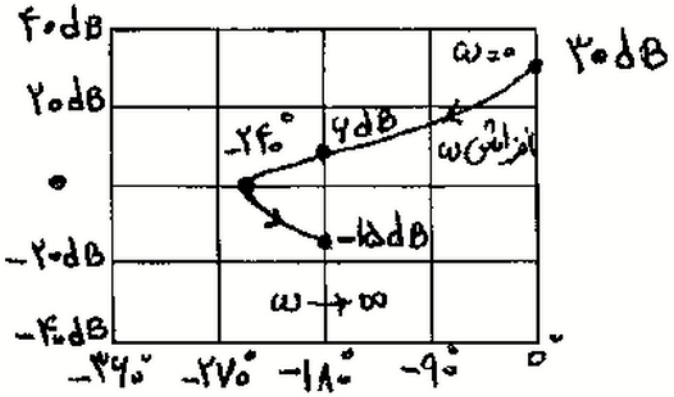
$P.M = (360 - 100) - 180 = 80^\circ > 0$

$G.M = 30\,dB > 0$

$\rightarrow$ پایدار $\rightarrow e_{ss} \neq \pm\infty$

دکتری ۹۱

سیستم حلقه باز پایداری دارای دیاگرام logmagnitude-phase شکل زیر می‌باشد. در مورد سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد منفی چه می‌توان گفت؟



۱) ناپایدار با دو قطب سمت راست، حد بهره -۶^{db} و حد فاز -۶۰ درجه است.

۲) ناپایدار با یک قطب سمت راست، حد بهره -۶^{db} و حد فاز -۶۰ درجه است.

۳) پایدار با حد بهره ۶^{db} و حد فاز -۶۰ درجه است.

۴) ناپایدار با دو قطب سمت راست، حد بهره -۱۵^{db} و حد فاز -۶۰ درجه است.

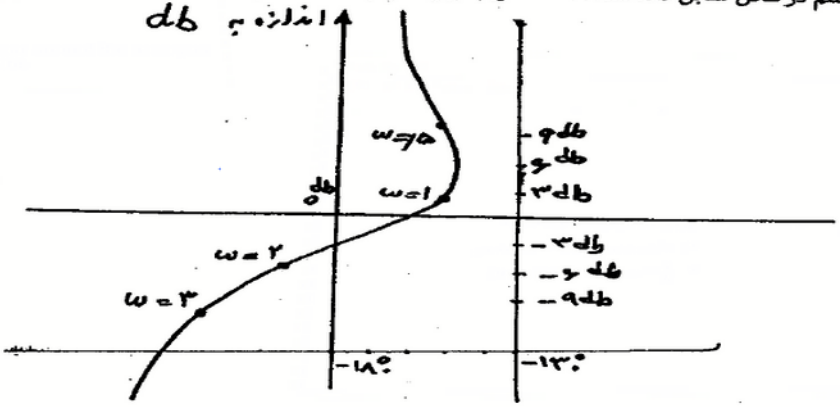
۸۰ منحنی اندازه بر حسب فاز یک سیستم در شکل مقابل داده شده است. ضریب بهره k را چند برابر کنیم تا حد فاز سیستم حداکثر شود ؟

۱) $\frac{1}{4}$ برابر

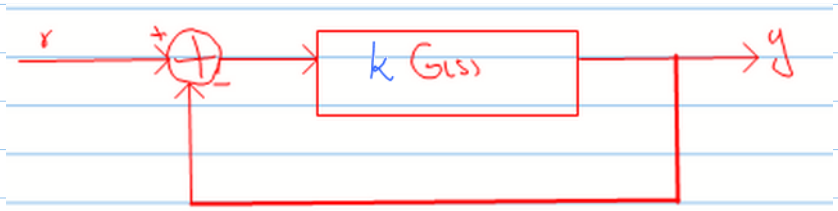
۲) $\frac{1}{2}$ برابر

۳) ۲ برابر

۴) ۴ برابر



WWW.pasokh.org
۰۹۱۲-۴۹۸۱۲۰۴



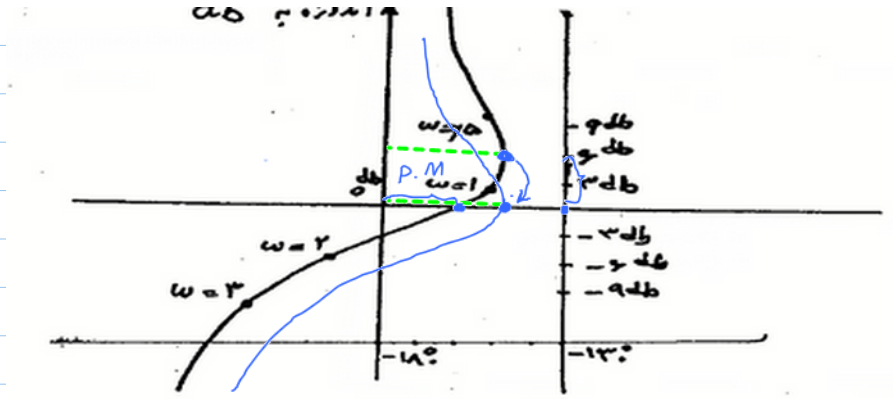
بهره k چقدر باشد تا P.M حداکثر شود؟

تأثیر بهره k در خطا های پله چیست؟

$20\log k$ اندازه را با 0 یا پایین می برد ← $\begin{cases} k>1 \leftarrow k \downarrow \\ k<1 \leftarrow \text{پایین} \end{cases}$

روی نمودار فازی نداشتیم.

G(s)



$20\log k = -6\ dB$

$20\log 2 = 6\ dB$

$20\log \frac{1}{2} = -6\ dB$

$\downarrow$

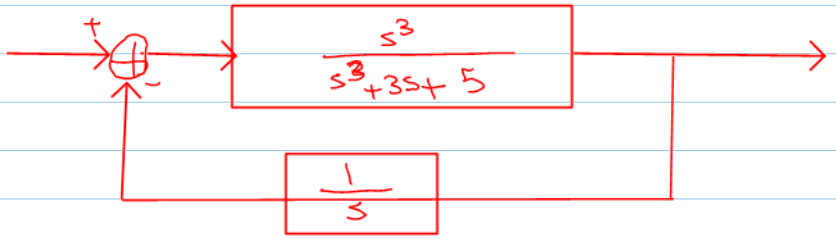
$20\log k = -6\ dB$

$k = \frac{1}{2}$ ✓

جلسه 62 کنترل خطی

مثال حد بهره با روش دستی:

هرگاه در سوال تابع تبدیل G(s) را بدهد و حد بهره را بخواهد، برای سیستم حلقه بسته با بهره k، شرط پایداری R-H را می نویسیم. حداکثر مقدار مجاز بهره k برای پایداری برابر حد بهره (بدون واحد) است.



$$L(s) = \frac{k s^2}{s^3+3s+5}$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{ks^2}{s^3+3s+5} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + ks^2 + 3s + 5 = 0$$

$k \times 3 > 1 \times 5 \rightarrow$ شرط پایداری $k > 5/3$

G.M =? ∞ $\frac{5}{3} < k \rightarrow \infty$

بزرگترین مقدار مجاز برای $k \leftarrow$ G.M بدون واحد

تست ۸۵

تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت $GH(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ است. حد بهره و حد فاز سیستم کدام است؟

۱) حد بهره، $\frac{1}{\sqrt{8}}$ = حد فاز ۱۳۵°

۲) حد بهره، $\sqrt{8}$ = حد فاز ۱۳۵

۳) حد بهره، ۸ = حد فاز ۱۸۰ ✓

۴) حد بهره، $\frac{1}{8}$ = حد فاز ۱۸۰

$$L(s) = \frac{1 \times k}{(s+1)^3} \rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{k}{(s+1)^3} = 0$$

$$\Delta(s) = \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3} + \frac{k}{(s+1)^3} = \frac{(s+1)^3 + k}{(s+1)^3} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k = 0 \rightarrow 3 \times 3 > 1 \times (1+k) \rightarrow k < 8$$

$$G.M = 8$$

$$L(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^3} \rightarrow |L(j\omega)| = \frac{1}{(\sqrt{\omega^2+1})^3} = 1 \rightarrow \omega = 0 \rightarrow \omega_{gc} = 0$$

$$\angle L(j0) = 0 - 0 = 0 + 360 = 360^\circ$$

$$P.M = 360^\circ - 180 = 180^\circ \checkmark$$

نکته: هرگاه حد بهره را بدهد و مقدار k را بخواهد، حد بهره (بدون واحد) را در G(s) ضرب کرده و شرط پایداری R-H را می نویسیم، حداکثر مقدار قابل بهره k برای پایداری، جواب مسأله خواهد بود.

$$G(s) = \frac{k}{(s+1)^3} \rightarrow G.M = 8$$

$$L(s) = G(s) = \frac{k \times 8}{(s+1)^3}$$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{8k}{(s+1)^3} = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 8k = 0$$

$$9 > 1 + 8k \rightarrow k < 1$$

بزرگترین مقدار ممکن برای k جواب مسأله است.

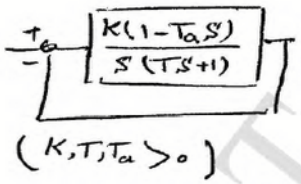
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \rightarrow G.M = 8$$

* در این روش دقت کنید که حد بهره باید به صورت بدون واحد باشد.

$$G.M = 2\,dB \rightarrow 2 = 20 \log G.M \rightarrow \log G.M = \frac{1}{10} \rightarrow G.M = 10^{1/10}$$

برق ۹۱

در سیستم زیر مقدار بهره k چقدر باشد تا حد بهره سیستم ۲ شود؟



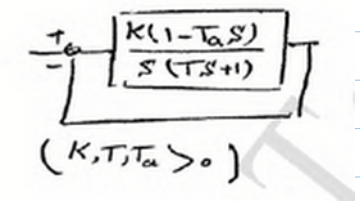
۱) $\frac{۱}{T_a}$

۲) $\frac{۲T}{T_a}$

۳) $\frac{۲T_a}{T}$

۴) $\frac{۱}{۲T_a}$

Tag



$G.M = 2$ حداکثر بهره

$$L(s) = \frac{2K(1-T_a s)}{s(Ts+1)} \qquad \Delta(s) = 1 + \frac{2K(1-T_a s)}{s(Ts+1)} = 0$$

$$\Delta(s) = Ts^2 + (1 - 2KT_a)s + 2K = 0$$

$T > 0$ ✓

$2K > 0$ ✓

$1 - 2KT_a > 0 \rightarrow K < \frac{1}{2T_a} \rightarrow$

$$K = \frac{1}{2T_a} \longrightarrow G.M = 2$$

دکتری ۹۲

تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت $G(s)H(s)=\frac{s^3}{(s+1)^4}$ است. حاشیهٔ بهرهٔ (GM) سیستم تقریباً چند dB است و در مورد پایداری سیستم حلقه بسته چه می‌توان گفت؟

۱) $GM=-18dB$ بایستی پس از محاسبه حاشیه فاز (PM) اظهارنظر انجام شود.

۲) $GM=-18dB$، سیستم حلقه بستهٔ ناپایدار است.

۳) $GM=18dB$، سیستم حلقه بستهٔ پایدار است.

۴) $GM=-18dB$، سیستم حلقه بسته پایدار است.

دولتی ۹۲

در یک سیستم مرتبه دو نمونه با $G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$، مقدار ζ چقدر باشد، تا حد فاز سیستم 45° شود؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}}}$

۲) $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

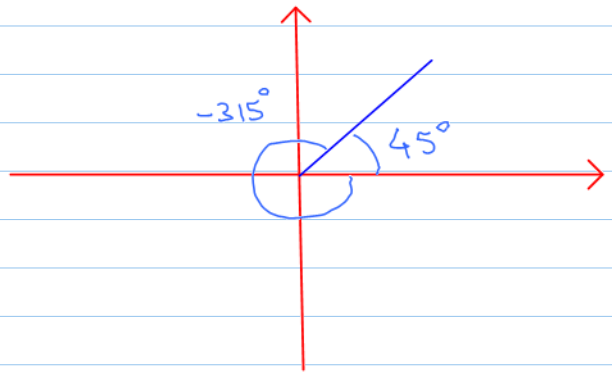
$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \qquad \zeta = ? \qquad P.M = 45^\circ$$

$$P.M = \angle L(j\omega_{gc}) - 180 = 45^\circ \rightarrow \angle L(j\omega_{gc}) = 225^\circ$$

$$\angle L(j\omega_{gc}) = \angle \frac{\omega_n^2}{j\omega_{gc}(j\omega_{gc}+2\zeta\omega_n)} = 0 - (\angle j\omega_{gc} + \angle j\omega_{gc}+2\zeta\omega_n)$$

$$= 0 - \left(90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2\zeta\omega_n}\right)\right)$$

$$-90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2\zeta\omega_{gc}}\right) = 225^\circ \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2\zeta\omega_{gc}}\right) = -315^\circ = -270 - 45^\circ$$



$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{2\zeta\omega_n}\right) = 45^\circ$$

$$\frac{\omega_{gc}}{2\zeta\omega_n} = \tan(45^\circ) = 1$$

$$\omega_{gc} = 2\zeta\omega_n \qquad \omega_{gc} \rightarrow |L(j\omega_{gc})| = 1$$

$$|L(j\omega_{gc})| = \frac{\omega_n^2}{|j\omega_{gc}(j\omega_{gc}+2\zeta\omega_n)|} = \frac{\omega_n^2}{\omega_{gc}\sqrt{\omega_{gc}^2+(2\zeta\omega_n)^2}} = 1$$

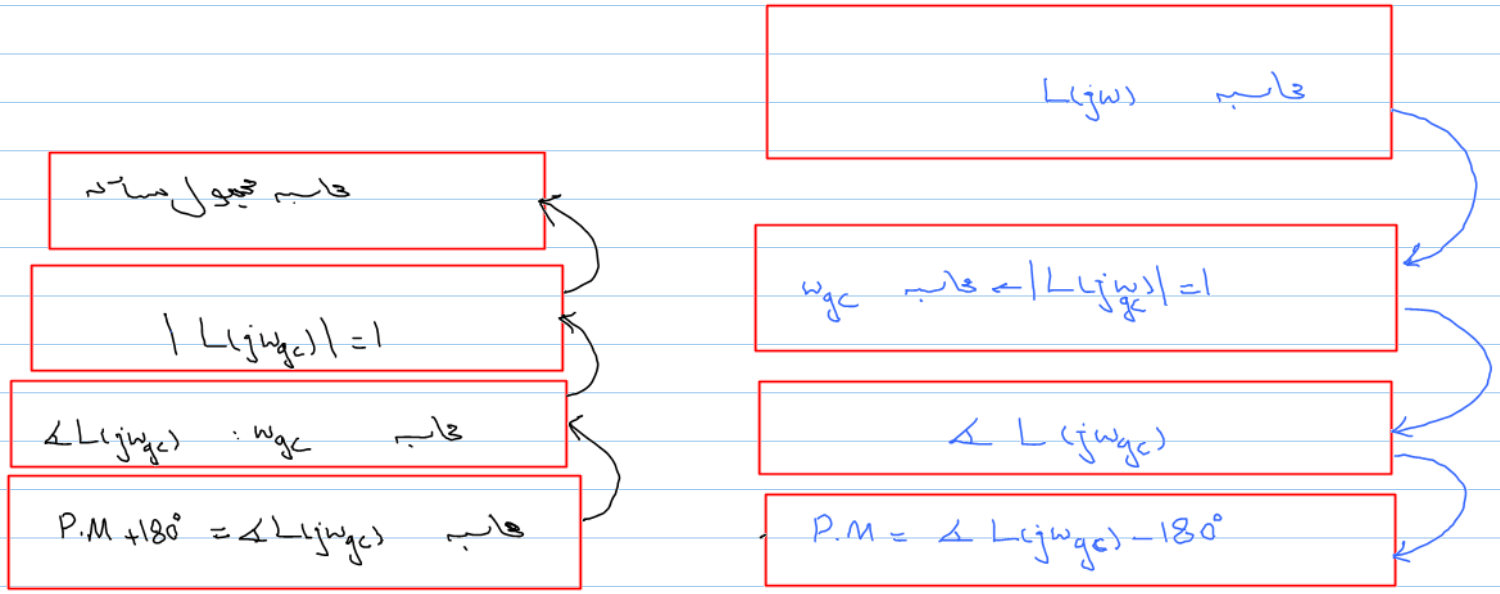
$$\frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n \times 2\zeta\omega_n\sqrt{2}} = 1 \rightarrow \frac{1}{2\zeta^2 \times 4\sqrt{2}} = 1 \rightarrow \zeta^2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{\sqrt{32}} \qquad \zeta = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{32}}} = \left(\frac{1}{32^{1/2}}\right)^{1/2} = \frac{1^{1/2}}{32^{1/4}} = \frac{1}{32^{1/4}}$$

$$32 = 2^4 \times 2^1 \qquad \zeta = \frac{1}{(2^4 \times 2^1)^{1/4}} = \frac{1}{2 \times 2^{1/4}} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$G(s)$ بدهد حد فاز را بخواهد :

حد فاز را بدهد و در مورد $G(s)$ بپرسد



دکتری ۹۸

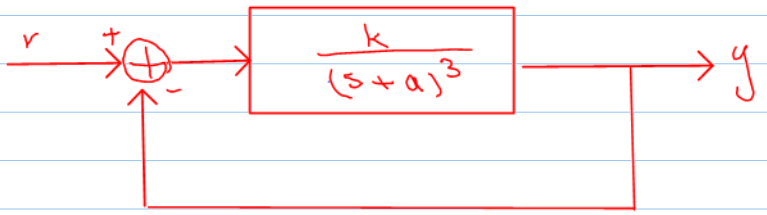
یک سیستم کنترل با $G(s)=\frac{k}{(s+a)^3}$ $(k>0, a>0)$ و فیدبک واحد منفی دارای حد بهره‌ای به اندازهٔ $G.M.=12db$ است. خطای دائمی این سیستم در پاسخ به ورودی پلهٔ واحد کدام است؟ $(\log_{10} 2=0/3)$

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۲

۴) ۳



G.M. = 12 dB

$e_{ss} = ?$

خطای تعریفی = $r - y$ → دوبین حلقه باز

خطای ~ = $r - y$ ~ شکل

① پایداری ✓

② نوع دوری = $k_p \to 0$ نوع سینی = 0 →

$$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \qquad k_p = \lim_{s\to 0} \frac{k}{(s+a)^3} = \frac{k}{a^3}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\frac{k}{a^3}} \qquad k, a = ?$$

G.M = 12 dB ⟶ $20 \log \underset{\text{بدون واحد}}{G.M} = 12$ → $\log G.M = \frac{12}{20} = 0.6$

$2 \log 2 = 0.3 \times 2$ $\qquad \log G.M = 2 \log 2$

$\log (G.M) = \log 2^2 = 2 \log 2$ → $G.M = 4$

$$G(s) = \frac{k}{(s+a)^3}$$

$$L(s) = \frac{4k}{(s+a)^3} \longrightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{4k}{(s+a)^3} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 3as^2 + 3a^2 s + a^3 + 4k = 0$$

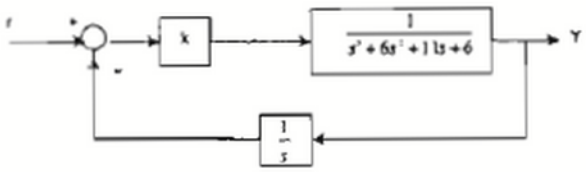
$3a \times 3a^2 > 1(a^3 + 4k)$ → $4k < 8a^3$ → $k < 2a^3$

$k = 2a^3$ ⟶ G.M = 12 dB

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\frac{k}{a^3}} = \frac{1}{1+\frac{2a^3}{a^3}} = \frac{1}{3} \checkmark$$

۸۸

در سیستم کنترلی مقابل با فرض $k = ۱۰$، حد فاز (PM) و درصد حداکثر فراجهش (PO) به ترتیب کدام است؟



۱) $PM = ۷۰$ و $PO = \%۵$

۲) $PM = ۴۵$ و $PO = \%۲۰$

۳) $PM = ۰$ و $PO = \%۱۰۰$

۴) $PM = ۹۰$ و $PO = ۰$

$k=10 \rightarrow$ P.M =? $\%OS$ =?

$\%OS = 100 \rightarrow$ مرز پایداری $\rightarrow$ P.M = 0

چون در گزینه 3 به جای 6 باید P.M. ی بالای پایداری را بزرگ کرد اول این گزینه را بررسی

کنیم.

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s^3+6s^2+11s+6)} = 0$$

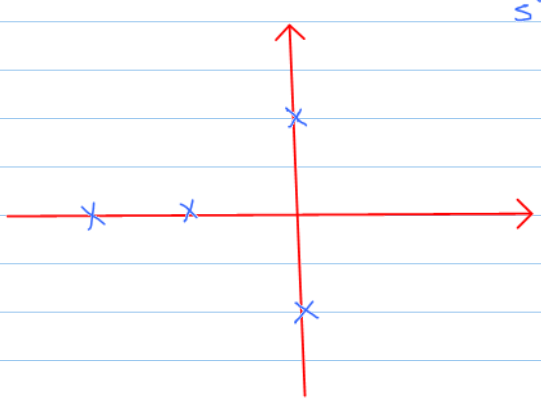
$$\Delta(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + \cancel{k}^{10} = 0$$

s^4	1 +	11	10
s^3	~~6~~ 1+	~~6~~ 1	0
s^2	~~10~~ 1+	~~10~~ 1	0
s^1	~~0~~ 2+	0	
s^0	1+		

$A = s^2 + 1 = 0 \leftarrow s^2$

$\frac{dA}{ds} = 2s$

$s = \pm j$



پایدار مرزی $\leftarrow$ P.M = 0 ، $\%OS = 100$ ✓

نکته ! هرگاه حداکثر تأخیر فاز برای پایداری را بخواهد: e^{-Ts} : تأخیر به اندازه T ثانیه

۱- تابع پیره حلقه بدون تأخیر e^{-Ts} را بنویسید.

در تابع مرحله ۱ ، فرکانس قطع بهره و حد فاز را حساب کنید. ω_{gc} و P.M

حداکثر تأخیر فاز برابر $\frac{\text{حد فاز برحسب رادیان}}{\omega_{gc} \times \text{فرکانس قطع}}$ خواهد شد.

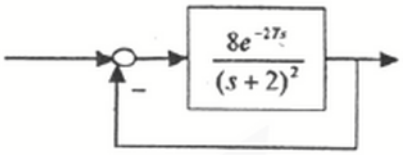
e^{-aTs}

$90^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{2}\ rad$

$\theta^\circ \longrightarrow \theta \times \frac{\pi}{180}\ rad$

برق ۸۱

به ازای چه مقادیری از T تابع انتقال حلقه بسته زیر ناپایدار است؟

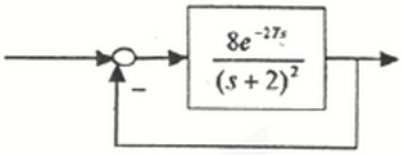


۱) $T > \pi / 4$

۲) $T > \pi / 8$

۳) به ازای تمام مقادیر T

۴) پایداری حلقه بسته ربطی به T ندارد.



$$L(s) = \frac{8\,e^{-2Ts}}{(s+2)^2} \qquad L(s) = \frac{8}{(s+2)^2}$$

$$L(j\omega) = \frac{8}{(j\omega+2)^2} \qquad |L(j\omega)| = \frac{8}{(\sqrt{\omega^2+4})^2}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{8}{\omega^2+4} = 1 \rightarrow \omega = 2 \rightarrow \omega_{gc} = 2$$

$$\angle L(j2) = \angle \frac{8}{(j2+2)^2} = 0 - 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$= 0 - 2 \times 45^\circ = -90^\circ$$

$$P.M = (360 - 90) - 180^\circ = 90^\circ \rightarrow 90 \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

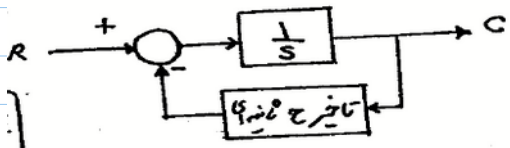
حداکثر تأخیر مجاز $= \frac{\pi/2}{2 \times \text{ضریب } T} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2 \times 2} = \frac{\pi}{8}$ ثانیه

$T < \frac{\pi}{8} \rightarrow$ پایدار

$T > \frac{\pi}{8} \rightarrow$ ناپایدار

۸۹

۹- شرط پایداری سیستم نشان داده شده در شکل مقابل چیست؟

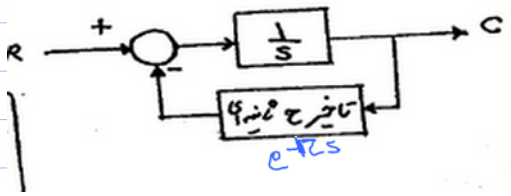


۱) تأخیر کمتر از یک ثانیه باشد.

۲) تأخیر کمتر از ۱/۵۷ ثانیه باشد.

۳) تأخیر کمتر از ۹۰ ثانیه باشد.

۴) با توجه به اینکه تابع انتقال پیشرو یک انتگرالتوراست هر تأخیری مجاز است.



$L(s) = \frac{1}{s} e^{-2s}$ ~~e^{-2s}~~ $L(s) = \frac{1}{s}$

$|L(j\omega)| = \frac{1}{\omega} = 1 \rightarrow \omega = 1 \quad \omega_{gc} = 1$

$\angle L(j1) = \angle \frac{1}{j1} = 0 - 90^\circ = -90^\circ \rightarrow 270^\circ$

$P.M = (360 - 90) - 180^\circ = 90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2}$ rad

حداکثر تأخیر مجاز $= \frac{\frac{\pi}{2}}{|x1|} = \frac{\pi}{2} \quad s = \frac{3.14}{2} = 1.57\ s$

$\tau < 1.57 \rightarrow$ پایدار

۸۶

۴ـ تابع تبدیل حلقه سیستمی به صورت $G(s)H(s) = \frac{(s+۳)e^{-Ts}}{s(s+۱)}$ است. برای آنکه سیستم پایدار باشد حداکثر مقدار T چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$ ۴) هیچ کدام

$$L(s) = \frac{(s+3)e^{-s}}{s(s+1)} \qquad L(s) = \frac{s+3}{s(s+1)}$$

$$|L(j\omega)| = \left|\frac{j\omega+3}{j\omega(j\omega+1)}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}} = 1$$

$$\frac{\omega^2+9}{\omega^2(\omega^2+1)} = 1^2 \rightarrow \omega^4+\omega^2 = \omega^2+9 \rightarrow \omega^4 = 9 \rightarrow \omega = \sqrt{3}$$

$$\omega_{gc} = \sqrt{3}$$

$$\angle L(j\sqrt{3}) = \angle j\sqrt{3}+3 - [\angle j\sqrt{3} + \angle j\sqrt{3}+1]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - (90^\circ + \tan^{-1}(\sqrt{3}))$$

$$\angle L(j\sqrt{3}) = 30^\circ - 90^\circ - 60^\circ = -120^\circ \rightarrow 240^\circ$$

$$P.M = 240 - 180^\circ = 60^\circ \longrightarrow 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

حداکثر بهره مجاز $= \frac{\pi/3}{\sqrt{3}\times 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

۸۹

سیستم مقابل را در نظر بگیرید. داده‌های پاسخ فرکانسی $G(s)$ در جدول نشان داده شده است. ماکزیمم مقدار تأخیر (τ) که سیستم حلقه بسته به ازاء آن پایدار است چه می‌باشد؟

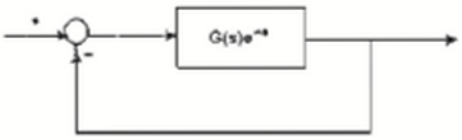
ω(rad/s)	Mag.(dB)	Phase(deg)
۰٫۰۱	۳۹٫۰۲	-۹۲
۰٫۱	۲۲٫۲۳	-۱۰۰
۰٫۵	۱۳٫۵۴	-۱۰۳
۱	-۰٫۰۱	-۱۱۰
۱٫۵	-۴٫۲۵	-۱۲۰
۲	-۰٫۰۱	-۱۳۰
۲٫۵	۰٫۵۵	-۱۴۰
۳	-۰٫۰۱	-۱۵۰
۴	-۵	-۱۶۲
۶	-۱۰	-۱۷۸

۱) ۱۷۴ S

۲) ۲ S

۳) ۱٫۲۲S

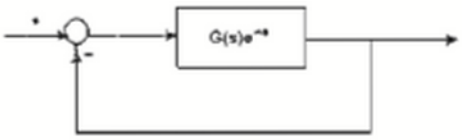
۴) ۴۳۶ ms



$L(s) = G(s)\,e^{-Ts}$ ~~e^{-Ts}~~ $\qquad L(s) = G(s)$

$|L(j\omega)| = |G(j\omega)| = 1 \rightarrow 20\log|G(j\omega)| = 0\ dB \rightarrow \omega_{gc} \simeq 1$

ω(rad/s)	Mag.(dB)	Phase(deg)
۰٫۰۱	۳۹٫۰۲	-۹۲
۰٫۱	۲۲٫۲۳	-۱۰۰
۰٫۵	۱۳٫۵۴	-۱۰۳
۱	-۰٫۰۱	-۱۱۰
۱٫۵	-۴٫۲۵	-۱۲۰
۲	-۰٫۰۱	-۱۳۰
۲٫۵	۰٫۵۵	-۱۴۰
۳	-۰٫۰۱	-۱۵۰
۴	-۵	-۱۶۲
۶	-۱۰	-۱۷۸



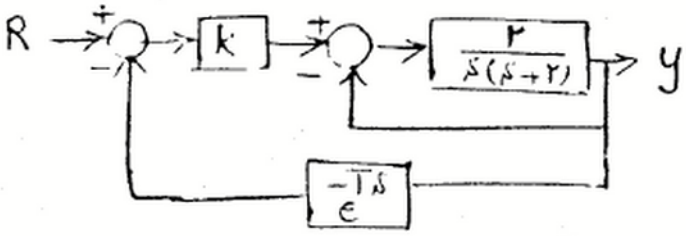
$\angle G(j1) = -110^\circ \rightarrow 250^\circ$

$P.M = 250 - 180^\circ = 70^\circ \rightarrow 70 \times \frac{\pi}{180}\ rad$

حداکثر تأخیر مجاز $= \frac{\frac{7\pi}{18}}{1\times1} = \frac{7\pi}{18} = \frac{7\times3.14}{18} = 1.\ldots$

۹۹

اگر مقدار خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد برای سیستم زیر برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد مقدار T جهت پایداری سیستم حلقه بسته کدام است؟

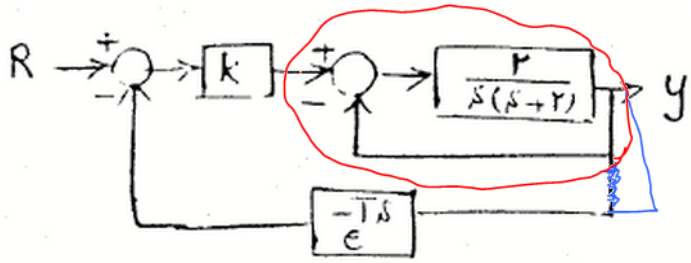


۱) $T < ۲$

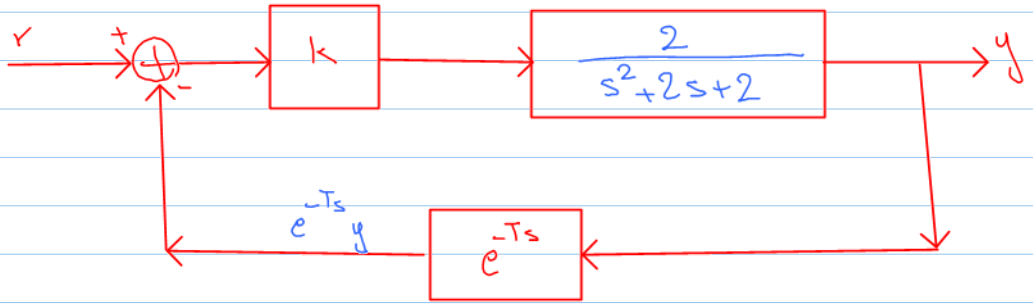
۲) $T < ۱$

۳) $T < ۰/۵$

۴) به ازاء تمام مقادیر T سیستم حلقه بسته پایدار است.



$e_{ss} = \frac{2}{3}$ $T_{max} = ?$



$e_{ss} = \frac{2}{3}$

خطای تعریفی = $r - y$

خطای بسته ← خطای شکل $= r - e^{-Ts} y$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2k}{s^2+2s+2}}{1 + \frac{2k}{s^2+2s+2} \times e^{-Ts}} = T(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s}(1 - T(s)) = 1 - T(0)$$

$$T(0) = \frac{\frac{2k}{2}}{1 + \frac{2k}{2} \times 1} = \frac{k}{1+k}$$

$$e_{ss} = 1 - \frac{k}{1+k} = \frac{1}{1+k} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

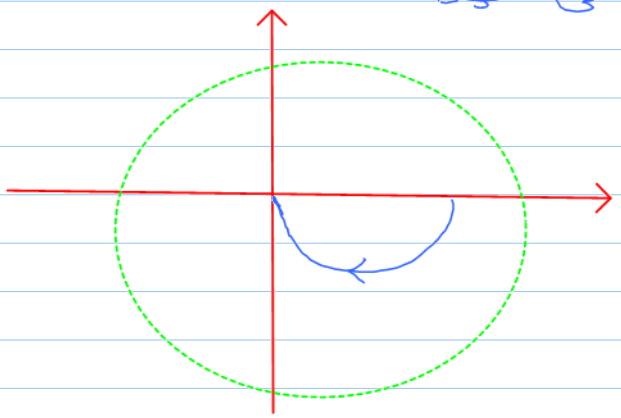
$$L(s) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{s^2+2s+2} \times \cancel{e^{-Ts}} \qquad L(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$|L(j\omega)| = \left| \frac{1}{-\omega^2 + j2\omega + 2} \right| = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}} = 1 \longrightarrow \frac{1}{4+\omega^4-4\omega^2+4\omega^2} = 1^2$$

$$1 = 4+\omega^2 \longrightarrow \omega^2 = -3 \longrightarrow \omega = \pm j\sqrt{3} \quad X$$

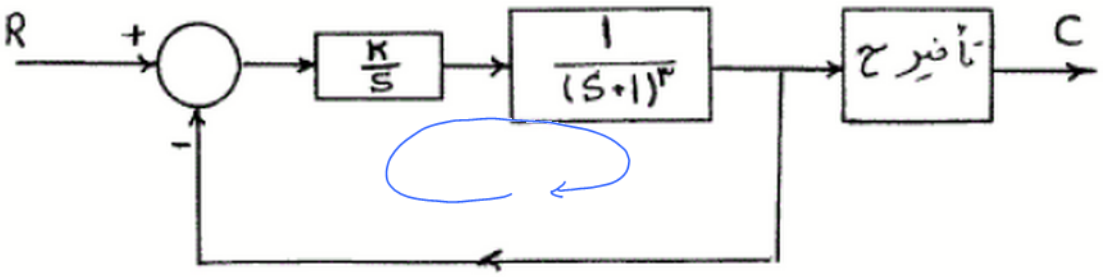
بنابراین هیچ ω حقیقی ای اندازه 1 نمی شود.



ω_{gc} وجود ندارد ← P.M تعریف نمی شود.

$$T_{max} = \frac{P.M}{\omega_{gc\times 1}} \longrightarrow$$

تأخیر T هیچ تعریفی ندارد.



$$L(s) = \frac{k}{s} \times \frac{1}{(s+1)^3} \qquad \Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s+1)^3} = 0$$

چون تأخیر در $\Delta(s)$ نیست پس ح باعث ناپایداری نمی‌شود ← حدی ندارد.

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + k = 0$$

s^4	1 +	3	k
s^3	3 +	1	0
s^2	$\frac{8}{3}$ 8 +	3k	0
s^1	$\frac{8-9k}{8}$ +	0	
s^0	3k + ✓		

$\frac{8-9k}{8} > 0 \rightarrow 8-9k > 0 \rightarrow k < 8/9$ ✓

برق ۸۷

از سه تابع تبدیل داده شده زیر حد فاز کدام یک بیشتر است؟

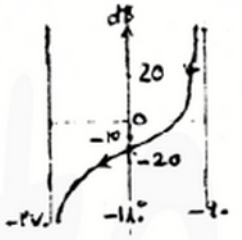
(الف) $G_1(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ (ب) $G_2(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+3)}$ (ج) $G_3(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+3)}$

۱) ج ۲) ب ۳) الف ۴) حد فاز هر سه تابع یکسان است.

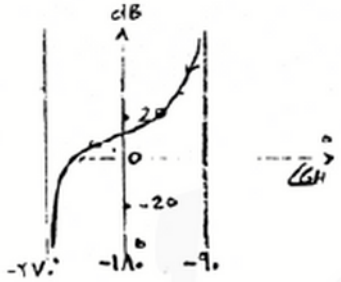
برق ۸۲

کدام گزینه دیاگرام تقریبی log - magnitude & Phase تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{s+۴}{s(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$ را ارائه می‌کند؟

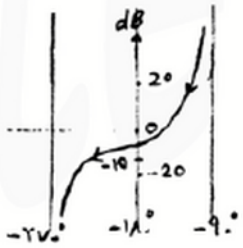
۱)



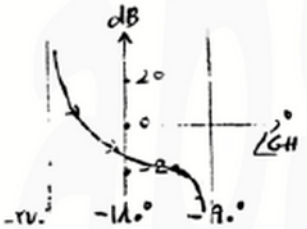
۲)



۳)



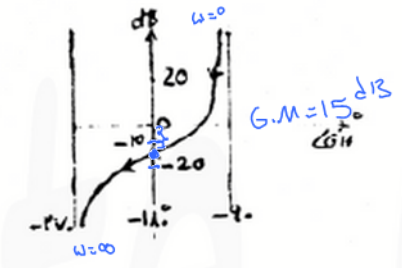
۴)

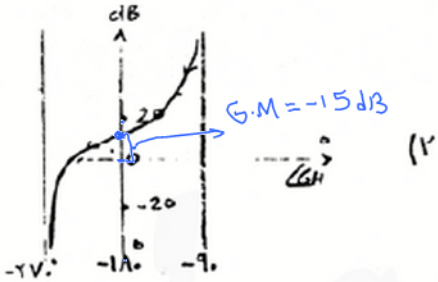


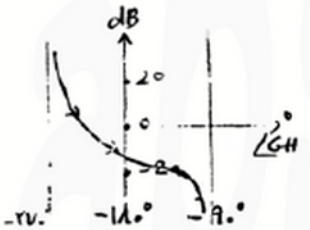
هرجا نوشتم اندازه ـ منظور دیدیم ربط به پایداری نمی دارد.

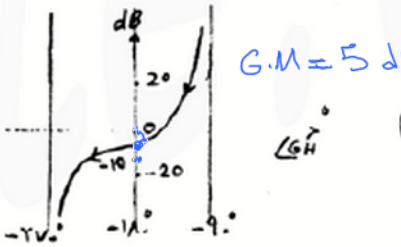
واحد بده

کدام گزینه دیاگرام تقریبی log - magnitude & Phase تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s) = \frac{s+۴}{s(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$ را ارائه می‌کند؟

۱)


۲)


۳)


۴)


$G(s) = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$ $\quad \bar{G}(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ $\quad \bar{G}(0) = \frac{4}{1\times2\times3} > 0$

حاشیه فاز : $= 1\times-90^\circ + 0\times90^\circ + 0 = -90^\circ$

$G.M = -15\,dB \longrightarrow$ ناپایدار

$G.M < 15\,dB \longrightarrow$ $G.M \Rightarrow 20\log G.M < 20\log\sqrt{10}$

بدون واحد

$G.M < \sqrt{10}$

$k < \sqrt{10}$ پایدار

$G.M < 20\,dB$ $\quad 20\log G.M < 20\log 10 \longrightarrow G.M < 10$

$k < 10$ پایدار

✓ 1) $k<\sqrt{10}$ پایدار است — حداکثر $k=4$

X 2) همواره ناپایدار است

3) $k<10$ پایدار است. — حداکثر

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (6+k)s + 4k = 0$$

s^4	1	+ 11	$4k$
s^3	6	+ $6+k$	0
$6\times s^2$	$60-k$	+ + ~~$4k$~~ $24k$	
s^1	$\frac{(60-k)(6+k)-144k}{60-k}$	>0	
s^0	$24k$	+ +	

$$\frac{(60-4)(6+4)-144\times 4}{60-4} = \frac{-36}{54}$$

$k=4$ → ناپایدار

$k>\sqrt{10}$ → ناپایدار ✓

$k<\sqrt{10}$ → پایدار ✓

$k=1$

$$\frac{(60-1)(6+1)-144}{6-1} = \frac{59\times 7-144}{59} > 0$$

برق ۹۵

کدام گزینه درست است؟

۱) حتی سیستمی که دارای حد بهره و حد فاز بزرگی است، می‌تواند با تغییر اندک ولی هم‌زمان بهره و فاز ناپایدار شود.

