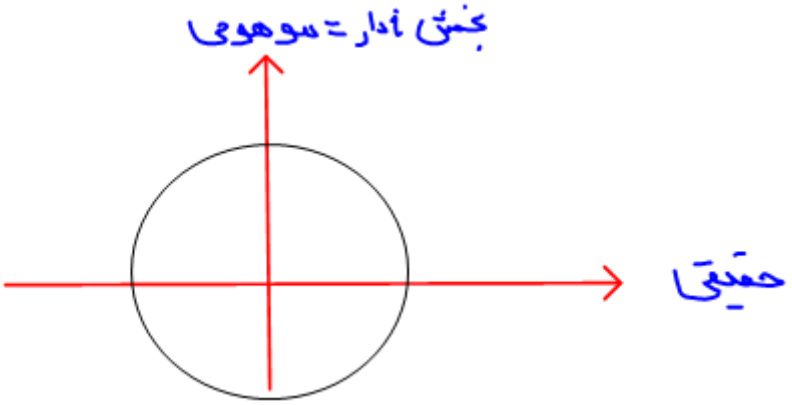
مقدمه

❖ یادآوری ریاضی

در درس سیگنال فضای مختلط کار می‌کنیم ← ۳ ۲

3+i → 3+j 2+j

فضای مختلط روی دایره مثلثاتی ترجمه می‌شود.



❖ انواع اعداد

❖ حقیقی :

❖ موهومی محض:

❖ مختلط:

اعداد منفی ← $\sqrt{-4} = ?$

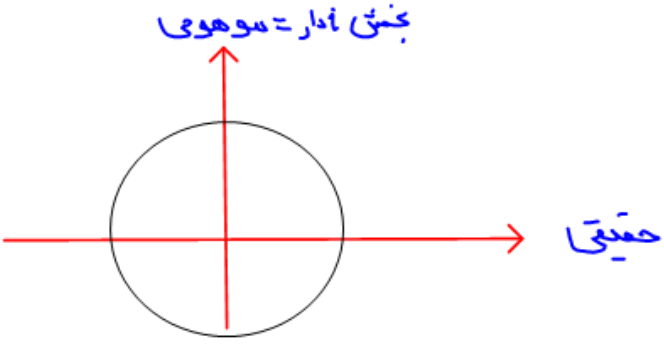
$\sqrt{-1} = i$ یا $j \rightarrow \boxed{i^2 = -1}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \times 4}$

$= \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \times \underbrace{\sqrt{4}}_{2}$

$= i \times 2$

$3i = \sqrt{-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3i$



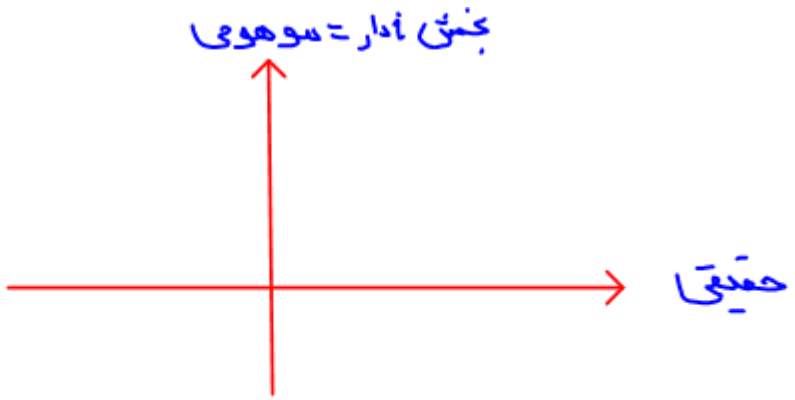
$g + \underline{bj} = f$

$\mathrm{Re}\{f\} = a$

$\mathrm{Im}\{f\} = b$

$$f = -2 - j3$$

$$\mathrm{Re}\{f\} = -2 \qquad \mathrm{Im}\{f\} = -3$$



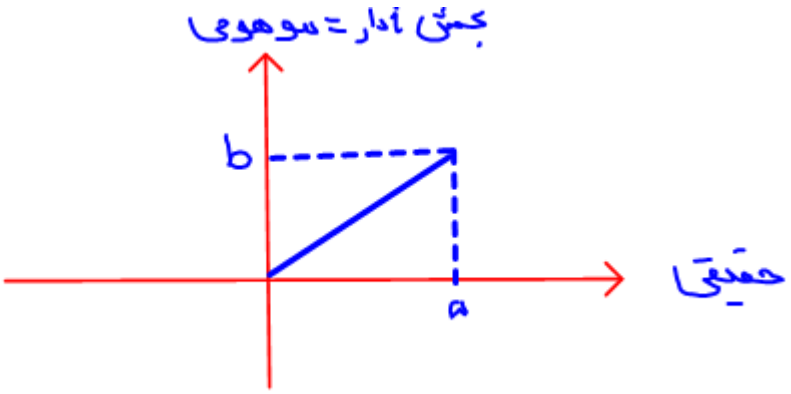
❖ مختصات دکارتی

$$f = \mathrm{Re}\{f\} + j\mathrm{Im}\{f\}$$

$-10 + j\,15 = x - j\,y$ $\qquad$ $x, y = ?$

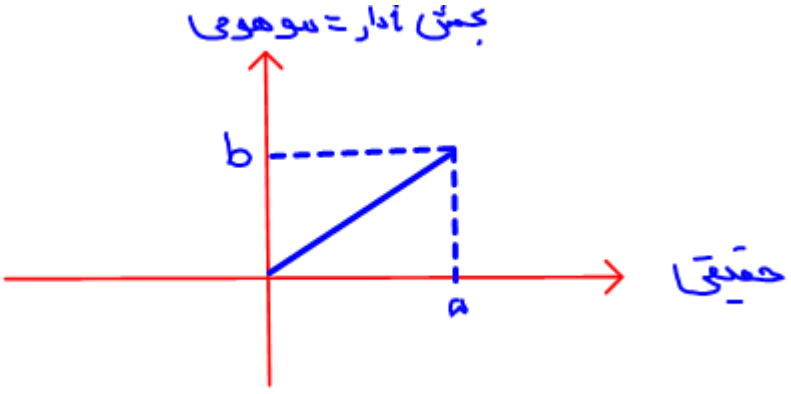
$(x + y) + j(x - y) = 5 + j(-1) = 5 - j$

$f = a + bj$



نقطه‌ای به شعاع r و با زاویه θ نسبت به محور حقیقی مثبت $f = Re\{f\} + jIm\{f\}$

$$\begin{cases} r = f & \text{اندازه} \\ \theta = f & \text{فاز} \end{cases}$$



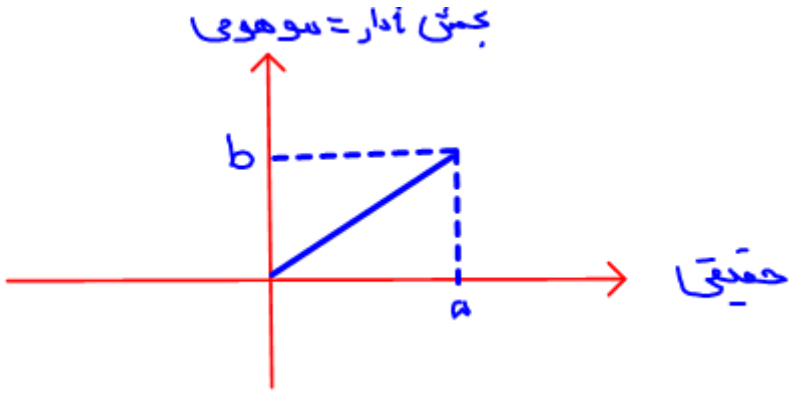
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\boxed{|f| = \sqrt{Re\{f\}^2 + Im\{f\}^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$



$$tan\theta = {}^{b}/_{a} \qquad \theta = tan^{-1}({}^{b}/_{a})$$

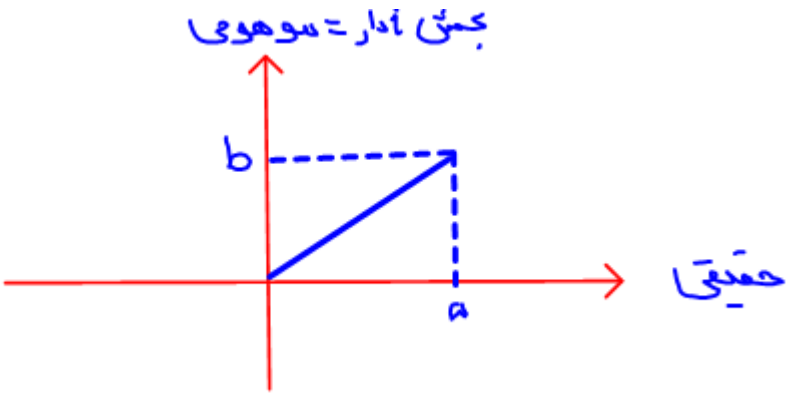
$f = a + bj \quad \Rightarrow$

$$f \rightarrow \begin{cases} \text{اندازه} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(f)^2 + Im(f)^2} = |f| \\ \text{فاز} = \tan^{-1}\left({}^{b}/_{a}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{Im(f)}{Re(f)}\right) = \measuredangle f \end{cases}$$

$$f = |f|\measuredangle f = |f|e^{j\measuredangle f}$$

$$f = 2e^{j20} \qquad |f| = 2$$

$$\measuredangle f = 20^{\circ}$$

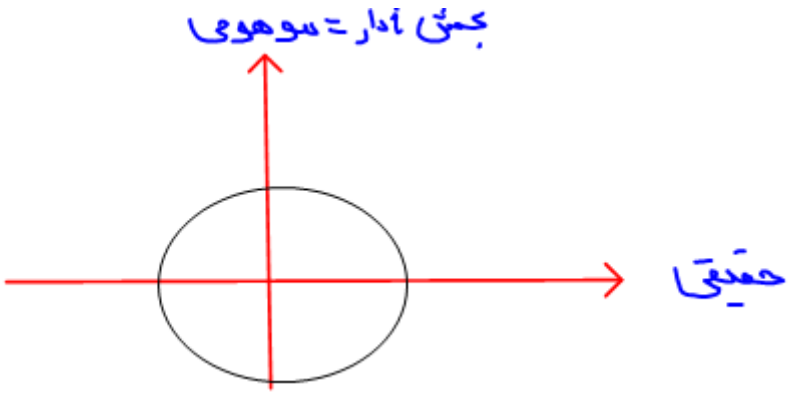


$$e^{j\theta} = \underbrace{1}_{\text{شعاع}} \overbrace{e^{j\theta}}^{\text{فاز}} =$$

$$\boxed{|e^{j\theta}| = 1}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos\theta^2 + \sin\theta^2} = \sqrt{1} = \boxed{1}$$

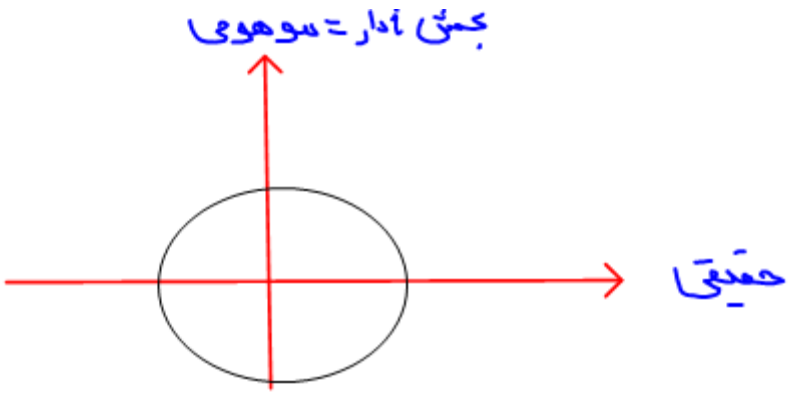


دایره به شعاع واحد = دایره مثلثاتی

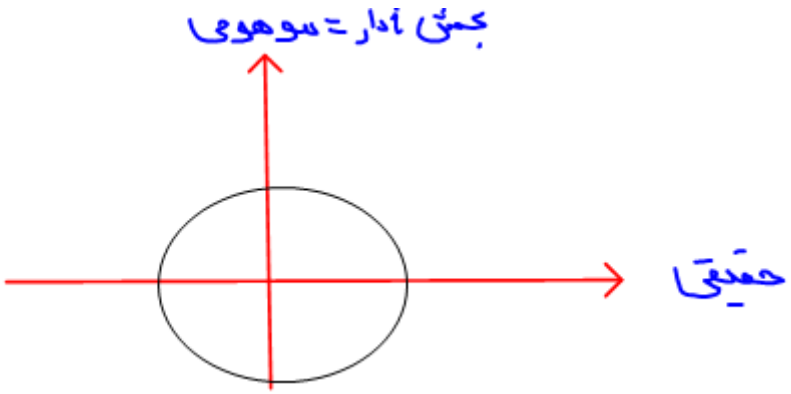
θ

$360^\circ = 0$

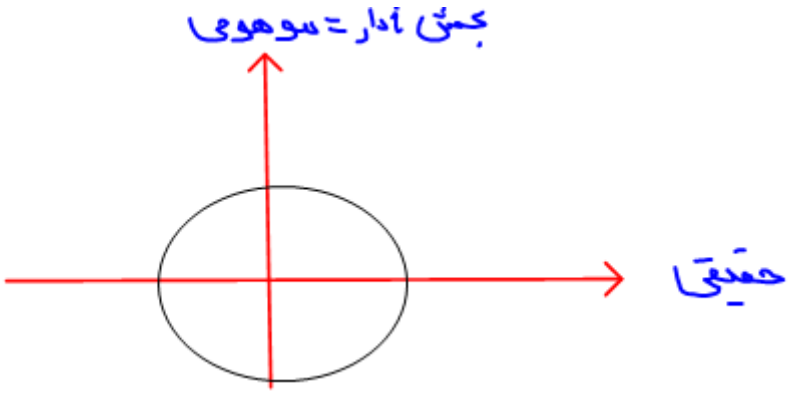
$390 = 30^\circ$



$$f_1 \begin{cases} = 1j \Rightarrow \begin{cases} |f_1| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \measuredangle f = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ \end{cases} = 1\angle 90^\circ = 1e^{j90^\circ} \\ 1 \rightarrow = 1e^{j0} \\ -1 \rightarrow = 1e^{j180^\circ} \\ -j \rightarrow = 1e^{j270^\circ} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1e^{j(90^\circ)} = 0 + (-j) = -j \\ 2e^{j540^\circ} =? 2\left(1e^{j540^\circ}\right) \\ \qquad = 2(-1) = \boxed{-2} \end{cases}$$



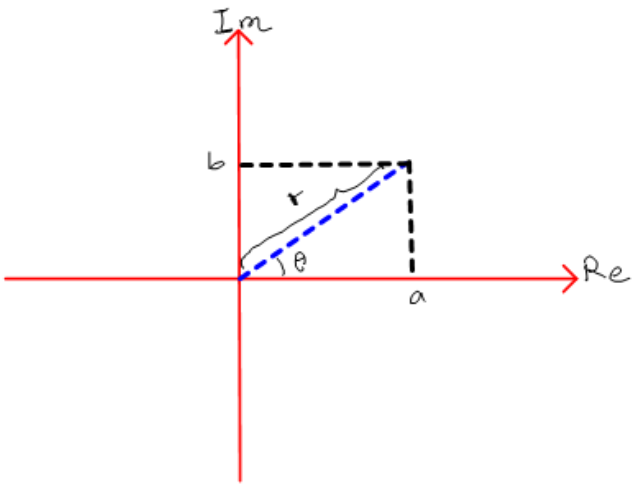
$$e^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

رادیان و درجه

$$180^\circ = 1\pi \text{ رادیان}$$

$$90 = \frac{\pi}{2} \qquad 360 = 2\pi$$

$$-90 = -\frac{\pi}{2}$$



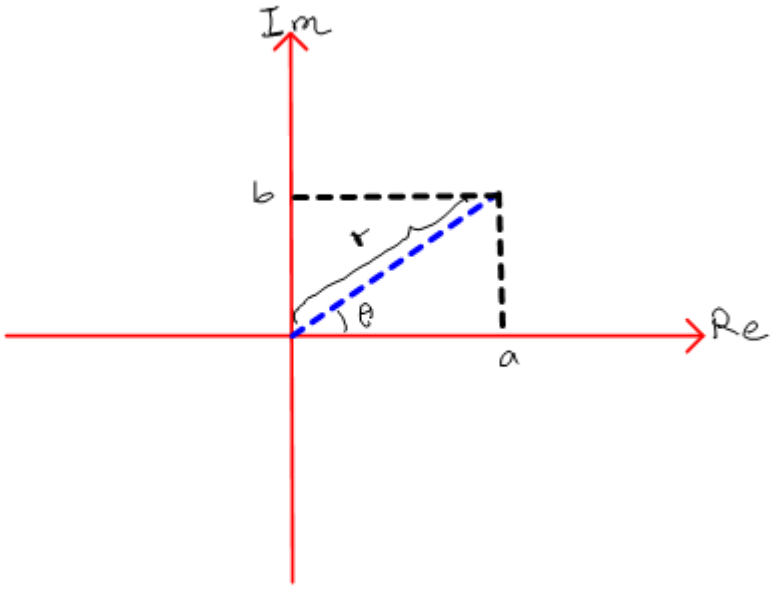
$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{-a}{r}$$

$$= -\cos(\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\cos(-\theta) = \frac{a}{r} = \cos\theta$$



❖ تبدیل نمایش قطبی به دکارتی

1 $e^{j\theta} = cos\theta + j\, sin\theta$

2 $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ و

3 $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

4
$$\begin{cases} e^{j(2k\pi)} = 1 \Rightarrow e^{j0} = e^{j2\pi} = e^{j4\pi} = e^{j(-2\pi)} \\ e^{j(2k\pi+\pi)} = e^{j(2k+1)\pi} = -1 \\ e^{j\pi k} = (-1)^k = \begin{cases} 1 & k = \text{زوج} \\ -1 & k = \text{فرد} \end{cases} \\ e^{j\pi n} \quad \leftrightarrow (-1)^n \quad \text{هرجا} \\ e^{j(2k\pi+\frac{\pi}{2})} = 1j \\ e^{j(2k\pi+\frac{3\pi}{2})} = -j \end{cases}$$

$e^{j\frac{5\pi}{2}} = ?$

$e^{j(2+0.5)\pi}$

$= e^{j(2\pi+\frac{\pi}{2})} = ?$

5 $\quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow \quad A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\theta - \tan^{-1}(B/A))$

6 $\quad \sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \cos x \sin y$

$\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

7 $\quad \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$

8 $\quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$

9 $\quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$

وقتی a مضرب b است که بتوان نوشت:

$$a = b \times \underbrace{\boxed{\text{یک عدد صحیح}}}_{\pm}$$

ک.م.م $\quad 4و3 = \boxed{12}$

$4: \pm 4$ و ± 8 و $\boxed{\pm 12}$ و ± 16

$3: \pm 3$ و ± 6 و ± 9 و $\boxed{\pm 12}$

$\boxed{8} = \{4,8\}$ ک .م .م

$\boxed{8}$ و $4 : 4$

$8 : \boxed{8}$ و 16

فصل اول: معرفی سیگنال ها و سیستم ها

تعریف سیگنال:

هر تابعی که اطلاعاتی را در مورد یک پدیده فیزیکی به ما بدهد.

تابعی از متغیرهای مستقل $y = f(x) = x^2 + x$

کولر خوب کار می‌کند؟

دما در زمان‌های مختلف ← سیگنال

متغیر مستقل

خودروی پژو ۲۰۶ دارای استهلاک زیادی هست؟

شتاب ۰ تا ۱۰۰ خودرو ←
- 2.5 s ← خودرو استهلاک دارد
- 3 s
- 4 s
- 5 s

$$\begin{cases} 2.5\ s & \text{در ماه اول} \\ \downarrow 0.5\ s & \\ 3\ s & \text{در ماه ششم} \\ \downarrow 1\ s & \\ 4\ s & \text{در انتهای سال اول} \\ \downarrow 1\ s & \\ 5\ s & \text{در انتهای سال دوم} \end{cases}$$

هر پدیده بر اساس یک متغیر مستقل (معمولاً زمان) توصیف می‌شود.

یک سری اعداد یا یک تابع بر حسب زمان که نحوه وقوع یک پدیده را بیان می‌کند بیانگر یک سیگنال است.

❖ سیگنالها بر اساس معیارهای مختلف:

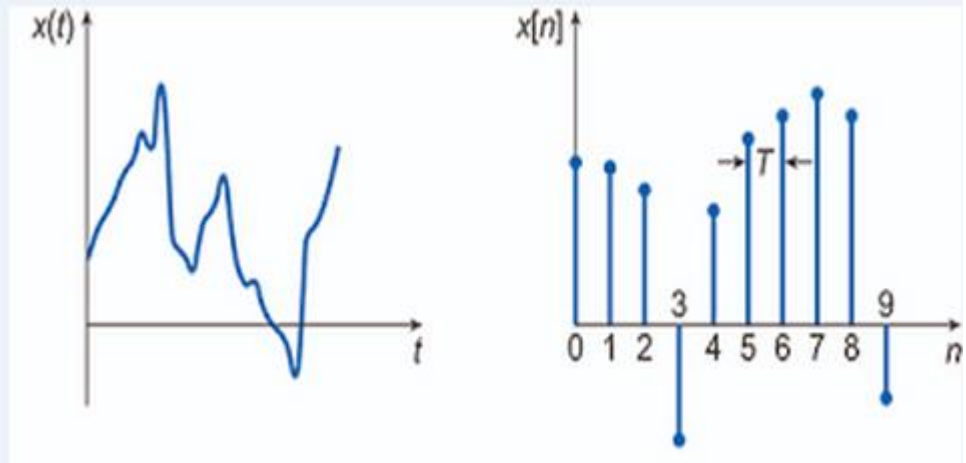
دسته‌بندی بر اساس زمان←

1 پیوسته

به ازای تمام زمانها مقداری تعریف شده دارد.

2 ز مان گسسته

به ازای زمان در اعدا صحیح مقدار دارد و در اعداد غیرصحیح تعریف نشده است.



* **سیگنال گسسته در اعداد غیرصحیح مقدار ندارد نه اینکه صفر باشد.**

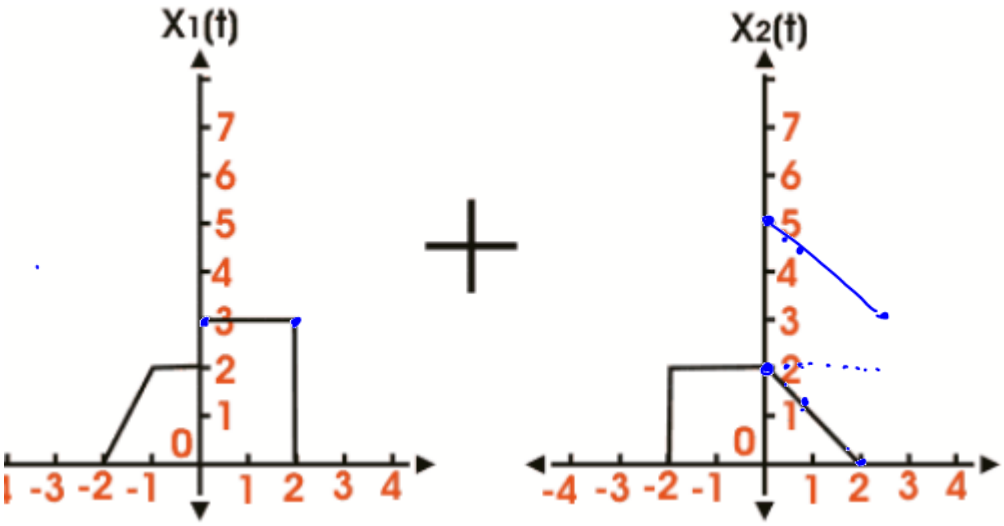
* معمولاً سیگنال پیوسته بر حسب زمان (t) $x(t)$

معمولاً سیگنال گسسته بر حسب n یا k $x[n]$ $x[k]$

❖ عملیات روی سیگنالها

1 جمع یا تفریق $x(t) - y(t)$ $x(t) + y(t)$

نقطه به نقطه باهم جمع یا تفریق می‌شود.



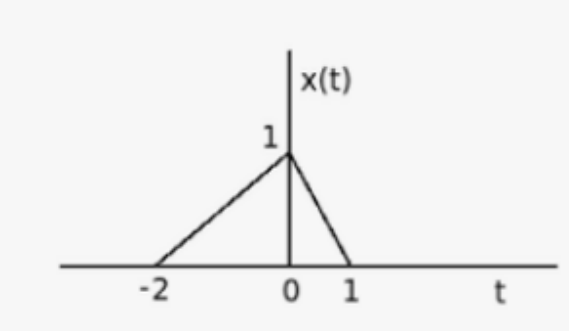
2 ضرب عدد در سیگنال

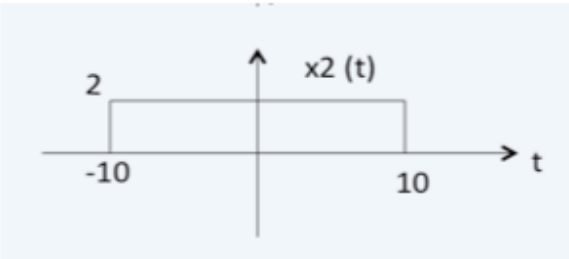
در هر نقطه عدد در دامنه سیگنال ضرب می‌شود.