۲) درصورتی که منحنی نایکوئیست سیستم، نقطهٔ -1 را قطع کند، سیستم حلقه بسته پایدار مرزی است.

۳) درصورتی‌که فرکانس گذر بهره سیستم (ω_c) از فرکانس گذر فاز آن (ω_π) بزرگتر باشد، حد فاز منفی می‌شود و سیستم حلقه بستهٔ ناپایدار است.

۴) زاویهٔ خروج در نقاط شکست از فرمول $\frac{180^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید، که n تعداد شاخه‌هایی است که به‌هم می‌رسند.

کدام گزینه درست است؟

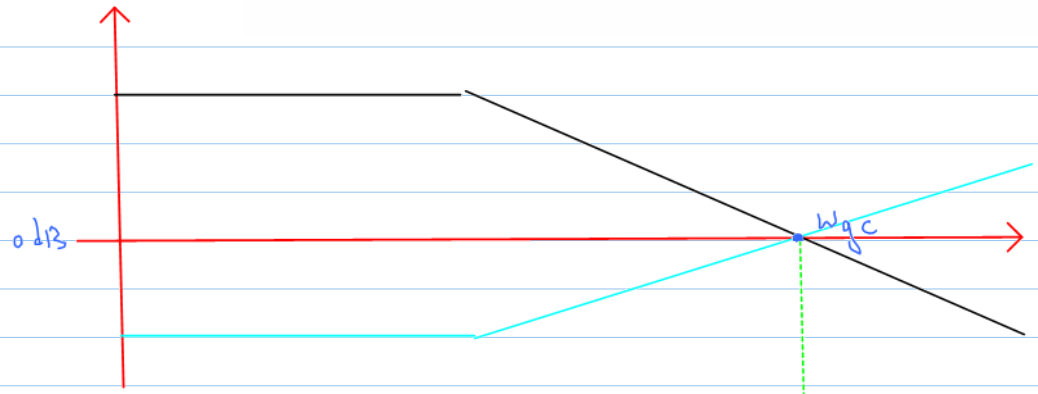
۱) حتی سیستمی که دارای حد بهره و حد فاز بزرگی است، می‌تواند با تغییر اندک ولی هم‌زمان بهره و فاز ناپایدار شود.

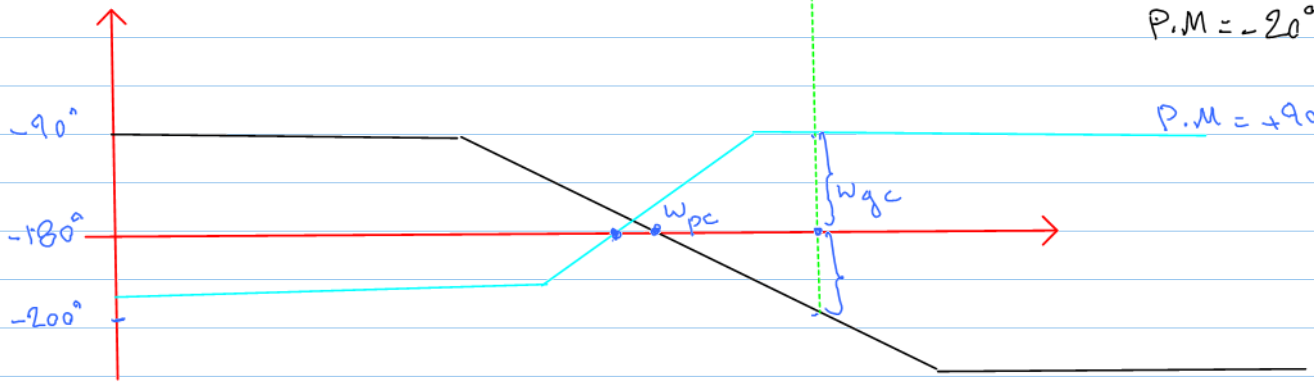
۲) درصورتی که منحنی نایکوئیست سیستم، نقطهٔ ۱− را قطع کند، سیستم حلقه بسته پایدار مرزی است.

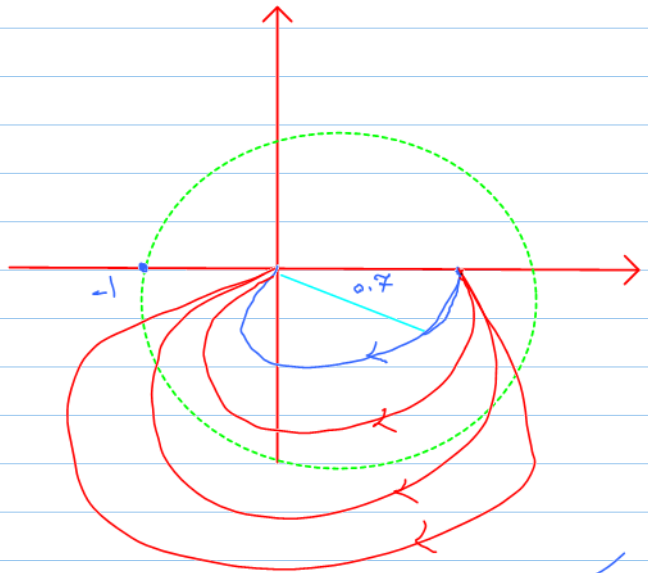
۳) درصورتی‌که فرکانس گذر بهره سیستم (ω_c) از فرکانس گذر فاز آن (ω_π) بزرگتر باشد، حد فاز منفی می‌شود و سیستم حلقه بستهٔ ناپایدار است.

۴) زاویهٔ خروج در نقاط شکست از فرمول $\frac{180^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید، که n تعداد شاخه‌هایی است که به‌هم می‌رسند.

حقیقی







G.M = ∞

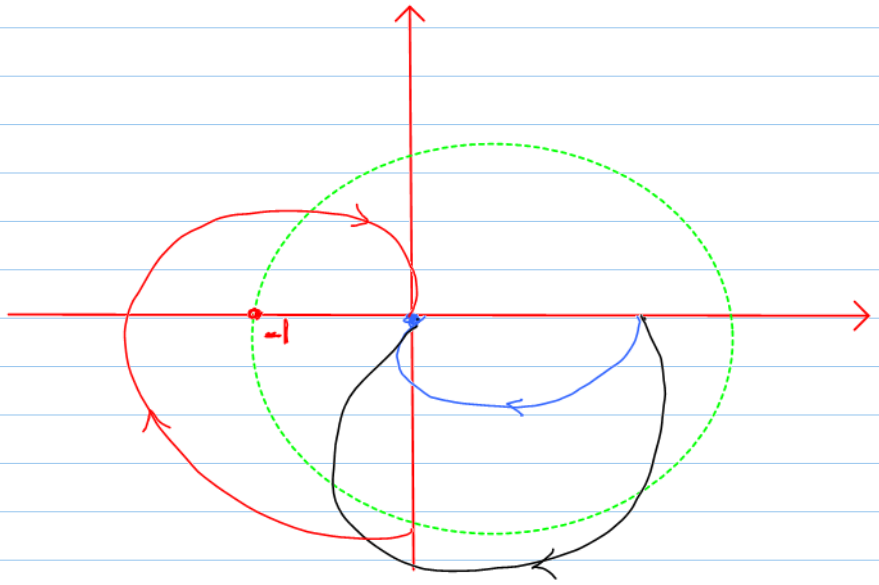
P.M = بدون محدودیت

بدون چرخاندن بردار در هر بحرانی مرتبا حتما ناپایدار می‌شود.

G.M = ∞ ←

P.M = دلخواه ←

بدون هرتبدر عملی ~ ~ چرخاندن بحرانی



همزمان در بهره 10 مزبر کنیم و سپس به اندازه 90° بچرخانیم ← ناپایدار

به بهره بیش بدون چرخاندن در بخرجای مزبر کنیم.

حداقل به ازای مزبر عددی بچرخانیم.

اعمال همزمان بهره و چرخاندن دقیقا به حدیره و حداقل ندارد و حتی اگر حدیره ∞ و حداقل بدون محدودیت باشد با اعمال همزمان بهره و فاز سیستم است ناپایدار شود.

برق ۹۶

کدام گزینه درست است؟

۱) سیستمی که دارای حد بهرهٔ بی‌نهایت و حد فاز ۶۰° باشد با افزایش گین به میزان ده برابر و تأخیر فاز -۳۰° هرگز ناپایدار نمی‌شود.

۲) اضافه‌کردن صفر سمت چپ به تابع تبدیل حلقه، مطمئناً سبب افزایش بالازدگی پاسخ پلهٔ سیستم حلقه بسته می‌شود.

۳) پاسخ حالت دائم سیستمی که یک جفت صفر در $\pm j$ دارد به ورودی $\sin t$ صفر است.

۴) پایداری نسبی سیستم $G_۱(s)$ از $G_۲(s)$ بیشتر است. $G_۱(s)=\frac{۱}{s^۲+۱/۶s+۱}$ ، $G_۲(s)=\frac{۶۴}{s^۲+۸s+۶۴}$

کدام گزینه درست است؟

P.M = 60 G.M = ∞

۱) سیستمی که دارای حد بهرهٔ بی‌نهایت و حد فاز 60° باشد با افزایش گین به میزان ده برابر و تأخیر فاز -30° هرگز ناپایدار نمی‌شود.

۲) اضافه‌کردن صفر سمت چپ به تابع تبدیل حلقه، مطمئناً سبب افزایش بالازدگی پاسخ پلهٔ سیستم حلقه بسته می‌شود.

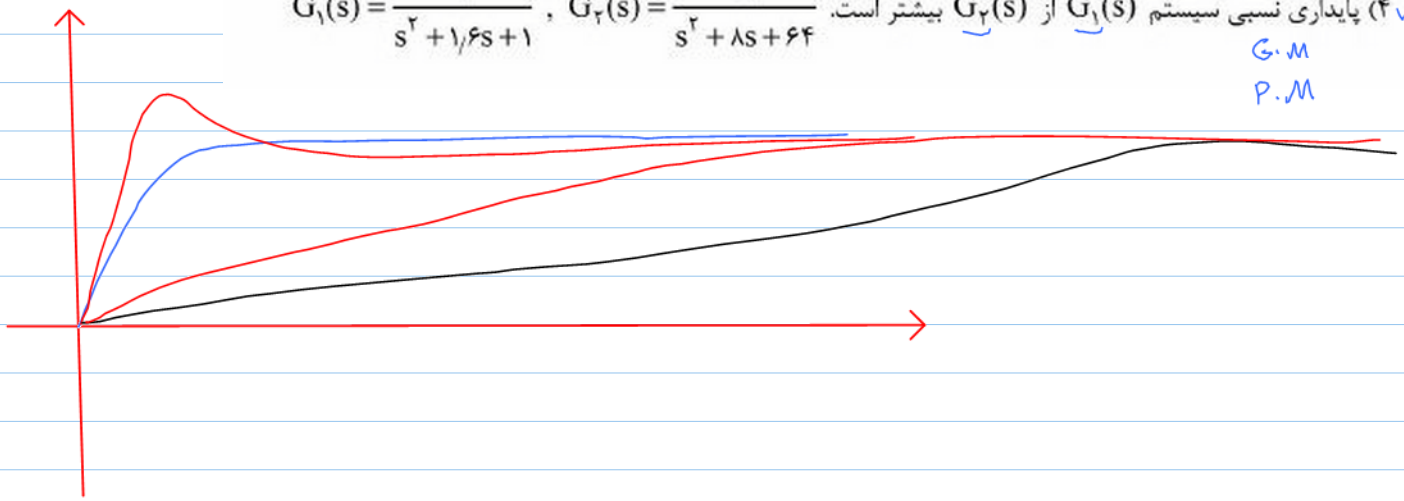
۳) پاسخ حالت دائم سیستمی که یک جفت صفر در $\pm j$ دارد به ورودی $\sin t$ صفر است.

۴) پایداری نسبی سیستم $G_1(s)$ از $G_2(s)$ بیشتر است. $G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1/6s + 1}$, $G_2(s) = \frac{64}{s^2 + 8s + 64}$

فوق میرایی هم

G.M

P.M



$G(s) = \frac{s^2+1}{P(s)}$ $\sin(1t) \longrightarrow y(t) = |G(j1)| \times 1 \sin(t + \angle G(j1))$

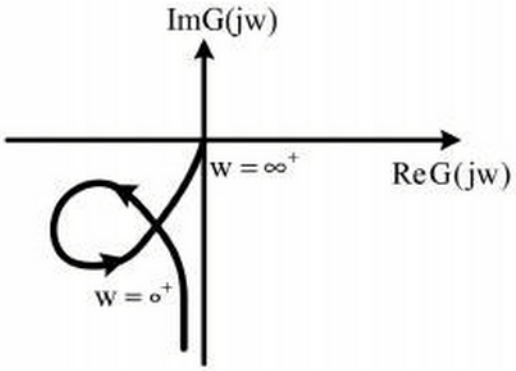
$G(j1) = \frac{(+j1)^2+1}{P(j1)} = \frac{-1+1}{P(j1)} = 0$ $|G(j1)| = 0$ $y(t) = 0$ ✓

سیستم ناپایدار $\longrightarrow$ $y(t) = \infty$

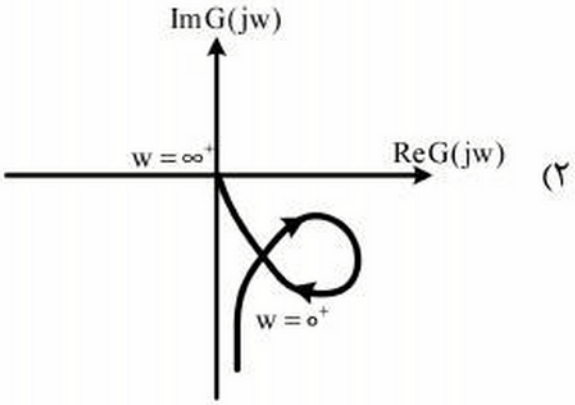
دیاگرام قطبی تابع تبدیل سیستم زیر، کدام است؟

$$G(s)=\frac{s^2-2s+4}{s^3-10s^2+50s}$$

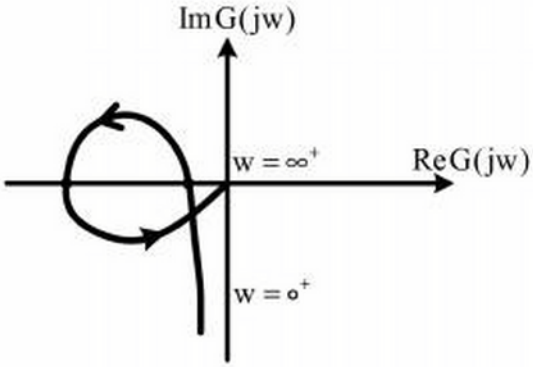
۱)



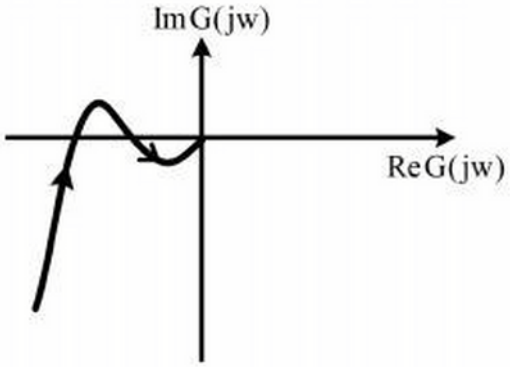
۲)



۳)

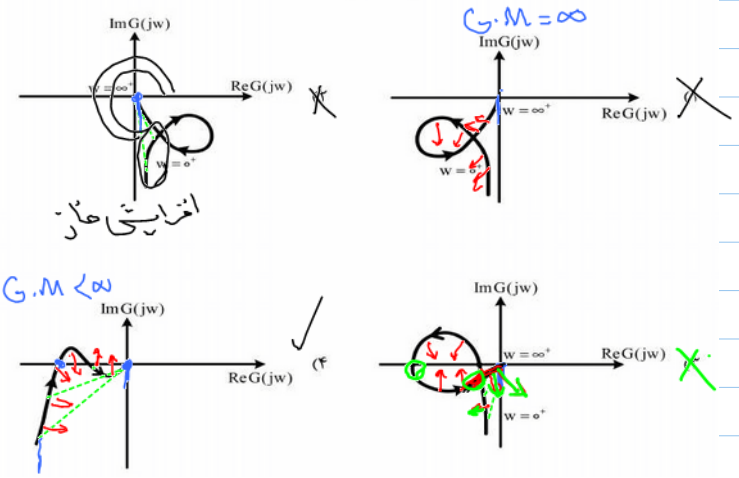


۴)



دیاگرام قطبی تابع تبدیل سیستم زیر، کدام است؟

$$G(s)=\frac{s^2-2s+4}{s^3-10s^2+50s}$$



۱) نقطه شروع ✓
۲) ~ نهایی ✓
۳) فاز اولیه و فاز نهایی ✓
۴) روند تغییر فاز

$$G(s)=\frac{s^2-2s+4}{s(s^2-10s+50)}$$

صفرهای سمت راست

قطبهای سمت راست

فرکانسهای گوشه: $s=0$, $w_n=2$, $w_n=\sqrt{50}$

$w: 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5\sqrt{2} \longrightarrow \infty$

کاهش فاز ← افزایش فاز →

تغییر روند

$$\Delta(s)=1+\frac{k(s^2-2s+4)}{s^3-10s^2+50s}=0$$

$$\Delta(s)=s^3+(k-10)s^2+(50-2k)s+4k=0$$

$k>10$

$k<25$

$k>0$

$(k-10)(50-2k)>1\times 4k$

$k<25$

927

$K>25 \longrightarrow$ سیستم ناپایدار $\longrightarrow G.M \neq \infty$

برق ۸۷

یک سیستم کنترل با فیدبک واحد با تابع حلقه باز مینیمم فاز $G(s)$ دارای فرکانس گذر بهره (gain crossover) بزرگتر از فرکانس گذر فاز (phase crossover) می‌باشد. اگر $G(s)$ تنها یک فرکانس گذر فاز و یک فرکانس گذر بهره داشته باشد، در مورد پایداری سیستم حلقه بسته چه می‌توان گفت؟

۱) پایدار است.

۲) ناپایدار است.

۳) بستگی به منحنی فاز و اندازه دارد.

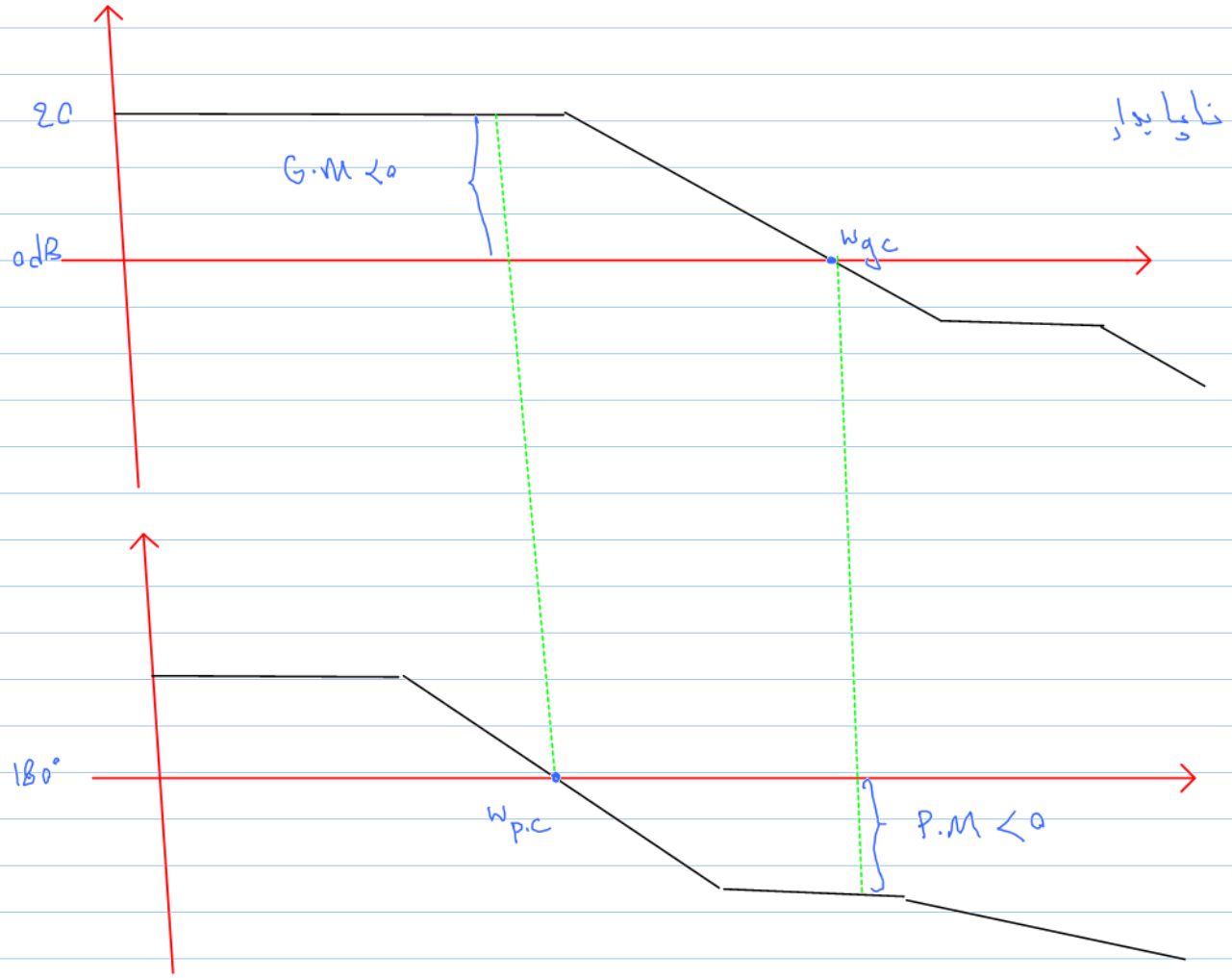
۴) بستگی به منحنی فاز سیستم دارد.

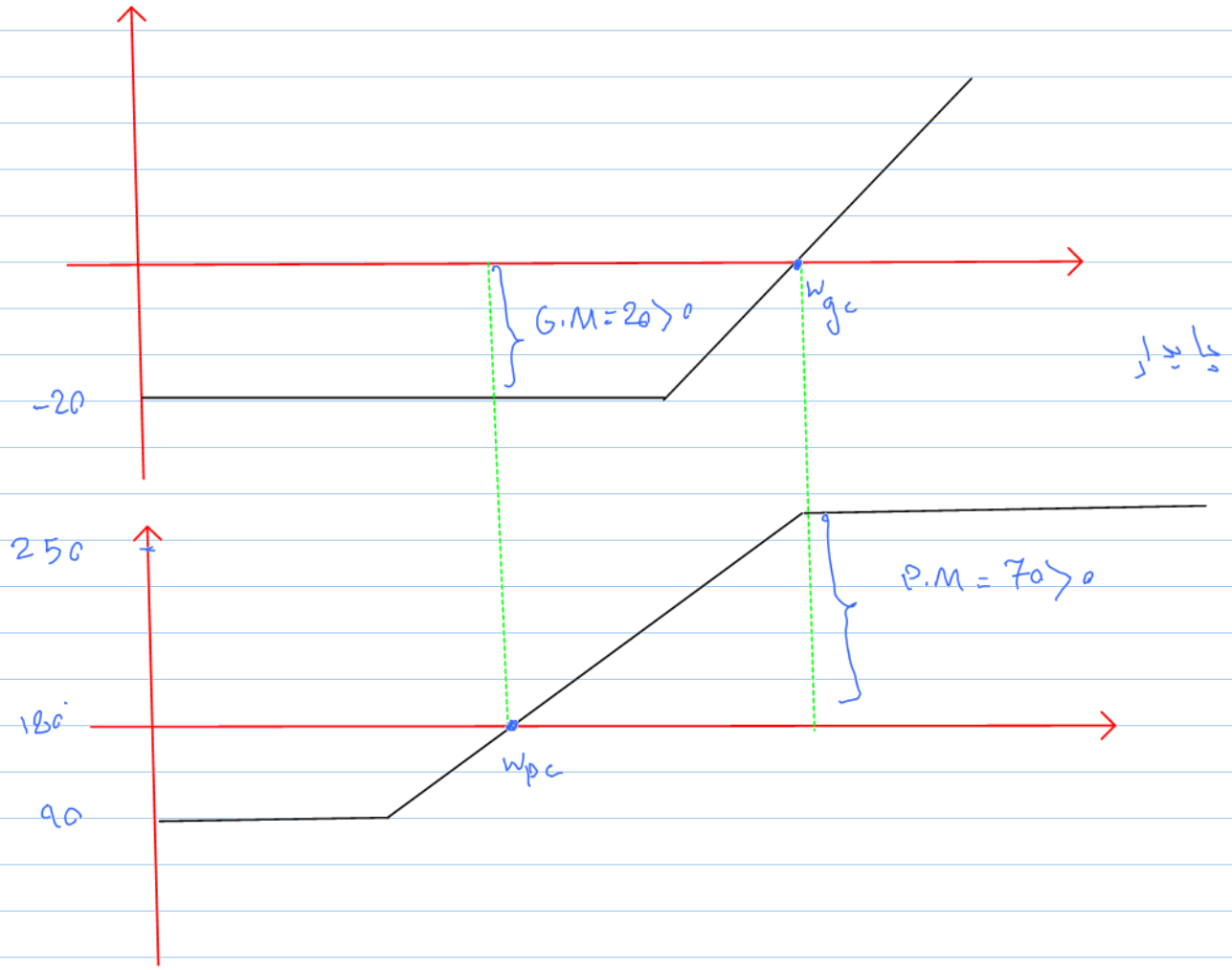
کمینه فاز ← $G(s)$

$\omega_{gc} > \omega_{p.c}$

بهره تنها یک بار 0dB می‌شود.

فاز ... ... -180° ... ...





پایداری یا ناپایداری بستگی به مقدار اندازه فاز دارد.

" " " " " " " فاز دارد. ✓

اگر سیستم کمینه فاز باشد نمودار اندازه یا فاز برای توصیف بسنده کافی است

برق ۸۸

سیستم فیدبک واحد زیر و جدول راث متناظر آن را در نظر بگیرید.

s^4	a	b	k
s^3	c	d	
s^2	۱۰	k	
s^1	$e(10-k)$		
s^0	k		



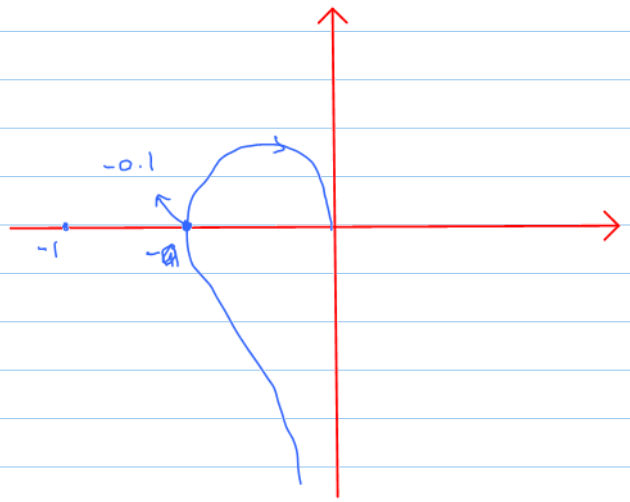
فرکانس تقاطع منحنی نایکوئیست $G(s)$ با محور حقیقی (ω) و محل تقاطع (q) کدام است؟

۱) $\omega = ۱$ ، $q = -۰/۲$

۲) $\omega = ۲$ ، $q = -۰/۲$

۳) $\omega = ۳$ ، $q = -۰/۶$

۴) $\omega = ۱$ ، $q = -۰/۱$



$$G.M = \frac{1}{|-a|} = \frac{1}{a}$$

s^4	a+	b	k
s^3	c+	d	
s^2	۱۰	k	
s^1	e(۱۰−k)+		
s^0	k+		

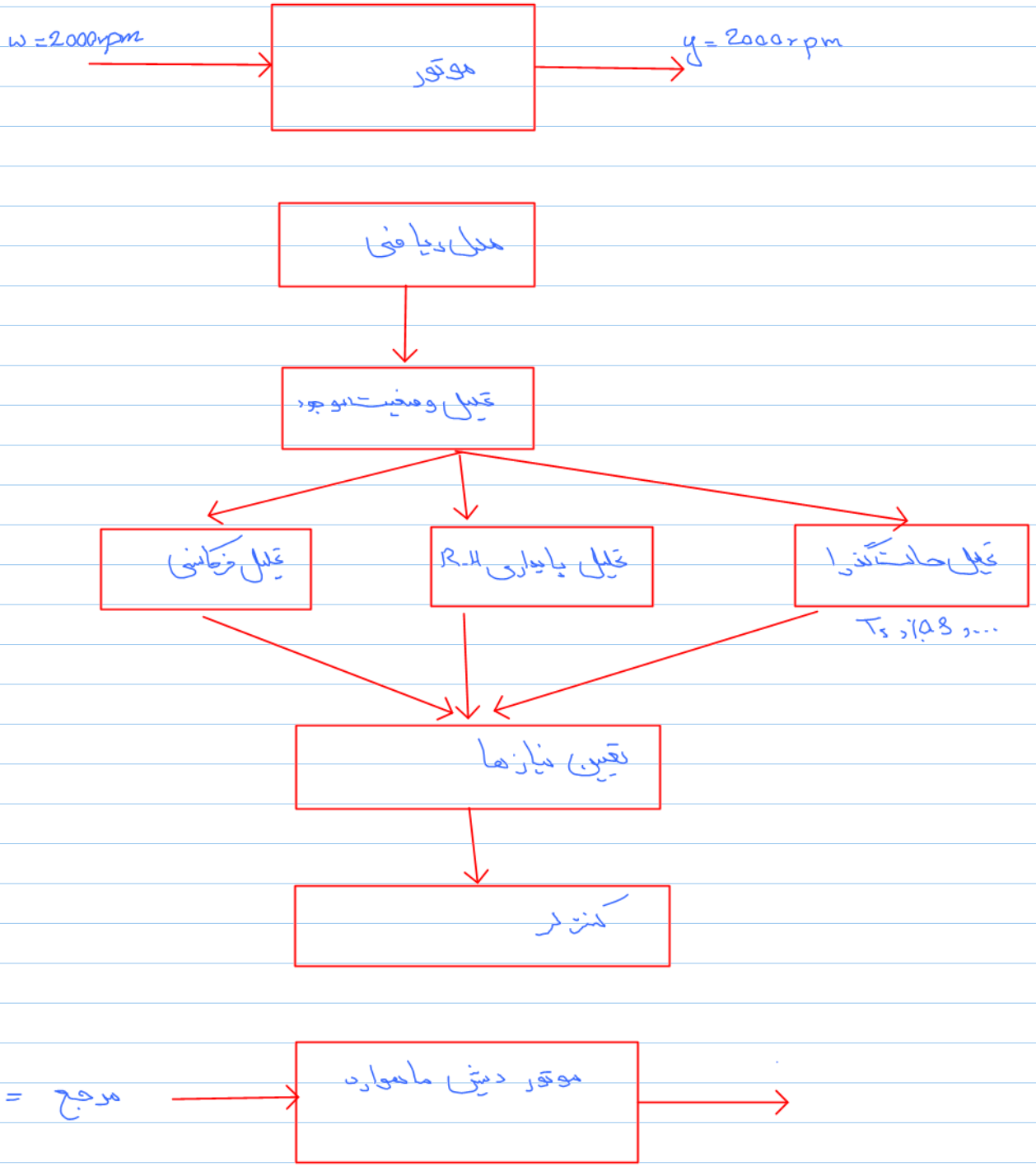
$k<10 \longrightarrow \quad G.M = 10 \longrightarrow$

$10 = \frac{1}{a} \longrightarrow a = \frac{1}{10} \longrightarrow$

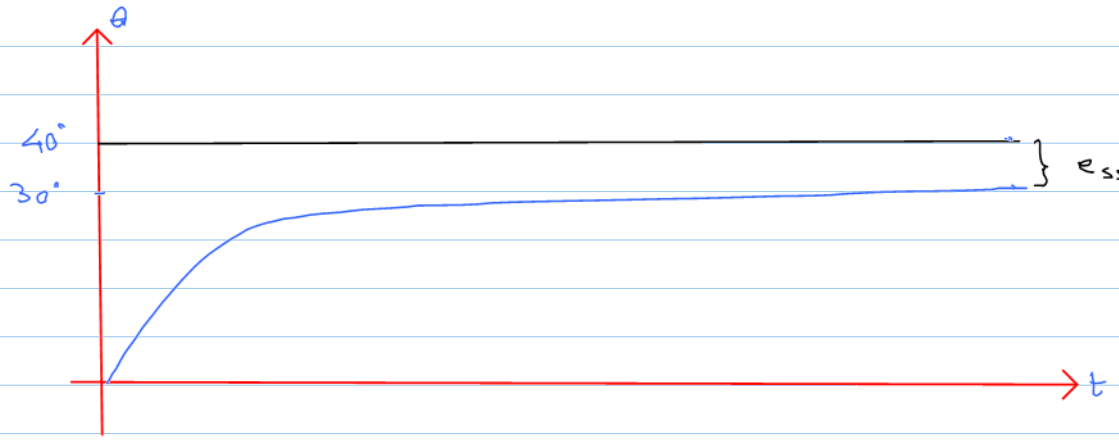
جلسه 64 کنترل فازی

«طراحی کنترلر»

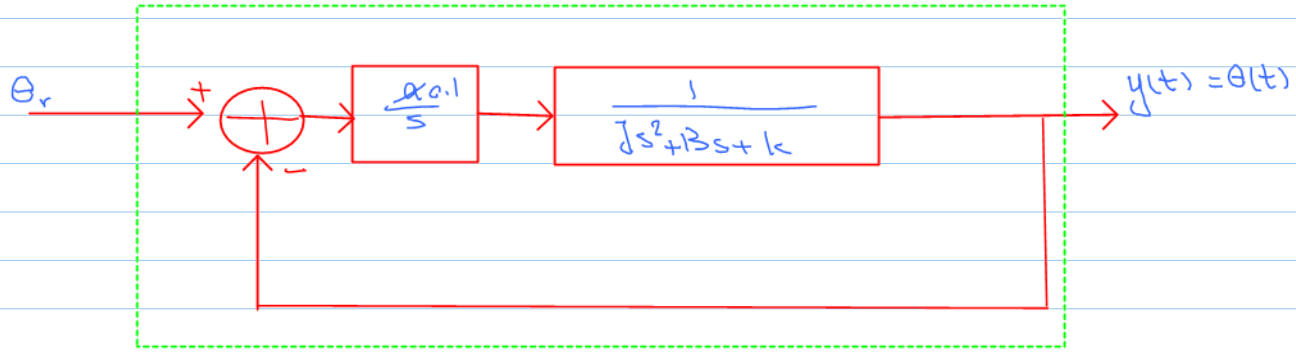
این فصل چکیده‌ای از فصل‌های قبل است.

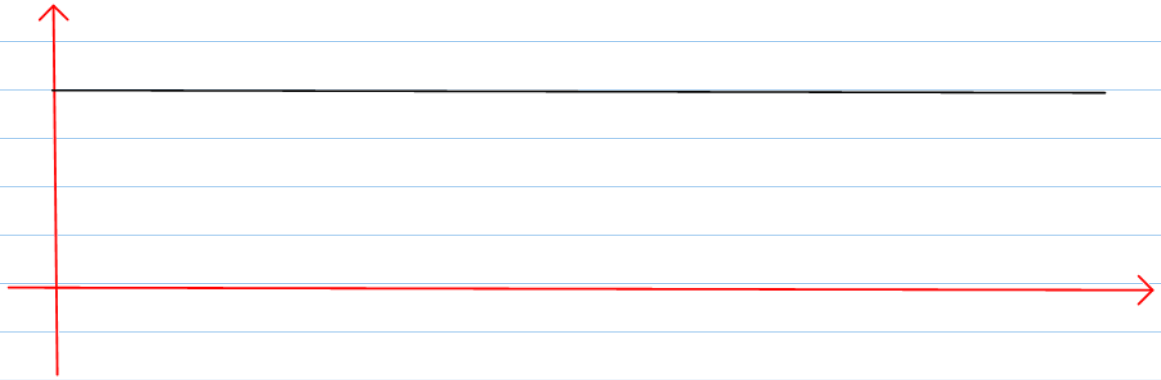


سروو موتور $\longrightarrow \quad \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + k}$



$e_{ss} = 0$ ← بازخوردی





بازخوردی ← خطای ماندگار به ورودی پله صفر شود.

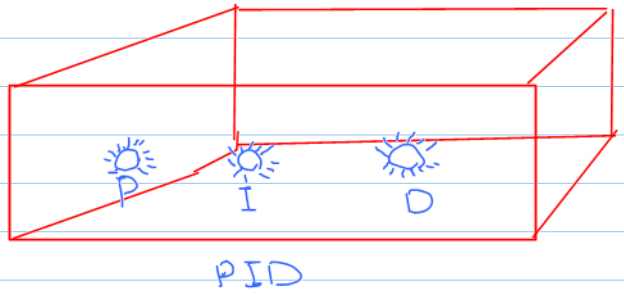
نوع ورودی = 0 < نوع سیستم → نوع سیستم = 1 → $\frac{1}{s}$

$\Delta(s) = 1 + \frac{a}{Js^3 + Bs^2 + ks} = 0$ $\quad J=10 \quad B=2 \quad k=1$

$\Delta(s) = 10s^3 + 2s^2 + s + a = 0$ $\quad 2 \times 1 > 10a \rightarrow a < 0.2$

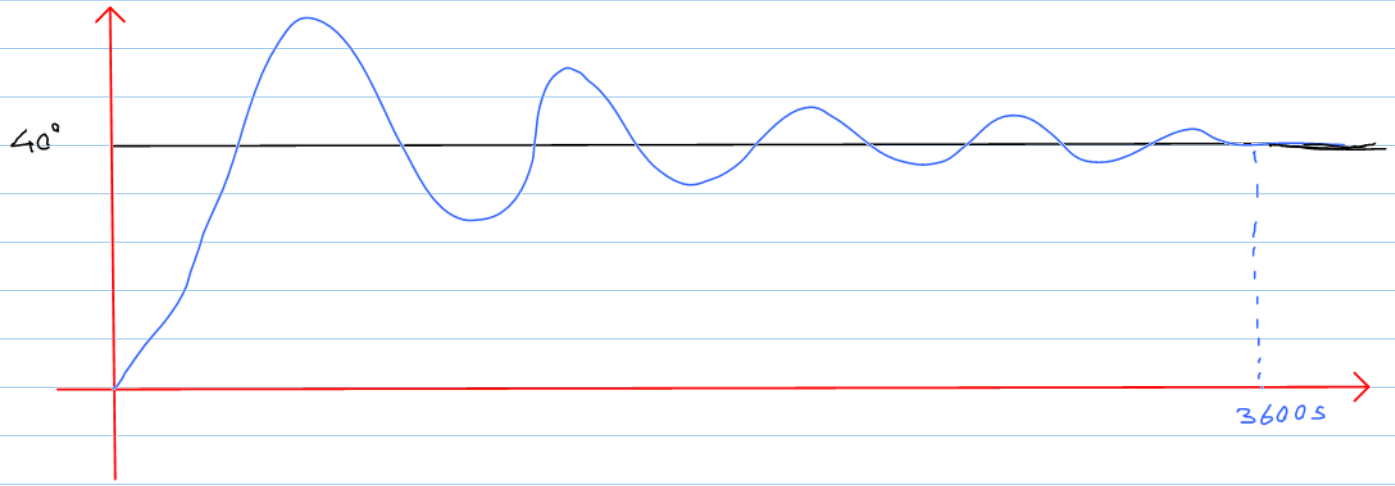
$a = 0.1$

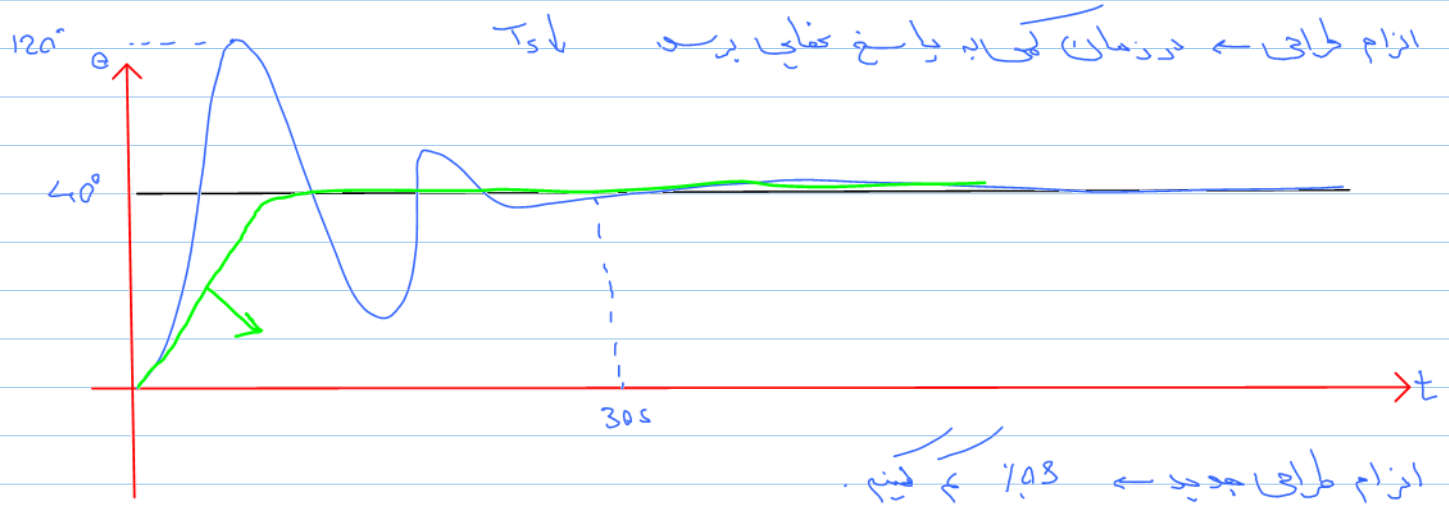
تابع تبدیل کنترلر = $\frac{0.1}{s}$



PID

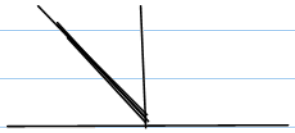
PID تابع تبدیل $= k_p + \frac{k_i}{s} + k_d$ $\rightarrow$ $k_p = 0$ $k_d = 0$ $k_i = 0.1$





الزام طراحی $\leftarrow$ در زمان کمتر به پاسخ نهایی برسد T_s با

الزام طراحی جدید $\leftarrow$ $\%0.3$ ع قبلی.