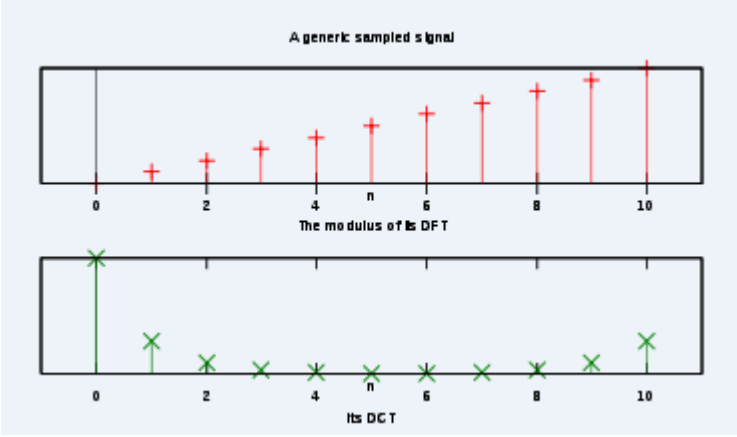


مثال

$x_1(t) - x_2(t) = ?$

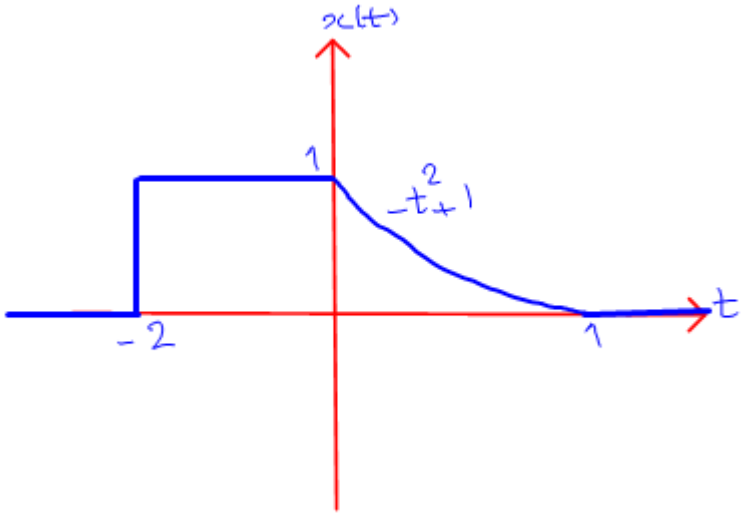






$y[n] +\times [n] =?$

3 مشتق سیگنال



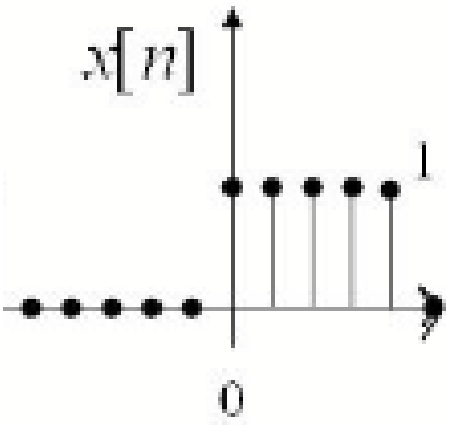
تفاضل

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(t+0^+) - x(t)}{0^+}$$

$$= \frac{x(t) - x(t-0^+)}{0^+}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\text{در لحظه قبل } x - x \text{ در لحظه الان}}{\text{لحظه قبل} - \text{لحظه الان}}$$

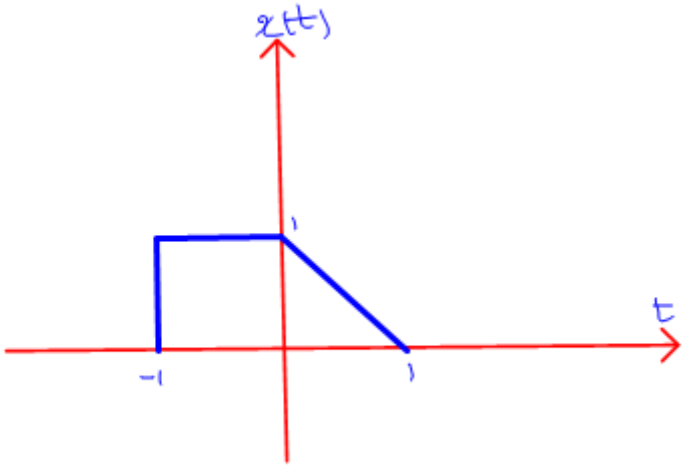
$$\frac{x[n] - x[n-1]}{n-(n-1)} = x[n] - x[n-1]$$



4 انتگرال گیری

پیوسته = مساحت زیر نمودار

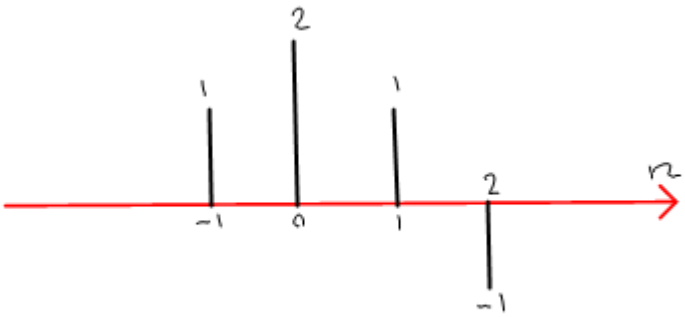
گسسته = مجموع سیگنال (اعداد روی محور عمودی)



مثلث + مستطیل $= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$

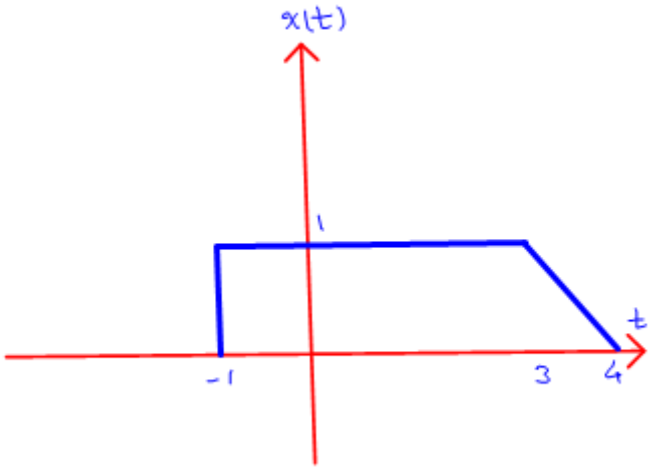
مستطیل $= \int_{-\infty}^{0} x(t)dt =$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] =$$



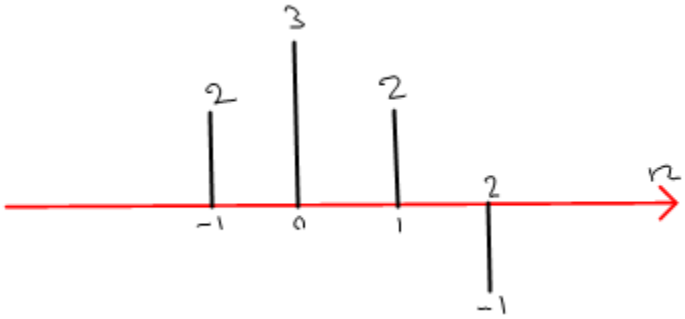
مثال

$$\int_{-\infty}^{3} x(-2\tau + 1)d\tau = ?$$



$\int_{-\infty}^{-5} \frac{-1}{2}\, x(\alpha)\, d\alpha$?

$$\sum_{n=-1}^{2} x[-2n+1]$$



دقت ←

$$\sum_{k=a}^{b} f[k] = \sum_{k=b}^{a} f[k]$$

$$\int_{a}^{b} f(t)\, dt = -1 \int_{b}^{a} f(t)\, dt$$

عملیات روی متغیر $\frac{t}{n}$ (آرگون سیگنال)

- شیفت
- مقیاس‌دهی

1 شیفت زمانی پیوسته

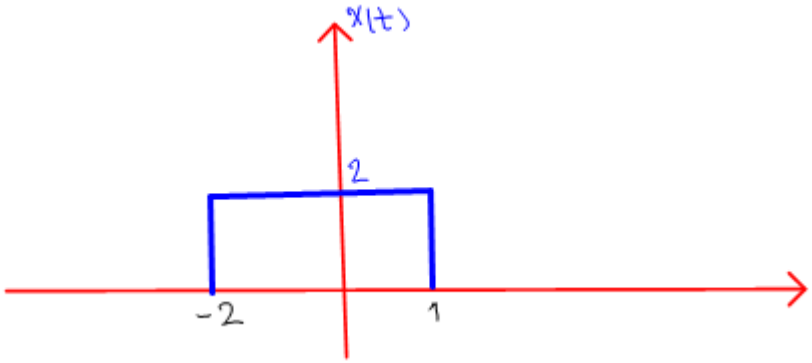
$a > 0$

$x(t-a) \leftarrow$ سیگنال به اندازه a روی محور افقی به سمت راست می‌رود.

$x(t+a) \leftarrow$ سیگنال به اندازه a روی محور افقی به چپ راست می‌رود.

نکته:

- شیفت عرض سیگنال را تغییر نمی‌دهد.
- شیفت شکل سیگنال را تغییر نمی‌دهد.

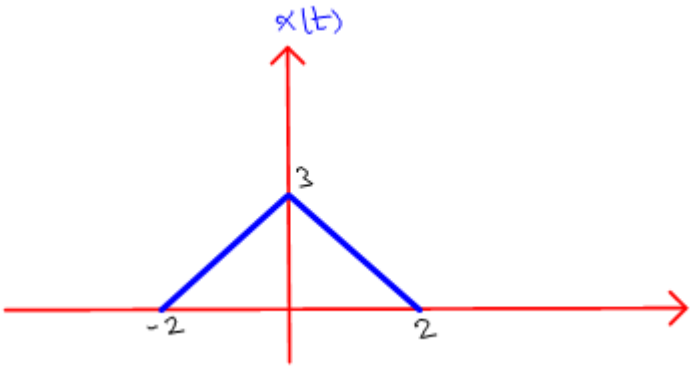


2 مقیاس دهی

$x(at)$ ← محور افقی بر عدد a تقسیم می‌شود.

$x(\frac{t}{a})$ ← محور افقی در عدد a ضرب می‌شود.

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$$



نکته: $x(at)$ اگر $|a| \geq 1$ باشد عرض سیگنال را $\frac{1}{a}$ برابر می‌کند و سیگنال فشرده می‌شود.

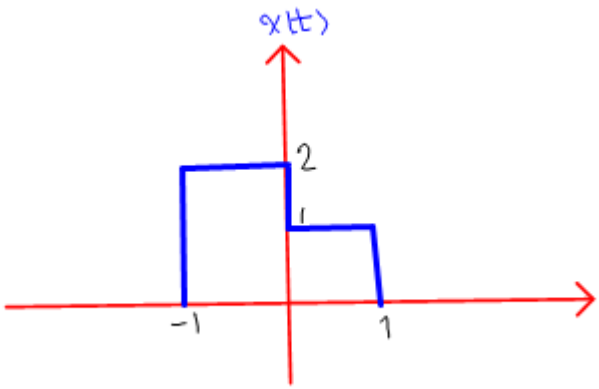
$x(at)$ اگر $|a| \leq 1$ باشد عرض سیگنال را $\frac{1}{a}$ برابر می‌کند و سیگنال بازتر می‌شود.

$x(at)$ اگر $a < 0$ باشد عرض سیگنال را $\frac{1}{a}$ برابر می‌کند و سیگنال را نسبت به محور عمودی قرینه می‌کند.

3 شیفت و مقیاس دهی ← $x(at + b)$ یا $x(at - b)$

ابتدا شیفت را اعمال می‌کنیم و سپس مقیاس‌دهی $x(at + b)$

مثال: $x(-2t + 1)$ و $x(\frac{t}{2} - 2)$ ؟



$$\leftarrow \quad x(at \mp b)$$

اول محور افقی با $\mp b$ جمع می‌شود و سپس اعداد روی محور افقی بر a تقسیم می‌شود.