هدف ما $\leftarrow$ $e_{ss} = 0$ $\leftarrow$ الزامات طراحی
- ع T_s
- ع $\%0.3$
- $e_{ss} = 0$

روندهای طراحی کنترلر:

تقویم مساله مشتری

ارزیابی نیازهای مشتری ← تحلیل سیستم ✓

الزامات طراحی ← T_s ، %OS و ... ✓

دسته بندی الزامات ← حالت گذرا ← حالت ماندگار ← خطای ماندگار ✓

انتخاب ساختار کنترلر مورد نظر ؟

تنظیم پارامترهای کنترلر

طراحی کنترل ←

موتور ← دور خروجی به مقدار مطلوبی که ورودی می دهیم برسد.

① سیستم بدون کنترل دارای خطای ماندگار $e_{ss} = 100\ rpm$ است.

② " " " نوسانی است.

طراحی طراحی کنترل :

① ساختار کنترل ← فیدبک حالت $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$ ، $C(s) =$

② روش تنظیم پارامترها

ساختار کنترل موتور ملی BLDC ← PID

~ ~ ماهواره ← PID

~ ~ سطح مایع در فاز ← PID

~ ~ راکتور ها ← PID

تنظیم پارامترها ← علم کنترل ← کنترل مقاوم

کنترل تطبیقی

~ MPC

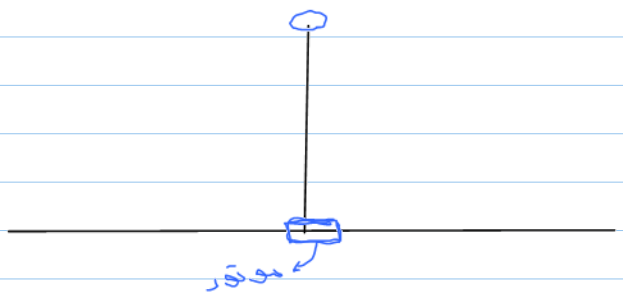
~ فازی

~ شبکه عصبی

⋮

الگوریتم کنترل فقط مربوط خود تنظیم پارامترها بحث می‌کند. ولی ساختار کنترل در کاربردی پیشرفته همچنان PID است.

مثال : پیاده‌کار یک موتور ← بدون جاروبک ← زاویه خروجی تنظیم شود.



ورودی ← خروجی ← مدلسازی ✓ ident

کنترل ← طراحی

← معرفی مستحصلات انواع کشورها

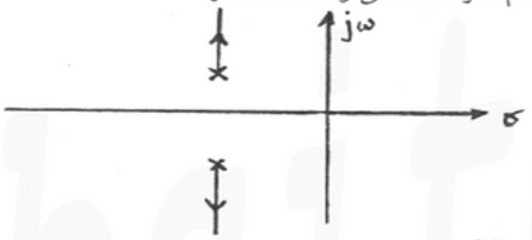
← روش تشخیص جواب

جلسه 65 کنترل فازی

« طراحی کنترلر »

طراحی کنترلر به تیپ سوالات

نمودار مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد بصورت زیر است. برای اینکه پاسخ پله این سیستم بدون جهش بوده و خطای حالت دائمی آن صفر باشد، از کدام کنترل کننده می‌توان استفاده نمود؟



۱) P
۲) PI
۳) PID
۴) PD

دریک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد برای ورودی پله واحد خطای حالت دائمی $e_{ss} = 0/3$ ، حدفاز $PM = -5^\circ$ و فرکانس قطع‌فاز $w_c=10$ می‌باشد. برای رسیدن به مشخصات مطلوب $e_{ss} \le 0/05$، $PM \ge 60^\circ$ و $w_c \simeq 10$ نیاز به چه نوع جبران کننده‌ای می‌باشد؟

۱) پس فاز ۲) پیش فاز ۳) متناسب ۴) پیش فاز ـ پس فاز

پاسخ پله یک سیستم حلقه بسته بصورت شکل مقابل است. برای تبدیل سیستم حلقه بسته به یک سیستم فوق میرا با خطای حالت دائمی صفر مناسب‌ترین کنترل کننده عبارت است از:



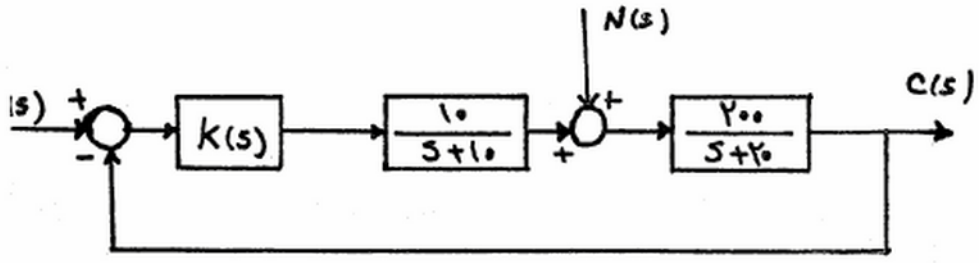
۱) P
۲) PI
۳) PD
۴) PID

در سیستم شکل زیر اگر بخواهیم سیستم حلقه بسته نظیر یک سیستم درجهٔ ۲ رفتار نموده و بطور هم زمان سه شرط زیر برآورده گردند نوع کنترل کنندهٔ $K(s)$ را تعیین کنید:

(۱) تأثیر نویز میان حلقه، برای $N(s) = \frac{1}{s}$ در پاسخ حالت دائمی خروجی از میان برود،

(۲) حد فاز سیستم حدود 50° گردد،

(۳) زمان نشست پاسخ پله سیستم حلقه بسته (برای $n(t) = 0$) برابر 100^{msec} گردد.



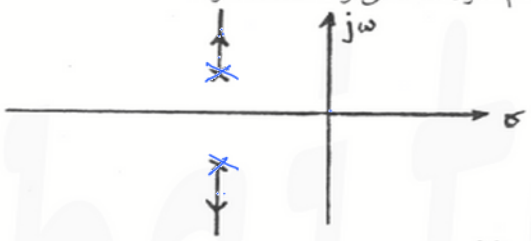
۱) کنترل کنندهٔ PID

۲) کنترل کنندهٔ پس فاز (Lag)

۳) کنترل کننده PI

۴) کنترل کننده $Lag - Lead$ (پس فاز– پیش فاز)

نمودار مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد بصورت زیر است. برای اینکه پاسخ پله این سیستم بدون جهش بوده و خطای حالت دائمی آن صفر باشد، از کدام کنترل کننده می‌توان استفاده نمود؟



۱) P

۲) PI

۳) PID

۴) PD

خواسته‌ها ←
- $\%OS=0$ ← فوق میرا یا میرای بحرانی ← حالت گذرا
- $e_{ss}=0$ ← حالت دائم

وضعیت فعلی ←
- $\%OS>0$ ← زیر میرا ← $\%OS=0$
- $e_{ss}=0$ ← $0<e_{ss}<\infty$

$0<e_{ss}<\infty$ ← نوع ۰ ← حلقه باز ← نوع = ۰ ← پله

نیازمندی‌ها ←
1. قطب‌های حلقه بسته روی محور حقیقی منفی باشند.
2. نوع سیستم حداقل ۱ واحد افزوده شود.

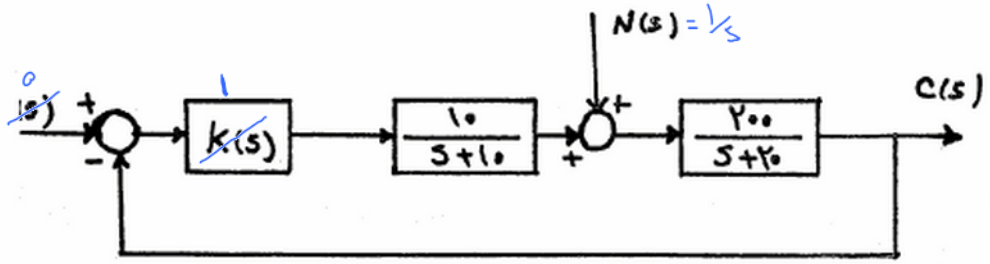
در سیستم شکل زیر اگر بخواهیم سیستم حلقه بسته نظیر یک سیستم درجهٔ ۲ رفتار نموده و بطور هم زمان سه شرط زیر برآورده گردند نوع کنترل کنندهٔ $K(s)$ را تعیین کنید:

(۱) تأثیر نویز میان حلقه، برای $N(s) = \frac{۱}{s}$ در پاسخ حالت دائمی خروجی از میان برود،

(۲) حد فاز سیستم حدود ۵۰° گردد،

(۳) زمان نشست پاسخ پله سیستم حلقه بسته (برای $n(t) = ۰$) برابر ۱۰۰ msec گردد.

خلاصه‌ی مسأله



۱) کنترل کنندهٔ PID

۲) کنترل کنندهٔ پس فاز (Lag)

۳) کنترل کننده PI

۴) کنترل کننده Lag – Lead (پس فاز– پیش فاز)

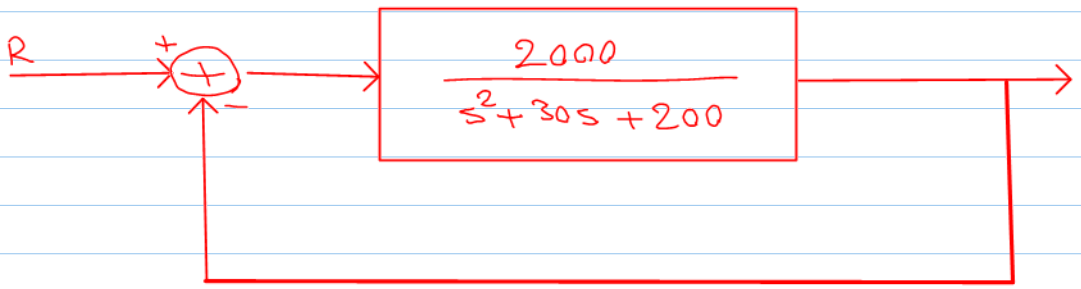
و معیت فعلی ← از N در پاسخ حالت دائم خروجی ؟

P.M = ?

T_s = ?

$T_s = ? \rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2000}{s^2+30s+2200} = \frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

$\xi\omega_n = 15 \rightarrow T_s = \frac{4}{15}\ s = \frac{4000}{15}\ ms = \frac{800}{3} \simeq 263\ ms$



$P.M = ? \rightarrow G(j\omega) = \frac{2000}{200-\omega^2+j30\omega}$

$|G(j\omega)| = \frac{2000}{\sqrt{(200-\omega^2)^2+900\omega^2}} = 1 \rightarrow \omega_{gc} = ?$

$P.M = \angle G(j\omega_{gc}) - 180^\circ \simeq 30^\circ$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{200}{s+20}}{1+\frac{2000}{(s+10)(s+20)}} = \frac{200(s+10)}{s^2+30s+2200}$$

$$C(s) = \frac{200(s+10)}{s^2+30s+2200} \times \underbrace{\frac{1}{s}}_{N(s)}$$

$$c(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,C(s) = \frac{200 \times 10}{2200}$$

وضعیت فعلی ←
- اثر N در حوزه حالت دائم = $\frac{10}{11}$ ← 0 ← حالت دائم
- $P.M$ ← 30° ← 50°
- T_s ← 268 ms ← 100 ms

حالت گذرا

در سوالات کنترل کننده تشخیص نوع کنترلر (P ، PI ، PID و...) نقش مهمی دارد.

برای تشخیص نوع کنترلر به صورت زیر عمل خواهیم کرد.

① خواسته های مسأله را در دو دسته پاسخ گذرا و پاسخ حالت دائم دسته بندی کنید.

پاسخ حالت دائم ←
- خطای حالت دائم
- ثابت خطا
- مقدار نهایی خروجی

پاسخ حالت گذرا ←
- زمان صعود
- زمان نشت
- درصد فراجهش
- زمان قله یا بیشترین مقدار
- پایداری نسبی
- ⋮

مشخصه ورکامنی ←
- قابلیت حذف اغتشاش
- قابلیت حذف نویز

② از بین خواسته های مسأله ، نیازمندیها را تعیین کنید.

③ نیازمندیها را با مشخصات کنترلرها تطبیق دهید و نوع کنترلر را انتخاب کنید.

④ پس از انتخاب نوع کنترلر حتماً پایداری را بررسی کنید.

⑤ در انتخاب کنترلر سادگی هم به عنوان معیار در نظر بگیرید.

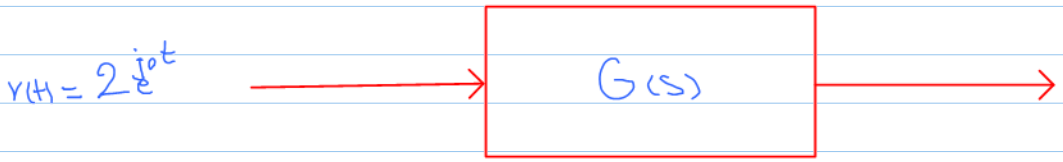
قابلیت دفع اغتشاش و نویز:

فرق اغتشاش و نویز ← اغتشاش فرکانس پایین
نویز فرکانس بالا

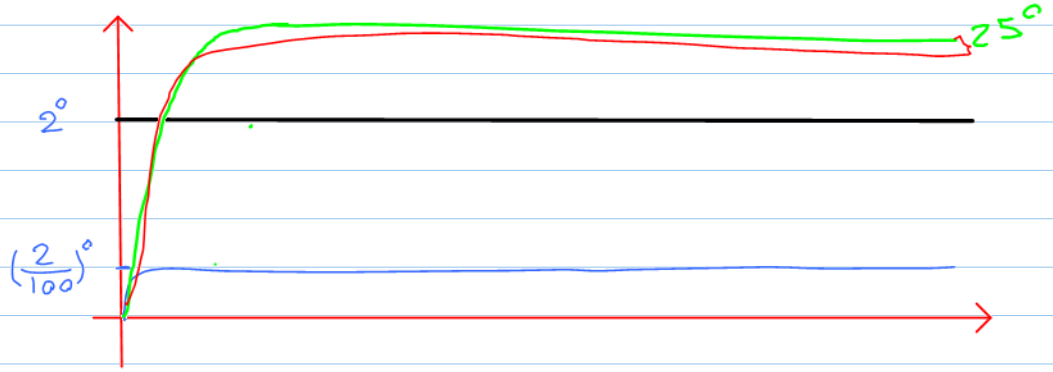


$20\log|G(j\omega)| = -40$

$|G(j\omega)| = \frac{1}{100}$

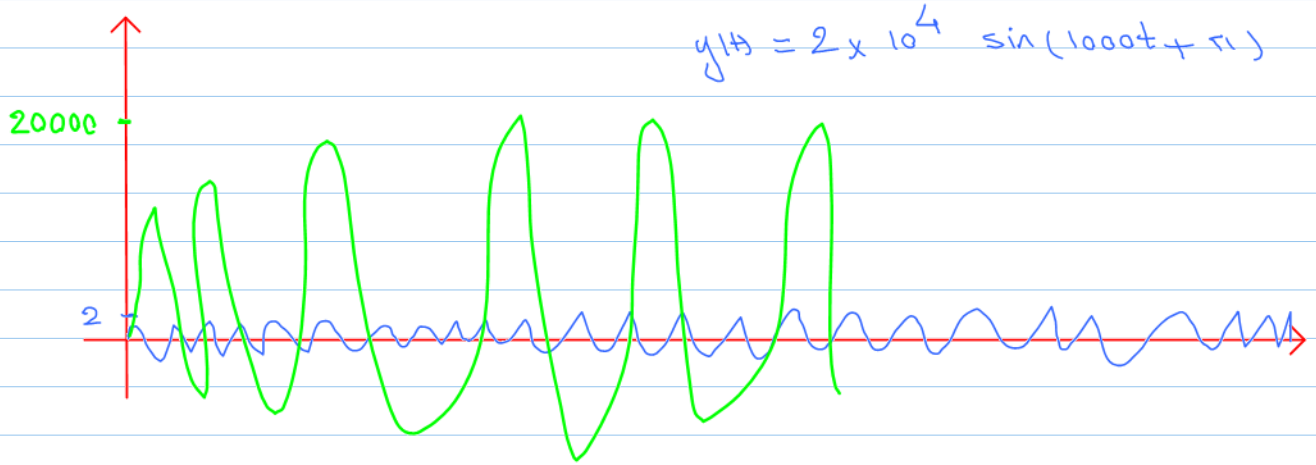


$y(t) = 2e^{j\omega t} \times |G(j\omega)|\, e^{j\angle G(j\omega)} = \frac{1}{100} \times 2 e^{j\omega t} e^{j30t} = \frac{2}{100} e^{j30t}$



$r(t) = 2\sin(1000t) \longrightarrow$ $y(t) = 2 \times |G(j1000)| \sin(1000t + \angle G(j1000))$

$y(t) = 2 \times 10^{-4} \sin(1000t + \pi)$



هرگاه اندازه تابع تبدیل کنترلر در فرکانس های بالا از 1 بزرگتر باشد یعنی دفع اغتشاش را بهتر می کند و هر چقدر دامنه در فرکانسهای بالا کمتر باشد یعنی دفع اغتشاش را بهتر می کند.

هرگاه دامنه تابع تبدیل کنترلر در فرکانس های بالا بزرگ باشد یعنی نویز را تقویت می کند و هرچقدر کوچک باشد یعنی نویز را تضعیف می کند.

انواع کنترلرها:

1) P 2) PI 3) PD 4) PID 5) lag 6) lead

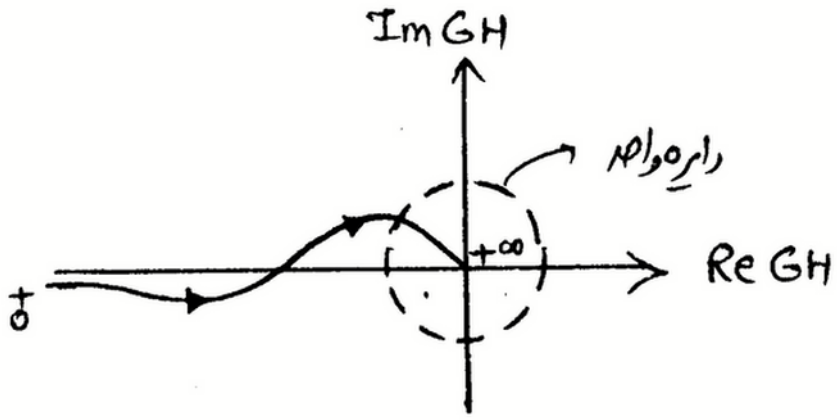
① کنترلر تناسبی (P): $C(s) = k_p$

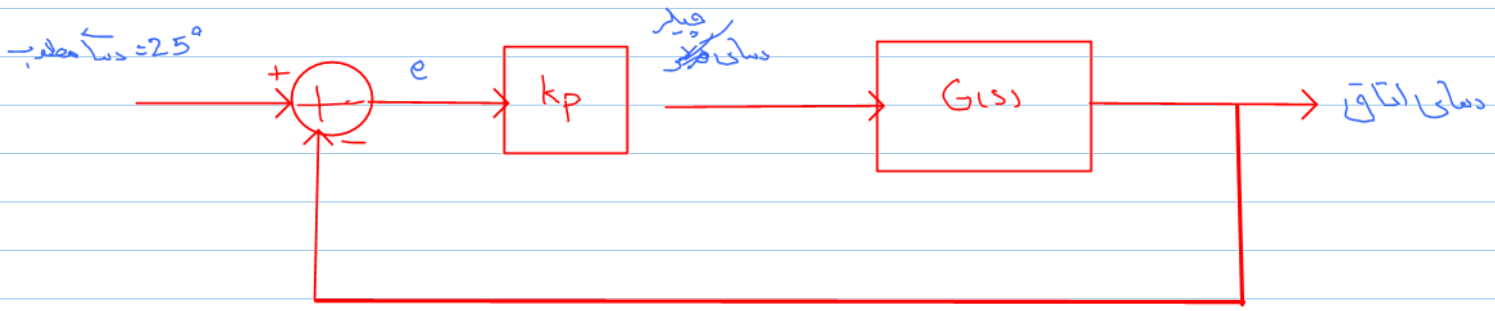
* ساده‌ترین کنترلر است. ← دینامیک ندارد.
* برای بهبود پاسخ حالت دائم استفاده می‌شود.
* می‌تواند خطای حالت دائم را کم کند ولی توانایی حذف خطای حالت دائم را ندارد.
* افزایش k_p ← پاسخ حالت گذرا خراب می‌کند ← افزایش $\%OS$، افزایش T_s و...
* موجب کاهش پایداری نسبی می‌شود (حد بهره را کاهش می‌دهد).
* می‌تواند سیستم را ناپایدار کند.
* اثر اغتشاش در ورودی را می‌تواند کاهش دهد. $k_p > 1$
* خروجی را در ورودی تقویت می‌کند.
* همانی باند سیستم را افزایش می‌دهد (سرعت سیستم)

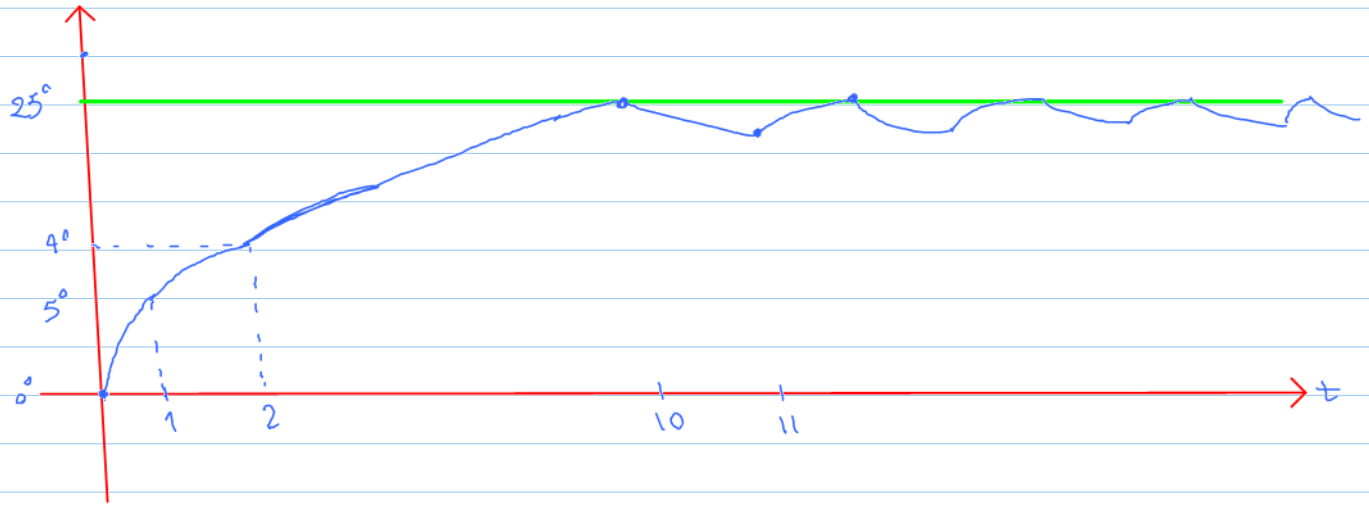
برق ۹۲

نمودار قطبی مربوط به یک سیستم کنترلی مینیمم فاز با فیدبک واحد منفی ترسیم شده است. جهت دستیابی به خطای حالت ماندگار صفر به ورودی شیب، ساده‌ترین جبران‌ساز سری کدام است؟

۱) تناسبی
۲) PD
۳) PI
۴) PD







$k_p = 5$

دمای هیتر = $k_p \times e = k_p($ دمای اتاق $- 25^\circ) = 5($ دمای اتاق $- 25^\circ)$

$u_1 = 125^\circ$

$u_2 = 100^\circ$

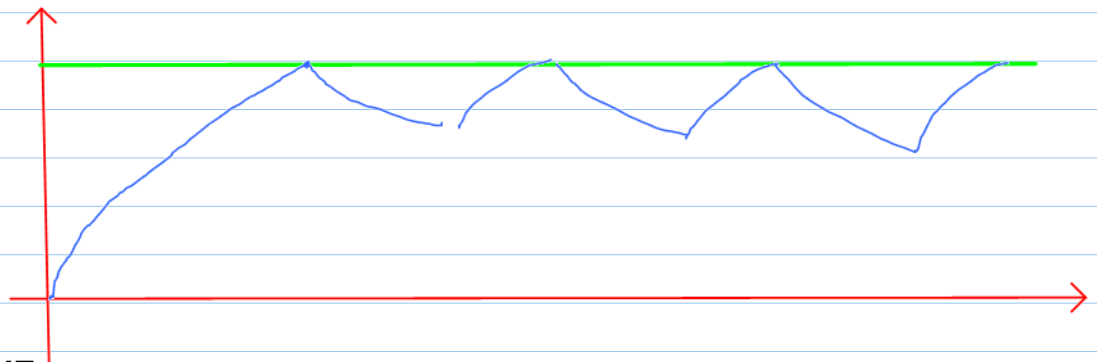
$u_3 = 5(25 - 9) = 80^\circ$

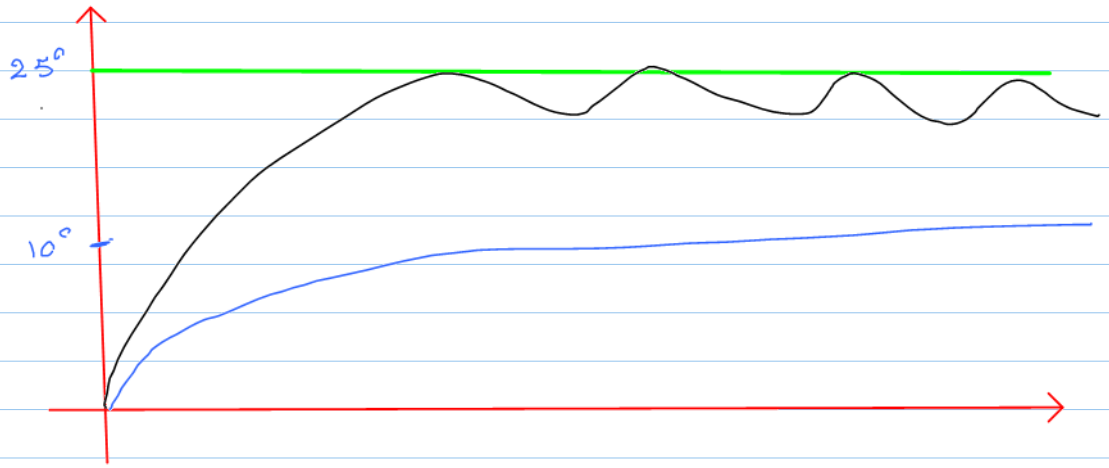
⋮

$u_{10} = 5 \times (25 - 25) = 0$

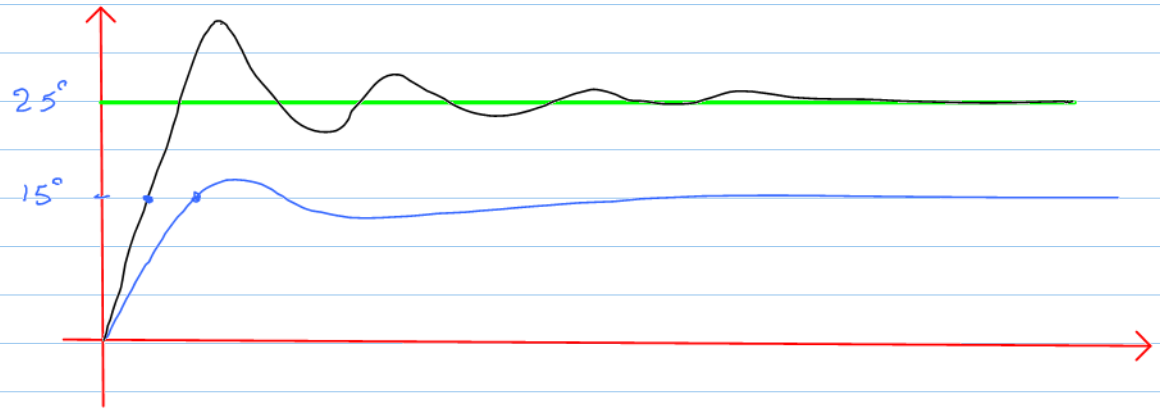
$u_{11} = 5(25 - 23) = 10^\circ$

چون k_p کمتر است نسبت به خطای لحظه‌ای حساسیت کمتری دارد و خطای دائمی را بیشتر می‌کند.



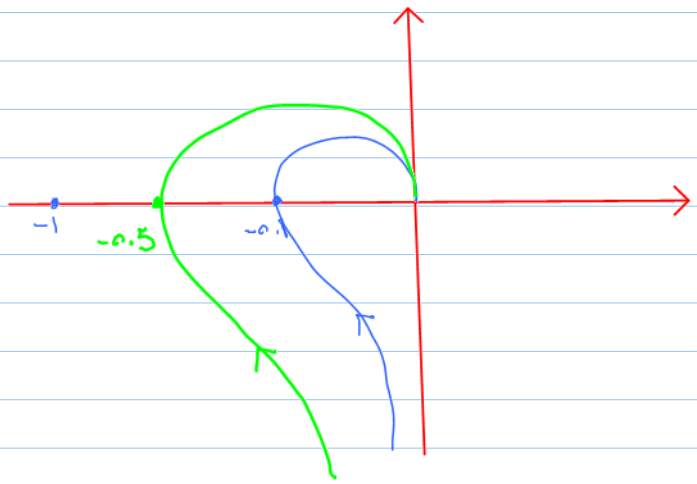


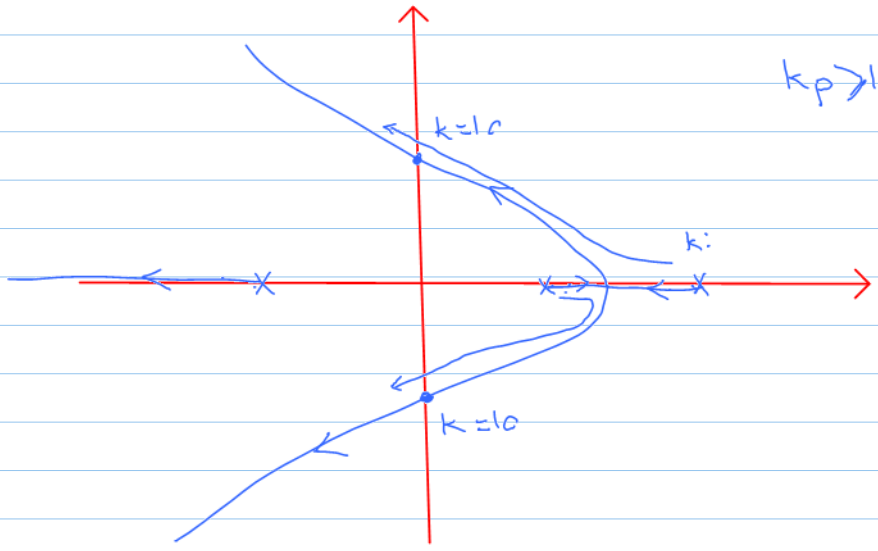
$e_{ss} = 0.5 \rightarrow$ $e_{ss} = 0$ $e_{ss} = 0.1$



G.M = 10 →

G.M = 2





$k_p \geq 10$

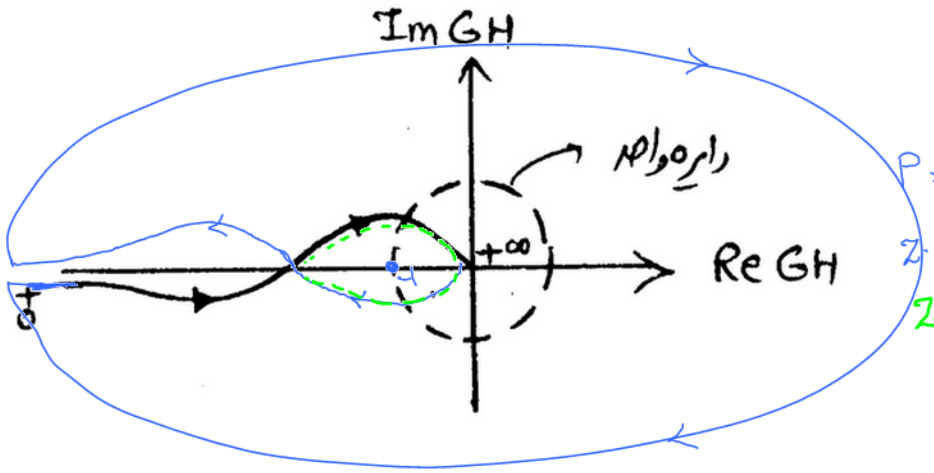
نمودار قطبی مربوط به یک سیستم کنترلی مینیمم فار با فیدبک واحد منفی ترسیم شده است. جهت دستیابی به خطای حالت ماندگار صفر به ورودی شیب، ساده‌ترین جبران‌ساز سری کدام است؟

۱) تناسبی

۲) PID

۳) PI

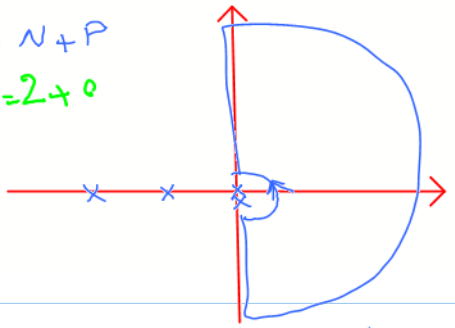
۴) PD



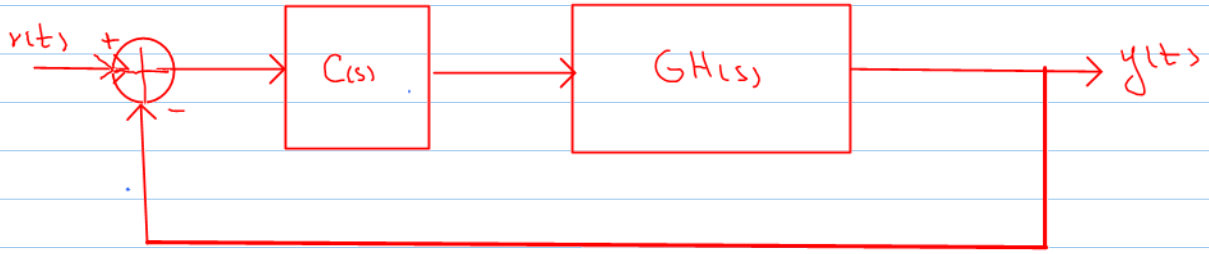
P = 0

$Z = N + P$

$Z = 2 + 0$



خواسته مسأله ← $e_{ss} = 0$ به ورودی شیب



$e = r - y$ = خطای تعریف

$x = r - y$ = شکل

→ حلقه باز

نوع سیستم = تعداد قطب‌های دیجیتال GH = ? 2 یا 4 یا 6 ....

نوع ورودی = 1

$x \geq 2$ > نوع ورودی

به شرط پایداری $e_{ss} = 0$

نقطه بحرانی $GH(s) = -1$ → $1 + GH(s) = 0$ → Δ بدون صفر

$Z = 2$ → ناپایدار → $e_{ss} = \infty$

وضعیت مطلوب ← $e_{ss}=\infty$ ← $e_{ss}=0$ ← پایدار سازی

ساده‌ترین کنترلری که بتواند سیستم را پایدار کند؟

P → $C(s) = k_p$

$\Delta(s) = 1 + k_p GH(s) = 0 \rightarrow GH(s) = \frac{-1}{k_p}$ نقطه بحرانی

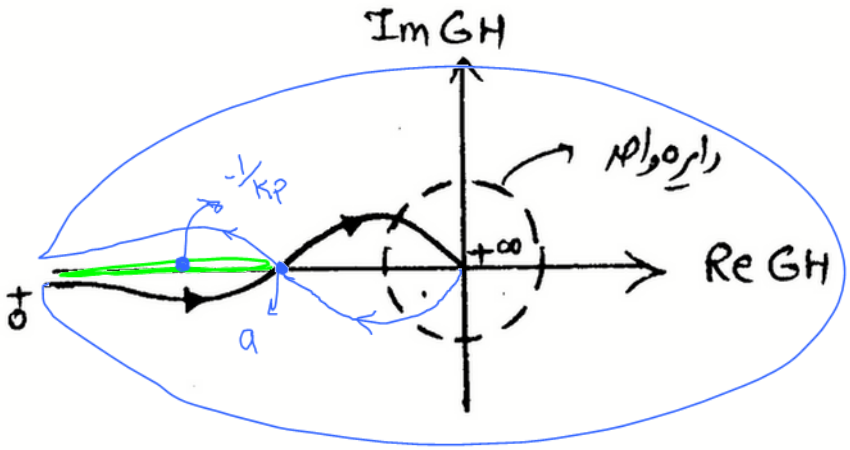
نمودار قطبی مربوط به یک سیستم کنترلی مینیمم فار با فیدبک واحد منفی ترسیم شده است. جهت دستیابی به خطای حالت ماندگار صفر به ورودی شیب، ساده‌ترین جبران‌ساز سری کدام است؟

۱) تناسبی

۲) PID

۳) PI

۴) PD



$\frac{-1}{k_p}$

$Z = 0 \rightarrow Z = N + P \rightarrow N = 0$ هدف

k_p را طوری انتخاب کنیم که N برابر ۰ شود.

کافی است تا k_p را طوری انتخاب کنیم که $\frac{-1}{k_p}$ در ناحیه سبز رنگ باشد ← پایدار ← $e_{ss}=0$

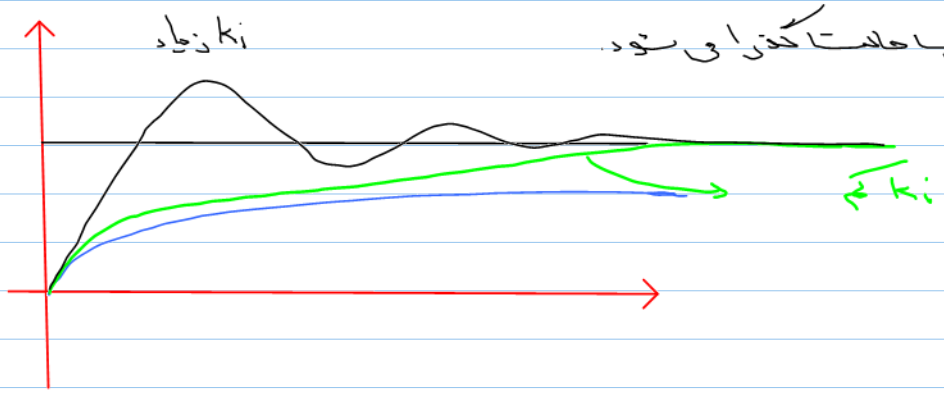
$\frac{-1}{k_p} < a \rightarrow \boxed{k_p < \frac{-1}{a}}$

② کنترلر انتگرالی - تناسبی: PI

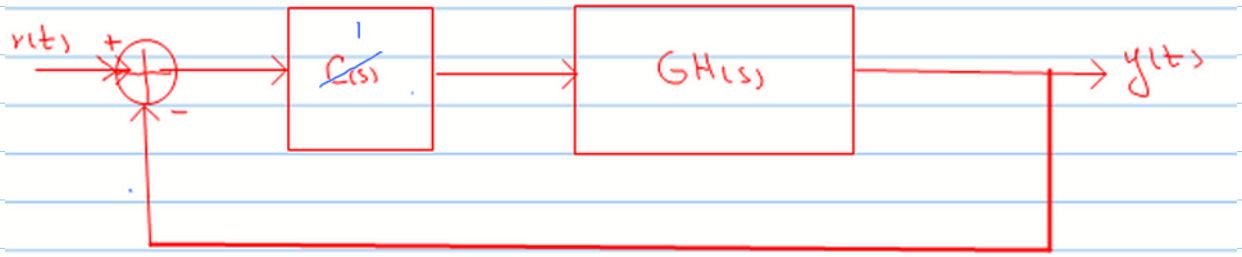
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p + \frac{1}{T_i s}$$

* یک قطب در مبدأ و یک صفر در $-\frac{k_i}{k_p}$ اضافه می‌کند.
* هر انتگرال گیر (I) نوع سیستم را یک واحد افزایش می‌دهد.
* چون نوع سیستم را افزایش می‌دهد لذا می‌تواند خطای حالت دائم را حذف کند.
* پاسخ حالت گذرا تخریب می‌کند.

قطب در مبدأ باعث تخریب حالت گذرا می‌شود.



* خطا را کاهش داده و پایداری سیستم را کم کاهش می‌دهد.
* قابلیت دنبال استاتیکی را بهبود می‌دهد.
* " " " فوری " " " .

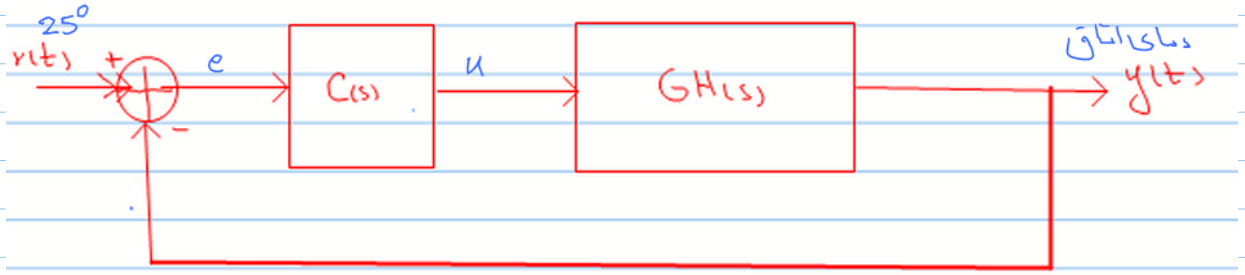


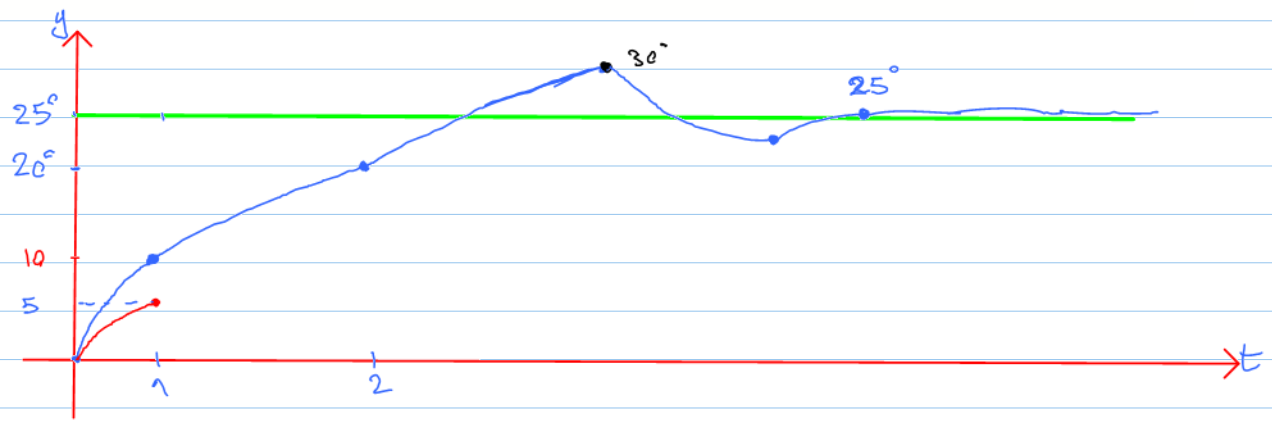
$$GH(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$ نوع سیستم = 1

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

حلقه باز $= \frac{k_p s + k_i}{s} \times \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{(k_p s + k_i)(s+1)}{s^2(s+2)}$ نوع سیستم = 2

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^2}$$ PII





$u = C(s) \times e \Rightarrow U(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) e(s) \rightarrow U(s) = k_p e(s) + k_i \frac{e(s)}{s}$

$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau \qquad k_p = 5 \quad k_i = 1$

$u_1 = 5(25) + 1 \times (25 + 0) = 150° \qquad e_1 = 25$

$u_2 = 5(15) + 1 \times (15 + 25) = 115° \qquad e_2 = 15$

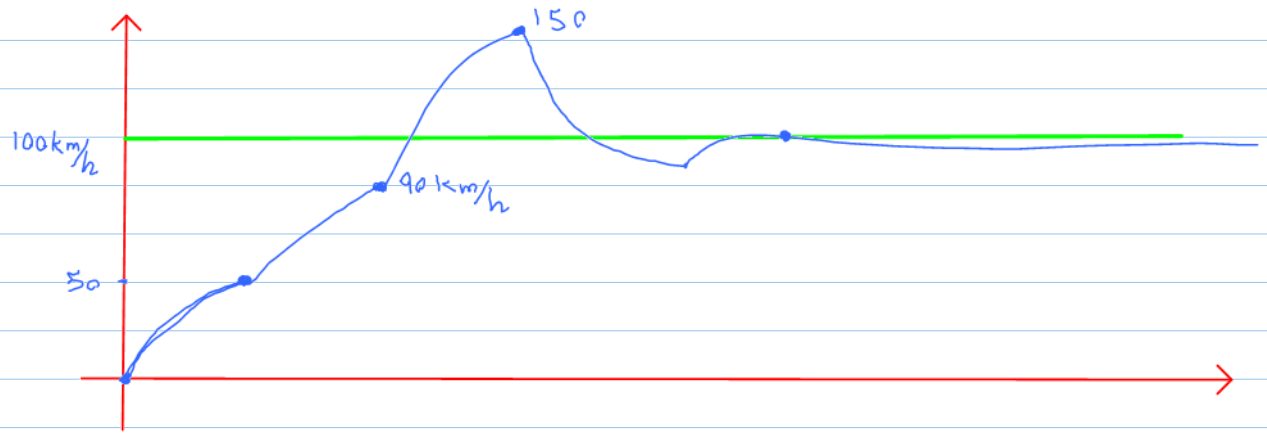
$u_3 = 5(5) + 1(5 + 25 + 15) = 70° \qquad e_3 = 5$

$u_4 = 5(-5) + 1(-5 + 5 + 15 + 25) = 15° \qquad e_4 = -5$

u_5 : $\qquad e_5 = 5°$

$u_6 = 5 \times 0 + 1(0 + 5 + -5 + 5 + 15 + 25) = 45° \qquad e_6 = 0$

$u_7 = 5 \times 0 + 1(0 + 0 + 5 + -5 + 5 + 15 + 25) = 45°$



PI ← آدم کندی

$e_1 = 100\,km/h$ ← بدون کاز = 5

$e_2 = 50 + 100 = 150\,km/h$ ~ ~ = 10

$e_3 = 10 + 50 + 100 = 160$ ~ ~ = 12

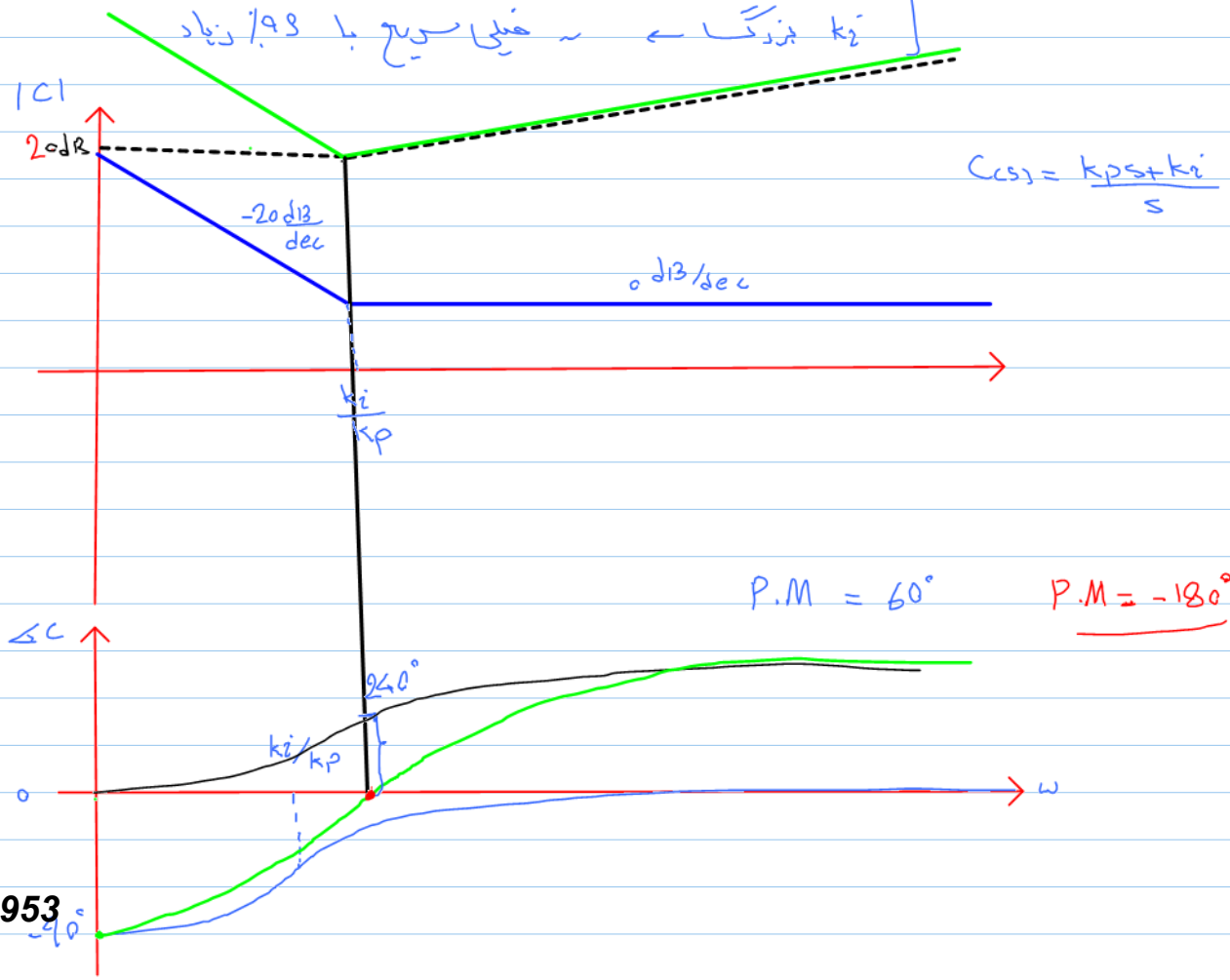
$e_4 = 120$ ~ ~ = 10

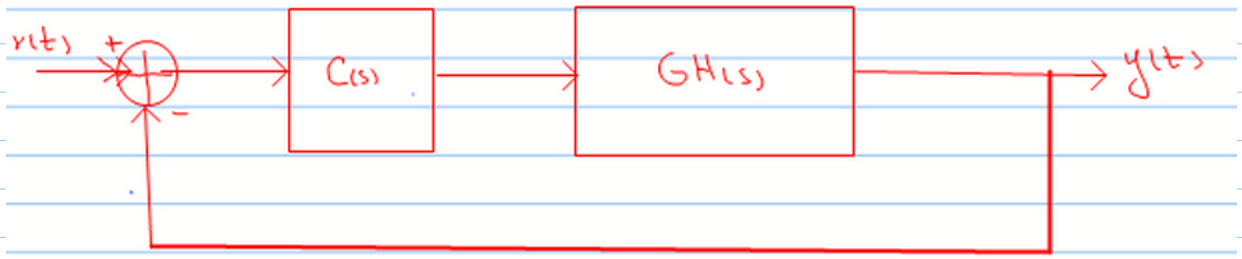
$e_5 =$ ~ ~ = 8

PI ← پاسخ کندی

k_i خیلی کم ← پاسخ تند

k_i بزرگ ← ~ خیلی سریع با 98٪ زیاد





$|CGH| = |C|\,|GH| \rightarrow 20\log|CGH(s)| = 20\log|C| + 20\log|GH|$

$\angle CGH = \underbrace{\angle C}_{\text{عددي فقط}} + \angle GH$

③ کنترلر PD

$C(s) = k_p + k_D s$

* حالت گذرا را بهبود می دهد. (کاهش Mp ، کاهش Ts و ...)
* پایداری سیستم را افزایش می دهد.
* حد فاز را افزایش می دهد.
* روی پاسخ دائم تأثیر بسیار ناچیزی دارد.
* نویز پذیری سیستم را افزایش می دهد.
* قابلیت دفع اغتشاش را کاهش داده یا تأثیری ندارد.
* پهنای باند سیستم را زیاد می کند.

$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_D s$

④ کنترلر PID.

* تمام مزایای P، PI، PD را با هم دارد.
* پاسخ حالت گذرا را بهبود می‌دهد.
* " " " دائم " " .
* پایداری سیستم را " "
* حد فاز و حد بهره را زیاد می‌کند.
* قابلیت دفع اغتشاش را بهبود می‌دهد.
* نویز پذیری را کاهش می‌دهد.

	حالت گذرا	حالت ماندگار
P	✗	✓
PI	✗	✓
PD	✓	—
PID	✓	✓

نیاز مندی ها:

- کاهش خطای ماندگار ← P، PI، PID
- حذف " " ← PI، PID
- کاهش OS% و T_s و ... ← PD، PID
- دفع اغتشاش ← P، PI، PID
- حذف نویز ← PI، PID

روش مرای کنترل:

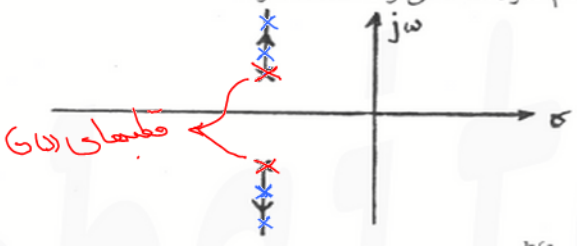
① امکان پایدار سازی حلقه بسته ← به هدف میزو قطب ناپایدار دست یابد.

② تأمین نیازمندیهای ساده

③ سادگی

برق ۸۱

نمودار مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد بصورت زیر است. برای اینکه پاسخ پله این سیستم بدون جهش بوده و خطای حالت دائمی آن صفر باشد، از کدام کنترل کننده می‌توان استفاده نمود؟



۱) P

۲) PI

۳) PID

۴) PD



خواسته مسأله ←
- $\%OS = 0$
- $e_{ss} = 0$

وضعیت فعلی ←
- $\%OS > 0$ ← زیرمیرا ← کاهش $\%OS$
- $0 < e_{ss} < \infty$ ← حذف خطای دائمی

PID ← PID یا PD

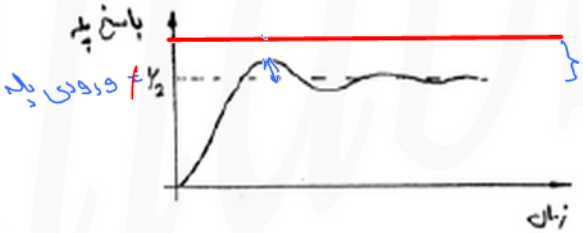
PID ← PID یا PI

خطای تعریفی = $y - r$

شکل $= y - r$

$y - r \rightarrow$ حلقه باز $\rightarrow$ نوع ورودی $= 0$ $=$ نوع سیستم $= 0 \rightarrow$

پاسخ پله یک سیستم حلقه بسته بصورت شکل مقابل است. برای تبدیل سیستم حلقه بسته به یک سیستم فوق میرا با خطای حالت دائمی صفر مناسب‌ترین کنترل کننده عبارت است از:



۱) P

۲) PI

۳) PD

۴) PID

خواسته‌ها ← فوق میرا ٪۵ = ۰ ← $e_{ss}=0$

وضعیت فعلی ← ٪۵ > ۰ ← ٪۵ = ۰ ← $e_{ss}=0$

نیازمندی ساده ← کاهش ٪۵ ← PD یا PID

با وزن $e_{ss}\neq 0$

وضعیت فعلی ← ٪۵ > ۰ ← کاهش ٪۵ ← PD یا PID

$e_{ss}>0$ ← حذف خطای دائمی ← PI یا PID

PID ⇐

جلسه 64 کنترل فعال

* امکان پایدارسازی ←

هرگاه در سوالی از امکان پایدارسازی پرسید به 2 مورد توجه کنید.

1. حذف صفر و قطب ناپایدار باعث ناپایداری داخلی می‌شود.
2. برای حل این نوع سوالات بهتر است از مکان هندسی یا جدول R-H استفاده کنید.

برق ۸۱

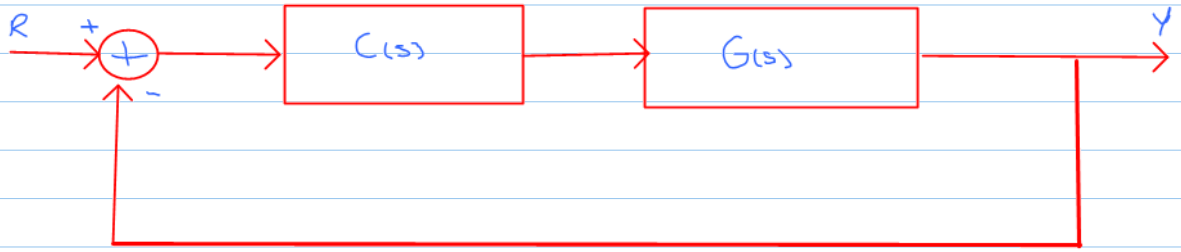
باتوجه به سیستم، $k > 0$ و $G(s) = \frac{k(s-1)}{(s-2)(s+2)}$ کدام یک از جبرانسازهای پیشنهادی، امکان پایدارسازی سیستم حلقه بسته را دارد؟

۱) $G_1(s) = \frac{s-2}{s-1}$ ✗

۲) $G_2(s) = \frac{s+2}{s-2}$

۳) $G_3(s) = \frac{s+2}{s+5}$

۴) $G_4(s) = \frac{s+1}{s+10}$

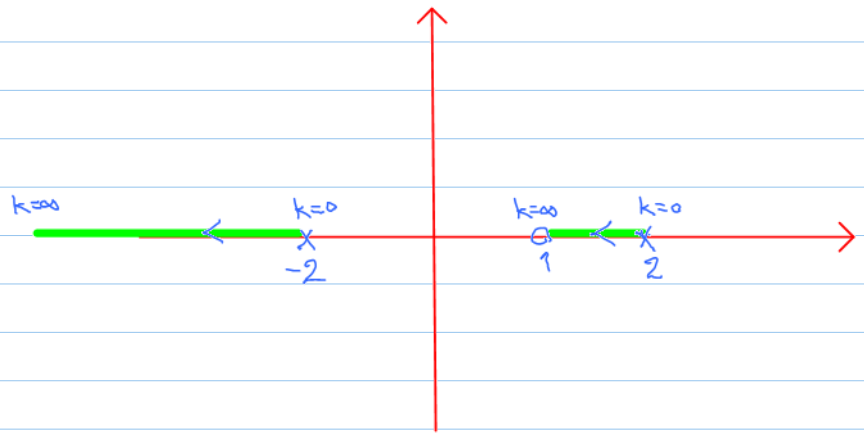


$$\frac{Y}{R} = \frac{CG}{1+CG} \rightarrow$$

در بدست آوردن $C(s)G(s)$ اگر یک قطب ناپایدار حذف شود سیستم کلی ناپایدار است.

۱) $C(s)G(s) = \frac{s-2}{s-1} \times \frac{k(s-1)}{(s-2)(s+2)}$ ✗

از بین گزینه‌های 2، 3 و 4 به ازای یک مقدار $k>0$ سیستم حلقه‌بسته پایدار می‌شود؟



بدون کنترلر $k>0$

محاسبات $= -<0$

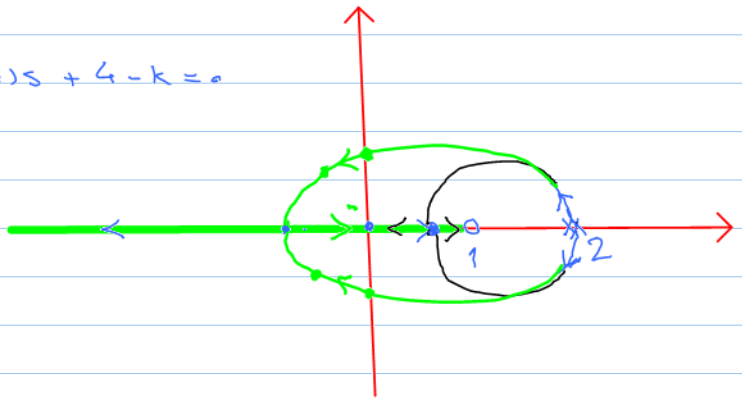
$$L(s) = G(s) = \frac{k(s-1)}{(s-2)(s+2)}$$

به ازای $k=0 \rightarrow \infty$ همواره یک قطب حلقه‌بسته سمت راست می‌افتد.

برای پایدارسازی باید دست‌کم یک ریشه سمت راست به سمت چپ محور $j\omega$ بکشیم.

2) $C(s) = \frac{s+2}{s-2}$ $\quad s^2+(k-4)s+4-k=0$

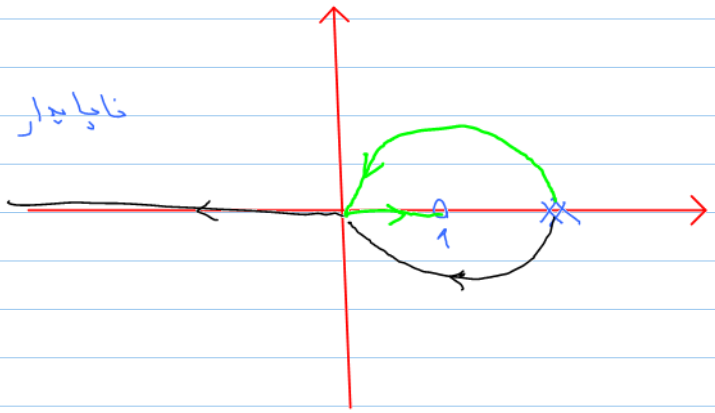
$L(s) = \frac{k\,s-1}{(s-2)^2}$



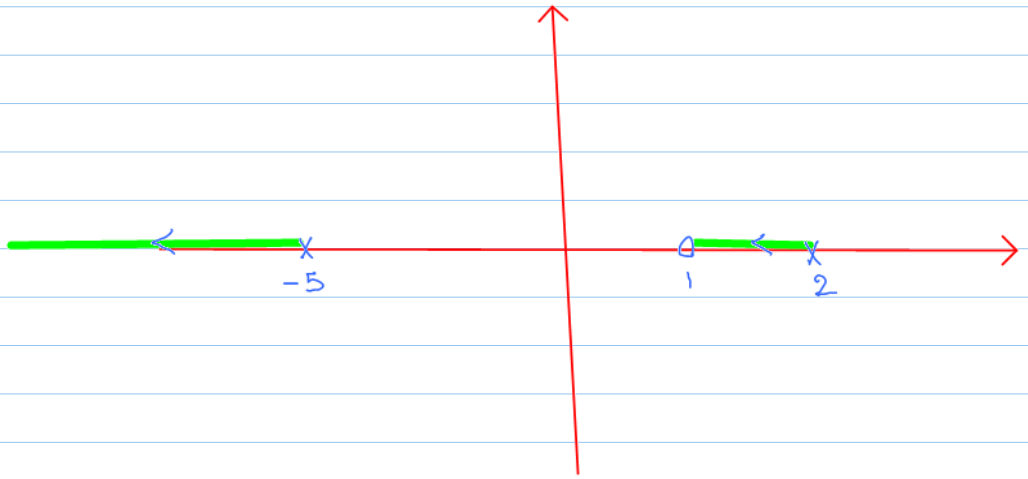
$k = \frac{(s-2)^2}{(s-1)}$

$\frac{dk}{ds} = \frac{2(s-2)(s-1)-(s-2)^2}{(s-1)^2} = 0 \rightarrow \frac{s^2-2s}{(s-1)^2} = 0 \rightarrow s = 0, 2$

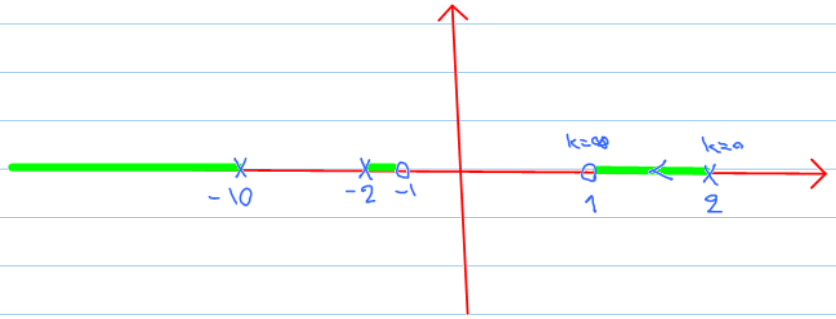
$k=0 \rightarrow \infty$ ناپایدار ← شاخه سبز هوا ← ستاره

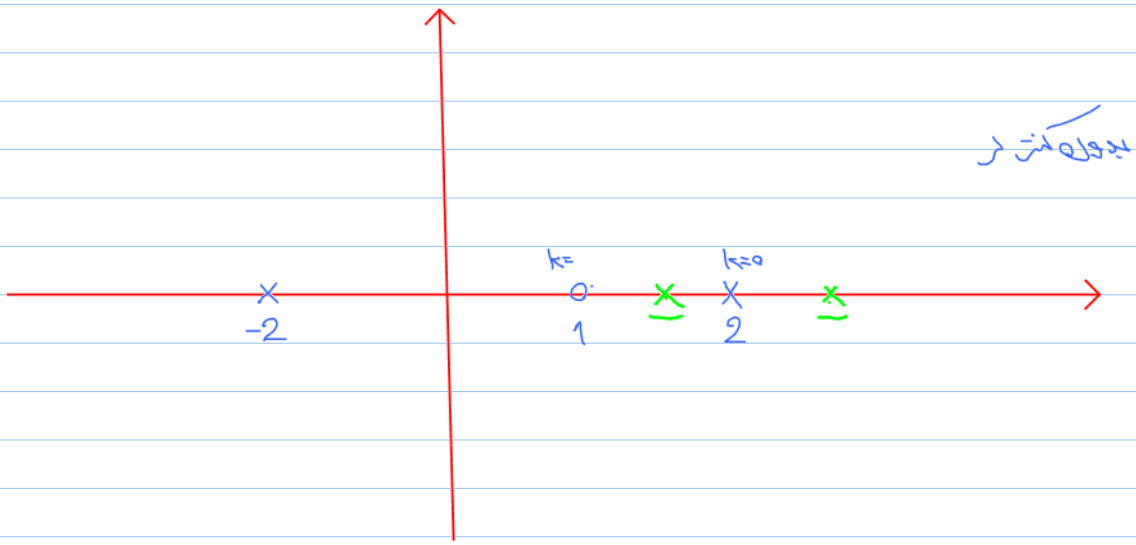


3) $C(s) = \frac{s+2}{s+5}$ $\quad L(s) = \frac{k\,(s-1)}{(s-2)(s+5)}$

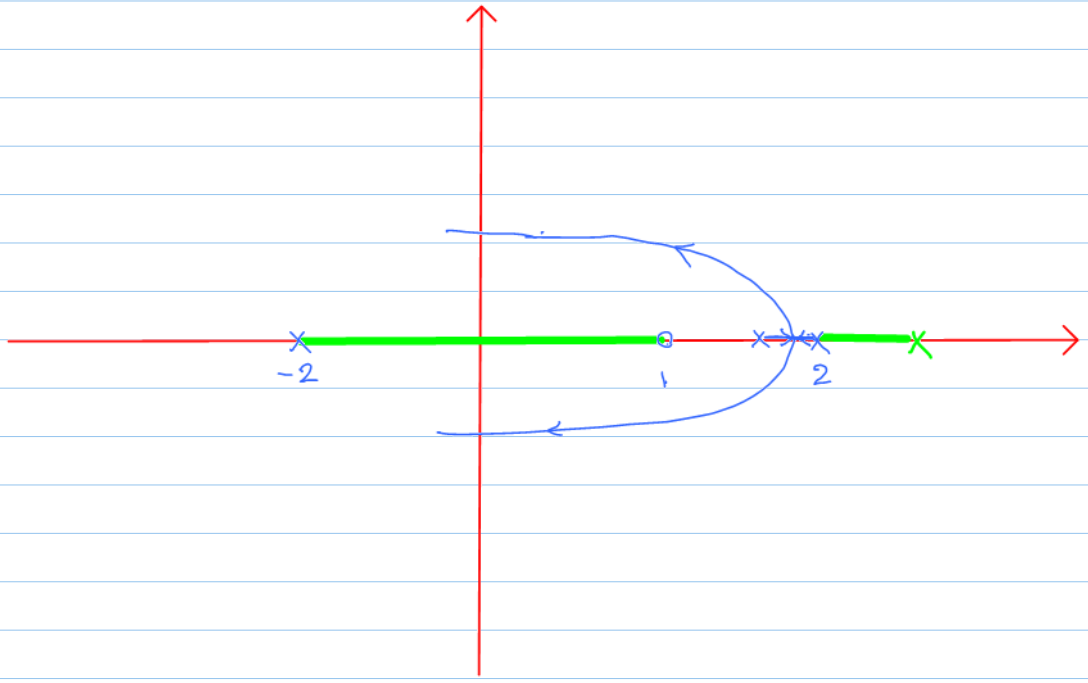


4) $C(s) = \frac{s+1}{s+10}$ $\quad L(s) = \frac{k\,(s-1)(s+1)}{(s-2)(s+2)(s+10)}$





① باید کنترلر مکان قطب در ... را اضافه کند.

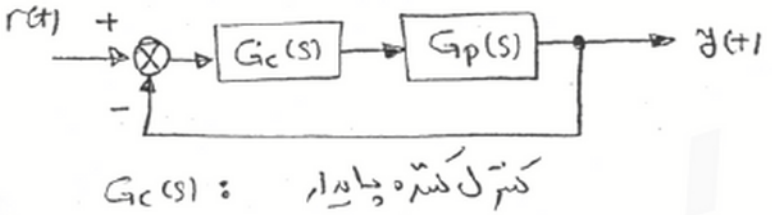


باید کاری کنیم که در سمت راست بین قطب و صفر جزء مکان نباشد.

② از بین گزینه های فوق، پایداری را با R-H چک کنید.

برق ۹۴

کدام یک از سیستم‌های زیر را نمی‌توان توسط یک کنترل کننده پایدار کنترل و پایدار نمود؟



$G_c(s)$: کنترل کننده پایدار

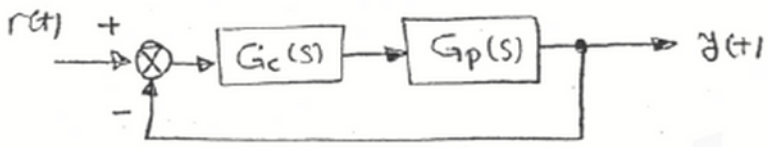
۱) $\frac{s-1}{(s-2)(s-4)}$

۲) $\frac{s+1}{(s-2)(s-4)}$

۳) $\frac{s-3}{(s-2)(s-4)}$

۴) هر سه سیستم

کدام یک از سیستم‌های زیر را نمی‌توان توسط یک کنترل کننده پایدار کنترل و پایدار نمود؟



$G_c(s)$: کنترل کننده پایدار → تابع متعارفی G_c معکوس پذیر

۱) $G_p = \frac{s-1}{(s-2)(s-4)}$

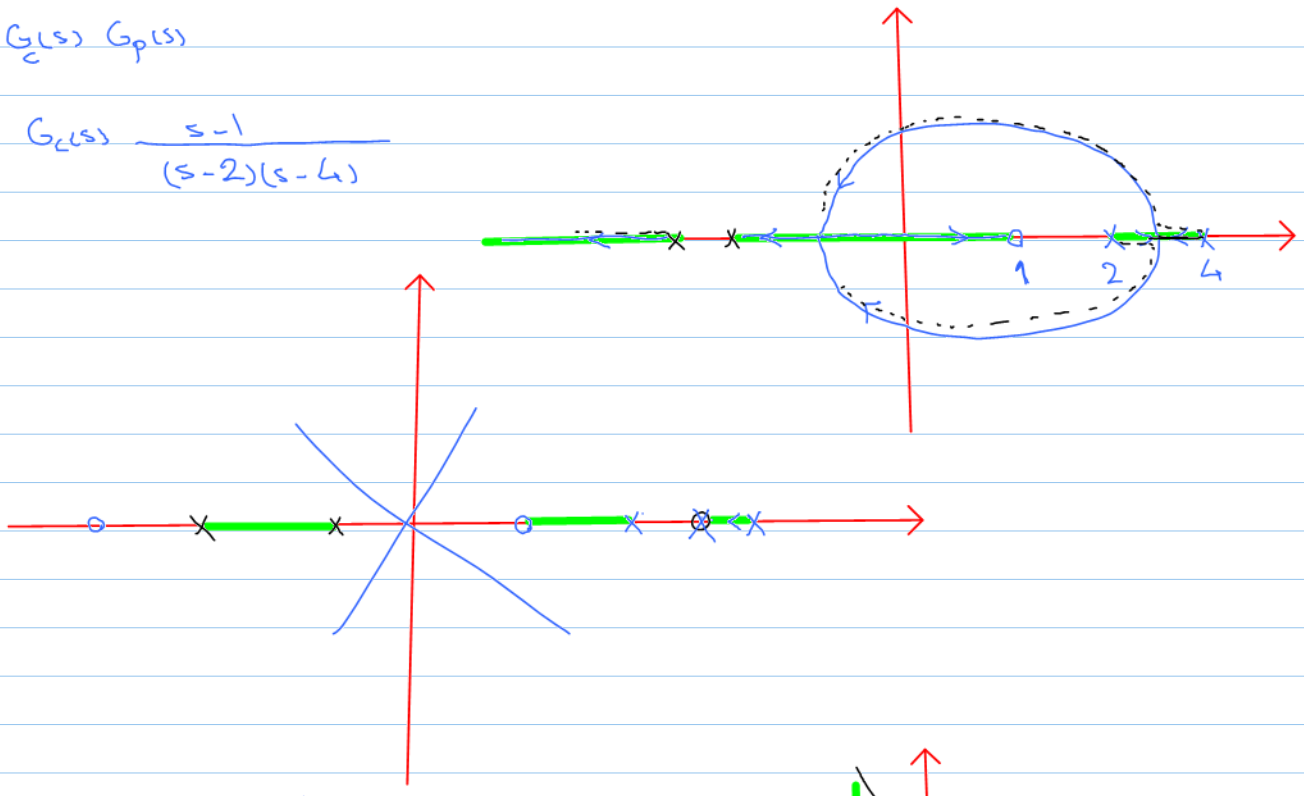
۲) $G_p = \frac{s+1}{(s-2)(s-4)}$

۳) $G_p = \frac{s-3}{(s-2)(s-4)}$

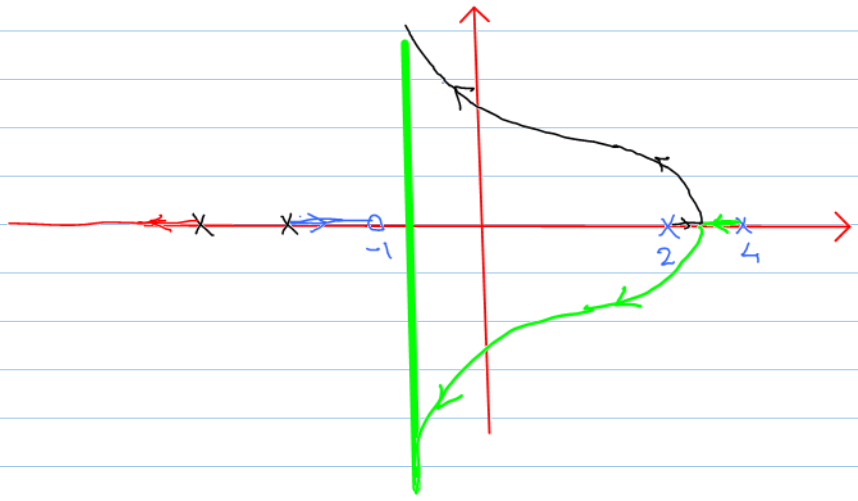
۴) هر سه سیستم

$L(s) = G_c(s)\, G_p(s)$

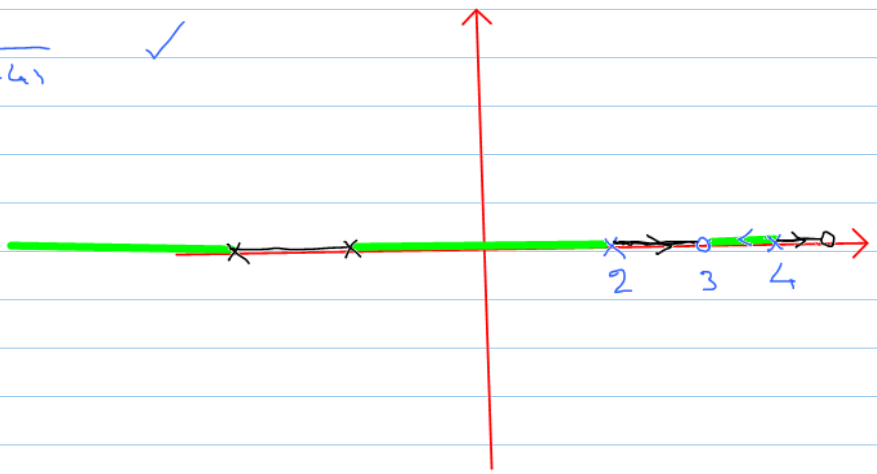
1) $L(s) = G_c(s)\, \frac{s-1}{(s-2)(s-4)}$



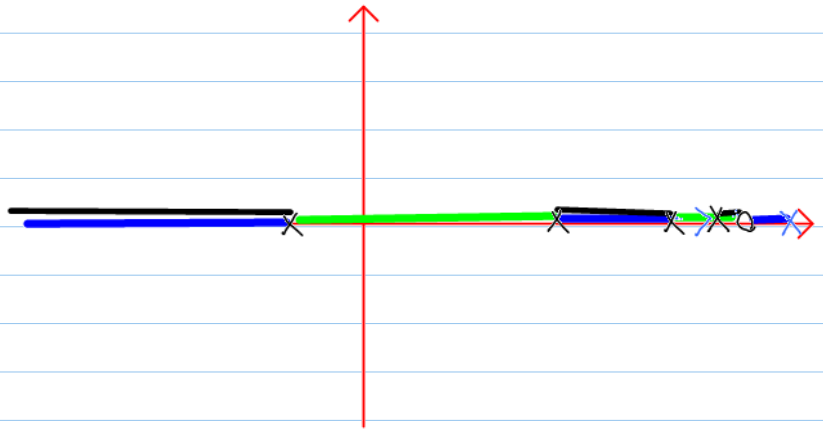
2) $L(s) = G_c(s)\, \frac{s+1}{(s-2)(s-4)}$



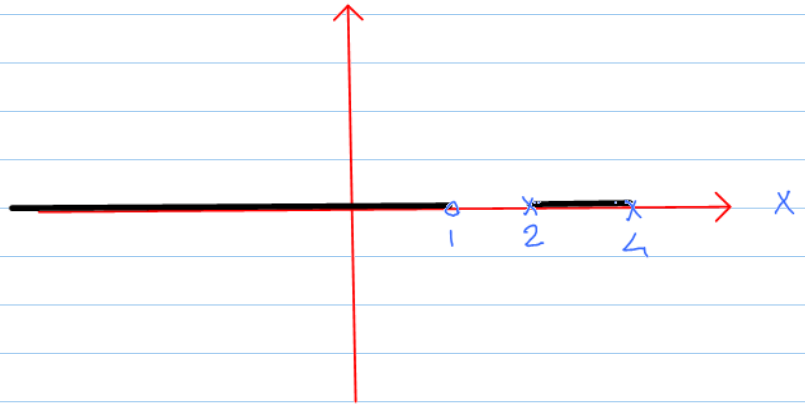
3) $L(s) = G_c(s)\, \frac{s-3}{(s-2)(s-4)}$ ✓

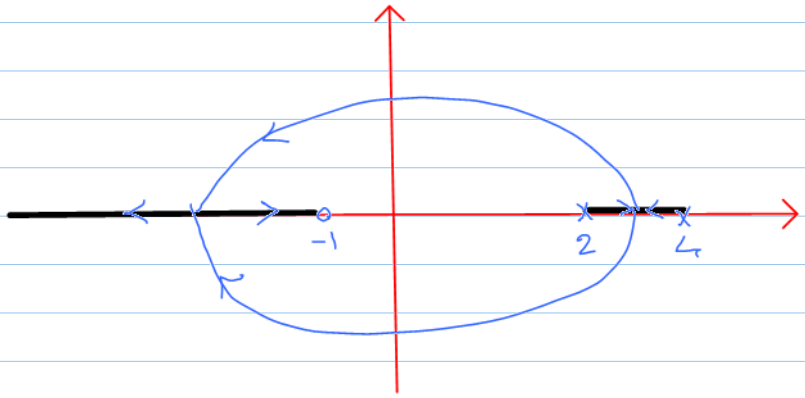


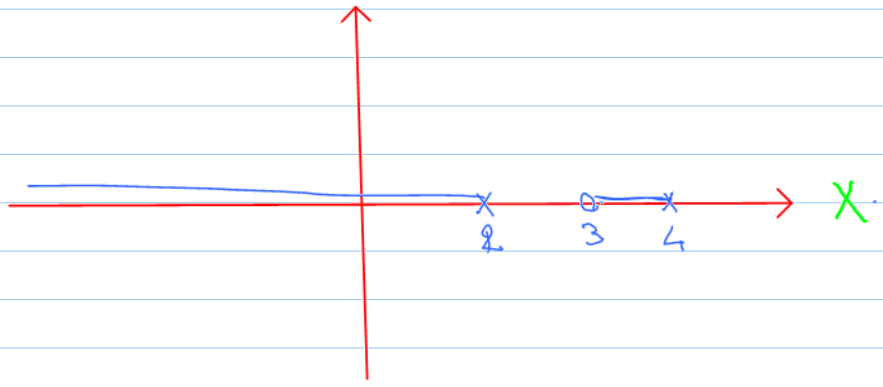
* هرگاه درست راست محور jω ، بین یک صفر و قطب جز دسکان باشد (روی محور حقیقی) یعنی آن سیستم همواره ناپایدار است و برای پایدار سازی باید حتماً یک قطب سمت راست را طوری اضافه نمود که بین صفر و قطب سمت راست جز دسکان نباشد.