سراسری ۸۵

اگر $f(t)$ سیگنال به عرض T و ماکزیممی واقع در $t = 2$ باشد. در آنصورت عرض و محل ماکزیمم $r > 0$ و $f(rt - n)$ کدام است؟

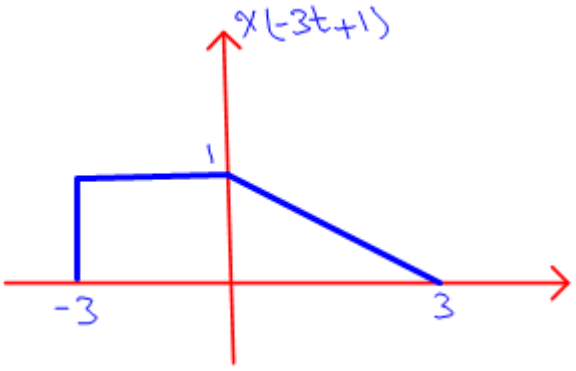
۱) $\frac{T}{r} - n$ و $\frac{n}{r}$ ۲) $\frac{T}{r}$ و $\frac{2}{r}$ ۳) $\frac{T}{r} + n$ و $\frac{n-2}{r}$ ۴) $\frac{T}{r}$ و $\frac{n+2}{r}$

عرض سیگنال $\rightarrow f(rt - n)$

مثال

$x(-3t+1)$ در شکل داده شده است.

$\int_0^{\infty} x(t)dt = ?$



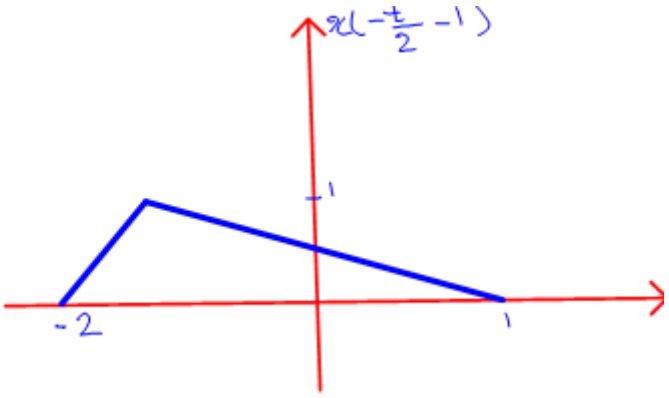
1 $x(at \mp b) = y(t)$

2 $f(t) = y\left(\frac{1}{a}t\right)$

3 $x(t) = f(t \pm b)$

مثال

$x\left(\frac{-1}{2}t-1\right)$ داده شده است $x(t)$ را بدست آورید.

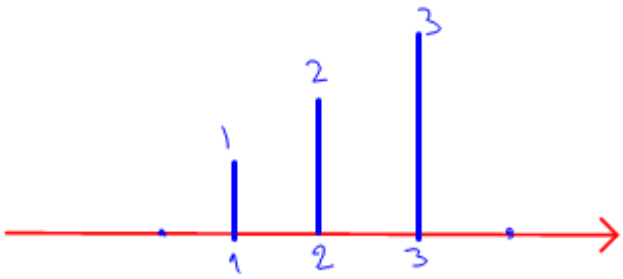


❖ شیفت و مقیاس‌دهی برای سیستم های گسسته:

1 شیفت زمانی $x[n+a]$ یا $x[n-a]$ عین سیستم‌های پیوسته

$x[n+a]$ ← محور افقی با $-a$ جمع می‌شود.

$x[n-a]$ ← محور افقی با a جمع می‌شود.



سیگنال گسسته فقط روی مقادیر صحیح مقدار دارد.

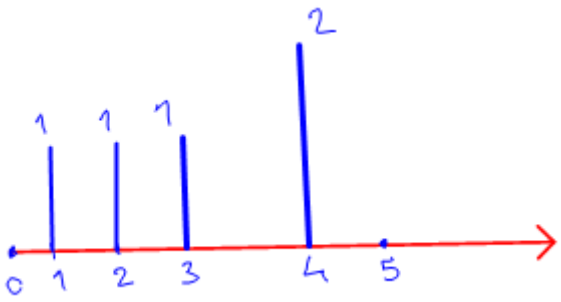
شیفت در سیگنالهای گسسته حتماً باید عدد صحیح باشد.

۲- مقیاس‌دهی

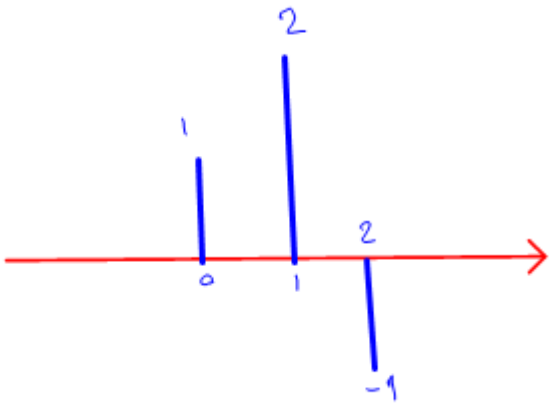
(I) x[an] ← محور افقی بر عدد a تقسیم می‌شود.

پس از تقسیم محور افقی بر عدد a، اعداد غیر صحیح روی محور افقی حذف می‌شود.

در x[an] با فرض a>1 یا a<-1 ← تعدادی از نمونه‌ها حذف می‌شود.



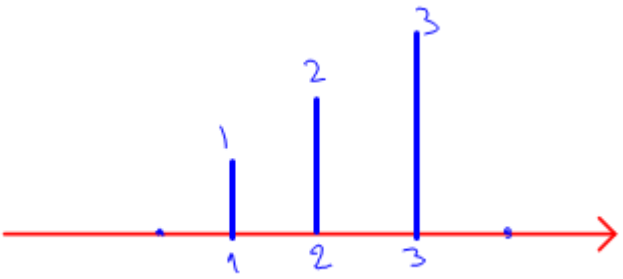
۲- $x\left[\frac{n}{a}\right] \Longleftarrow x_{(a)}[n]$ محور افقی در عدد a ضرب می‌شود (بر $\frac{1}{a}$ تقسیم می‌شود)





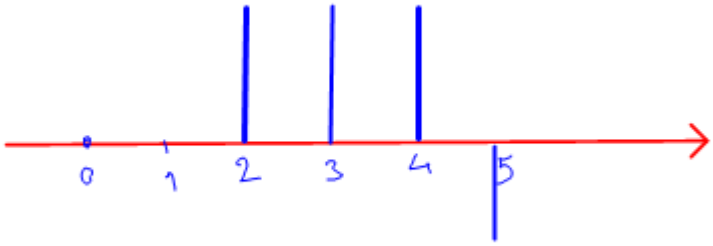
مثال

$x[2n-1]$



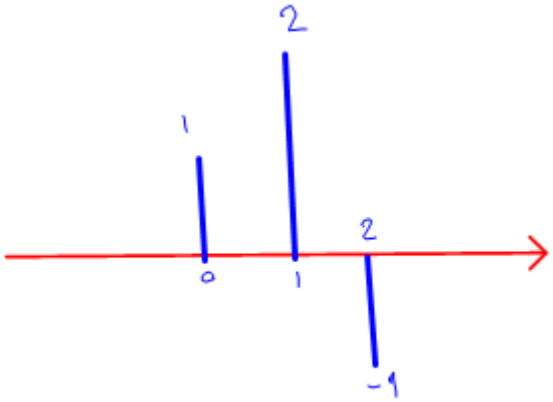
مثال

$x[-3n+1]$



مثال

$x[\frac{n}{2}-1]$



$$x_{(a)}[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{a}\right] & \text{اگر } n \text{ مضرب } a \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ ضریب } a \text{ نباشد} \end{cases}$$

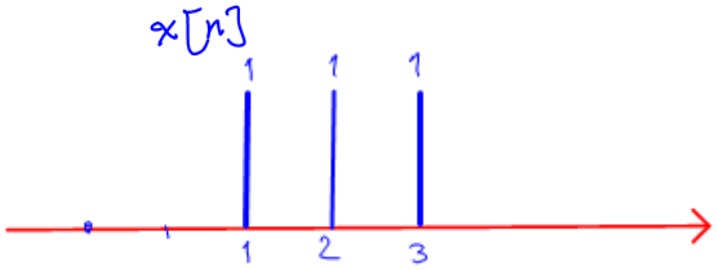
$$x_{(a)}[n-b]=\begin{cases} x\left[\frac{n-b}{a}\right] & \text{اگر } n-b \text{ مضرب } a \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } n-b \text{ مضرب } a \text{ نباشد} \end{cases}$$

$x_{(a)}[n-b] \longrightarrow b$ باید مضربی از a باشد

مثال

$x_{(2)}[n-1]$

$x_{(2)}[n-4]$

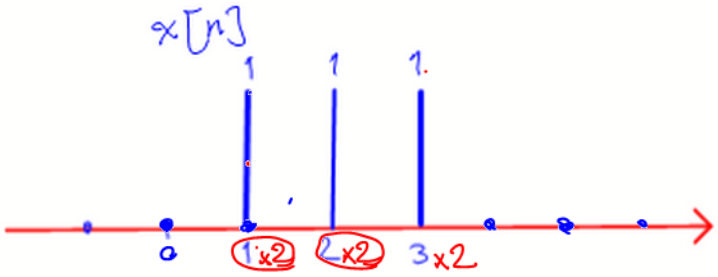


$x_{(2)}[n-1]=?$

$$x_{(2)}[n-1]=\begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n-1=2k \quad n=2k+1 \quad \text{فرد} \\ 0 & \text{else} \quad n= \text{زوج} \end{cases}$$

$$x_{(2)}[n-1]=\begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$y = x_{(2)}[n-1] = ?$



$n = 0 \rightarrow y = 0$

$n = 1 \rightarrow y = x[0] = 0$

$n = 2 \rightarrow y = 0$

$n = 3 \rightarrow y = x\left[\frac{3-1}{2}\right] = x[1] = 1$ ✓

$n = 4 \rightarrow y = 0$

$n = 5 \rightarrow y = x\left[\frac{5-1}{2}\right] = x[2] = 1$

$n = 6 \rightarrow y = 0$

$n = 7 \rightarrow y = x[3] = 1$

$n = 8 \rightarrow y = 0$

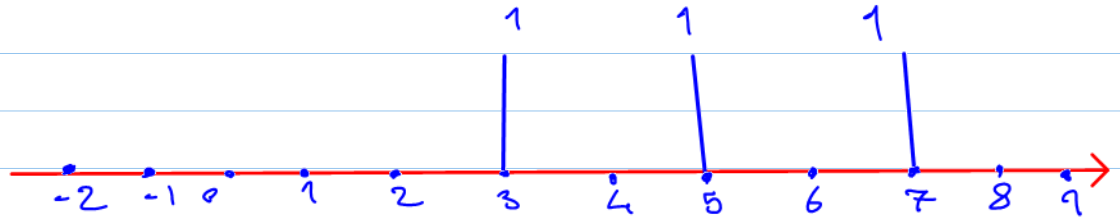
$n = 9 \rightarrow y = x[4] = 0$

$\vdots$

$x_{(a)}[n-b] \rightarrow$ ۱- اول مقیاس‌دهی

۲- شیفت

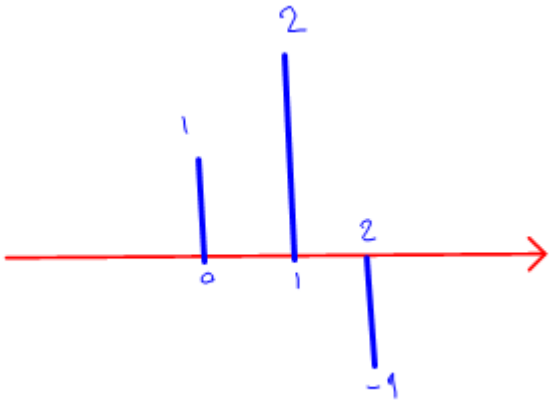
$x_{(2)}[n-1] \rightarrow$



$x_{(a)}[n \pm b]$ ←در x[n] محور افقی در عدد a ضرب می‌شود و سپس با عدد $\mp b$ جمع می‌شود.

مثال

$x_{(3)}[n-3]$

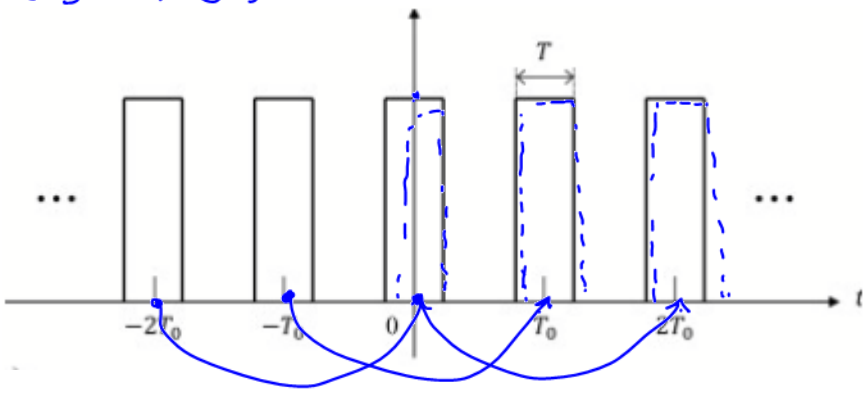


سیگنال‌های متناوب و نامتناوب

❖ تعریف

سیگنال x(t) را متناوب گوییم هرگاه بتوان عدد مثبت T_0 را یافت که $x(t \mp T_0) = x(t)$ آن‌گاه **کوچک‌ترین مقدار مثبت** ممکن برای T_0 را دوره تناوب اصلی $x(t)$ گوییم.