حل سوال قبل:

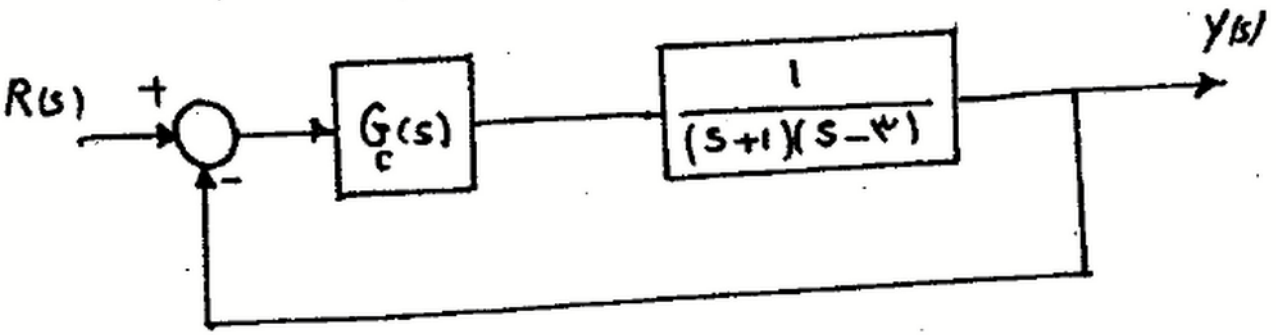






کنترل حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید که در آن هدف، طراحی کنترل کننده $G_c(s)$ است آن چنان که سیستم حلقه بسته پایدار باشد.

از کنترل کننده‌های داده شده می‌تواند این هدف را برآورده سازد؟



ل کننده تناسبی با تابع $G_c(s) = 4$

ل کننده مشتق‌گیر باتابع تبدیل $G_c(s) = 4s$

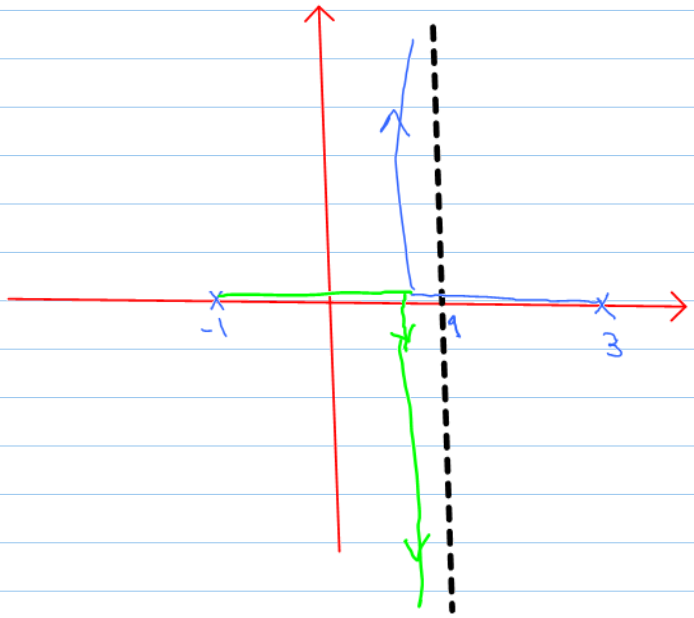
ل کننده انتگرال‌گیر و تناسبی با تابع تبدیل $G_c(s) = \frac{4s+5}{s}$

کننده مشتق‌گیر و تناسبی با تابع تبدیل $G_c(s) = 4s + 5$

گروه آموزشی مهندس فضلی
تدریس خصوصی دروس دانشگاهی

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-3)}$$

$$\text{مجانب} = \frac{3 + -1 - 0}{2 - 0} = 1$$

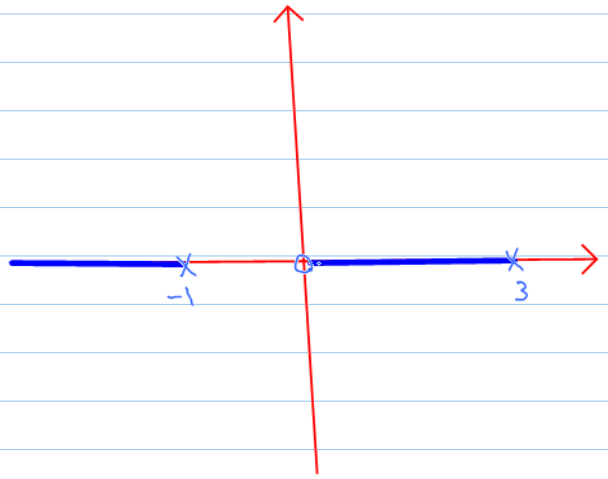


برای پایدار سازی باید مجانب را به سمت چپ ببریم.

1) $G_c(s) = 4$ $\quad L(s) = \frac{4}{(s+1)(s-3)}$

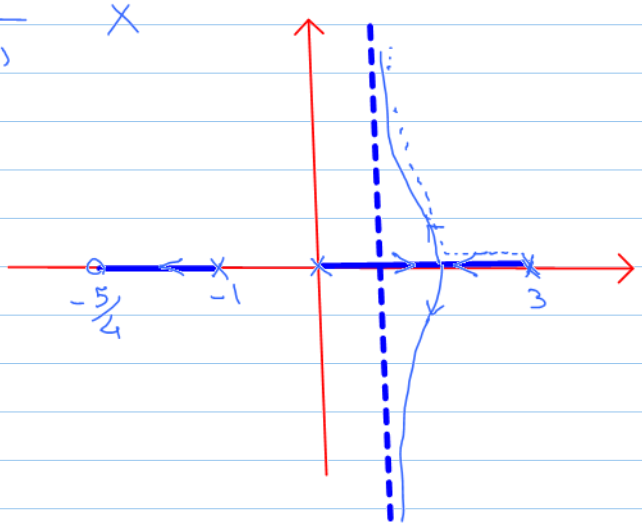
$$\text{مجانب} = \frac{3 + -1 - 0}{2 - 0} = 1 \quad X$$

2) $G_c(s) = 4s$ $\quad L(s) = \frac{4s}{(s+1)(s-3)}$ X

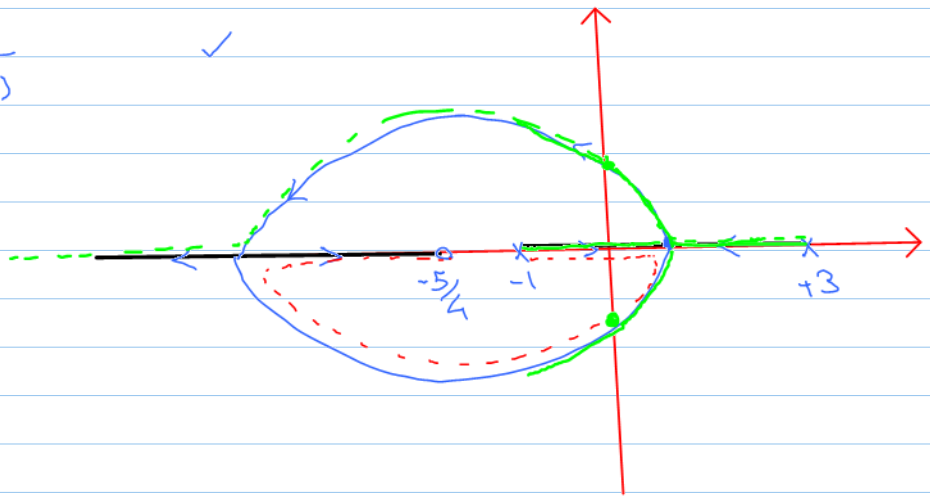


3) $G_c(s) = \frac{4s+5}{s} \rightarrow L(s) = \frac{4s+5}{s(s+1)(s-3)}$ X

$$\text{مجانب} = \frac{3 + 0 + -1 - (-5/4)}{3 - 1} = 1 + \frac{5}{8}$$



4) $L(s) = \frac{4s+5}{(s+1)(s-3)}$ ✓



روش دوم ← سیستم حلقه‌بسته بدون کنترلر ناپایدار است.

	پایداری	
$G_c(s) = 4$	X	P
$G_c(s) = 4 + \frac{5}{s}$	X	PI
$G_c(s) = 4s+5$	✓	PD ✓
$G_c(s) = 4s$	✓	D X

$\Delta(s) = 1 + G_c(s)\,G(s) = 0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + 4s\,\frac{1}{(s+1)(s-3)} = 0$

$\Delta(s) = s^2 + 2s - 3 = 0$ ناپایدار

برق ۹۷

سیستمی با تابع تبدیل حلقه‌باز به‌صورت $G(s)=\frac{۱}{(s-۱)(s+۱)(s+۲)}$ را در نظر بگیرید. با کدام‌یک از کنترل‌کننده‌های زیر، سیستم حلقه‌بسته می‌تواند پایدار شود؟

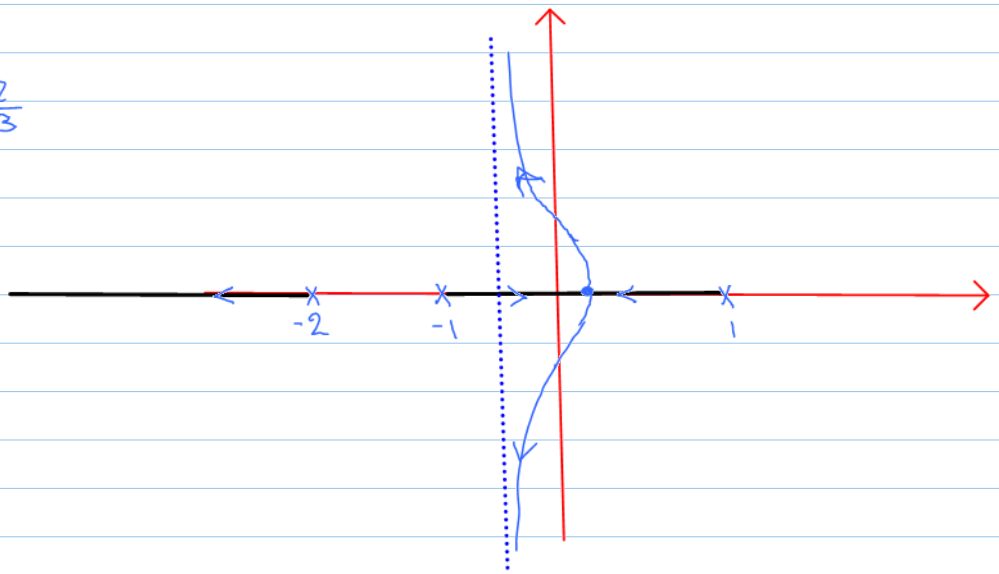
۱) $k(s)=k\frac{s-۱}{s+۳}$

۲) $k(s)=k\frac{s+۱}{s+۳}$

۳) $k(s)=k\frac{s+۲}{s+۴}$

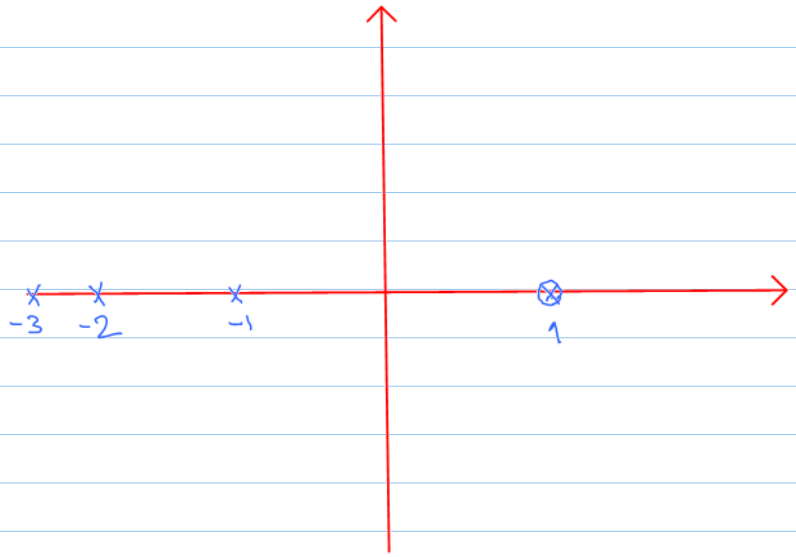
۴) $k(s)=k\frac{s+۳}{s+۱}$

مرکز ثقل $= \frac{-2-1+1}{3-0} = \frac{-2}{3}$

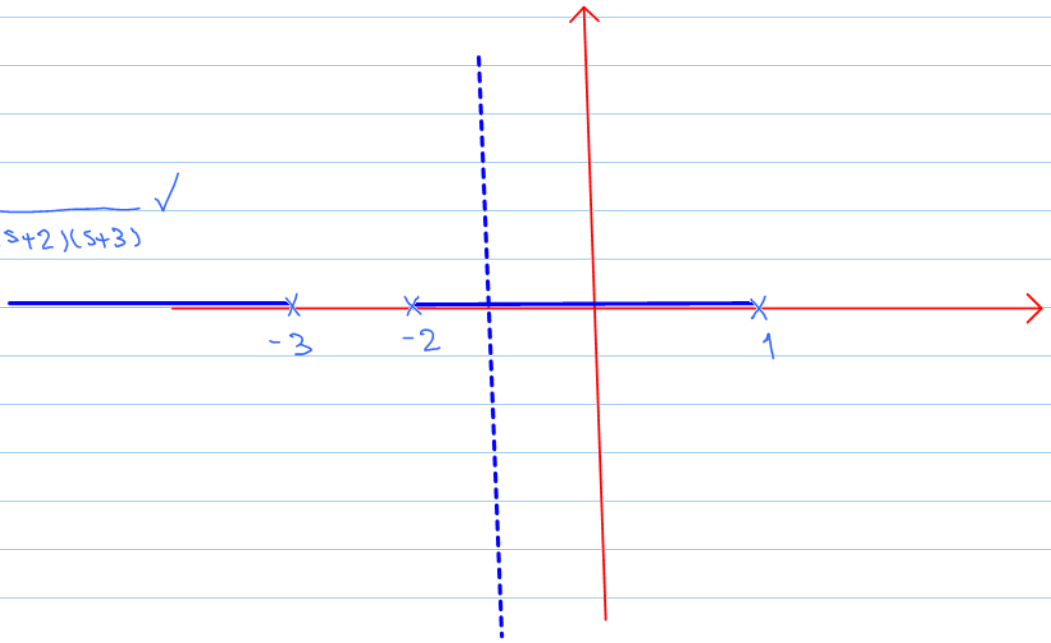


با کمک مرکز P هم وقتی این سیستم را جابجا کرد.

$k(s)\,G(s) =$ حذف صفر و قطب مشترک ست راست



2) $k(s)\,G(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ ✓

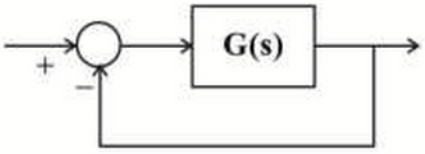


3) $k(s)\,G(s) = \frac{k}{(s-1)(s+3)(s+4)}$ ✓

تمرین ← با R-H هم حل کنید.

برق ۹۷

در سیستم فیدبک واحد زیر با دیاگرام قطبی داده شده، چه کنترل‌کننده‌ای برای خطای ماندگار صفر به ورودی پلهٔ واحد مناسب است؟ ($G(s)$ پایدار است)

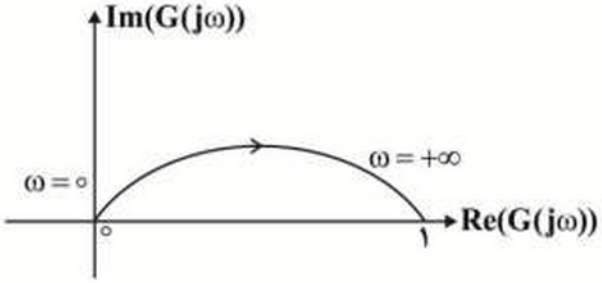


۱) PII

۲) P

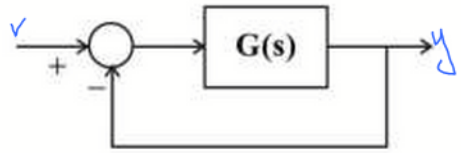
۳) PI

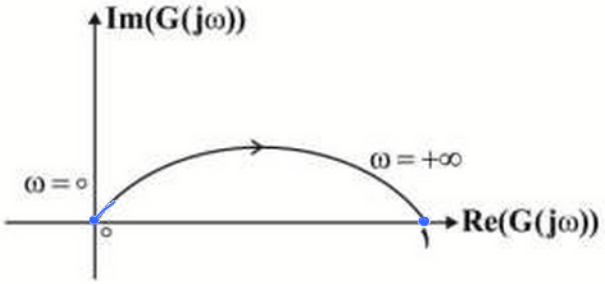
۴) امکان طراحی چنین کنترل‌کننده‌ای وجود ندارد.



خواسته: خطای ماندگار = ۰

ومعنیت خطی:





قطب در مبدأ ندارد ← $G(s) = sx f(s)$

خطای کل $= r - y$

→ حالت پایا

تعریفی $= r - y$

نوع سیستم $= ۰$ ⟺ نوع ورودی $= ۰$ → $\infty > e_{ss} > ۰$

نیازمندی ← نوع ورودی < نوع سیستم به شرط پایداری

نوع سیستم = ۰ یا ۱ یا ۲ ....

باید نوع سیستم اضافه شود ← هر I یعنی یک قطب در مبدأ

PI → $C(s) = \frac{kps + ki}{s}$

$L(s) = C(s)\,G(s) = \frac{kps + ki}{s} \times s \times f(s) = (kps + ki)\,f(s)$

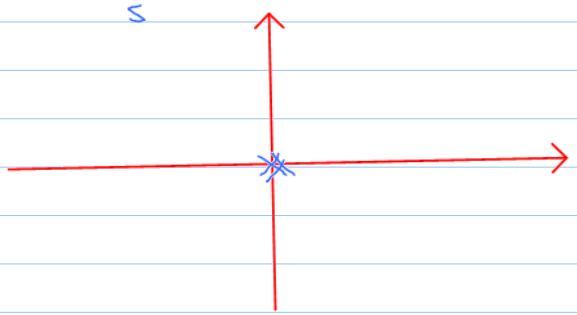
نوع سیستم $= ۰$ ✗

PII → $C(s) = kp + \frac{ki}{s^2} = \frac{kps^2 + ki}{s^2}$

$C(s)$ $G(s)$

$L(s) = \frac{kps^2 + ki}{s^2} \times s\,f(s) = \frac{(kps^2 + ki)\,f(s)}{s}$

نوع سیستم $= ۱$ ✓



در بدست آوردن دیاگرام یک قطب در مبدأ حذف می‌شود.

چون قطب در مبدأ مکرر بوده است یعنی قطب ناپایدار است.

یعنی یک قطب ناپایدار با یک صفر حذف شده است ← ناپایداری داخلی

یا PII شرط پایداری تحقق می‌شود.

«جلسه ۶۷ کنترل خطی»

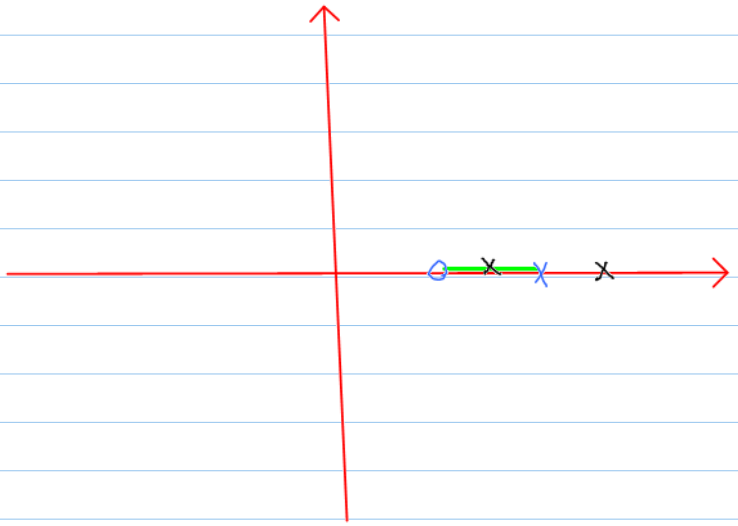
سؤالاتی که در آنها امکان پایدارسازی مطرح میشود؟

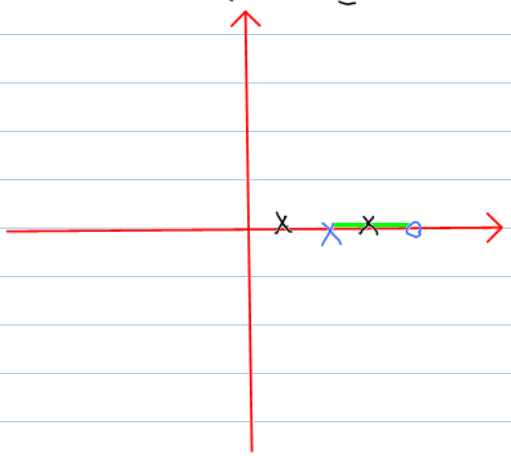
① امکان پایدارسازی سیستم حلقه بسته ② گزینه عدم امکان طراحی کنترلر با مشخصات داده شده

نکته!

* اگر در طراحی کنترلر، تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$، حذف قطب ناپایدار داشته باشیم سیستم ناپایدار خواهد بود.

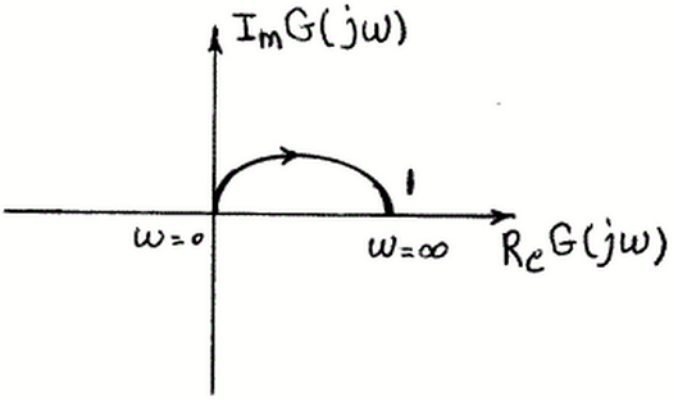
* اگر در مکان هندسی $G(s)H(s)$ در سمت راست محور $j\omega$ بین یک صفر و یک قطب (یا صفر) هندسی باشد، با کنترلر پایدار نمیتوان پایدارسازی انجام داد. برای پایدارسازی حتماً باید کنترلر در سمت راست صفر حلقه باز (در صورت قطب مذکور سمت راست صفر باشد) (در صورت صفر مذکور سمت چپ قطب باشد) باید یک قطب اضافه کند.





دکتری ۹۳ (کاملاً تکراری)

یک سیستم فیدبک واحد با تابع تبدیل مسیر پیشرو $G(s)$ را در نظر بگیرید. دیاگرام قطبی $G(s)$ درشکل زیر نشان داده شده است. مناسب‌ترین کنترل‌کننده برای تأمین خطای حالت دائم صفر به ورودی پلّه واحد کدام است؟

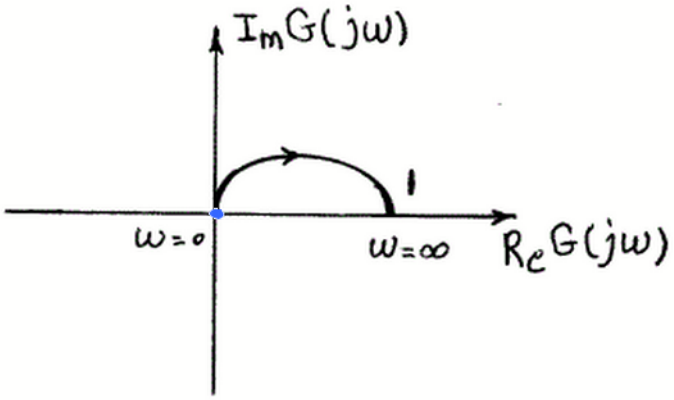


۱) کنترل‌کنندهٔ P

۲) کنترل‌کنندهٔ PI

۳) کنترل‌کنندهٔ PII (با دو انتگرال‌گیر)

۴) چنین کنترل‌کننده‌ای وجود ندارد.



۱) کنترل‌کنندهٔ P

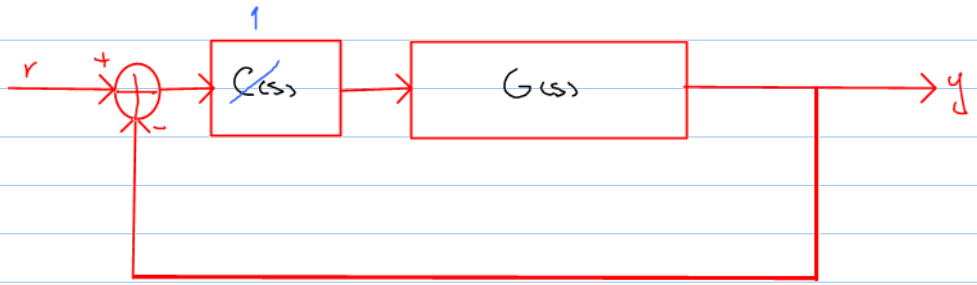
۲) کنترل‌کنندهٔ PI

۳) کنترل‌کنندهٔ PII (با دو انتگرال‌گیر)

۴) چنین کنترل‌کننده‌ای وجود ندارد.

خواسته مسأله: خطای حالت دائم به ورودی پله واحد صفر شود.

و صفر شدن فعلی:



خطای شکل = $r-y$

تعریفی = $r-y$ ← حلقه باز

$e_{ss}=?$ نوع ورودی $=0$ = نوع سیستم $=?=0$ ← $0<e_{ss}$

نقطه شروع ← از ∞ شروع شده ← قطب در مبدأ ندارد ←

← مبدأ شروع شده ← حداقل ⊥ صفر در مبدأ دارد.

$G(s)=s\times f(s)$

و صفر شدن فعلی ← $0<e_{ss}$ ← $e_{ss}=0$

نیاز صفر؟ پایداری و نوع ورودی < نوع سیستم

$e_{ss}=0$ ← پایدار و نوع ورودی < نوع سیستم

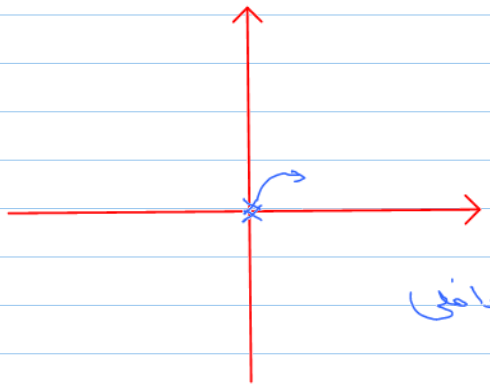
e < تعداد قطب در مبدأ حلقه باز ← نوع سیستم > 0

$$L(s) = C(s)G(s) = C(s)\,sf(s) = \frac{1}{s^2}sf(s) = \frac{1}{s}f(s)$$

نیازمندی ← 2 تا قطب در مبدأ به سیستم اضافه شود. II

قطبهای ناپایدار ← قطبهای سمت راست محور $j\omega$

قطب تکراری روی محور $j\omega$



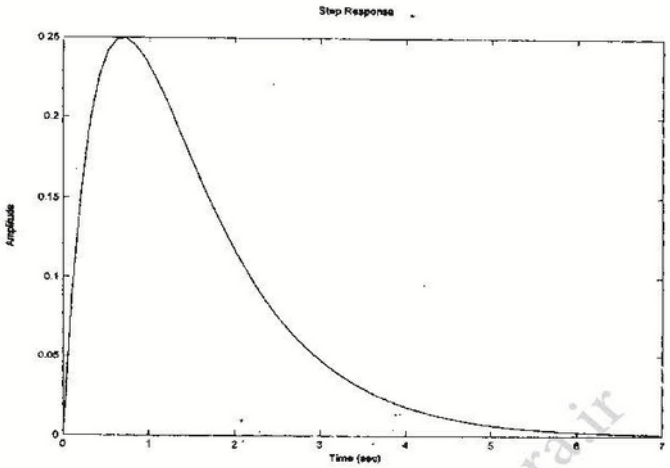
قطب در مبدأ کشنده ناپایدار

یکی از قطبهای ناپایدار با صفر حذف می‌شود ← ناپایدار داخلی

PII ← ناپایدار ← $e_{ss}=\infty$

دکتری ۹۲

سیستم فیدبک واحدی را در نظر بگیرید که پاسخ پله تابع تبدیل مسیر پیشروی آن در شکل روبرو نشان داده شده است.
کدام یک از کنترل کننده‌های زیر قادر است خطای حالت دائم صفر برای ورودی پله را تضمین کند؟



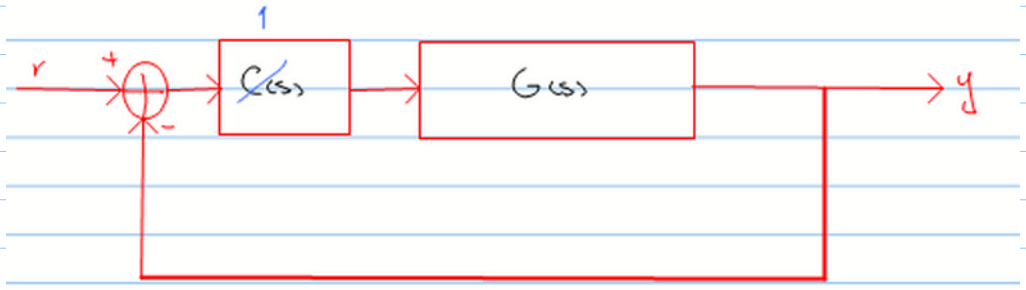
۱) $G(s)=\frac{k(s+1)}{s^2}$

۲) $G(s)=\frac{k}{s^2}$

۳) $G(s)=\frac{k}{s}$

۴) چنین کنترل کننده‌ای وجود ندارد.

خواسته ← خطای دائم به ورودی پله واحد صفر شود.



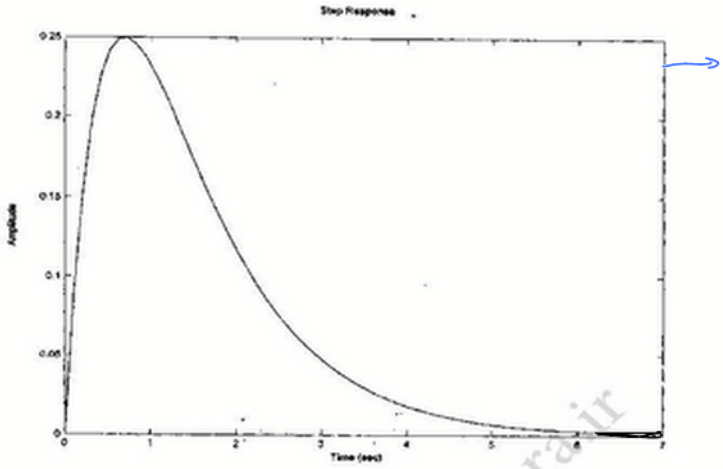
ویژگی فعلی ←

$e = r - y$ خطای شکل

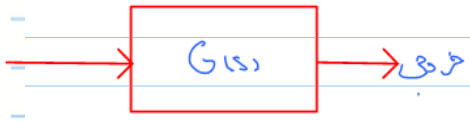
$y = r - e$ ← حلقه‌باز

$y = r - e$ ← تعریف

نوع ورودی = ۰ نوع سیستم = ؟



جامع به $G(s)$



۱) $G(s) = \frac{k(s+1)}{s^2}$

۲) $G(s) = \frac{k}{s^2}$

۳) $G(s) = \frac{k}{s}$

۴) چنین کنترل کننده‌ای وجود ندارد.

قطب $s=0$ ← یعنی اگر ورودی با فرکانس ۰ داده شود خروجی ∞ می‌شود.

ورودی پله ($s=0$) دارای خروجی ∞ شده است ←

یعنی $s=0$ قطب $G(s)$ هست.

نوع سیستم = ۰ = نوع ورودی ← $e_{ss} > 0$

ویژگی فعلی ← $e_{ss} > 0$ ← $e_{ss} = 0$

نیازمندی: نوع سیستم > ۰ و سیستم حلقه‌بسته پایدار باشد.

صفر $s=0$ ← اگر ورودی بازخوانی $s=0$ داده شود خروجی در حالت ماندگار صفر شود.

" " " $s=0$ دارد " " " " " " شده است.

یعنی $s=0$ صفر $G(s)$ است.

$$G(s) = s f(s)$$

جا گذاری

$$L(s) = C(s)\,G(s) = C(s)\,s\,f(s)$$

نیازمندی ← $L(s)$ حداقل یک قطب در مبدأ داشته باشد.

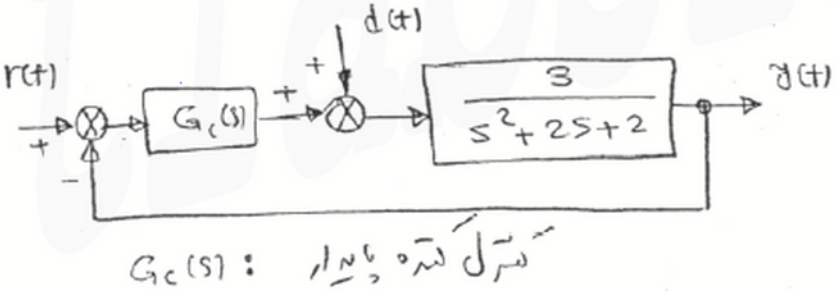
$$C(s) = \frac{k}{s^2} h(s)$$

$$L(s) = \frac{k}{s^2} h(s) \times s f(s)$$ بازهم قطب تکراری در مبدأ (ناپایدار) با صفر حذف می‌شود

و ایجاد ناپایداری می‌کند ← پس دو نیازمندی $0 <$ نوع سیستم و پایداری همزمان تأمین

می‌شود.

در سیستم کنترل مقابل هدف آنست که $G_c(s)$ طوری طراحی شود که خروجی y ورودی شیب واحد را در حضور اغتشاش پله‌ای d ردیابی نماید. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشند؟



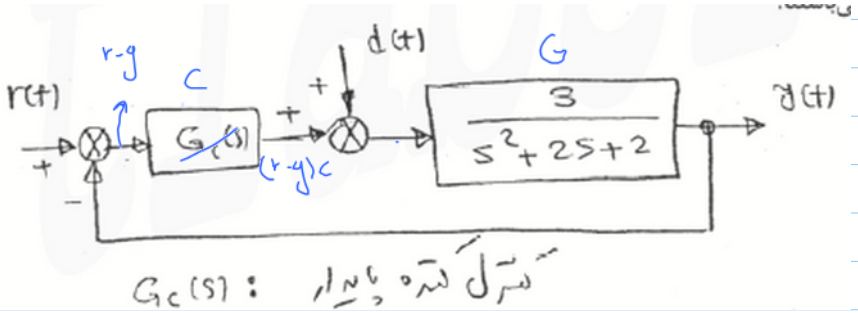
$G_c(s)$: کنترل کننده پایدار

۱) با $G_c(s)=۲$ شرایط احراز می‌گردد.

۲) با $G_c(s)=\frac{۱}{s^۲}$ شرایط احراز می‌گردد.

۳) با $G_c(s)=\frac{۱}{s}$ و بدون خطای حالت ماندگار شرایط احراز می‌گردد.

۴) هیچ جبرانساز پایداری شرایط خواسته شده را ممکن نمی‌سازد.



$G_c(s)$: کنترل کننده پایدار

$e_{ss}=0$: خواسته

$e = خطا = r - y$ ← چون استاتیکی داریم ← از روش خطا شروع می‌کنیم

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(d + (r-y)C) \rightarrow y + GCy = Gd + GCr$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} D(s) + \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} R(s)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1+GC} D(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{1+G(s)C(s)}\frac{1}{s^2} - \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}\frac{1}{s}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)C(s)}\frac{1}{s} - \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} = ?$$

ومعمولا فرض: $G(s) = \frac{3}{s^2+2s+2}$, $C(s)=1$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} \times \frac{1}{0} - \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \infty$$

$C(s) = \frac{P(s)}{h(s)} = \frac{k}{h(s)}$ ← $e_{ss}=\infty$ ← $e_{ss}=0$ ← $\frac{1}{s}$ ← $sE(s)$ ← حذف $s\times\frac{\sim}{\sim}$

$$e_{ss} = \lim \frac{1}{1+\frac{k}{h(s)}\times\frac{3}{s^2+2s+2}} \times \frac{1}{s} - \frac{\frac{3}{s^2+2s+2}}{1+\frac{k}{h(s)}\frac{3}{s^2+2s+2}}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{h(s)(s^2+2s+2)}{3k + h(s)(s^2+2s+2)} \frac{1}{s} - \frac{3h(s)}{h(s)(s^2+2s+2)+3k}$$

$h(s) = s^n f(s)$ → $s=0$ ریشه باشد. $h(s)$ باید حداقل 1 ریشه در

$C(s) = \frac{k}{s^n f(s)}$ → تیپ 1 شد

$C(s) = \frac{1}{s^2} = \frac{k}{h(s)}$ → تیپ 2

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2(s^2+2s+2)}{3 + s^2(s^2+2s+2)} \frac{1}{s} - \frac{3s^2}{s^2(s^2+2s+2)+3} = 0 - 0 = 0$$

پس شرط پایداری با $C(s) = \frac{1}{s^2}$، خطای ماندگار صفر می‌شود.

$$\Delta(s) = 1 + \frac{1}{s^2} \frac{3}{s^2+2s+2} = 0$$

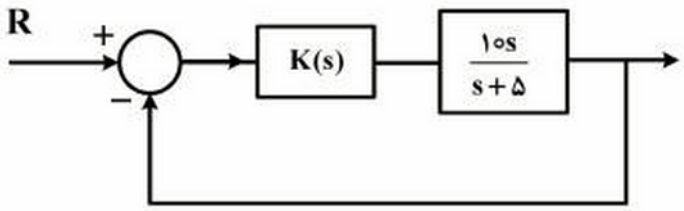
$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3 = 0$ → s^1 ردیف صفر دارد ناپایدار است → ~~تیپ 2~~

تیپ 3: $C(s) = \frac{1}{s} = \frac{k}{h(s)}$ → $h(s) = s$ $k=1$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s(s^2+2s+2)}{s(s^2+2s+2)+3} \times \frac{1}{s} - \frac{3s}{s(s^2+2s+2)+3} = \frac{2}{3}$$

با $C(s) = \frac{1}{s}$، خطای ماندگار صفر نمی‌شود.

سیستم کنترل زیر را درنظربگیرید. هدف طراحی جبران‌ساز $k(s)$ به‌گونه‌ای است که خروجی سیستم به ورودی پله واحد را بدون خطای حالت دائمی دنبال نماید. کدام گزینه در مورد $k(s)$ ، درست است؟



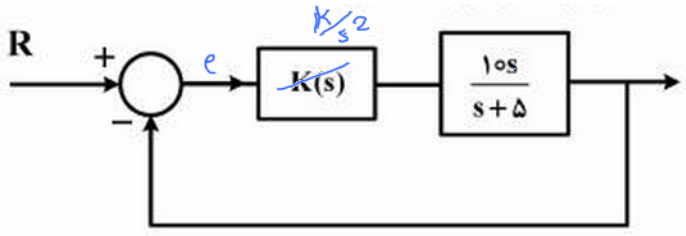
۱) $k(s)=\frac{۱۰}{s^۲}$

۲) $k(s)=\frac{۵}{s^۲}$

۳) $k(s)=\frac{۱}{s^۲}$

۴) هیچ نوع $k(s)$ وجود ندارد.

خواسته ← خطای دائم به ورودی پله واحد صفر شود.



دائم

وضعیت فعلی:

1) $k(s)=\frac{10}{s^2}$

2) $k(s)=\frac{5}{s^2}$

3) $k(s)=\frac{1}{s^2}$

4) هیچ نوع $k(s)$ وجود ندارد.

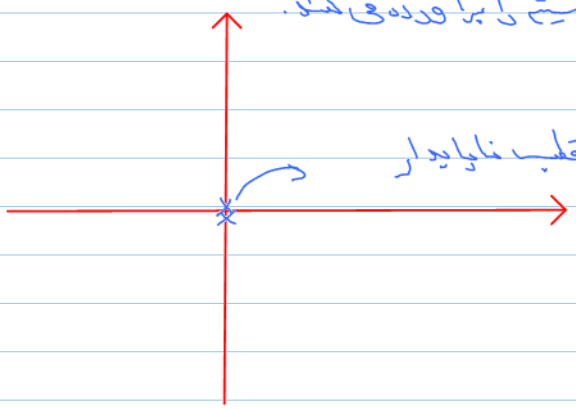
خطای ماندگار = ۲-ی

حلقه باز → تعریف ~ = ۲-ی

نوع ورودی = ۰ = نوع سیستم → $e_{ss}>0$

نیازمندی ← نوع سیستم > ۰ و پایدار

$L(s)=C(s)G(s)=\frac{k}{s^2}\times\frac{10s}{s+5}=\frac{10k}{s(s+5)}$ ✓



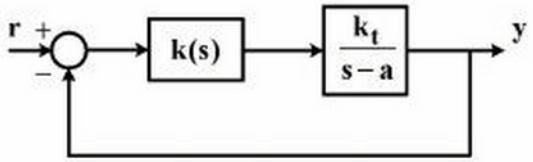
حداقل کنترلرها به فرم $\frac{k}{s^2}$ شرط نوع سیستم را برآورده می‌کند.

حذف صفر و قطب ناپایدار → قطب ناپایدار

عام‌ترین کنترلرها به فرم $\frac{k}{s^2}$ شرط پایداری را تضمین می‌کند.

دکتری ۹۲

سیستم حلقه بستهٔ استاندارد زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم خروجی این سیستم، ورودی پله را بدون خطای ماندگار دنبال کند. در مورد کنترل کنندهٔ $k(s)$ مطلوب، کدام گزینه صحیح است؟ $(a > 0)$

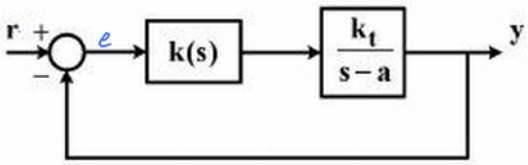


۱) استفاده از کنترل کنندهٔ PI برای رسیدن به هدف مطلوب کافی است.

۲) استفاده از کنترل کنندهٔ PD برای رسیدن به هدف مطلوب کافی است.

۳) تعیین نوع کنترل کننده بدون اطلاعات پارامترهای k_t و a ممکن نیست.

۴) برای رسیدن به هدف مطلوب استفاده از کنترل کنندهٔ PID لازم است.



۱) استفاده از کنترل کنندهٔ PI برای رسیدن به هدف مطلوب کافی است.

۲) استفاده از کنترل کنندهٔ PD برای رسیدن به هدف مطلوب کافی است.

۳) تعیین نوع کنترل کننده بدون اطلاعات پارامترهای k_t و a ممکن نیست.

۴) برای رسیدن به هدف مطلوب استفاده از کنترل کنندهٔ PID لازم است.

خواسته: خطای حالت دائم پله صفر شود.

وضعیت فعلی:

خطای کل = $r - y$

تقریبی $= r - y$ → حلقه باز $k(s) = 1$

$e_{ss} > 0$ ← باز من $a \neq 0$ = نوع سیستم $= 0$ نوع دوم

نیازمندی ها: $0 <$ نوع سیستم و پایدار

$L(s) = k(s) \frac{k_t}{s-a}$ → باید $k(s)$ حداقل یک قطب در مبدأ داشته باشد.

↓

I

PI:

$k(s) = (k_p + \frac{k_i}{s})$ → نوع سیستم $= 1$

$\Delta(s) = 1 + \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{k_t}{s-a} = 0$

$\Delta(s) = s^2 + (k_p k_t - a)s + k_i k_t = 0$

شرط پایداری: $\begin{cases} k_p > \frac{a}{k_t} \checkmark \\ k_i k_t > 0 \checkmark \end{cases}$ → ✓PI

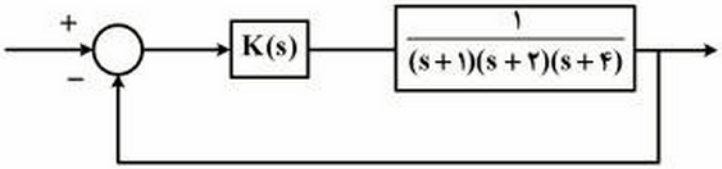
حذف خطای ماندگار ← ✓PI ← کافیه شرط پایداری را با PI میکنیم.

PID ← D برای حالت گذرا

کنکوری ۹۷

در سیستم زیر می‌خواهیم با یک کنترل‌کنندهٔ PD سرعت پاسخ‌دهی سیستم را افزایش دهیم. کدام کنترل‌کننده توانایی این عمل را خواهد داشت؟

$$G(s)=\frac{۱}{(s+۱)(s+۲)(s+۴)} \qquad K(s)=k_۱+k_۲s$$



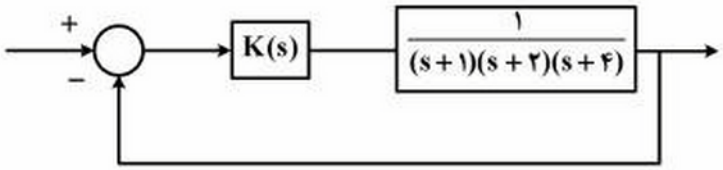
۱) $k_۱=۱\,;k_۲=۲$

۲) $k_۱=۴\,;k_۲=۱$

۳) $k_۱=۱/۲\,;k_۲=۱$

۴) $k_۱=-۱\,;k_۲=-۲$

$K(s) = k_1 + k_2 s$ $\quad G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$



۱) $k_1 = 1 ; k_2 = 2$

۲) $k_1 = 4 ; k_2 = 1$

۳) $k_1 = 1/2 ; k_2 = 1$

۴) $k_1 = -1 ; k_2 = -2$

جلسه 68 کنترل خطا

طراحی کنترلر ←

سوالات ← ساختار کنترلر

مقادیر عددی تابع تبدیل کنترلر ← مزایا دقیق کنترلر

اول مانند قبل ساختار کنترلر را مشخص کنید.

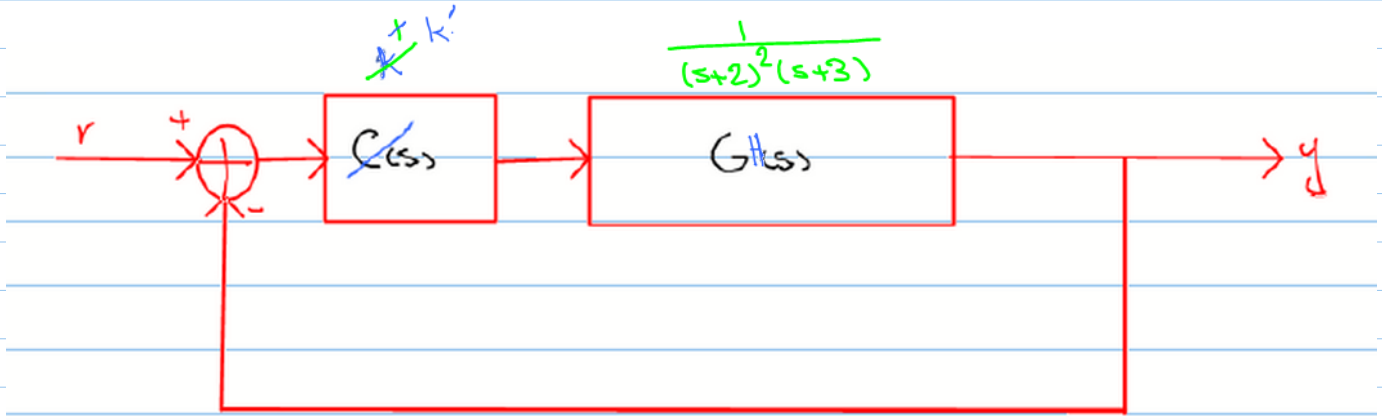
۰ سیستمی با تابع تبدیل حلقه $G(s)H(s) = \frac{k}{(s+۲)^۲(s+۳)}$ توصیف می‌شود. به ازای کدام مقدار k، ثابت خطای وضعیت از ۲ بیشتر و حد بهره از ۳ بیشتر می‌شود.

۱) ۴۸

۲) ۴۰

۳) ۳۲

۴) ۲۰



نوع کنترلر ← تناسبی

خواسته ها ← $k_p > 2$ ← نیازمندی : $k > 24$

$G.M > 3$

به ازای کدام مقدار k ← $k_p > 2$ ؟

$$k_p = \lim_{s \to 0} L(s) = \lim_{s \to 0} \frac{k}{(s+2)^2(s+3)} = \frac{k}{12} > 2 \rightarrow \boxed{k > 24}$$

$G.M = ?$ $\quad \Delta(s) = 1 + \frac{k}{(s+2)^2(s+3)} = 0$

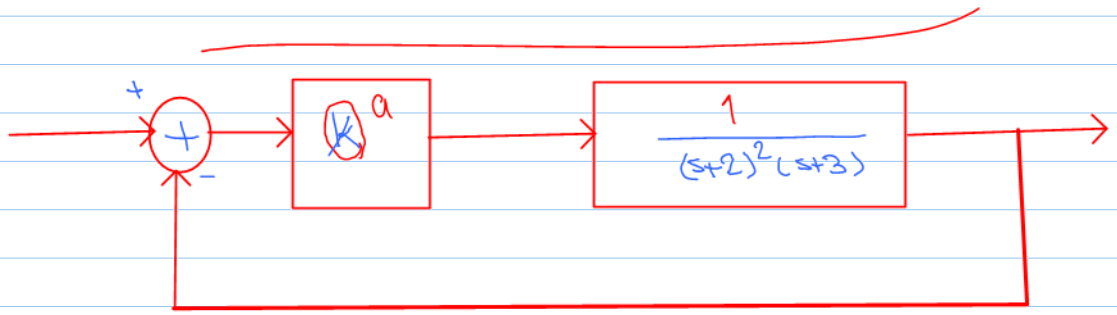
$$\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12 + k = 0$$

$$7 \times 16 > 1 \times (k+12) \rightarrow \quad k < 100$$

$G.M = 100$

$G.M > 3$

$k' = 100 \rightarrow \quad G.M = 1$



با فرض اینکه کنترلر مذکور با قرار بهره متناسبی 100 به سیستم اضافه کرده.

اگر بهره 100 اضافه کنیم سیستم به حد پایداری می‌رسد.

a چقدر باشد تا $G.M=3$ ؟

$$\Delta(s) = 1 + K \frac{a}{(s+2)^2(s+3)} = 0$$

$$= s^3 + 7s^2 + 16s + kxa + 12 = 0$$

$$7x16 > 1x(ak+12) \rightarrow k < \frac{100}{a} \quad G.M$$

$$G.M = \frac{100}{a} > 3 \rightarrow a < \frac{100}{3}$$

یعنی اگر ضریب کنترلر کمتر از $\frac{100}{3}$ باشد پس از اضافه شدن کنترلر حد بهره بزرگتر 3 می‌شود.

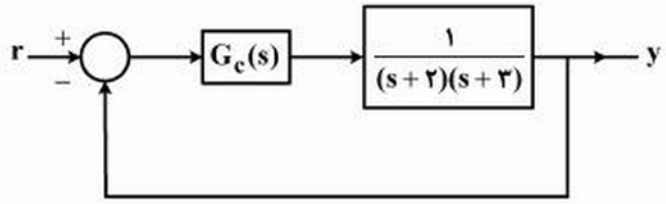
گزینه ۲ ✓

$$24 < \text{بهره کنترلر} < \frac{100}{3} = 33.3$$

$kp < 2$ $\qquad$ $G.M > 3$

۹۶ دکتری

در سیستم کنترل زیر جبران‌ساز $G_c(s)$ به چه صورت انتخاب شود تا خطای حالت ماندگار سیستم به ازای ورودی پله واحد صفر و حد بهرهٔ سیستم دقیقاً برابر ۳ شود؟



۱) $G_c(s)=\frac{50}{s}+1$

۲) $G_c(s)=\frac{3}{s}+1$

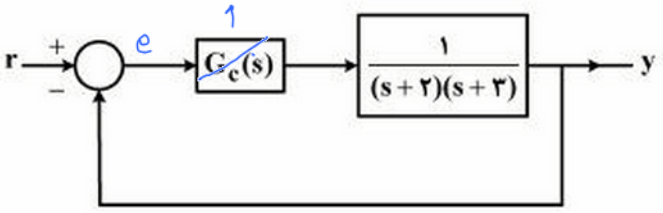
۳) $G_c(s)=\frac{10}{s}$

۴) $G_c(s)=\frac{3}{s+1}$

خواسته‌ها: خطای دائمی به ورودی پله واحد صفر شود.

$G.M = 3$

وضعیت حلقی:



1) $G_c(s) = \frac{50}{s} + 1$

2) $G_c(s) = \frac{3}{s} + 1$

3) $G_c(s) = \frac{10}{s}$

4) $G_c(s) = \frac{3}{s+1}$ ✗

$e_{ss} = ?$ خطای ثبت $= r - y$ → حلقه باز

" تعریفی $= r - y$

نوع ورودی $= 0$ ⟺ نوع سیستم $= 0$ → $e_{ss} > 0$

$G.M = ?$ $\quad \Delta(s) = 1 + \frac{k}{(s+2)(s+3)} = 0$

$\Delta = s^2 + 5s + 6 + k = 0$ → $k > -6$ → $G.M = \infty$

وضعیت حلقی:

$e_{ss} \neq 0$ ← حذف خطای ماندگار ← PID ، PI

$G.M = \infty$ ← کاهش پایداری نسبی ← PI ، P

ساختار کنترلر ← PI ← $C(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} = k_p + \frac{k_i}{s}$

3 گزینه → $L(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)} = C(s)\,G(s)$

$\Delta(s) = 1 + L(s) = 0$

$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + 10 = 0$ $\quad 5 \times 6 > 10 \times 1$ ✓ پایدار $\quad e_{ss} = 0$

$G.M$:

$\Delta(s) = 1 + \frac{10k}{s(s+2)(s+3)} = 0$

$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + 10k = 0 \rightarrow k < 3 \rightarrow G.M = 3$ ✓

2 نقطة : $C(s) = \frac{3+s}{s}$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{3+s}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 7s + 3 = 0$ $\quad 5 \times 7 > 1 \times 3$ ✓ $\quad e_{ss} = 0$

$G.M = ?$

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k(3+s)}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

$$= s^3 + 5s^2 + (6+k)s + 3k = 0$$

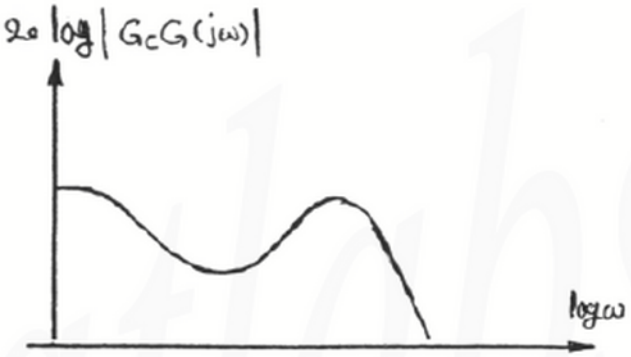
$5 \times (6+k) > 3k \times 1 \rightarrow 2k > -30 \quad k > -15 \rightarrow G.M = \infty$ ✗

۸۳ تست

۳) $\frac{(Bs+k)}{s^2[(J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$

۴) $\frac{Bs+k}{s^2[J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$

سیستم درجه ۲ استاندارد $G(s)=\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$ با $\xi=0/25$ در دست است. اگر بخواهیم نمودار Bode سیستم به صورت زیر درآید چه نوع جبران‌کننده‌ای به صورت سری به آن اضافه کنیم؟

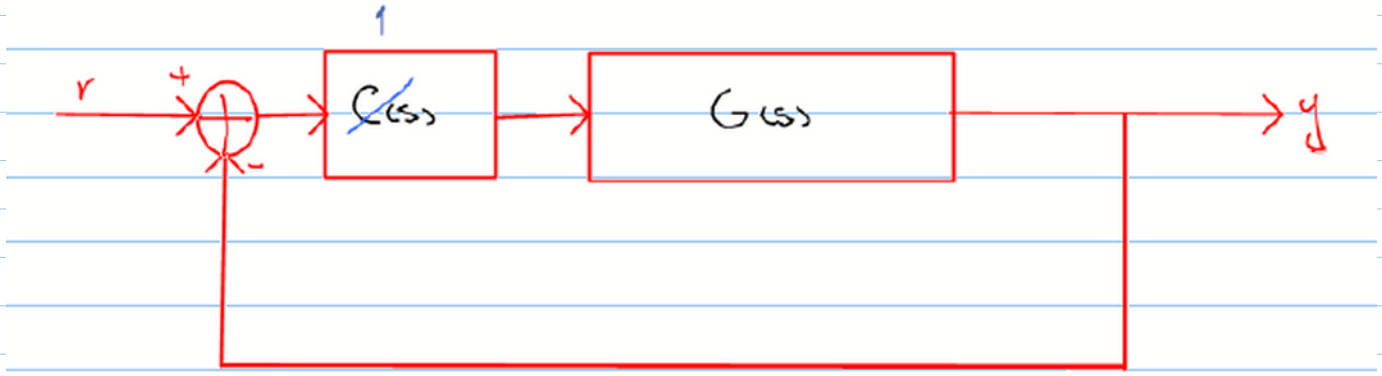


۱) یک کنترل کنندهٔ PD $k_p(1+\tau_d s)$ با $k_p > w_n$ و $\tau_d < w_n$

۲) یک کنترل کنندهٔ PI $k_p(1+\frac{1}{\tau_i s})$ با $k_p > w$ و $\tau_i < w_n$

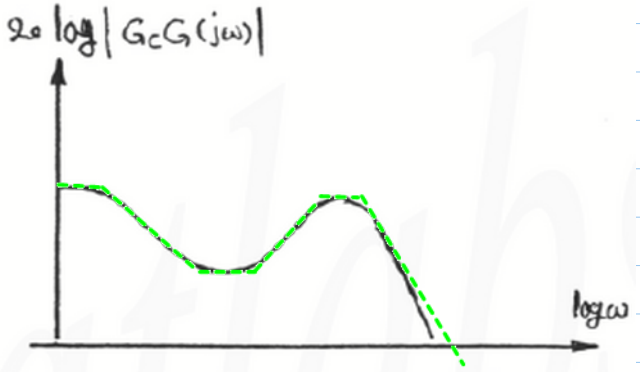
۳) یک جبران کنندهٔ پس فاز lag compensator با $G_c(s)=\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ و $\tau_1,\tau_2 > \frac{1}{w_n}$

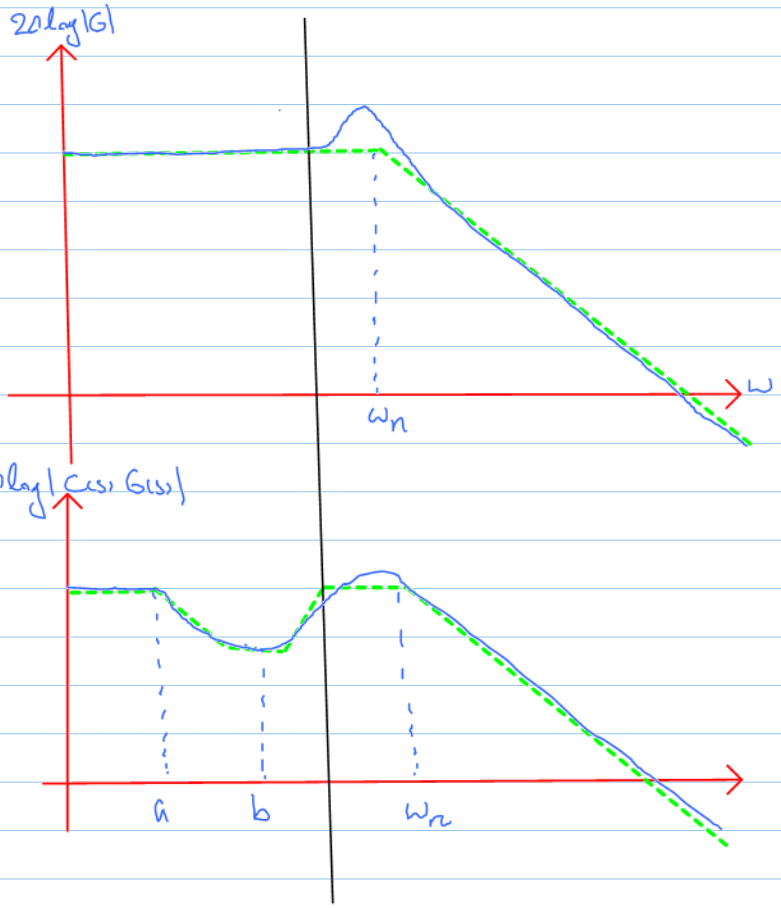
۴) یک جبران کنندهٔ پیش فاز lead compensator با $G_c(s)=\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$ و $\tau_1,\tau_2 > \frac{1}{w_n}$



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\xi = 0.25$

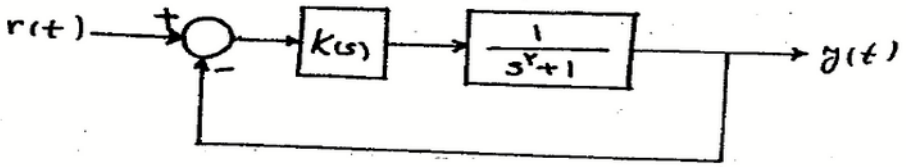




تغییرات حقیقی کنترلر است.

برق ۸۷

۱۰۰. در سیستم حلقه بستهٔ زیر جبران کنندهٔ $K(s)$ را چنان انتخاب کنید تا خطای ماندگار برای ورودی پله برابر صفر باشد.

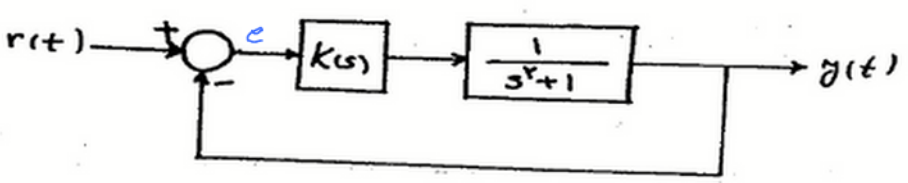


۱) $K(s) = \frac{K_i}{s}$, $K_i > 0$

۲) $K(s) = K_P + \frac{K_i}{s}$, $K_p, K_i > 0$

۳) $K(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$, $(K_p, K_i, K_d > 0 \quad , \quad K_p K_d + K_d > K_i)$

۴) $K(s) = K_p + K_d s$ برای $K_p, K_d > 0$



I $K_i > 0$, $K(s) = \frac{K_i}{s}$ (۱

PI $K_p, K_i > 0$, $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ (۲

PID $(K_p K_d + K_d > K_i$, $K_p, K_i, K_d > 0)$, $K(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$ (۳ ✓

PD $K_p, K_d > 0$ برای $K(s) = K_p + K_d s$ (۴ ✗

خواسته مسأله: $e_{ss}=0$

e_{ss} : خطای شکل $= r - y$

→ حالت پایا

تقریبی $\sim = r - y$

خطا صفر نشود → نوع سیستم >0 نوع ورودی $=0$

باید کمتر قطب در مبدأ آ مانده >0 → تعداد قطبهای در مبدأ

I

شرط $e_{ss}=0$ ← نوع سیستم >0 و پایداری

1) $\Delta(s) = 1 + \frac{k_i}{s}\frac{1}{s^2+1} = 0 \rightarrow \Delta(s) = s^3 + s + k_i = 0$ ✗ ناپایدار → $e_{ss}=\infty$

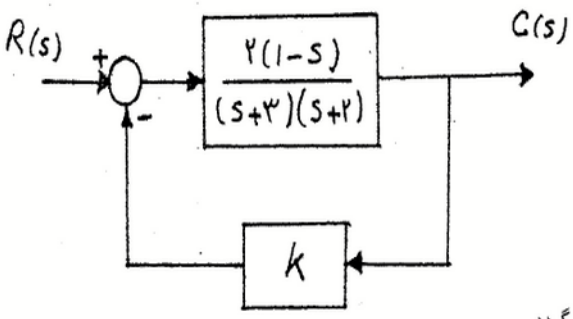
2) $\Delta(s) = 1 + \frac{k_p s + k_i}{s}\frac{1}{s^2+1} = 0 \rightarrow \Delta = s^3 + (1+k_p)s + k_i = 0$ ✗ $e_{ss}=\infty$

3) $\Delta(s) = 1 + \left(\frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = 0$

$\Delta = s^3 + k_d s^2 + (k_p+1)s + k_i = 0$

$k_d \times (k_p+1) > 1 \times k_i$ پایدار → $e_{ss}=0$ ✓

در سیستم شکل زیر اگر بخواهیم خطای حالت دائم $e(t) = r(t) - c(t)$ برای ورودی پله واحد صفر گردد، چه کار باید کرد؟



۱) با انتخاب $k = -۲$ خطای دائم خروجی صفر می‌گردد.

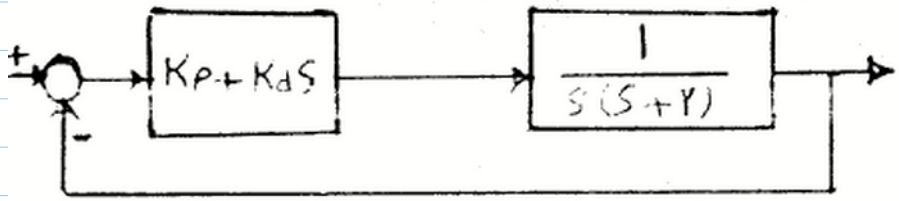
۲) برای $k \to \infty$ خطای دائم ورودی پله صفر می‌گردد.

۳) اگر یک انتگرال‌گیر در مسیر پیشرو قرار دهیم، خطای حالت دائم صفر می‌گردد.

۴) در این سیستم چون نوع سیستم صفر است نمی‌توان خطای دائمی ورودی پله را صفر نمود!

۹۰

در سیستم کنترل شکل مقابل مقادیر $k_p \geq 0$ و $k_d \geq 0$ چقدر باشند تا خطای ماندگار سیستم به ورودی شیب واحد برابر ۰/۵ و رژیم‌گذرای سیستم میرای بحرانی باشد.؟



۱) $k_p = ۴, k_d = ۲$

۲) $k_p = ۱, k_d = ۰$

۳) $k_p = k_d = ۴$

۴) چنین کنترل کننده‌ای نمی‌توان طراحی کرد.

گزینهٔ صحیح کدام است؟

۱) با دور شدن قطب‌های سیستم حلقه بسته از محور موهومی، سرعت پاسخ زمانی افزایش می‌یابد.

۲) با دور شدن قطب‌های سیستم حلقهٔ بسته از محور موهومی، ممکن است بالازدگی پاسخ پله افزایش یابد.

۳) افزودن فیدبک سرعت به سیستم کنترل وضعیت، باعث کاهش خطای حالت دائمی به ورودی شیب می‌گردد.

۴) در سیستم مرتبه دو استاندارد، افزایش ضریب مشتق‌گیر در کنترل کنندهٔ PD، باعث افزایش خطای حالت دائمی به ورودی شیب می‌شود.

فیدبک سرعت ← ترم D در کنترلر ← ترم D مقدار حالت گذرا را بهتر می‌کند.
روی مقدار حالت دائم تأثیر ندارد.

۹۳

کدام یک از جملات زیر درست است؟

۱) استفاده از کنترل‌کنندهٔ PD همواره سبب افزایش فراجهش می‌شود.

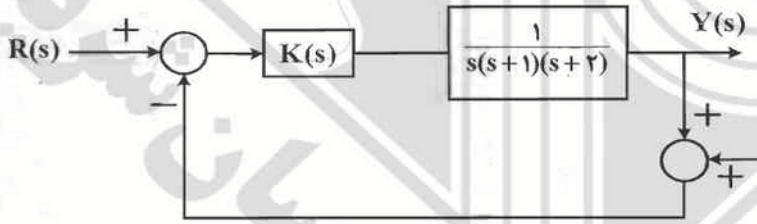
۲) زمان نشست تابع تبدیل $\frac{(۱/۲۵)^۲}{s^۲+۲s+(۱/۲۵)^۲}$ برابر است با ۴ ثانیه (با معیار دو درصد)

۳) عبور منحنی نایکوئیست از نقطهٔ ۱− نشان‌دهندهٔ وجود ریشه‌هایی روی محور $j\omega$ است.

۴) زاویهٔ خروج در نقاط شاخه‌ای (مختلط یا حقیقی) از فرمول $\frac{۱۸۰}{N}$ (N تعداد شاخه‌ها) تبعیت می‌کند.

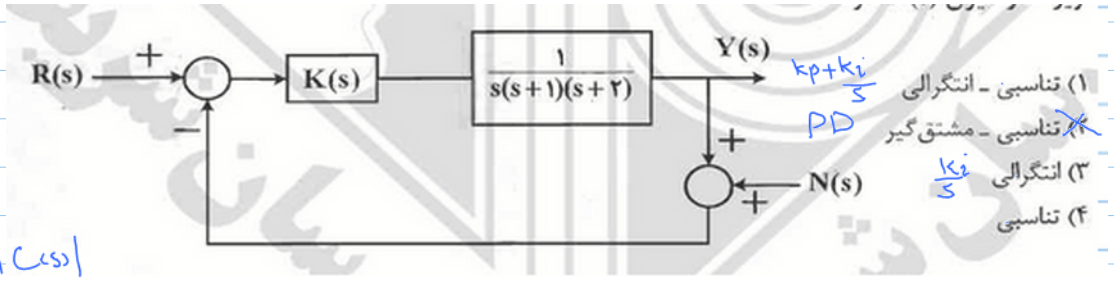
۹۴

سیستم حلقه بستهٔ شکل زیر را درنظر بگیرید. کدام‌یک از کنترل کننده‌های زیر قابلیت بیشتری برای حذف نویز اندازه‌گیری $N(s)$ دارد؟



۱) تناسبی ـ انتگرالی
۲) تناسبی ـ مشتق‌گیر
۳) انتگرالی
۴) تناسبی

قابلیت حذف نویز ← P ، PI ، PID

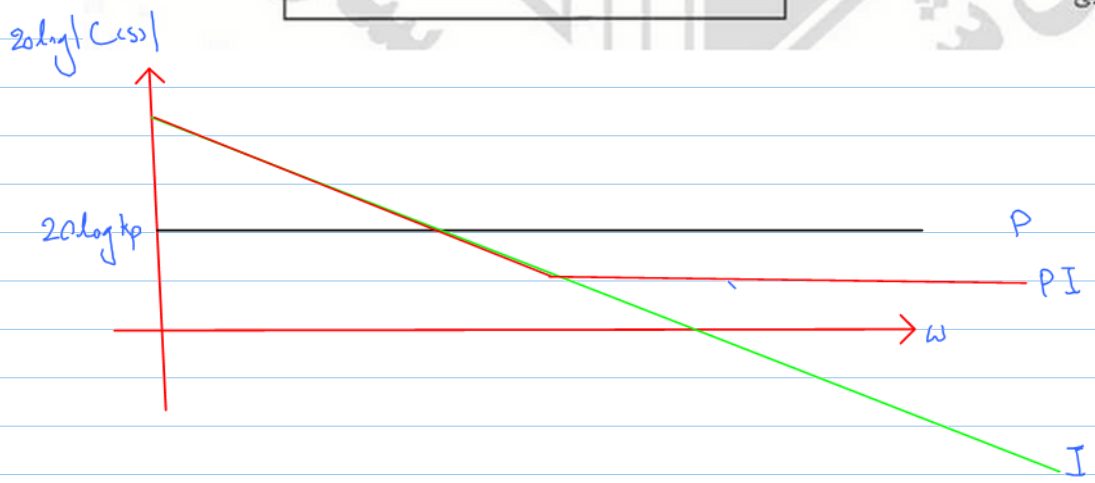


۱) تناسبی ـ انتگرالی $k_p+\frac{k_i}{s}$

۲) تناسبی ـ مشتق‌گیر PD

۳) انتگرالی $\frac{k_i}{s}$

۴) تناسبی



توانایی حذف نویز : I ⟶ PI ⟶ P

پایداری

I: $\Delta(s) = 1 + \frac{k_i}{s}\,\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$

$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + k_i = 0$ ✗ ناپایدار

PI: $\Delta(s) = 1 + \frac{k_p s + k_i}{s}\,\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0$

$\Delta = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + k_p s + k_i = 0$

s^4	1	2	k_i
s^3	3	k_p	0
s^2	$6-k_p$	$3k_i$	
s^1	$\frac{(6-k_p)k_p - 9k_i}{6-k_p}$	0	
s^0	$3k_i$		

$k_p < 6$

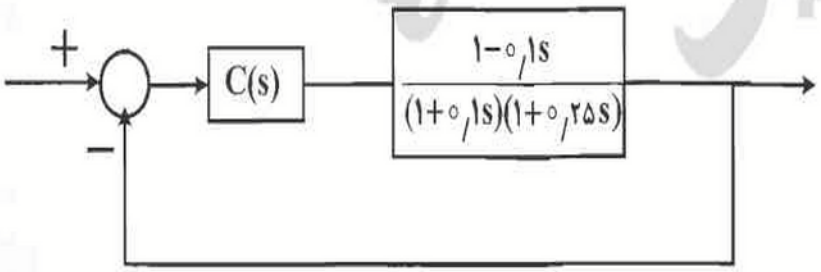
$(6-k_p)k_p - 9k_i > 0$

$k_i > 0$

$k_p = 1 \qquad k_i = \frac{5}{20}$ ✓

۹۶

در سیستم حلقه بستهٔ شکل زیر، ساده‌ترین کنترل‌کنندهٔ C(s) کدام است؟ به طوری‌که خطای دائم برای ورودی شیب محدود باشد و سیستم حلقه بسته سریعترین پاسخ پله بدون بالازدگی را داشته باشد.