$x(t+T_0) = x(t)$



اگر x(t) دارای دوره تناوب اصلی T_0 باشد آن‌گاه

$x(t+10T_0) = x(t)$

$$x(t \pm mT_0) = x(t)$$

که در رابطه فوق m هر عدد صحیحی می تواند باشد.

یادآوری

❖ دوره تناوب سیگنال های مثلثاتی

(I) $A\sin(at\mp b)\rightarrow T_0=\left|\frac{2\pi}{a}\right|$

(II) $A\cos(at\mp b)\rightarrow T_0=\left|\frac{2\pi}{a}\right|$

(III) $Ae^{j(at\mp b)}\rightarrow T_0=\left|\frac{2\pi}{a}\right|$

(IV) $A\tan(at\mp b)\rightarrow T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

(V) $A\cot(at\mp b)\rightarrow T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

(VI) $|sin(at\mp b)|, |cos(at\mp b)|\rightarrow T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

✓ **نکته:** اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T_1 و اگر $y(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T_2

$Ax(t)\mp By(t)\rightarrow T_0=$ ک.م.م $\{T_1 و T_2\}$

➢ **توجه** ← اگر ک.م.م $\{T_1 و T_2\}$ وجود نداشته باشد سیگنال نامتناوب نیست.

مثال

دوره تناوب سیگنال زیر را بدست آورید.

$f(t)=2\sin(3\pi t+\frac{\pi}{6})-3\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})$

مثال

دوره تناوب سیگنال داده شده را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$x(t)=\underbrace{\left|\sin(\frac{4}{3}t)\right|}_{T_1}+\underbrace{\cos\left(\frac{2}{3}t\right)}_{T_2}-\underbrace{\tan(\frac{2\pi}{3}t)}_{T_3}$$

$T_1=\left|\frac{\pi}{4/3}\right|=\frac{3\pi}{4}$

$T_2=\left|\frac{2\pi}{2/3}\right|=3\pi$

$T_3=\left|\frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}}\right|=\frac{3}{2}$

$T_0=lcm\{\frac{3\pi}{4},3\pi,\frac{3}{2}\}=$ وجود دارد

$x(t)$ متناوب است

- ✓ **نکته** ← عدد شامل π با عددی که π ندارد هرگز مضرب مشترک نخواهد داشت.
- ✓ **نکته** ← در مورد دوره تناوب و یا متناوب‌بودن $x(t)\ y(t)$ یا $x(t)/y(t)$ نمی‌توان نظری داد و در صورت امکان باید تبدیل به جمع یا تفریق شود.

$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\sin(a+b)+\frac{1}{2}\sin(a-b)$

مثال

دوره تناوب سیگنال $x(t)$ را محاسبه کنید.

$x(t)=2\sin(2t)\cos(3t)$

$T_1=\pi$ $\quad T_2=\frac{2\pi}{3}$

$x(t)=2\left(\frac{1}{2}\sin(5t)+\frac{1}{2}\sin(-t)\right)$

$x(t)=\underbrace{\sin(5t)}_{T_1=\frac{2\pi}{5}}+\underbrace{\sin(-t)}_{T_2=2\pi}$

$T_{ox}=lcm\{2\pi,\frac{2\pi}{5}\}=2\pi$

$2\pi:\ 2\pi,4\pi,6\pi,\dots$

$\frac{2\pi}{5}:\ \frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\dots,2\pi,\dots$

برق ۹۱ (آزاد)

دوره تناوب سیگنال $x(t)= \sin (200\pi t+0/5\pi)-\cos(800t)$ در کدام گزینه به درستی داده شده است؟

۱) $T_0 = \frac{\pi}{100}$ ۲) $T_0 = \frac{\pi}{400}$ ۳) $T_0 = \frac{1}{100}$ ۴) نامتناوب

$x(t) = \sin(200\pi t + 0.5\pi) - \cos(800t)$

$T_1 = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100}$ $T_2 = \frac{2\pi}{800} = \frac{\pi}{400}$

$T_0 = l.cm\{\frac{1}{100}, \frac{\pi}{400}\} =$ و جود ندارد $\rightarrow x(t)$ خاتناوب

$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$

مثال

دوره تناوب $x(t)=e^{j\frac{7}{2}t}\cos(\frac{t}{2})$ و $y(t)=e^{j\pi t}x(t)$ کدام است؟

۱) $T_x = 2\pi\ T_y = \frac{2\pi}{3+\pi}$,

۲) $T_x = 2\pi T_y = \frac{2\pi}{4+\pi}$,

۳) $T_y = \frac{2\pi}{3+\pi}$, $T_{ax} = 3\pi$

۴) $T_x = 2\pi$, نامتناوبy

$x(t) = e^{j\frac{7}{2}t} \times \cos(\frac{1}{2}t)$

$x(t) = e^{j\frac{7}{2}t}\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{t}{2}}\right)$

$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{7}{2}t}e^{j\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{7}{2}t}e^{-j\frac{t}{2}}$

$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{j4t}}_{T_1=\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j3t}}_{T_2=\frac{2\pi}{3}}$

$T_{ax} = lcm\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\} = 2\pi$

$y(t) = e^{j\pi t}\left(\frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}\right)$

$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{j(4+\pi)t}}_{T_1=\frac{2\pi}{4+\pi}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j(\pi+3)t}}_{T_2=\frac{2\pi}{\pi+3}}$

$T_y = lcm\left\{\frac{2\pi}{\pi+4}, \frac{2\pi}{\pi+3}\right\}$ = وجودندارد

$\frac{2\pi}{\pi+4} : \frac{2\pi}{\sim}, \frac{4\pi}{\sim}, \ldots, \frac{2\pi(m)}{\pi+4}$ و $\frac{2\pi(m)}{\pi+3}$

مثال

کدام گزینه نادرست است؟

۱) دوره تناوب سیگنال $x(t)=\tan(\sin(t))$ برابر π است.

۲) دوره تناوب سیگنال $x(t)=\frac{\sin(\frac{5}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ برابر 2π است.

۳) دوره تناوب سیگنال $x(t)=\frac{\sin(\frac{5}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ برابر 4π است.

۴) $x(t)=e^{j\frac{7}{2}t}\cos(\frac{t}{4})$ برابر با ۱۹۵ است.

یادآوری

$$\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n$$

$T_0=2\pi$

$x(t)=\tan(\sin(t))$?

$f(t)$, T_0 $\quad h=g(f(t)) \longrightarrow T_0$

$f(t+mT_0)=f(t)$ $\quad h(t+mT_0)=g(f(t+mT_0))=g(f(t))=h(t)$

$\sin(t) \longrightarrow \frac{2\pi}{1}$ $\quad f(t)=\tan(\sin(t))=?$

$\sin(t+\pi)$ $\quad f(t+\pi) \stackrel{?}{=} f(t)$

$\tan(\sin(t+\pi)) \stackrel{?}{=} \tan(\sin(t))$.

$\tan(-\sin(t))=-\tan(\sin(t)) \neq \tan(\sin(t))$

$$x(t) = \frac{\sin(2.5t)}{\sin(0.5t)} \longrightarrow \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n$$

$$\sin(2.5t) = \frac{1}{2j}e^{j2.5t} - \frac{1}{2j}e^{-j2.5t}$$

$$x(t) = \frac{\sin(2.5t)}{\sin(0.5t)} = \frac{\frac{1}{2j}e^{j2.5t} - \frac{1}{2j}e^{-j2.5t}}{\frac{1}{2j}e^{j0.5t} - \frac{1}{2j}e^{-j0.5t}}$$

$$x(t) = \frac{e^{j2.5t} - e^{-j2.5t}}{e^{j0.5t} - e^{-j0.5t}} = \frac{e^{j2.5t}\left(1 - e^{-j5t}\right)}{e^{j0.5t}\left(1 - e^{-jt}\right)}$$

$$x(t) = e^{j2t}\left[\frac{1 - \overbrace{e^{-j5t}}^{\alpha^{n+1}}}{1 - \underbrace{e^{-jt}}_{\alpha}}\right]$$

$$\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n$$

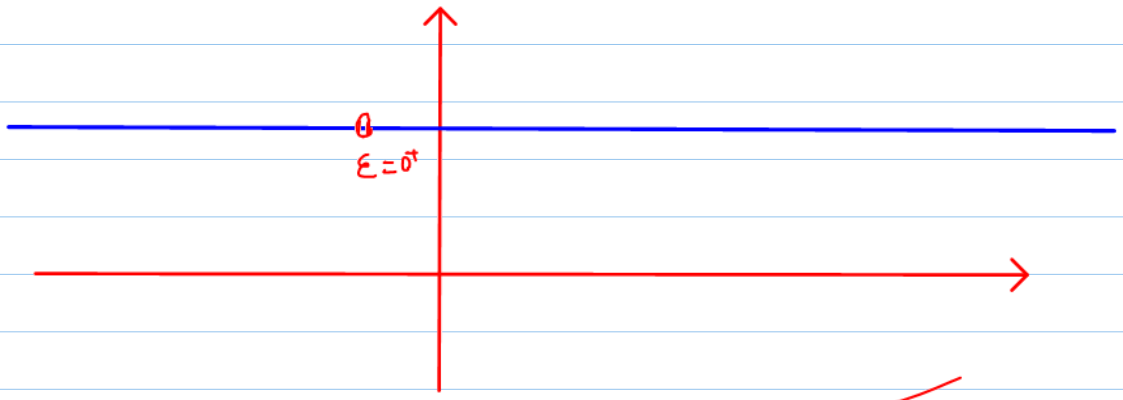
$$e^{-j5t} = \left(e^{-jt}\right)^{5=n+1} \rightarrow n = 4$$

$$x(t) = e^{j2t}\left[\frac{1-\alpha^{4+1}}{1-\alpha}\right] \quad ; \quad \alpha = e^{-jt}$$

$$= e^{j2t}\left[1 + e^{-jt} + \underbrace{\left(e^{-jt}\right)^2}_{e^{-j2t}} + \underbrace{\left(e^{-jt}\right)^3}_{e^{-j3t}} + \underbrace{\left(e^{-jt}\right)^4}_{e^{-j4t}}\right]$$

$$x(t) = \underbrace{e^{j2t}}_{T_1=\pi} + \underbrace{e^{jt}}_{T_2=2\pi} + \underbrace{e^{0}}_{?=\epsilon} + \underbrace{e^{-jt}}_{T_3=2\pi} + \underbrace{e^{-j2t}}_{T_4=\pi}$$

$$T_x = l.c.m\left\{\cancel{\pi}, \cancel{2\pi}, \epsilon, \cancel{2\pi}, \cancel{\pi}\right\} = \left\{\epsilon, 2\pi\right\} = 2\pi$$



$T_0 = ?$ (0^+) = تعریف می‌شود = کوچکترین عدد مثبت

$\text{l.cm}\{a, \varepsilon\} = a$

نکته← اگر f(t) متناوب با T_0 باشد سیگنال g(f(t)) که g() یک تابع دلخواه است، برابر T_0 می‌باشد.

مثال

دوره تناوب سیگنال X(t)=tan(sin(t)) را بدست آورید.

نکته← سیگنال ثابت f(t)=a متناوب است ولی دوره تناوب اصلی برای آن تعریف نمی‌شود چون کوچک‌ترین T_0 برابر $\varepsilon = 0^+$

نکته ← عدد= {هر عددی و $\varepsilon = 0^+$} ک.م.م

متناوب‌بودن سیگنال‌های زمان گسسته

یادآوری:

تعریف تناوب در سیگنالهای زمان پیوسته

$$x(t+T_0)=x(t)$$

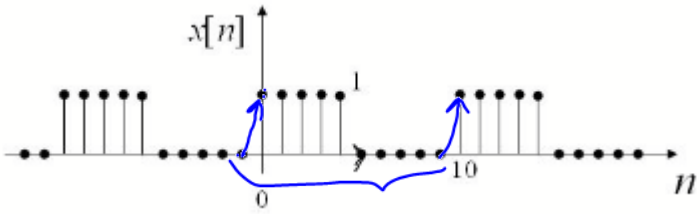
یادآوری

در سیگنال‌های زمان گسسته مقدار شیفت باید عدد صحیح باشد.