۱) PD

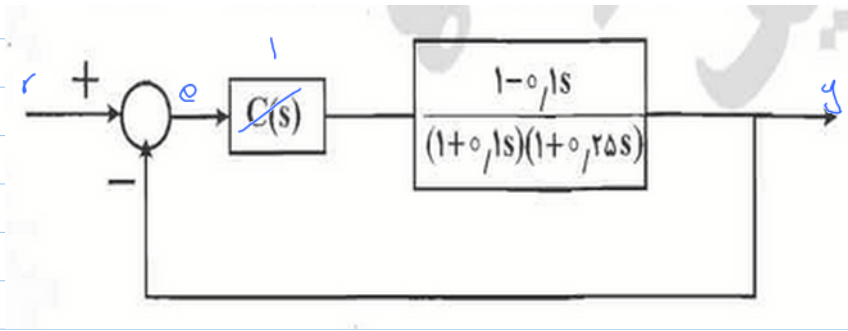
۲) Lead

۳) PID

۴) PI

خواسته ها:

- خطای سینوس در حالت دائم صفر شود.
- میدان بحرانی



وضعیت حلقی:

1) ~~PD~~
2) ~~Lead~~
3) PID ✓
4) ~~PI~~

e_{ss}: خطای ثابت = $r-y$ → حالت پایا

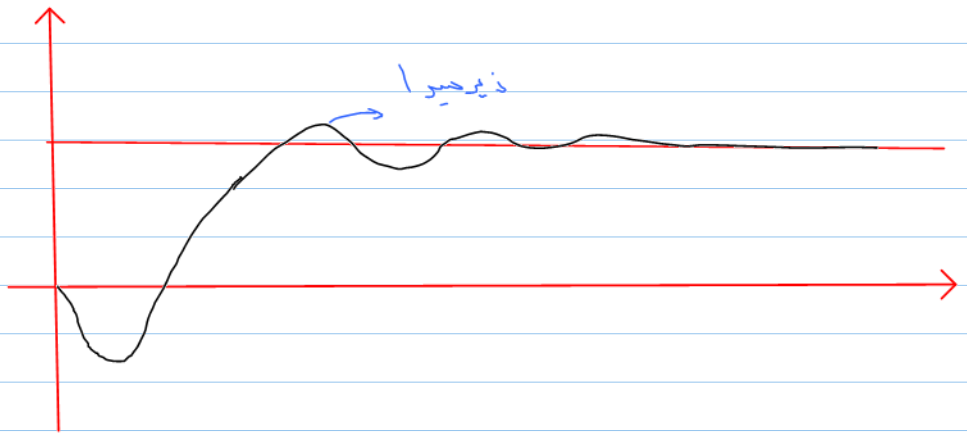
تقریبی ۲ = $r-y$

نوع ورودی = ۱ < نوع سیستم = ۰ → $e_{ss}=\infty$ → $e_{ss}<\infty$

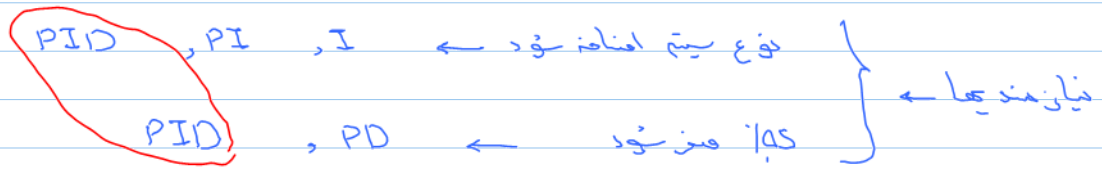
باید نوع سیستم ۱ واحد افزایش یابد ← I

$$\frac{Y}{R}=\frac{40(1-0.1s)}{(10+s)(4+s)+40-4s}=\frac{40-4s}{s^2+10s+80}$$

$$\frac{Y}{R}=\frac{1}{s^2+10s+80} \qquad \omega_n=\sqrt{80}\ ,\ \xi=\frac{10}{2\sqrt{80}}<1$$

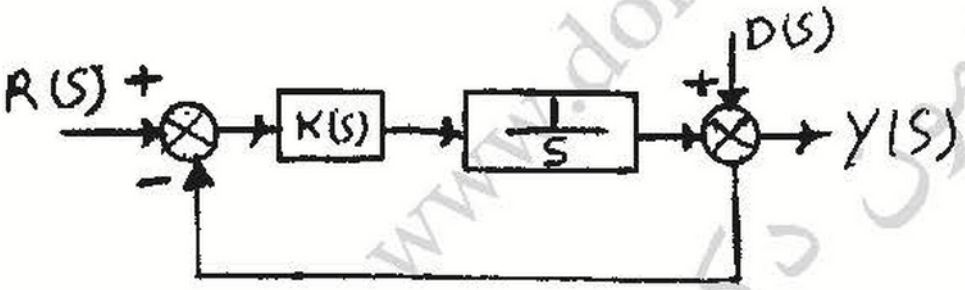


باید کنترلر $\frac{1}{s}$ را حذف کند ← PD ، PID


PID , PI , I
PID , PD
نوع سیتم اضافه شود
که از حذف شود
نیازمندیها

دکتری ۹۱

در سیستم حلقه بستهٔ شکل زیر برای آن که تأثیر اغتشاش شیب $d(t) = r(t)$ در حالت ماندگار خروجی صفر شود، ساده‌ترین کنترل کننده کدام است؟



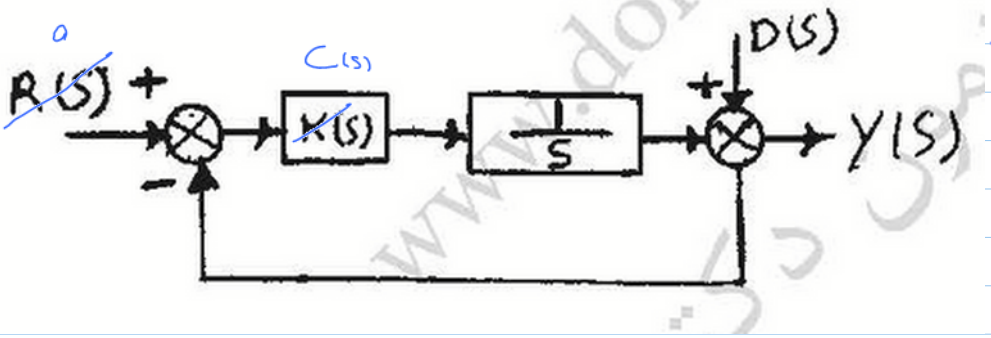
۱) PI

۲) PD

۳) P

۴) PID

اثر اغتشاش در حالت دائم میشود



$$\frac{Y_d(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + C(s)\frac{1}{s}} = \frac{s}{s + C(s)}$$

$$y_d(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{s}{s+C(s)} \times \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + C(s)}$$

$C(s) = k_p \rightarrow \quad y_d(\infty) = \frac{1}{k_p} \neq 0$ ✗

$C(s) = PD \rightarrow$ ✗

$C(s) = PI \rightarrow \quad y_d(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + \frac{k_p s + k_i}{s}} = 0$ ✓

پایداری ←

$$\Delta(s) = 1 + \frac{1}{s} \times \frac{k_p s + k_i}{s} = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + k_p s + k_i = 0 \qquad k_p, k_i > 0$$ ✓

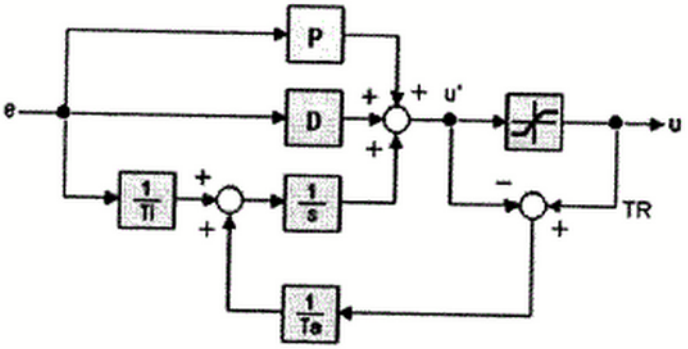
هدف ← حذف اثر اغتشاش در حالت ماندگار ← حذف خطای ماندگار

PI, PID

PID ← حذف خطای ماندگار و بهبود حالت گذرا

دی ۹۴

شکل زیر تحقق یک PID را نشان می‌دهد. کدام گزینه صحیح است؟



۱) افزایش T_i سبب ناپایداری می‌شود.

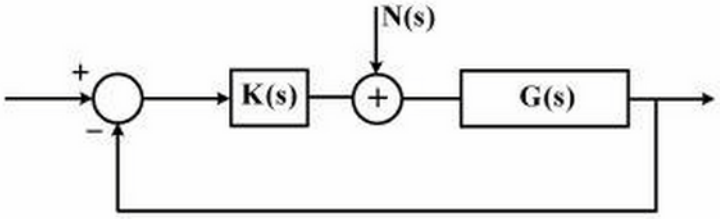
۲) T_a بر روی رفتار اشباع عملگر تأثیری ندارد.

۳) کاهش T_a سبب کاهش دوره اشباع عملگر و کاهش نوسانات خواهد شد.

۴) کاهش T_a سبب افزایش دوره اشباع عملگر و افزایش نوسانات خواهد شد.

دستی ۹۷

می‌دانیم سیستم حلقه بستهٔ زیر پایدار است، کدام کنترل‌کنندهٔ PD، توانایی کاهش بیشتر اثر اغتشاش میان حلقه پلهٔ (N(s)) را خواهد داشت؟



۱) $K(s)=k_1+k_2 s \;;\; k_1=0 \;;\; k_2=1$

۲) $K(s)=k_1+k_2 s \;;\; k_1=1 \;;\; k_2=1$

۳) $K(s)=k_1+k_2 s \;;\; k_1=10 \;;\; k_2=0/1$

۴) $K(s)=k_1+k_2 s \;;\; k_1=0/1 \;;\; k_2=10$

جلسه ۶۹ کنترل خطی

جبران سازهای پس فاز و پیش فاز:

کنترلرهای PID را یاد گرفتیم ← P ، PI ، PD و PID

۱- پس فاز ← lag $|a|>|b|$ ، $a,b>0$ ؛ $C(s)=k\frac{s+a}{s+b}$

$\alpha>1$ ، $\alpha,T>0$ ؛ $C(s)=k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

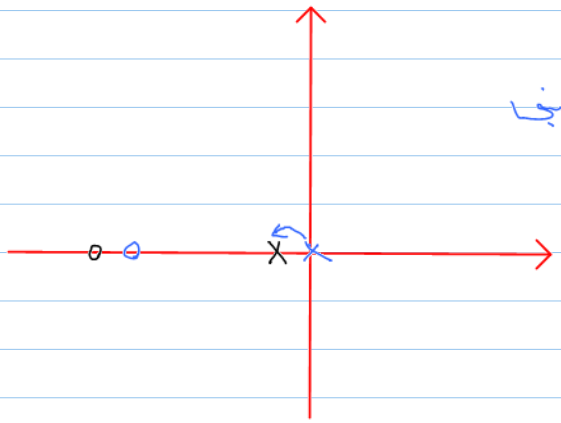
جبران ساز پس فاز مشابه PI عمل می‌کند.

PI: $C(s)=\frac{k_p s+k_i}{s}$ ← چون قطب در مبدأ اضافه می‌کند پایداری

سیستم را به شدت خراب می‌کند.

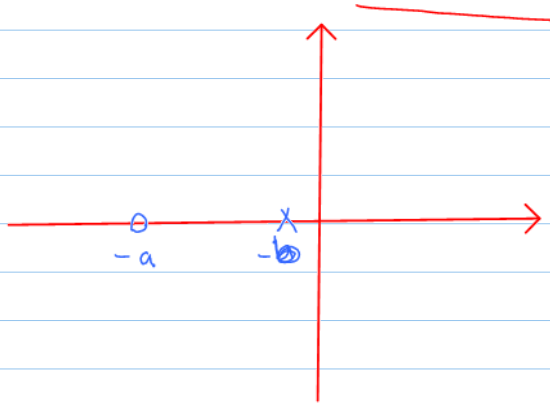
با جابجا کردن قطب از مبدأ، پایداری سیستم

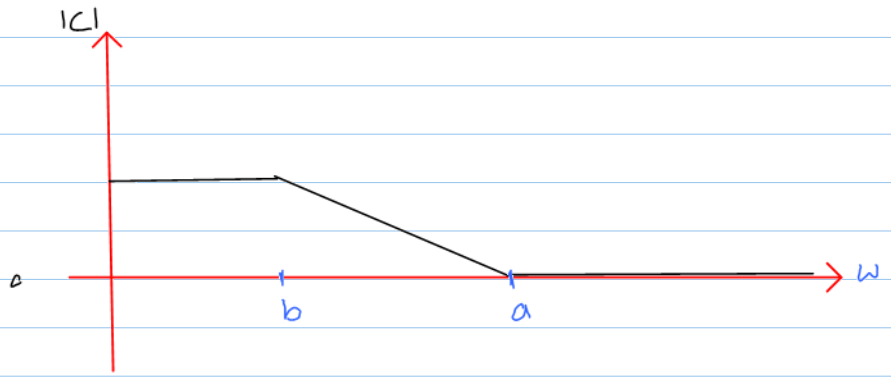
خیلی به خطر می‌افتد.



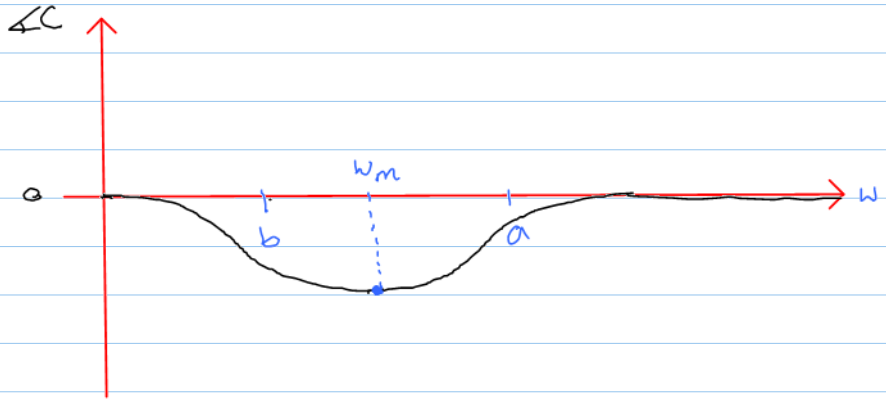
کنترلری که همواره فاز منفی به سیستم اضافه کند lag نامیده می‌شود.

کنترلر lag، یک قطب و یک صفر دارد که قطب به مبدأ نزدیک‌تر است.





$$C(s) = k\,\frac{s+a}{s+b}$$



فیلتر lag ← اضافه‌کردن فاز منفی به سیستم ← بهترین عملکرد را جایی دارد که بیشترین فاز منفی را به سیستم اضافه کند.

اگر زمان‌یابی کاری کنیم lag برابر w_m باشد بهترین عملکرد را دارد

$$w_m = \sqrt{\frac{1}{a \times b}} \quad ;$$

$$\sin \varphi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad \alpha = \frac{a}{b} = \text{نسبت صفر به قطب}$$

φ_m : بیشترین فاز منفی که lag می‌تواند به سیستم اضافه کند.

مشخصات lag:

lag برای بهبود پاسخ حالت ماندگار (خطای حالت ماندگار) استفاده می‌شود.

① lag خطای حالت ماندگار را کاهش می‌دهد ولی حذف نمی‌کند.

② پاسخ حالت گذرا را تخریب می‌کند ولی نه اندازه PI ($\uparrow$ %OS , $\uparrow$ T_s و ...)

③ حساسیت را کاهش می‌دهد و لذا پایداری سیستم را کم می‌کند.

④ ممکن است حتی سیستم را ناپایدار کند.

⑤ قابلیت حذف نویز را بهتر می‌کند.

⑥ " دفع اغتشاش را " "

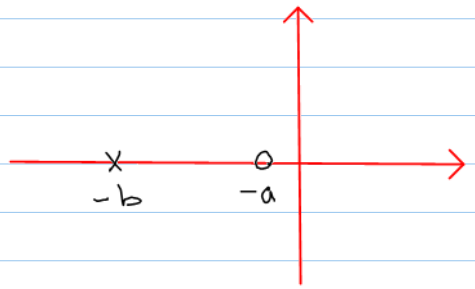
⑦ سرعت سیستم را زیاد می‌کند ولی سرعت پاسخ را کم می‌کند.

کنترلر پیش فاز (Lead):

این کنترلر فاز مثبت به سیستم اضافه می‌کند. $|a|<|b|$; $C(s)=k\frac{s+a}{s+b}$

$C(s)=k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$; $0<\alpha<1$ و $T>0$

این کنترلر (Lead) دارای یک صفر و قطب است که صفر به قطب نزدیک‌تر است.



این کنترلر مانند PD برای بهبود حالت گذرا (٪OS، t_s، ...) استفاده می‌شود.

① حالت گذرا بهتر می‌کند یعنی کاهش ٪OS، t_s و ...

② روی حالت ماندگار تأثیری بسیار ناچیز دارد.

③ نویز را تقویت می‌کند ولی نه به اندازه PD.

④ قابلیت دفع اغتشاش را بهتر می‌کند ولی نه به اندازه PD

حداکثر فاز مثبت را در فرکانس $\omega_m=\frac{1}{\sqrt{a\times b}}$ و این فاز برابر است با:

$\sin\varphi_m=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

⑤ پایداری نسبی را بهتر می‌کند و حد فاز را افزایش می‌دهد.

نکته! حداکثر فاز lead که می‌تواند به سیستم اعمال کند 65° است لذا اگر لازم باشد که فاز بیشتر از 65° به سیستم اضافه شود از دو کنترلر lead به صورت سری استفاده می‌شود

lead - lead

+17c' برای → lead-lead-lead

۳- کنترلر lead-lag:

$$C(s) = k\,\frac{s+a}{s+b} \times \frac{s+c}{s+d} = C_{lead}(s) \times C_{lag}(s)$$

$$= k\,\frac{T_1 s+1}{\alpha T_1 s+1} \times \frac{T_2 s+1}{\beta T_2 s+1} \quad ; \quad 0<\alpha<1, \quad \beta>1$$

مانند PID برای بهبود حالت گذرا و ماندگار به صورت همزمان استفاده می‌شود.

① خطای ماندگار را کم می‌کند ولی حذف نمی‌کند.

② حالت گذرا را بهتر می‌کند (↓OS٪، ↓t_s ...) این خاصیت قویتر از PID است.

③ پایداری نسبی را افزایش می‌دهد (حد بهره را زیاد می‌کند)

④ قابلیت حذف نویز و دمغ اغتشاش را بهتر می‌کند.

تعیین نوع کنترلر براساس نیازمندیها.

① حذف خطای ماندگار ← PI , PID , I ← حتماً I را خواهد.

② کاهش ~ ~ ← PI , PID , I , lag , P , lead-lag

③ بهبود حالت گذرا ← PD , PID , lead , lead-lag

④ افزایش حد پایداری ← PD , PID , lead , lead-lag

⑤ دفع اغتشاش ← P , PI , PID , lag , lead-lag

⑦ حذف ~ ← PI , PID

⑧ حذف نویز ← PD , PID , lag , lead-lag

۸۱

دریک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد برای ورودی پله واحد خطای حالت دائمی $e_{ss} = ۰/۳$، حدفاز $PM = -۵^\circ$ و فرکانس قطع‌فاز $w_c=۱۰$ می‌باشد. برای رسیدن به مشخصات مطلوب $e_{ss} \leq ۰/۰۵$، $PM \geq ۶۰^\circ$ و $w_c \simeq ۱۰$ نیاز به چه نوع جبران کننده‌ای می‌باشد؟

۱) پس فاز ۲) پیش فاز ۳) متناسب ۴) پیش فاز ـ پس فاز

وضعیت فعلی :

$e_{ss} = 0.3$

$P.M = -5$

$w_c = 10$

مطلوب

$e_{ss} < 0.05$

$P.M > 60^\circ$

$w_c \simeq 10$

نیازمندی حل مسأله:

① کاهش خطای ماندگار ← P , PI , PID , lag , lead-lag

② افزایش حد فاز ← PD , PID , lead , lead-lag

برق ۸۹

تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با پس‌خور منفی واحد به قرار زیر است:

$$G(s)=\frac{۸۰k}{s^{۲}(۱+\frac{s}{۲۰})^{۲}}$$

ω (rad/s)	Mag. (db)	Phase (deg)
0.1000	78.0616	-180.5730
0.2154	64.7275	-181.2344
0.4642	51.3905	-182.6590
1.0000	38.0401	-185.7248
2.1544	24.6283	-192.2966
4.6416	10.9395	-206.1317
7.8476	1.0285	-222.8481
10.0000	-3.8764	-233.1301
21.5443	-21.9622	-274.2578
46.4159	-44.7096	-313.3788
100.0000	-70.2377	-337.3801

پاسخ فرکانسی $G(s)$ به ازاء $k=۱$ در جدول نمایش داده شده است کدام جبر فاز قابلیت تأمین حد فاز ۴۵° و ثابت خطای شتاب ۸۰ را دارا می‌باشد؟

۱) Lag – Lead ۲) Lead ۳) Lag ۴) Lead – Lead

خواسته ها:

$e_{ss} = \frac{2}{800} = \frac{1}{400} \leftarrow k_a = 800$

$P.M = 45^\circ$

$L(s) = G(s) = \frac{80k}{s^2(1+\frac{s}{20})^2}$

وضعیت فعلی:

$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 L(s) = \frac{80}{12} = 80 \rightarrow e_{ss} = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$

خطای ماندگار به ورودی شتاب ($r(t) = t^2$) برابر $\frac{1}{40}$ است.

مسأله از ما می خواهد این خطا را به $\frac{1}{400}$ برسانیم.

حد فاز: ؟

$P.M = \angle G(jw_{gc}) - 180^\circ$

تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با پس‌خور منفی واحد به قرار زیر است:

$$G(s) = \frac{80k}{s^2(1+\frac{s}{20})^2}$$

ω (rad/s)	Mag. (db)	Phase (deg)
0.1000	78.0616	-180.5730
0.2154	64.7275	-181.2344
0.4642	51.3905	-182.6590
1.0000	38.0401	-185.7248
2.1544	24.6283	-192.2966
4.6416	10.9395	-206.1317
w_{gc} 7.8476	1.0285	-222.8481
10.0000	-3.8764	-233.1301
21.5443	-21.9622	-274.2578
46.4159	-44.7096	-313.3788
100.0000	-70.2377	-337.3801

$\angle G(jw_{gc})$

پاسخ فرکانسی $G(s)$ به ازاء $k = 1$ در جدول نمایش داده شده است کدام جبر فاز قابلیت تأمین حد فاز 45° و ثابت خطای شتاب ۸۰۰ را دارا می‌باشد؟

۱) Lag – Lead ✓ ۲) Lead ۳) Lag ۴) Lead – Lead

$7.8 < w_{gc} < 10 \rightarrow -233 < \angle G(jw_{gc}) < -222$

حدس: $\angle G(jw_{gc}) = -230^\circ$

$P.M = (360 - 230) - 180 = -50^\circ$

خیار مدیما:

$e_{ss} = \frac{1}{400} \leftarrow e_{ss} = \frac{1}{40}$

$P.M = 45^\circ \leftarrow P.M = -50^\circ$

کاهش خطای ماندگار ← P, PI, PID, lag, lead_lag

افزایش حد فاز ← PD, PID, lead, lead_lag

برق ۹۹

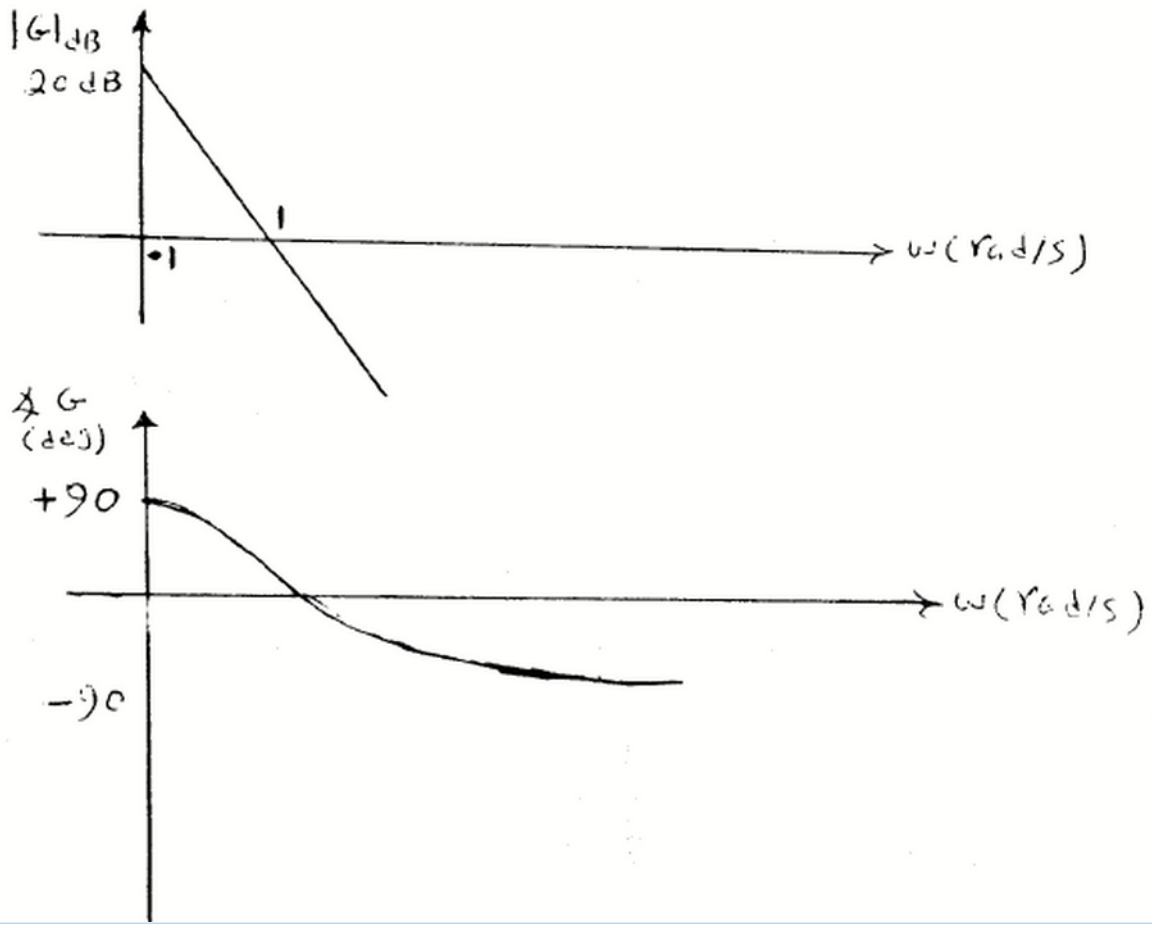
سیستم فیدبک واحد شکل زیر در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ در شکل روبه‌رو نمایش داده شده‌اند. کدام جبران‌ساز زیر قادر به پایدارسازی سیستم و تأمین زمان نشست ۴ ثانیه می‌باشد؟

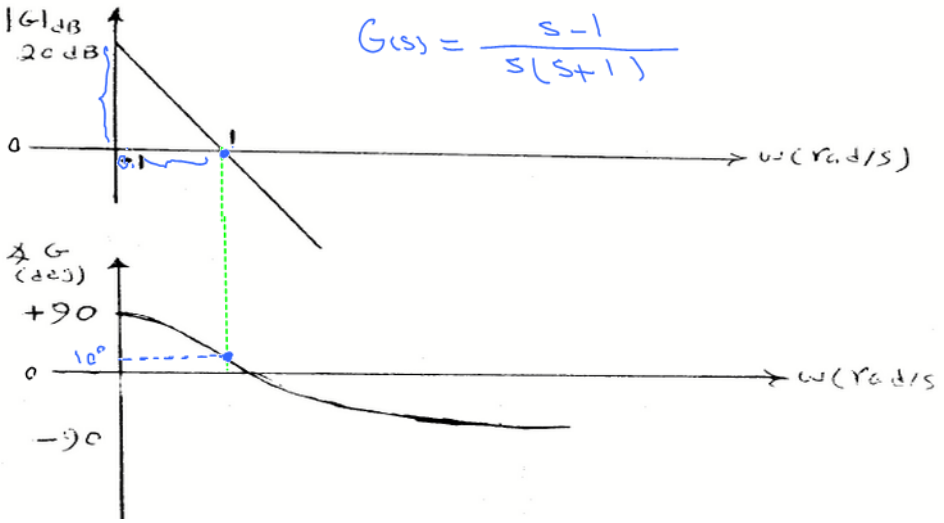
۱) PI

۲) PD

۳) تناسبی

۴) Lag





$G(s) = \frac{s-1}{s(s+1)}$

خواسته ها: پایدارسازی

$T_s = 4s.$

و مقیت فقلی؟

؟ G.M , P.M

$P.M = 10 - 180^\circ = -170^\circ < 0$ ناپایدار

$G.M = \infty > 0$

میازمندی اول: حد بهره را اندازه دهیم تا سیستم پایدار شود. ← PD ✓

زمان نشست: سیستم چون ناپایدار است $T_s = \infty$ پس کنترلر زمان نشست را کاهش دهد.

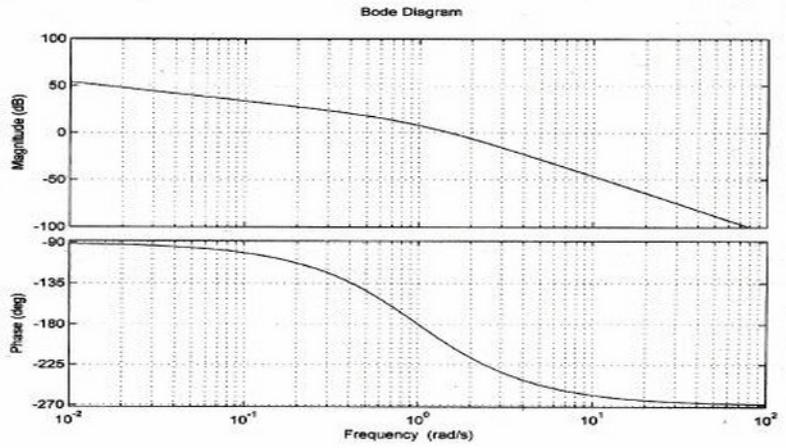
یک قطب در مبدا اضافه شود ← $\frac{-20}{20} = -1$ ← -20 = شیب اولیه

$\frac{s+1}{s-1}$ یا $\frac{s-1}{s+1}$ ✓ ← تغییر خاصی بدون تغییر اندازه ← $\omega = 1$

برق ۹۶ G(s)

پاسخ فرکانسی تابع تبدیل حلقهٔ یک سیستم با فیدبک واحد منفی در شکل زیر نشان داده شده است. ساده‌ترین جبران‌ساز برای دستیابی به مشخصات مطلوب زیر، کدام است؟

$\begin{cases} K_v = ۵۰ & \text{ثابت خطای سرعت} \\ \varphi_{p.m} = ۴۵^\circ & \text{حد فاز} \end{cases}$

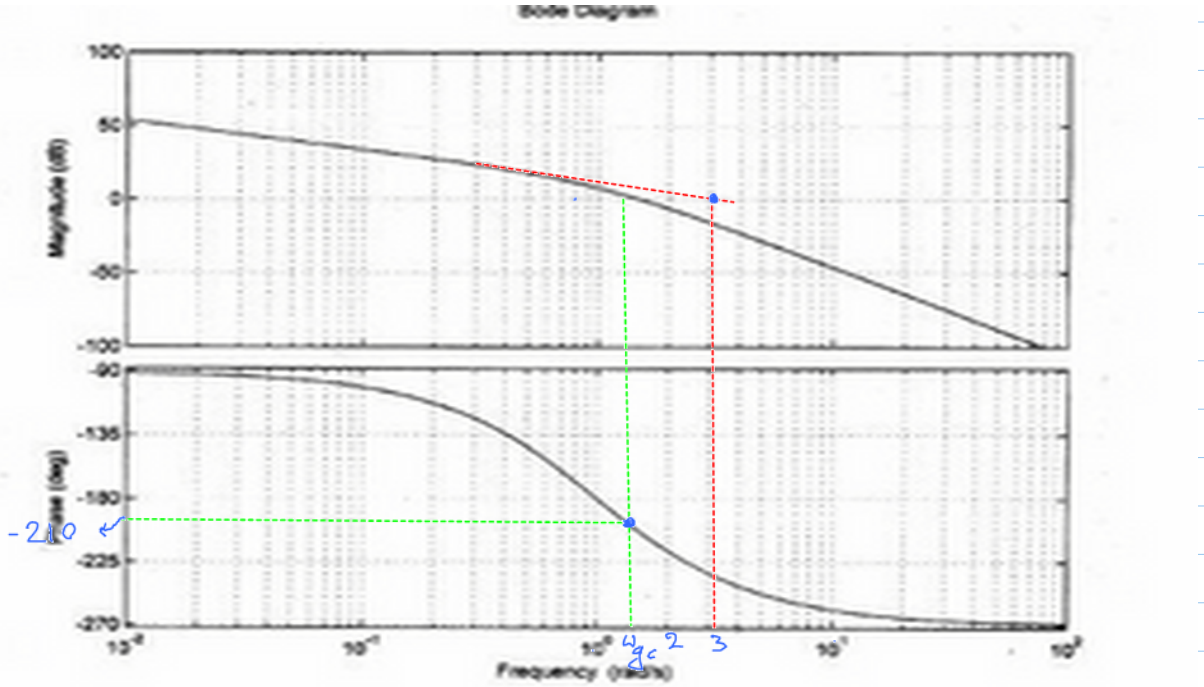


۱) Lag (پس‌فاز)
۲) Lead (پیش‌فاز)
۳) P (تناسبی)
۴) Lag-Lead (پس‌فاز ـ پیش‌فاز)

خواسته‌ها:

$K_v = 50 \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{50}$

$P.M = 45^\circ$



وضعیت فعلی:

$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

K_v:

$K_v = 3 \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{3}$

$P.M = (360 - 210) - 180^\circ = -30^\circ$

وضعیت فعلی:

$e_{ss} = \frac{1}{50} \leftarrow e_{ss} = \frac{1}{3}$

$P.M = 45^\circ \leftarrow P.M = -30$

۱- کاهش خطای ماندگار ← P, PI, PID, lag, lead-lag

۲- افزایش حد فاز ← PD, PID, lead, lead-lag

جلسه ۷۵ کنترل خطی

«طراحی کنترلر»

سوال ۸۳

برای یک سیستم مرتبه بالاتر از ۲، مقدار ζ را می‌توان با روش‌های زیر محاسبه کرد:

الف) استفاده از قطب‌های غالب

ب) استفاده از مقدار فراجهش در پاسخ پله

ج) استفاده از مقدار فراجهش در دیاگرام بُد

در طراحی کنترل کننده برای چنین سیستمی از کدام مقدار به دست آمده برای ζ باید استفاده کرد تا پاسخ مناسب حاصل شود؟

۱) مقدار به دست آمده از روش‌های (الف) یا (ب)

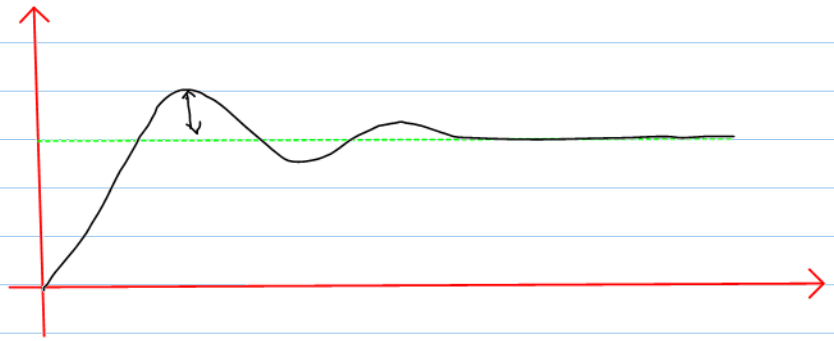
۲) بزرگترین مقدار به دست آمده

۳) مقدار به دست آمده از روش (ج)

۴) کوچکترین مقدار به دست آمده

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+20)(s^2+2s+2)} \qquad \zeta = ?$$

۱) $\tilde{G}(s) = \dfrac{\frac{1}{200}}{s^2+2s+2} \rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \qquad 2\zeta\sqrt{2} = 2 \rightarrow \zeta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$$\%OS = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad \zeta = 0.1$$



$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}} \qquad \zeta = 0.2$$

$\zeta = 0.7$ $\zeta = 0.1$ $\zeta = 0.2$

می‌خواهیم در سفری خانه بسازیم ← سنت زلزله؟

5"

6"

(7")

خانه را برای بدترین حالت در نظر می‌گیریم.

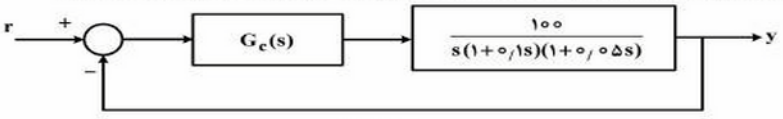
برای بدترین حالت ζ کنترل طراحی می‌کنیم.

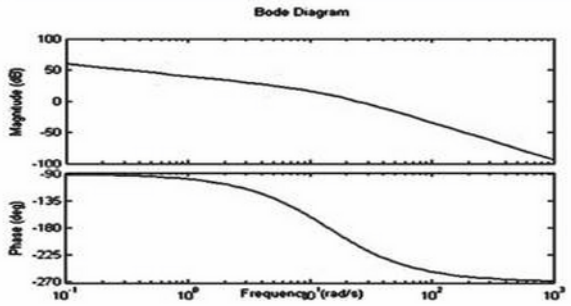
$\zeta \downarrow \rightarrow$ ٪۵۸ ↑

بدترین حالت ζ کوچکترین آن است.

برق ۹۸

سیستم زیر را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی حلقه باز در شکل زیرین، نشان داده شده است.





درصورتی‌که بخواهیم شرایط زیر برقرار باشد:

الف: $k_v \geq ۱۰۰$ (ثابت خطای شیب واحد)

ب: $P.m \geq ۴۵^\circ$ (حاشیه فاز)

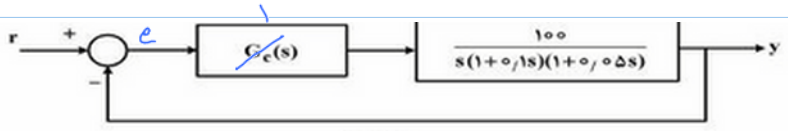
کدام‌یک از جبران سازهای زیر قادر به کنترل این سیستم می‌باشد؟ ۳

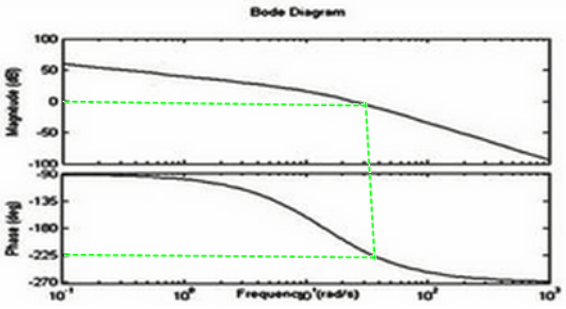
۱) $G_c(s) = \frac{۱-۵s}{۱+۵۰۰s}$

۲) $G_c(s) = \frac{k}{a}\frac{۱+aTs}{۱+Ts}$, $T>۰$, $a>۱$

۳) $G_c(s) = k\frac{۱+aTs}{۱+Ts}$, $T>۰$, $۰<a<۱$

۴) $G_c(s) = \frac{k}{a}\frac{۱+aTs}{۱+Ts}\times\frac{۱+bT_۱s}{۱+T_۱s}$, $T\cdot T_۱>۰$, $a\cdot b>۱$





خواسته‌ها: $e_{ss}=?$ ← $K_v \geq 100$

$P.M > 45^\circ$

$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \Rightarrow K_v \geq 100 \rightarrow e_{ss} \leq \frac{1}{100}$

خواسته‌ها: خطای دائم به ورودی شیب واحد کمتر $\frac{1}{100}$ شود.