❖ تعریف

x[n] متناوب است اگر بتوان N_0 **مثبت و صحیح** یافت که اگر x[n] را به اندازه N_0 شیفت دهیم روی خود x[n] بیفتد و کوچکترین عدد صحیح و مثبت N_0 را دوره تناوب اصلی x[n] گوییم.

$$x[n+N_0]=x[n]$$



اگر x[n] دارای دوره تناوب اصلی N_0 باشد آن‌گاه

$$x[n \pm mN_0] = x[n]$$

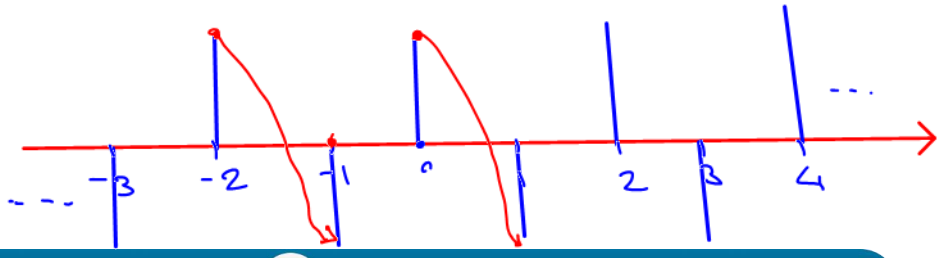
که در رابطه فوق m هر عدد صحیحی می تواند باشد.

مثال

دوره تناوب $x[n]=e^{j\pi n}$ را بدست آورید.

$x[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$

$N_0 = 2$



❖ دوره تناوب سیگنال‌های مثلثاتی

$$\begin{cases} A\sin(an+b) \\ A\cos(an+b) \\ A\,e^{j(an+b)} \end{cases} \rightarrow N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{a}\right|$$

$$\begin{cases} \tan(an\pm b) \\ \cot(an\pm b) \\ |\sin(an\pm b)| \\ |\cos(an\pm b)| \end{cases} \rightarrow N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{\pi}{a}\right|$$

$\frac{2}{3} \rightarrow 2$

➢ **توجه** ← اگر $N_{0\text{اولیه}}$ صحیح نباشد آن‌گاه مضربی از $N_{0\text{اولیه}}$ که عدد صحیح شود، می‌شود دوره تناوب اصلی سیگنال خواهد بود و در صورتی که $N_{0\text{اولیه}}$ عددی گنگ باشد، سیگنال نامتناوب خواهد بود.

مثال

دوره تناوب سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} x[n] = 2\sin(\frac{3\pi}{8}n+2) \\ y[n] = 2\sin(\frac{\pi}{4}n+2) \\ z[n] = \cos(\frac{3}{8}n+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{8}} = \frac{16}{3} \rightarrow N_0 = 16$ ✓

$N_{0\ \text{اولیه}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ ✓ $\Rightarrow N_0 = 8$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \frac{2\pi}{\frac{3}{8}} = \frac{16}{3}\pi \rightarrow$ خاصیت نامتناوب

یادآوری

هیچ مضربی از عدد گنگ، صحیح نمی‌شود

✓ **نکته←** در سیگنال‌های مثلثاتی یعنی (sin،cos، tan ، cot، e^{jQn} و...) گر ضریب‌های n، دارای π نباشد، متناوب نیست. حتماً باید ضریب n مضربی از π باشد.

مثال

کدامیک از سیگنالهای زیر متناوب است؟

1) $\cos(\frac{3}{8}n)$
2) $e^{j\frac{3}{8}n}$
3) $\sin(\frac{3\pi^2}{8}n)$
4) $\tan(\frac{\pi}{2}n)$ ✓

نکته← اگر $N_{0\text{اولیه}}$ به صورت یک عدد گویای غیرصحیح باشد($\frac{8}{3}$ و $\frac{5}{2}$و...)← صورت $N_0 = N_{0\text{اولیه}}$

$N_{0\text{ اولیه}} = \frac{16}{3} \rightarrow N_0 = 16$

مثال

کدامیک از سیگنالهای زیر متناوب است؟

۱- $e^{j(\frac{3}{\pi^2}n+\pi)}$ ✗

۲- $e^{(\frac{3\pi}{8}n+\frac{\pi}{2})}$ ✗

۳- $2e^{j(\frac{3\pi^2}{4}n+\frac{\pi}{2})}$ ✗

۴- $e^{j(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{2})}$ ✓

$N_{0\text{ اولیه}} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = 8/3 \rightarrow N_0 = 8$

✓ **نکته** ← اگر $x_1[n]$ متناوب با N_1 و $x_2[n]$ متناوب با N_2 باشد، آنگاه داریم:

$$x_1[n] \mp x_2[n] \rightarrow N_0 = \text{ک.م.م}\ \{N_1, N_2\}$$

مثال

دوره تناوب سیگنال $X[n]=e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}$ را بدست آورید.

$N_1 = \left|\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}\right| = 4$ $\quad N_2 = \left|\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}\right| = 8$

$N_0 = lcm\{4, 8\} = 8$ ✓

✓ **نکته** ← در مورد دوره تناوب و یا متناوب‌بودن $x[n]\ y[n]$ یا $x[n]/y[n]$ نمی‌توان نظری داد و در صورت امکان باید تبدیل به جمع یا تفریق شود.

مثال

دوره تناوب $x[n]=e^{-j\frac{\pi}{2}n} \times \cos(\pi n)$ را بدست آورید.

$\cos(\pi n) = (-1)^n = e^{j\pi n}$

$N_1 = 4$ $\quad N_2 = 2$

$x[n] = e^{-j\frac{\pi}{2}n} e^{j\pi n} = e^{j\frac{\pi}{2}n}$ ↘ $N_0 = 4$ ✓

✓ **چند نکته:**

اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T_0 و $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی N_0 باشد، آنگاه:

- ضرب‌شدن هر عددی (یعنی عبارت بدون t یا n) در بیرون x روی دوره تناوب اثر ندارد.

مثال

دوره تناوب سیگنالهای زیر را مشخص کنید.

$e^{j\frac{\pi}{2}}x[n] \rightarrow$

$2jx[n] \rightarrow$

$e^{2}x(t) \rightarrow$

$e^{j\frac{\pi}{2}n}x[n] \rightarrow$

- شیفت روی دوره تناوب اثر ندارد

x[n-a] یا x[n+a] $\rightarrow N_0$

x(t-b) یا x(t+b) $\rightarrow T_0$

- مقیاس‌دهی

I. سیگنال $x(\alpha t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{T_0}{|\alpha|}$ خواهد بود.

II. سیگنال $x_{(m)}[n]$ متناوب با $|m|N_0$ خواهد بود.

III. در سیگنال $x[mn]$ $\frac{N_0}{|m|}$ را تا جای ممکن ساده می‌کنیم آن‌گاه دوره تناوب x[mn]برابر با صورت کسر ساده شده $\frac{N_0}{|m|}$ است.

مثال

دوره تناوب سیگنالهای زیر را مشخص کنید.

x(2t)→

x(−t)→

x($\frac{1}{2}$t)→

$x_{(2)}[n]$ → $2N_0$

x[n], $N_0=8$ x[3n] → $\frac{N_0}{3}=\frac{8}{3}\rightarrow N_x=8$

x[n], $N_0=15$ x[10n]→ $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}\rightarrow N_x=3$

مثال

x[n] متناوب با دوره تناوب اصلی $N_0=3$ است. دوره تناوب اصلی $y[n]=x_{(3)}[n]+x[2n]$ را بیابید.

$x_{(3)}[n]\rightarrow N_1=9$

$x[2n]\rightarrow \frac{3}{2}\rightarrow N_2=3$

$N_y=l.cm\{9,3\}=9$

نکته← در سیگنال $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t \pm mT_0)$ که $z(t)$ سیگنال دلخواه است، x(t) متناوب با T_0 یعنی ضریب شمارنده سیگما خواهد بود.

مثال

دوره تناوب سیگنالهای زیر را بدست آورید.

$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2m|} \longrightarrow T_0 = 2$

$z(t) = 2^{|t|}$

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t-2m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2m|}$

$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{2}k)} \longrightarrow T_0 = \frac{1}{2}$

$z(t) = e^{t}$

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(t-\frac{1}{2}k)$

نکته← اگر f(m) یک **سیگنال گسسته** با دوره تناوب M_0 باشد آن‌گاه $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)z(t-mT_0)$ سیگنال حاصل

متناوب با $M_0 \times T_0$ خواهد بود.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{2}k)} \qquad T_0 = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \sum_{\text{تخاينة}=-\infty}^{\infty} f(t - \text{تخاينة} \times \text{تخاينة}) \rightarrow T_0 = \text{تخاينة}$$

$$f(t) = e^t$$

$$f(t-\tfrac{1}{2}k) = e^{(t-\frac{1}{2}k)} \qquad y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-\tfrac{1}{2}k)$$

$$y(t) = \sum_{\text{تخاينة}=-\infty}^{\infty} e^{t-\frac{1}{2}\text{تخاينة}} \qquad \boxed{T_0 = \frac{1}{2}}$$

$$y(t+\tfrac{1}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k)} =$$

$$k-1 = k'$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{2}(k-1))} \qquad = ? \qquad k' = k+1$$

$$k: -\infty \rightarrow \infty$$

$$y(t+\tfrac{1}{2}) = \sum_{\text{تخاينة}=-\infty}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{2}\text{تخاينة})} = y(t) \checkmark \qquad k': -\infty \rightarrow \infty$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(2t-\frac{1}{2}k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-\tfrac{1}{2}k)$$

$$f(t) = e^t \qquad f(t-\tfrac{1}{2}k) = e^{t-\frac{1}{2}k}$$

$$f(t) = e^{2t} \qquad f(t-\tfrac{1}{2}k) = e^{2(t-\frac{1}{2}k)} = e^{2t-k}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2(t-\frac{1}{4}k)}$$

$$f(t) = e^{2t} \qquad f(t-\tfrac{1}{2}k) = e^{2(t-\frac{1}{4}k)}$$

مثال

دوره تناوب سیگنالهای زیر را بدست آورید.

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi n}\cos(t-2n)$

$f[n]$, $z(t-2n)$

$m_0=2$

$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} f[m]z(t-mT_0)$

$T_x = 2\times 2 = 4$ ✓

$z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{3\pi}{2}k+\frac{\pi}{2}\right)2^{-|t-3k|}$

$f[k]$, $z(t-3k)$

$f(k) \rightarrow N_0 = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$

$N_0 = 4$ ✓

$T_z = 4\times 3 = 12$

$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{j(t-\frac{1}{2}k)}$

$f(k)$, $z(t-\frac{1}{2}k)$

$T_y = 2\times\frac{1}{2} = 1$ ✓

$(-1)^k = e^{j\pi k} \rightarrow N_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ✓

مثال:

دوره تناوب سیگنال‌های x(t) و y(t) را بیابید.

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{(t-3n)^2}$

$z(t) = 2^{t^2}$

$z(t-3n) = 2^{(t-3n)^2}$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t-T_0 n)$

$T_{0x} = 3$

$\sum_{-\infty}^{\infty} z(t-2n)$?

$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t-2n|} = 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + 2^{|t-4|} + 2^{|t-6|} + \dots$

$y(t) \neq y(t+T_0) = 2^{|t+T_0|} + 2^{|t+T_0-2|} + 2^{|t+T_0-4|} + \dots$

$2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots$

نکته← در سیگنال گسسته، اگر آرگومان به توان برسد برای بدست آوردن دوره تناوب، ابتدا توان n را به صورت حاصلضرب عدد ۲ و اعداد فرد نوشته و با استفاده از نکته زیر، دوره تناوب حاصل را محاسبه می‌کنیم.

$$X[n]\ N_0 \text{ با} \rightarrow \begin{cases} x[n^2] \rightarrow \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{اگر } N_0 \text{ مضرب } 4 \text{ باشد} \\ N_0 & \text{اگر } N_0 \text{ مضرب } 4 \text{ نباشد} \end{cases} \\ x\left[n^{\text{فرد}}\right] \rightarrow & N_0 \end{cases}$$

مثال

دوره تناوب سیگنالهای زیر را محاسبه کنید.