$P.M \geq 45^\circ$

خطای تقریبی $= r - y$

خطای واقعی $= r - y$

وضعیت فعلی ← $C(s)=1$

$K_v = \lim_{s\to 0} s \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.05s)} = 100 \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{100}$

حدفاز:

$P.M = (360 - 225) - 180 = -45^\circ$

وضعیت فعلی:

$e_{ss} = \frac{1}{100}$ ← $e_{ss} \leq \frac{1}{100}$

$P.M = -45^\circ$ ← $P.M > 45^\circ$

نیاز: کاهش خطای ماندگار ← P, PI, PID, lag, lead-lag

افزایش حدفاز ← PD, lead, PID, lead-lag

توجه!

lead: $C(s) = k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

$K_v = \lim_{s\to 0} s\, k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \times \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.05s)} = 100k$

$e_{ss} = \frac{1}{100k} < \frac{1}{100} \rightarrow k > 1$

کنترلر lead، استثنا توانایی تأمین خطای خواسته شده را دارد.

lead-lag ، lead ، ~~PID~~

کدام‌یک از جبران سازهای زیر قادر به کنترل این سیستم می‌باشد؟

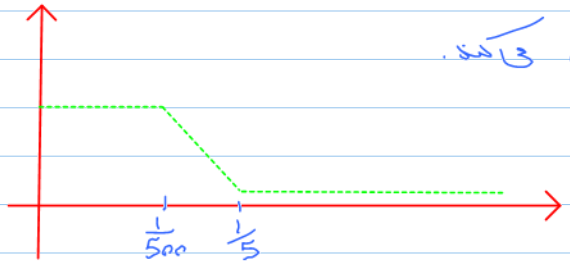
۱) $\times\ G_c(s)=\frac{1-\Delta s}{1+\Delta\circ\circ s}$

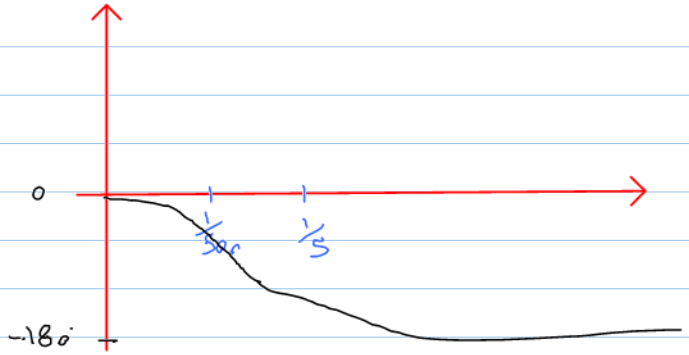
۲) $\checkmark\ G_c(s)=\frac{k}{a}\frac{1+aTs}{1+Ts}\ ,\ T>\circ\ ,\ a>1$ ، $T=1\ ,\ a=2$

۳) $\times\ G_c(s)=k\frac{1+aTs}{1+Ts}\ ,\ T>\circ\ ,\ \circ<a<1$ ، $T=1\ ,\ a=\frac{1}{2}$

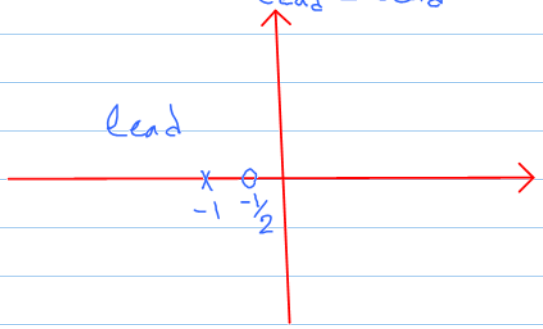
۴) $\checkmark\ G_c(s)=\frac{k}{a}\frac{1+aTs}{1+Ts}\times\frac{1+bT_1s}{1+T_1s}\ ,\ T\cdot T_1>\circ\ ,\ a\cdot b>1$ ، $a=b=2\ ,\ T=1$

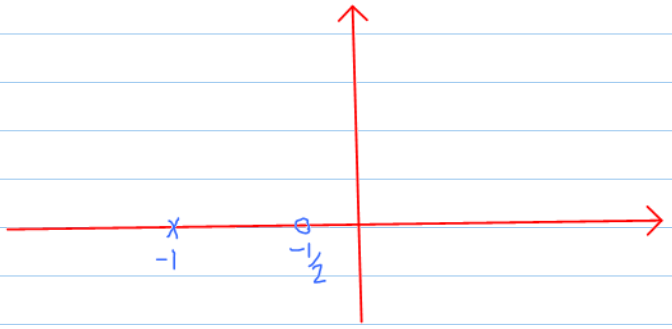
کنترلر lead ، یعنی فاز مثبت به سیستم اضافه می‌کند.

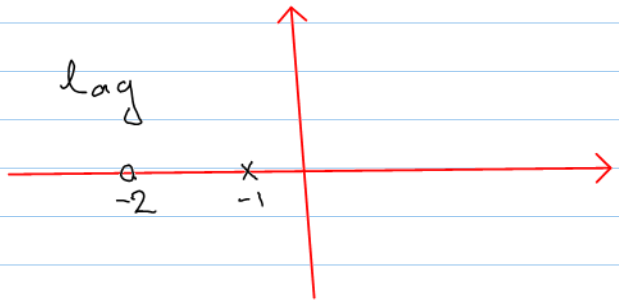




lead - lead







$e_{ss}<\frac{1}{100}$ ← lead

P.M=-45° ← P.M>45° ← کنترلر باید فازی بیشتر از 90° به سیستم اضافه کند.

هر کنترلر lead حداکثر $+65°$ فاز اضافه می‌کند.

اگر دو تا lead را سری کنیم می‌توانند تا $+130°$ فاز اضافه کند.

برای تأمین حد فاز خواسته شده می‌توان از lead - lead استفاده کرد.

هر کدام می‌تواند این سیستم را کنترل کند.

۱) lag

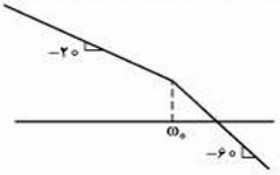
۲) lead

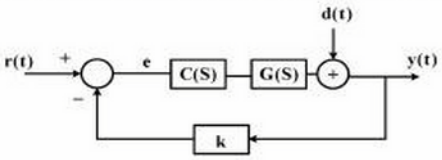
۳) lag

۴) ✓ lead - lead

۹۶

در بلوک دیاگرام زیر، سیستم G یک سیستم مینیمم فاز و بهرهٔ k ، مقادیر بزرگی جهت حذف اغتشاش دارد. در صورتی‌که نمودار اندازه بود سیستم G، به‌صورت زیر باشد، از کدام کنترل‌کننده جهت طراحی سیستم حلقه‌بسته می‌توان استفاده نمود؟





۱) $C(s) = b(1 + as)$ PD

۲) $C(s) = b(1 + \frac{a}{s})$ PI

۳) $C(s) = \frac{s+a}{s+b}$ ، $b > a$ Lead

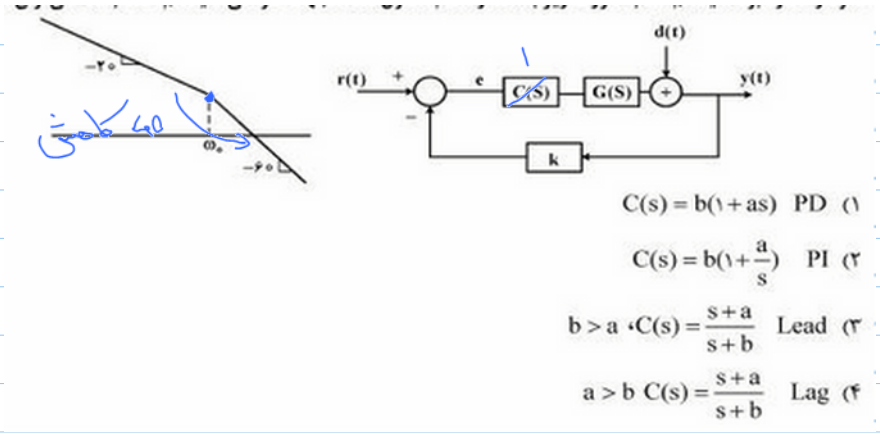
۴) $C(s) = \frac{s+a}{s+b}$ $a > b$ Lag

اطلاعات: $G(s)$ همه قطب ها سمت راست دارد.

بهره k عدد بزرگی است ($k \to \infty$)

و هواهیم اغتشاش را حذف کنیم

باکدام کنترلر و توان سیستم را کنترل کرد؟ اولین لازمه کنترل پایداری حلقه بسته



$$G(s) = \frac{1}{s(s+\omega_0)^2}$$

۱) $C(s) = b(1+as)$ PD

۲) $C(s) = b(1+\frac{a}{s})$ PI

۳) $C(s) = \frac{s+a}{s+b}$ Lead $b > a$

۴) $C(s) = \frac{s+a}{s+b}$ Lag $a > b$

و معادله مشخصه:

$$\Delta(s) = 1 + \frac{k}{s(s+\omega_0)^2} = 0$$

$$\Delta(s) = s^3 + 2\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + k = 0$$

شرط پایداری: $2\omega_0 \times \omega_0^2 > k \times 1 \rightarrow k < 2\omega_0^3$ ✗

چون k عدد بزرگی است لذا سیستم حلقه بسته بدون کنترلر ناپایدار است.

کنترلر را برای پایداری حلقه بسته می خواهیم.

مثل ۵ ← اگر درجه بیش متابع حلقه بیشتر از ۲ باشد، با افزایش بهره k سیستم به سمت ناپایداری می رود.

چون بهره k بزرگ است اگر درجه بیش $L(s)$ بزرگتر از ۲ باشد سیستم ناپایدار است.

اگر بخواهیم سیستم را پایدار کنیم ← بهره k را کوچک کنیم ✗

درجه بیش $L(s)$ را ۲ یا کمتر از ۲ کنیم.

$$L(s) = k\,C(s)\,\frac{1}{s(s+\omega_0)^2}$$

1) $L(s) = k\,\frac{b(1+as)}{s(s+\omega_0)^2}$ → درجه صفر = 2 ✓

2) $L(s) = k\,b\left(\frac{s+a}{s}\right)\left(\frac{1}{s(s+\omega_0)^2}\right)$ → ~~ = 3 ✗

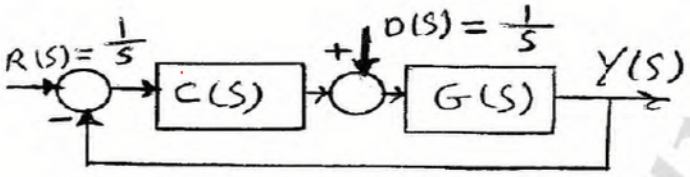
3) $L(s) = k\,\frac{s+a}{s+b}\,\frac{1}{s(s+\omega_0)^2}$ → ~~ = 3 ✗

4) ~~ = ~~ ~~ ~~ → ~~ = 3 ✗

۹۱

سیستم فیدبک واحد زیر با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{۱}{s(s+۱)}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از جبران‌سازهای پیشنهادی مشخصات مطلوب زیر را برای پاسخ پله به ورودی مرجع ارضاء نموده و رفتار حذف اغتشاش بهتری دارد؟

$T_s = ۲$ seconds , P.O. $= ٪۵$



۱) $c(s)=۶۰\frac{s+۲}{s+۸}$

۲) $c(s)=۵$

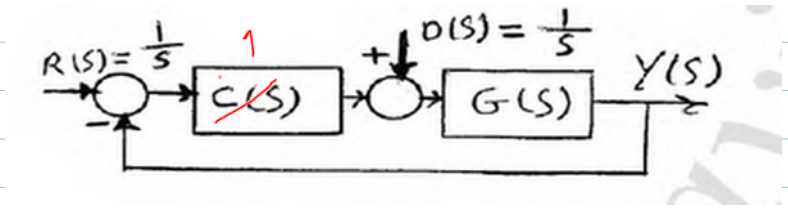
۳) $c(s)=۳(s+۲/۷)$

۴) $c(s)=۵\frac{s+۰/۰۱}{s+۰/۰۰۱}$

خواسته ها:

خواسته اصلی:
- $\%OS = 5\%$
- $T_s = 2s$

قابلیت دفع اغتشاش بهتر نسبت به سایر گزینه ها



وضعیت فعلی:

$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{s^2+1s+1}$$

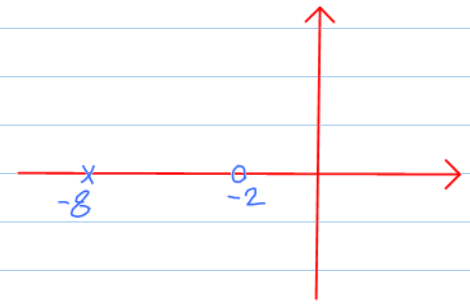
$\omega_n = 1$, $2\xi\times 1 = 1$ $\quad \xi = \frac{1}{2}$

$\xi = \frac{1}{2} \rightarrow \%OS = 13\%$

$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 8s$

نیازمند بهبود حالت گذرا ← کاهش $\%OS$ ، کاهش T_s

جبران ساز ← PD ، PID ، lead ، lead-lag

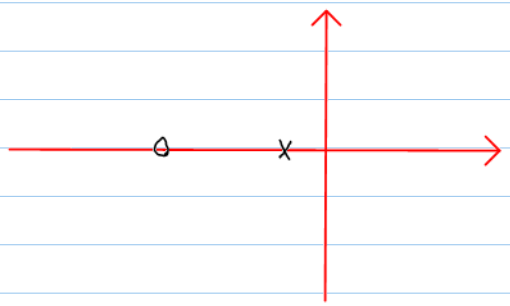


lead ← ۱) $c(s) = ۶۰\frac{s+۲}{s+۸}$

۲) $c(s) = ۵$ ✗

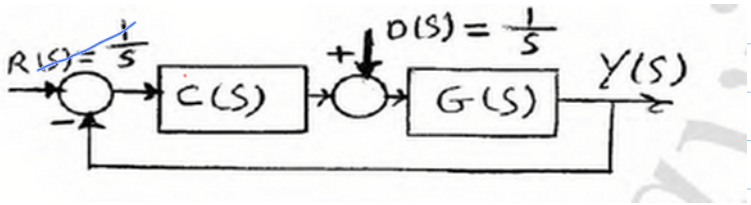
۳) $c(s) = ۳(s+۲/۷)$

lag ← ۴) $c(s) = ۵\frac{s+۰/۰۱}{s+۰/۰۰۱}$ ✗



گزینه ۱ و ۳ می توانند کاهش $\%OS$ و T_s را انجام دهند.

از بین این دو هرکدام رفتار هدف اغتشاش بهتری دارد را انتخاب کنید.



حذف اعتشاش: در حالت دائمی اثر اعتشاش در خروجی کمتر شود.

$y_d(s) = ?$

$$\frac{Y_d(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

$$Y_d(s) = \frac{1}{s} \times \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + C(s)\frac{1}{s(s+1)}}$$

$$Y_d(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1) + C(s)}$$

$$y_d(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,Y_d(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1) + C(s)} = \frac{1}{C(0)}$$

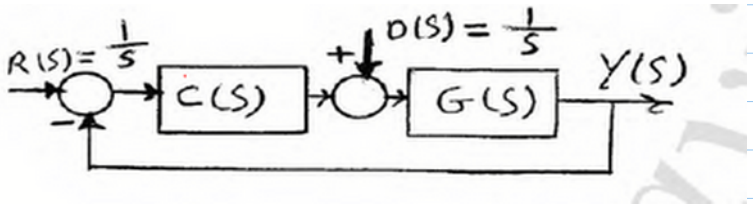
هر $C(s)$ ای که $C(0)$ آن بزرگتر باشد، $y_d(\infty)$ را کوچکتر می‌کند.

1) $C(0) = 60 \times \frac{2}{8} = 15$ ✓

3) $C(0) = 3 \times 2.7 = 8.1$

تنظیم پارامترهای PID: $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$

قبل از این بحث، از بین گزینه‌های داده شده، گزینه‌ها را انتخاب می‌کردیم.



$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

در خواسته: $\%OS = 5\%$ و $T_s = 2s$

$C(s) = PID \longrightarrow C(s) = k_p + k_d s$

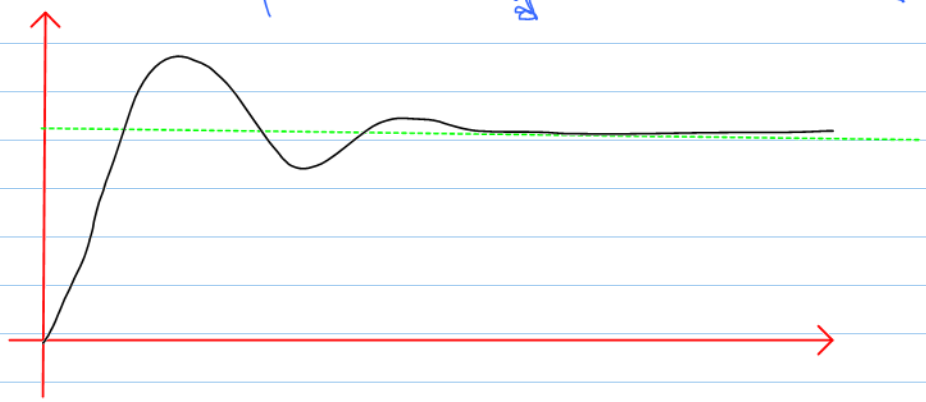
سعی و خطا $\longrightarrow$ $k_p = 0 \longrightarrow$ 1000

$k_d = 0 \longrightarrow$ 1000

یک سیستم را بدست آورید $\longrightarrow$

در کل حدود مقادیر k_p، k_i، k_d مناسب را استخراج می‌کنند و سپس سعی و خطا می‌کنند.

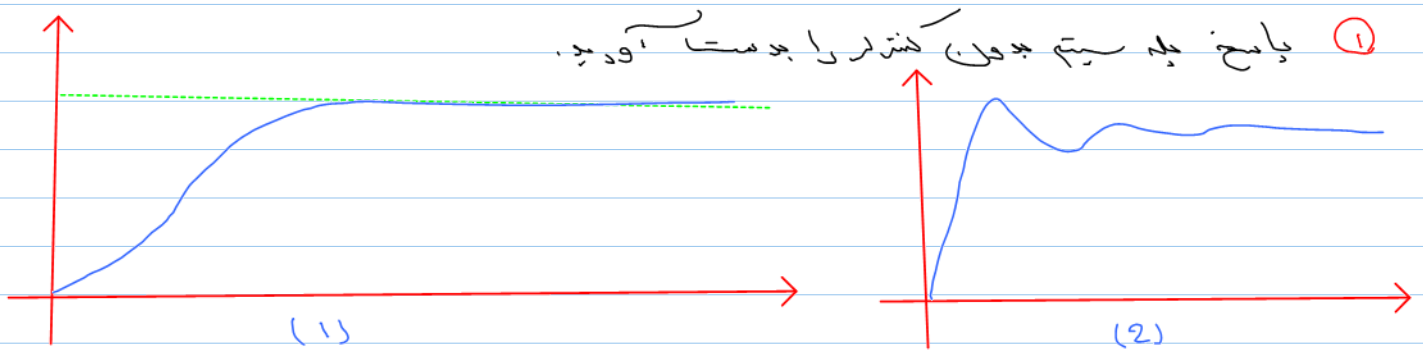
بازه‌های تنظیم پارامترها $\longrightarrow$ $k_p = 50$ $k_d = 3$



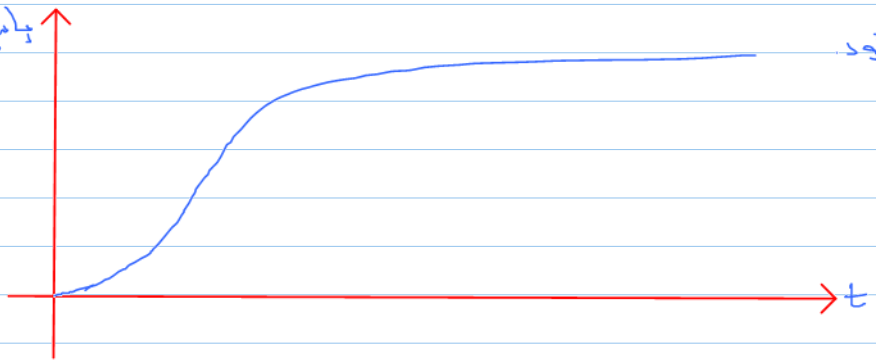
$T_s = 1.5s$

$\%OS = 7\%$

① پاسخ پله سیستم حلقه باز را بدست آورید.



② اگر پاسخ پله به صورت شکل (1) باشد یعنی مانند شکل فوق مرا پاسخ‌ای بگیرد که از روش اول زیگلر-نیکولز استفاده می‌شود



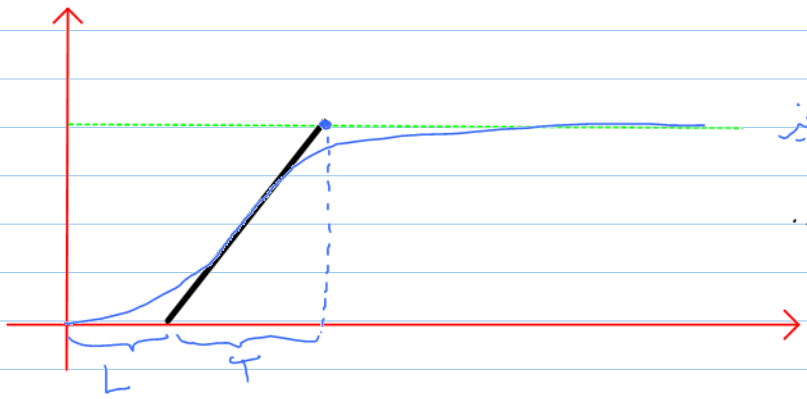
روش اول زیگلر-نیکولز:

1- پاسخ پله سیستم حلقه باز را بدست آورید. (G(s))

2- مقادیر T و L را محاسبه کنید.

T: ثابت زمانی L: تأخیر

خط مماس بر پاسخ پله با بیشترین شیب را رسم کنید.

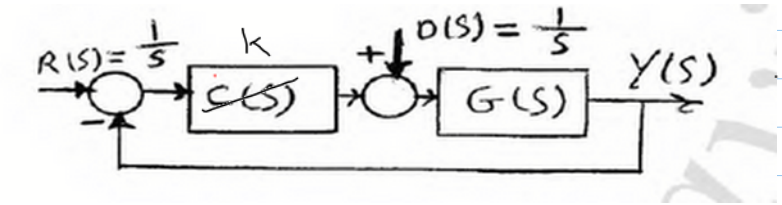


$$C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

نوع کنترلر	k_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

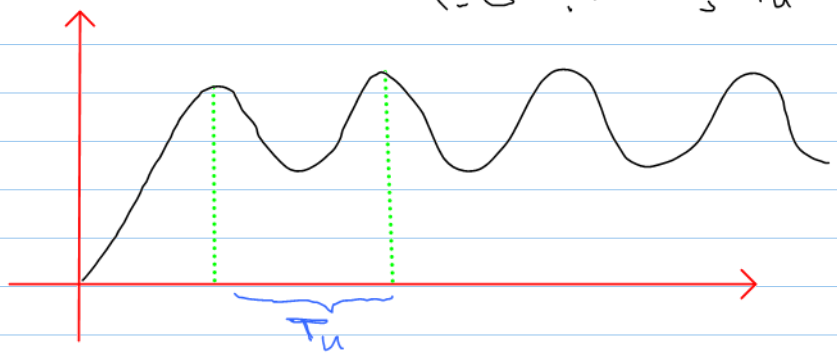
② اگر سیستم حلقه باز پایدار مینیمم فاز باشد:

در سیستم حلقه بسته به جای کنترلر $C(s)$، بهره k قرار میدهیم



شرط پایداری را برای سیستم حلقه بسته بدست میآوریم.

مقدار بهره k که سیستم را در مرز پایداری قرار دهد را با k_u نشان میدهیم و فرکانس نوسانات سیستم در حالت پایداری مرزی را با ω_u نشان داده و $T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$ را حساب میکنیم.



$$C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

T_d	T_i	k_p	
0	∞	$\frac{k_u}{2}$	P
0	$\frac{T_u}{1.2}$	$0.45k_u$	PI
$\frac{T_u}{8}$	$\frac{T_u}{2}$	$0.6k_u$	PID

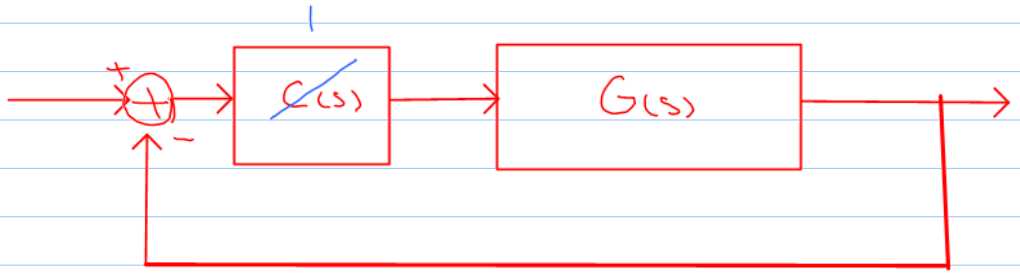
برق ۸۸

تابع تبدیل سیستمی عبارت است از:

$$G(s) = K\frac{۰/۱۲(-s+۰/۵)}{(s+۰/۱)(s+۰/۲)}$$

می‌خواهیم این سیستم را با کنترل‌کننده $G_c(s) = K\left(۱+\frac{۱}{Ts}\right)$ کنترل کنیم. یک روش صنعتی برای انتخاب پارامترهای T و K استفاده از روابط $K = \frac{k_c}{۲/۲}$ و $T = \frac{۱/۶۷\pi}{\omega_c}$ است که اصطلاحاً روش زیگلرنیکولز گفته می‌شود. در این روابط k_c و ω_c به ترتیب بهره بحرانی و فرکانس بحرانی است که در آن سیستم حلقه بسته بدون کنترل‌کننده‌ی $G_c(s)$ به مرز ناپایداری می‌رسد. در این سیستم:

۱) $K = ۱/۱۴ , T = ۱۲/۷$ ۲) $K = ۱/۵ , T = ۱۲/۷$ ۳) $K = ۱/۳۱۴ , T = ۱۵/۲$ ۴) $K = ۲/۵ , T = ۱۵/۲$



بهره کارا طوری حساب کنید که سیستم حلقه بسته مرز ناپایداری قرار گیرد.

$$\Delta(s) = 1 + k\frac{0.12(-s+0.5)}{(s+0.1)(s+0.2)} = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + 0.3s + 0.02 + 0.06k - 0.12ks = 0$$

$$\Delta(s) = s^2 + (0.3 - 0.12k)s + 0.02 + 0.06k = 0$$

شرط ناپایدار شدن : $0.3 - 0.12k = 0 \rightarrow k = \frac{30}{12} = \frac{10}{4} = 2.5$

$k_c = 2.5$

$\omega_c = ?$

$$\Delta(s) = s^2 + 0.02 + 0.06 \times 2.5 = 0$$

$$s^2 + 0.17 = 0 \rightarrow s = \pm j\sqrt{0.17} \simeq \pm j0.4$$

$$\omega_c = |\pm j0.4| = 0.4$$

$$k = \frac{2.5}{2.2} = 1.12 \qquad T = \frac{1.67 \times 3.14}{0.4} = 12.7 \checkmark$$

« اعمال عمل کنترلی »

$$C(s) = 1.14\left(1 + \frac{1}{12.7s}\right) = P + I\frac{1}{s}$$

$$= 1.14 + \frac{1.14}{12.7}\frac{1}{s} = P + I\frac{1}{s}$$

$\%OS = 38\%$	$e_{ss} = 0.25$	
$\%OS = 58\%$	$e_{ss} = 0$	PI
$\%OS = 32\%$	$\sim = 0$	PID , $k_D = 1$
$\%OS = 9\%$	$\sim = 0$	$\sim$, $k_d = 3$
$\%OS = 0.46$	$\sim = 0$	$\sim$, $\sim = 5$

← PID

← P ↑ و سیستم را به سمت ناپایداری می برد

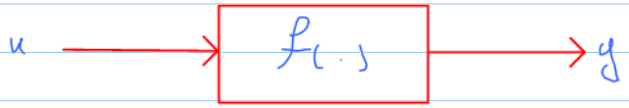
← k_i ↑ $\sim$ $\sim$ $\sim$ و خطای ماندگار را حذف می کند

← D ↓ $\%OS$ و پایداری را بهتر می کند.

جلسه 7 کنترل فازی

«حساسیت»

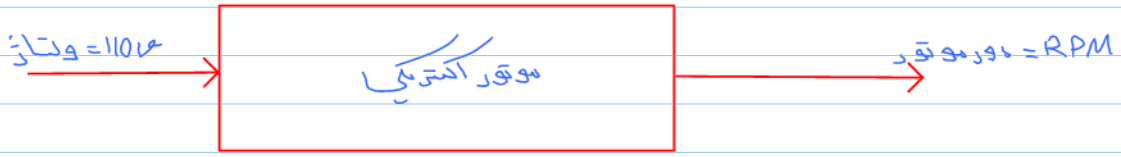
تعریف حساسیت:



$y(t) = f(u(t)) \rightarrow$ $u=10 \rightarrow y=200$

$\downarrow \times 2$ $\quad \downarrow \times 3 \rightarrow$

$u=20 \rightarrow y=?600$



$RPM = f(v, T, i) \rightarrow$ $T=25^\circ$, $v=110 \rightarrow RPM = 1000$

$T=50^\circ$, $v=110 \rightarrow RPM = 1500$

حساسیت RPM به دما = RPM چقدر روی دور موتور اثر دارد؟

$\ll S_\alpha^f = \alpha$ نسبت به پارامتر f حساسیت تابع $= \frac{\alpha}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \alpha} \gg$

$S_\alpha^f > 0 \longleftarrow$ یعنی رابطه α و f مستقیم است. $\quad$ افزایش α ← افزایش f

کاهش α ← کاهش f

$S_\alpha^f < 0 \longleftarrow$ " " " " معکوس است. $\quad$ افزایش α ← کاهش f

کاهش α ← افزایش f

$T=25^\circ \rightarrow RPM = 1000$ $\quad \leftarrow S_\alpha^f = 2$

$\Delta T = 50^\circ$ $\quad \Delta RPM = 100$

$T=75^\circ \rightarrow RPM = 1100$ $\quad$ هر واحد افزایش در α موجب 2 واحد افزایش در f می شود و هر واحد کاهش در α موجب 2 واحد کاهش در RPM می شود.

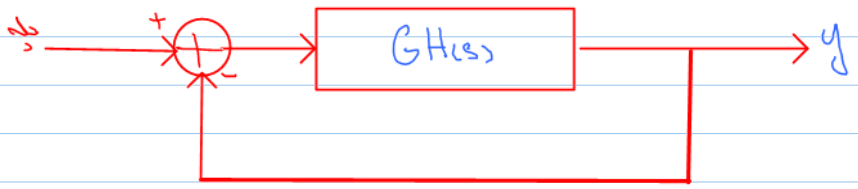
$$S_\alpha^f = \frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$$

برق ۸۱

درسیستمی با فیدبک واحد $GH = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$ است.

حساسیت درصد اورشوت به پله واحد نسبت به ζ (S_ζ^{po}) در ζ نامی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

۱) -2π ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) π



$\%0.5 = f \qquad S_\xi^f = ?$

$\%0.3 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100 = f \qquad S_\xi^f = \frac{\xi}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \xi}$

$\frac{\partial f}{\partial \xi} = ?$

$f = e^{h(x)} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dh}{dx} e^{h(x)}$

$f = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad h(\xi) \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = ? \; \frac{dh}{d\xi} e^{h(\xi)}$

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{-\pi\sqrt{1-\xi^2} - \left(\frac{-2\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} \times -\pi\xi\right)}{1-\xi^2} = \frac{-\pi\sqrt{1-\xi^2} - \frac{\pi\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}}$$

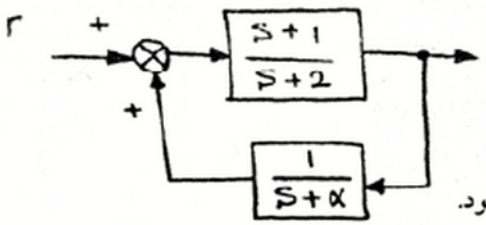
$$= \frac{-\pi}{(1-\xi^2)(\sqrt{1-\xi^2})}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{-\pi}{1-\xi^2} e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$S_\xi^f = \frac{\xi}{e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} \times \frac{-\pi}{(1-\xi^2)^{3/2}} e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{-\pi\xi}{(1-\xi^2)^{3/2}} \checkmark$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow S_\xi^f = \frac{-\pi\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} = -2\pi$$

در شکل زیر با توجه به مقدار نامی $\alpha = 1$ کدام عبارت درست است؟

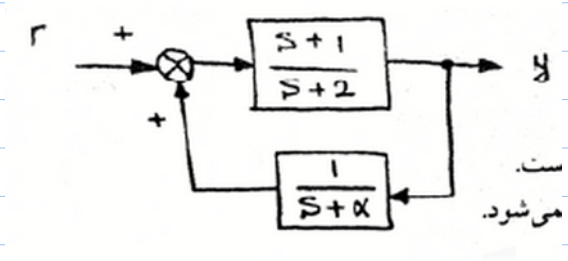


۱) حساسیت خروجی نسبت به α در فرکانس‌های بالا بطرف صفر میل می‌کند.

۲) حساسیت خروجی نسبت به α در فرکانس‌های پایین بطرف صفر میل می‌کند.

۳) تابع تبدیل حلقه بسته به α ربطی ندارد فلذا حساسیت خروجی نسبت به α صفر است.

۴) در حالتی که فیدبک مثبت باشد حلقه بسته ناپایدار و در نتیجه حساسیت تعریف نمی‌شود.



$Y(s) \rightarrow \quad S_{\alpha}^{Y} = ?$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1 - \frac{s+1}{s+2} \times \frac{1}{s+\alpha}} = \frac{(s+1)(s+\alpha)}{s^2 + (\alpha+1)s + 2\alpha - 1} = T(s)$$

$Y(s) = T(s)\, R(s)$ با تغییر پارامتر α، دو روی تغییر می‌کند. پس رابطه حساسیت خودی نسبت به α هم اثری ندارد.

$$S_{\alpha}^{Y} = \frac{\alpha}{Y} \times \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{T(s)\,R(s)} \times R(s) \frac{\partial T(s)}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{T(s)} \frac{\partial T}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{s^2 + \alpha s + s + \alpha}{s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1}\right) = \frac{(s+1)(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1) - (s+2)(s^2 + \alpha s + s + \alpha)}{(s^2 + \alpha s + 2\alpha - 1 + s)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{s^3 + \alpha s^2 + s^2 + 2\alpha s - s + s^2 + \alpha + s + 2\alpha - 1 - (s^3 + \alpha s^2 + s^2 + \alpha s + 2s^2 + 2\alpha s + 2s + 2\alpha)}{(s^2 + \alpha s + 2\alpha - 1 + s)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{-s^2 + (\alpha - 3)s + 2\alpha - 3}{(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1)^2}$$

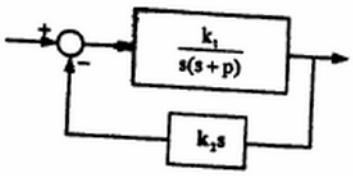
$$S_{\alpha}^{Y} = \frac{\alpha}{\frac{s^2 + \alpha s + s + \alpha}{s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1}} \times \frac{-s^2 + (\alpha - 3)s + 2\alpha - 3}{(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1)^2}$$

$$S_{\alpha}^{Y} = \frac{\alpha(-s^2 + (\alpha - 3)s + 2\alpha - 3)}{(s^2 + \alpha s + s + \alpha)(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1)}$$

1) $s \to \infty$ $\quad \left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{s=\infty} = \frac{-\alpha \times (\infty)^2}{(\infty)^2 \times (\infty)^2} = 0$

برق ۹۷

حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته سیستم کنترل شکل مقابل نسبت به پارامتر p کدام است؟

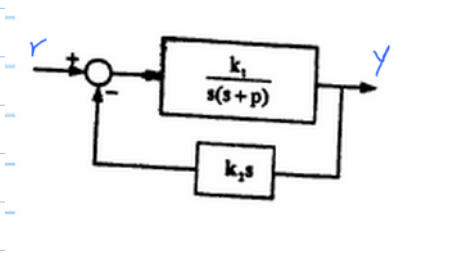


۱) $\frac{-ps}{s+p+k_1k_2}$

۲) $\frac{-p}{s+p+k_1k_2}$

۳) $\frac{-p}{k_1(s+p+k_1k_2)}$

۴) $\frac{-ps}{k_1(s+p+k_1k_2)}$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_1}{s(s+p)}}{1-\left(\frac{k_1}{s(s+p)} k_2 s \times -1\right)}$$

$$T(s) = \frac{k_1}{s(s+p) + k_1 k_2 s} = \frac{k_1}{s^2 + ps + k_1 k_2 s}$$

$$S_p^T = \frac{p}{T(s)} \times \frac{\partial T}{\partial p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{0 \times (s^2 + ps + k_1 k_2 s) - k_1 \times s}{(s^2 + ps + k_1 k_2 s)^2} = \frac{-k_1}{s(s + p + k_1 k_2)^2}$$

$$S_p^T = \frac{p}{\frac{k_1}{s(s+p+k_1 k_2)}} \times \frac{-k_1}{s(s+p+k_1 k_2)^2} = \frac{-p}{s+p+k_1 k_2}$$

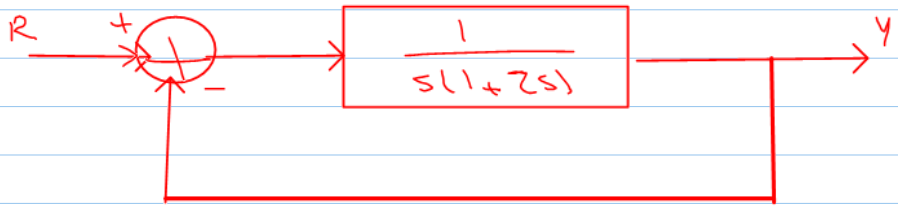
۰ سیستمی فیدبک واحد منفی با $G(s)=\frac{1}{s(1+\tau s)}$ چنانچه τ به میزان ۰٪ افزایش یابد:

ξ به میزان ۵ درصد کاهش می‌یابد.

۲) ξ به میزان ۵ درصد افزایش می‌یابد.

ξ به میزان ۱۰ درصد کاهش می‌یابد.

۴) ξ به میزان ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.



τ را ۱۰٪ زیاد کنیم ← ξ چقدر تغییر می‌کند؟

$$\text{حساسیت } \xi \text{ به } \tau = \frac{\Delta\xi}{\Delta\tau} = \frac{?}{0.1} = S_\tau^\xi = \frac{\tau}{\xi} \times \frac{\partial\xi}{\partial\tau}$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{\tau s^2 + s + 1} \quad \not\times \quad \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{1}{\tau}} = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{\tau} \rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{1}{\tau} \rightarrow \xi = \frac{1}{\tau} \times \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{\tau}}} = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{0 \times 2\sqrt{\tau} - 1 \times \frac{2}{2\sqrt{\tau}}}{4\tau} = \frac{-1}{4\tau\sqrt{\tau}}$$

$$S_\tau^\xi = \frac{\tau}{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}} \times \frac{-1}{4\tau\sqrt{\tau}} = -\frac{1}{2} = \frac{\Delta\xi}{\Delta\tau} \rightarrow \frac{\Delta\xi}{10\%} = -\frac{1}{2}$$

τ را ۱۰٪ افزایش دهیم ← ξ ۵٪ کاهش می‌یابد

در یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$، وقتی میرائی سیستم از نوع بحرانی است، حساسیت **پاسخ ضربه** واحد سیستم نسبت به ω_n پس از گذشت یک ثانیه از اعمال ضربه کدام مورد است؟

۱) ۰ ۲) $-\omega_n$ ۳) $-2\omega_n$ ۴) $\frac{2}{\omega_n}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \xi = 1 \;,\; R(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \Rightarrow S_{\omega_n}^{C(s)}\Big|_{t=1} = ?$$

$$C(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \;,\; = \omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t} = (t\,\omega_n^2)(e^{-\omega_n t})$$

$$\omega_n^2\, t\, u(t) \longrightarrow \omega_n^2 \frac{1}{s^2}$$

$$\times e^{-\omega_n t} \downarrow \qquad \downarrow s \to s+\omega_n$$

$$\omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t} \longrightarrow \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

$$S_{\omega_n}^{C(t)} = \frac{\omega_n}{\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}} \times \frac{\partial C}{\partial \omega_n}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \omega_n} = 2t\omega_n e^{-\omega_n t} + (-t e^{-\omega_n t} \times t\omega_n^2)$$

$$S_{\omega_n}^{C} = \frac{\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n^2}\, t\, \cancel{e^{-\omega_n t}}} \times (2\cancel{t}\,\cancel{\omega_n}\,\cancel{e^{-\omega_n t}} - t^{\cancel{2}}\,\omega_n^{\cancel{2}}\,\cancel{e^{-\omega_n t}})$$

$$t=1 \longrightarrow S_{\omega_n}^{C} = 2 - \omega_n$$

برق ۹۱

در دیاگرام بودی $(S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2)^{-1}$ در فرکانس زاویه‌ای $\omega = \omega_r$ دامنه به حداکثر مقدار خود می‌رسد. حساسیت این فرکانس زاویه‌ای نسبت به ζ ($S_{\zeta}^{\omega_r}$) در ζ نامی $\frac{1}{2}$ کدام گزینه زیر است؟

۱) -1

۲) 1

۳) $0/5$

۴) $-0/5$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\xi}^{\omega_r} = \frac{\xi}{\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}} \times \frac{\partial \omega_r}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \xi} = \omega_n \frac{-4\xi}{2\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{-2\xi\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

$$S_{\xi}^{\omega_r} = \frac{\xi}{\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}} \times \frac{-2\xi\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{-2\xi^2}{1-2\xi^2}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \rightarrow S_{\xi}^{\omega_r} = -1$$

"اعلم تنزل ظلا"