$X[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n^2)$

$\cos(\frac{\pi}{8}n) \rightarrow N_0 = 16$

$n \rightarrow n^2$

$x[n^2] \rightarrow \frac{N_0}{2} = 8$ ✓

$\cos(\frac{\pi}{8}n^2) \rightarrow 16$

$h[n] = \cos\left[\frac{\pi}{8}n^6\right] = \cos(\frac{\pi}{8}(n^2)^3)$

$\cos(\frac{\pi}{8}n) \rightarrow N_0 = 16$

$n \rightarrow n^2$

$y[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n^2) \rightarrow N_0' = 8$

$n \rightarrow n^3$

$y[n^3] = \cos(\frac{\pi}{8}(n^3)^2) \rightarrow 8$

$x[n] = e^{j\frac{2}{5}n^8}$

$y[n] = \tan\left(\frac{\pi}{4} n^{12}\right)$

$e^{j\frac{2}{5}n}$ متناوب

$f[n] = \tan\left(\frac{\pi}{4} n\right) \rightarrow N_1 = 4$

$n \rightarrow n^3$ ↳ $\tan\left(\frac{\pi}{4} n^3\right) \rightarrow N_2 = 4$

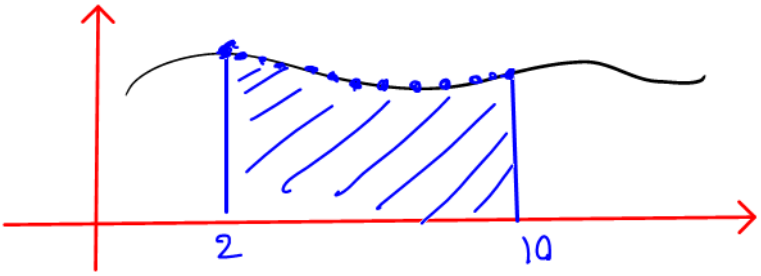
$n \rightarrow n^2$ ↳ $\tan\left(\frac{\pi}{4} (n^3)^2\right) \rightarrow N_3 = 2$

$n \rightarrow n^2$ ↳ $\tan\left(\frac{\pi}{4} ((n^2)^3)^2\right) \rightarrow 2$ ✓

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$n^{12} = ((n^3)^2)^2$

انرژی و توان



❖ تعریف انرژی سیگنال

	سیگنال زمان پیوسته	سیگنال زمان گسسته
انرژی لحظه ای ✗	$E = \|x(t)\|^2$	$E = \|x[n]\|^2$
انرژی متوسط ✗	$E_{x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \|x(t)\|^2 dt$	$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} \|x[n]\|^2$
انرژی کل ✓	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x[n]\|^2$

انرژی

مثال

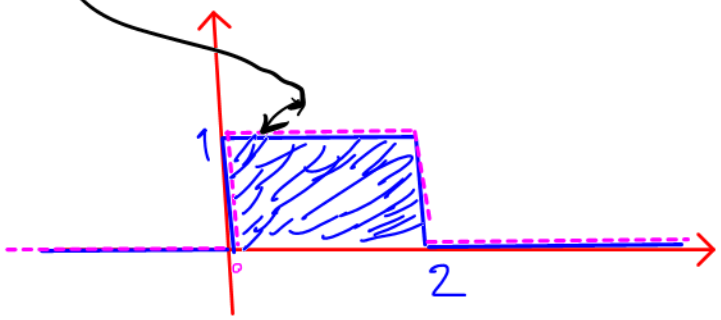
انرژی کل سیگنال $x(t) = e^{j\frac{\pi}{3}t}[u(t) - u(t-2)]$ را محاسبه کنید.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{j\frac{\pi}{3}t}(u(t) - u(t-2)) \right|^2 dt = ?$$

$$\left| e^{j\frac{\pi}{3}t}(u(t) - u(t-2)) \right| = \left| e^{j\frac{\pi}{3}t} \right| \left| u(t) - u(t-2) \right|$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| (u(t) - u(t-2)) \right|^2 dt = 2$$

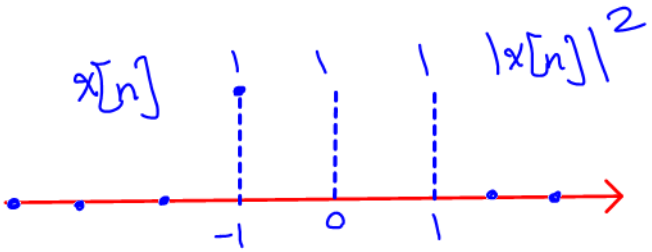
$u(t) - u(t-2) \longrightarrow$



مثال

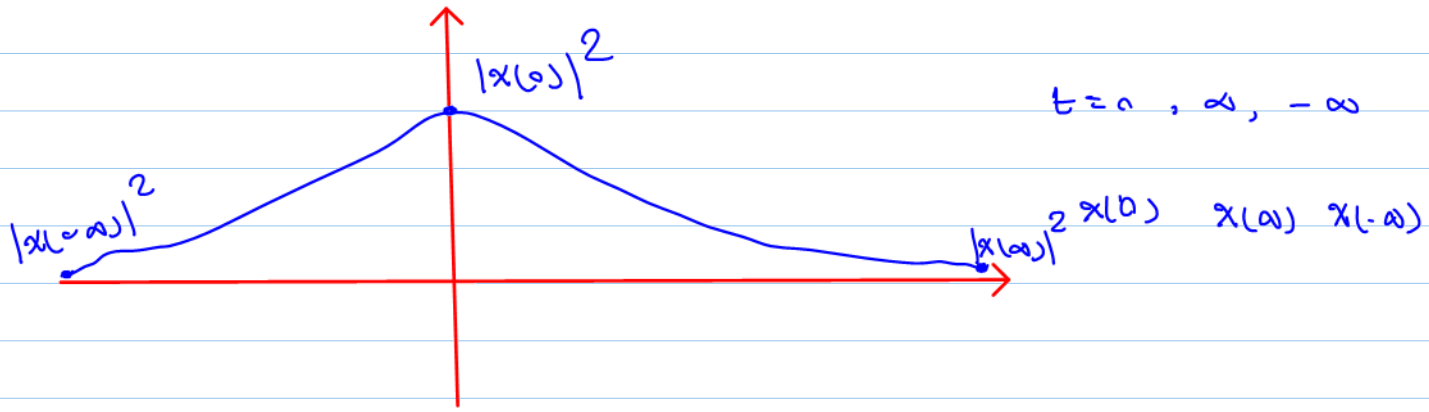
انرژی سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$$x[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$$



$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$E_x = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + \cdots = 3$$



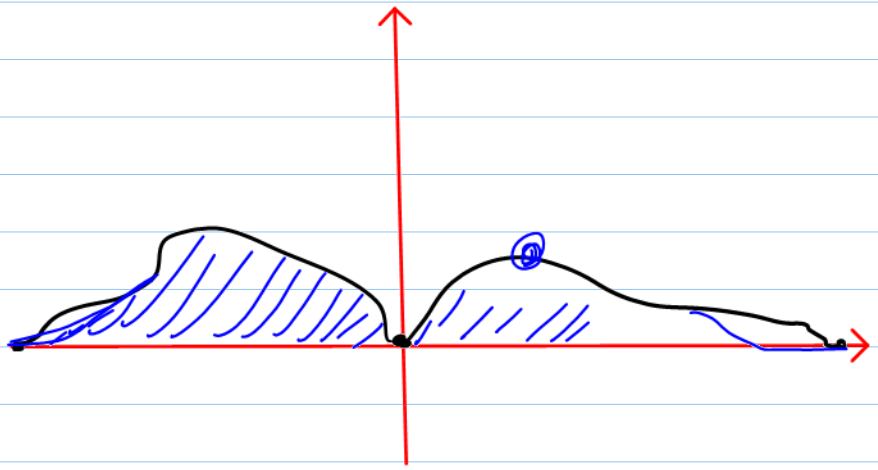
E_x ← ∞ / x / عدد ثابت

$$x(t) = \frac{t}{1+t^2} \qquad \frac{\infty}{1+\infty^2} \qquad \frac{-\infty}{(-\infty)^2}$$

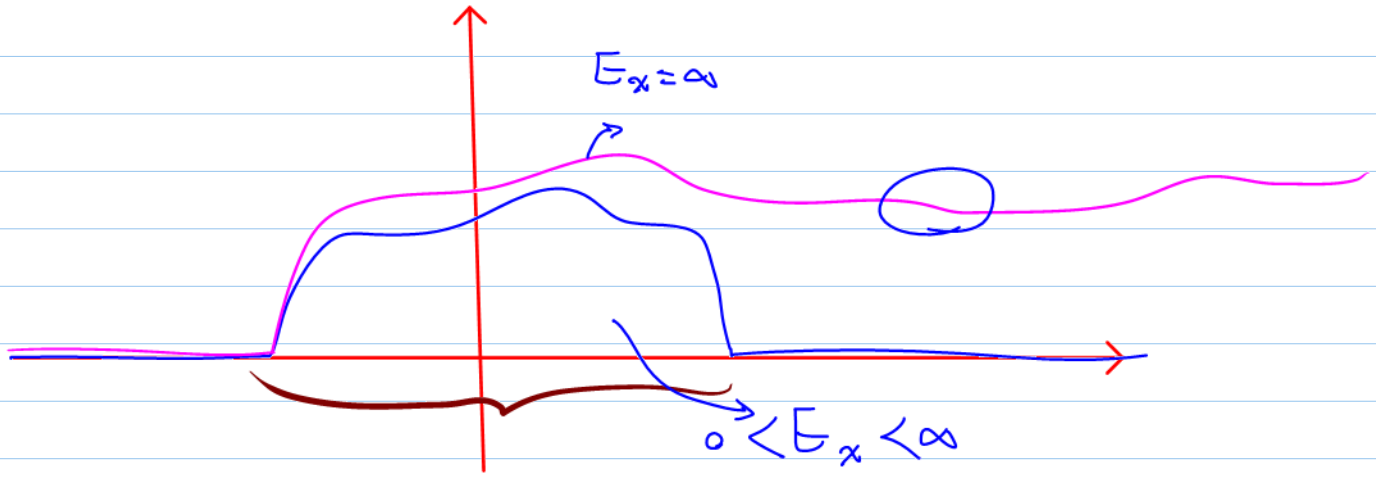
$t=0 \quad |x(0)|^2 = 0$

$t=\infty \quad |x(\infty)|^2 = 0$

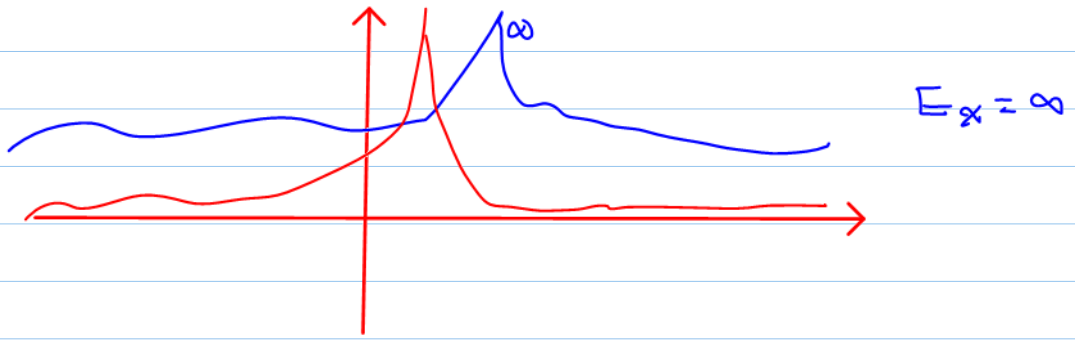
$t=-\infty \quad |x(-\infty)|^2 = 0$

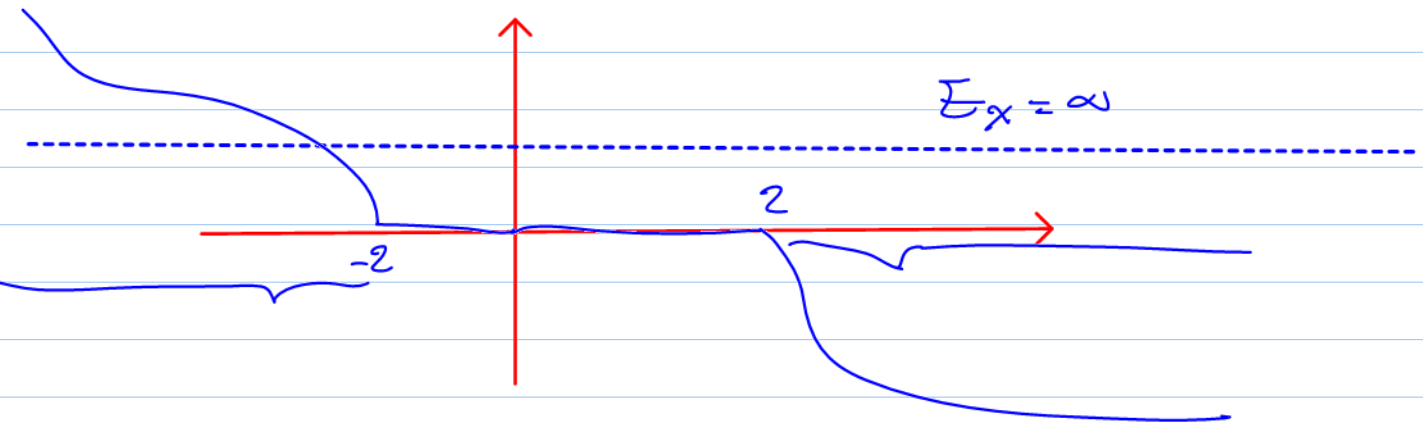


$E_x = |x|^2$ مساحت زیر نمودار .

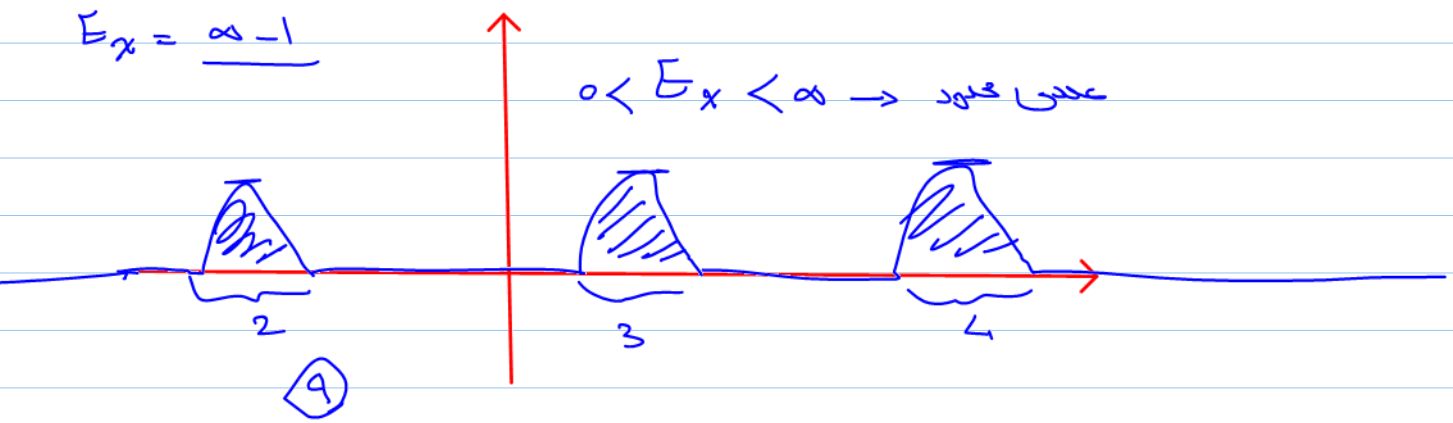


طول سیگنال ← تنها جایی که دامنه غیرصفر است





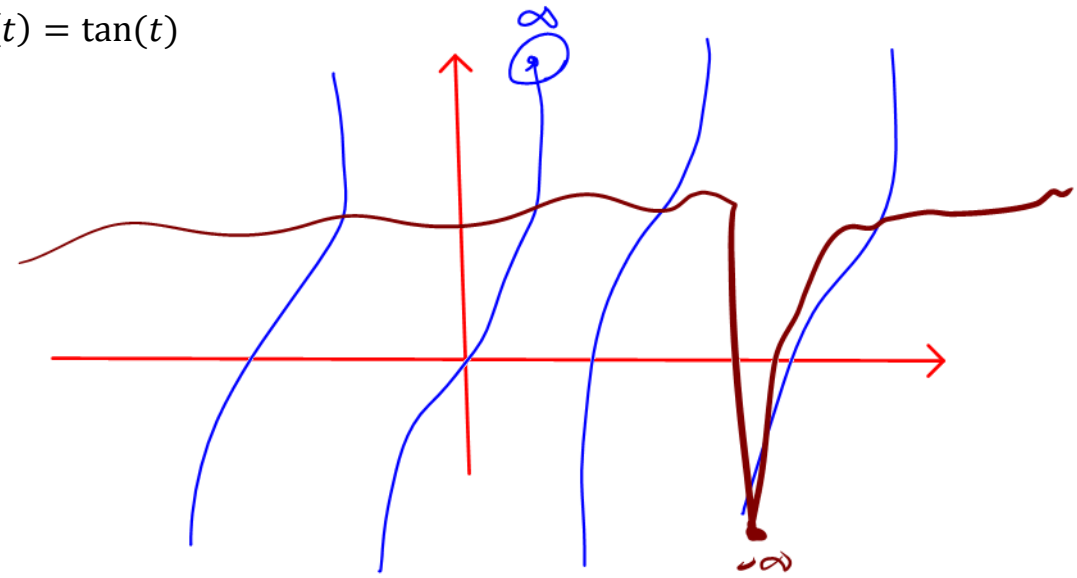
$E_x = \underline{\infty - 1}$



✓ **نکته:** انرژی سیگنال برابر مساحت زیر نمودار $|x|^2$ است.

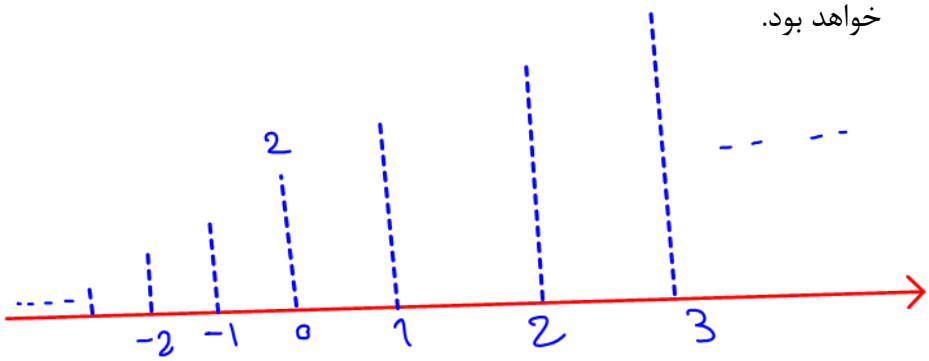
۱) اگر دامنه سیگنال حتی در یک نقطه ∞ شود، انرژی سیگنال ∞ است.

$x(t) = \tan(t)$



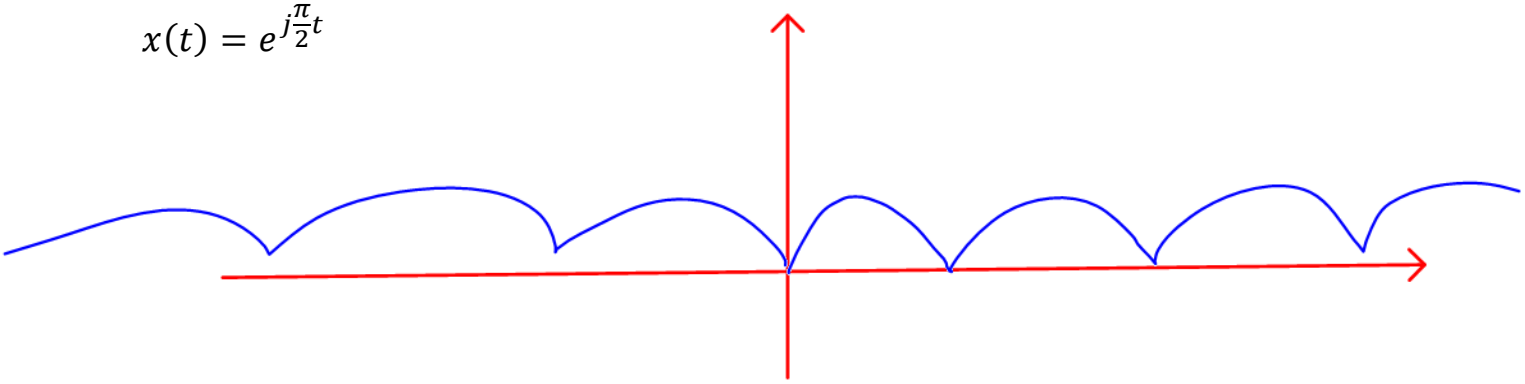
۲) اگر طول سیگنال محدود نباشد یعنی از $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار غیر صفر داشته باشد، انرژی سیگنال ∞ خواهد بود.

$x[n] = e^{2n} + 2^n$



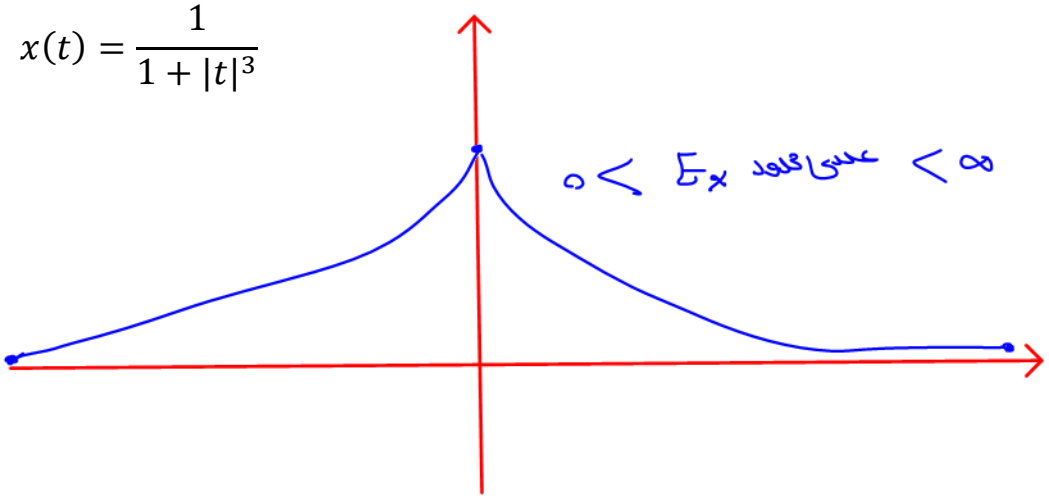
۳) اگر سیگنال متناوب باشد انرژی آن بینهایت است.

$x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t}$



۴) اگر دامنه سیگنال همواره در حال کاهش به سمت صفر باشد انرژی عددی محدود است.

$$x(t) = \frac{1}{1+|t|^3}$$



مثال

انرژِی سیگنالهای زیر را محاسبه کنید.

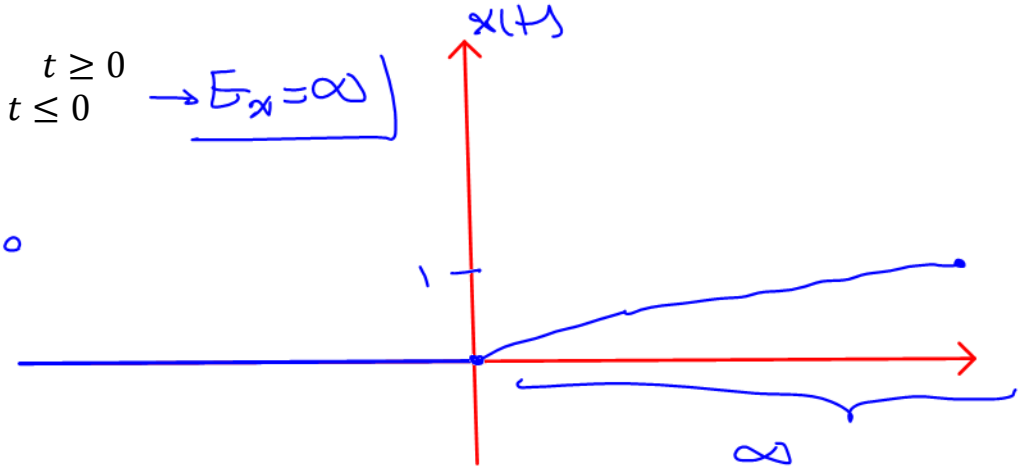
$$x(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \rightarrow E_x = \infty$$

$$x[n] = \cos[\frac{\pi}{2}n] \rightarrow E_x = \infty$$

$$x(t) = \begin{cases} (1-e^{-5t}) & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \rightarrow E_x = \infty$$

$x(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$x(\infty) = 1 - e^{-\infty} = 1$



توان سیگنال

یادآوری

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$p_x = \frac{\text{انرژی سیگنال}}{\text{بازه زمانی}}$$

$$P_x = \frac{E_x}{2\infty}$$

$$p_{(t_1-t_2)} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}{t_2 - t_1}$$

$$p_x = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}{2T} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2\infty}$$

$$p_x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2}{2N+1}$$

مثال

توان سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$$x[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] \rightarrow E_x = 3$$

$$P_x = \frac{3}{2\infty} = 0$$

$$P_x = \frac{E_x}{2\infty}$$

$$P_x = 10 = \frac{E_x}{2\infty} = \frac{20\infty}{2\infty} = 10 = P_x$$

✓ **نکته:** اگر انرژی سیگنال عددی محدود باشد توان آن صفر است.

✓ **نکته:** اگر توان سیگنال عددی محدود باشد انرژی آن ∞ است.

❖ **تعریف**

سیگنال انرژی ← اگر انرژی سیگنال عددی محدود و غیر صفر باشد.

سیگنال توان ← اگر توان سیگنال عددی محدود و غیر صفر باشد.

سیگنال نه توان و نه انرژی ← اگر توان سیگنال ∞ باشد.

✓ **نکته:** اگر سیگنال انرژی باشد ← توان ۰

✓ **نکته:** اگر سیگنال توان باشد ← انرژی ∞

تشخیص سیگنال توان و انرژی با روش نمودار:

نکته: اگر نمودار $|x(t)|^2$ دارای طول محدود باشد و دامنه ∞ نشود، سیگنال انرژی است.

نکته: اگر طول سیگنال ∞ باشد و دامنه در حال افزایش یا کاهش نباشد و ∞ نشود سیگنال توان است.

آزاد ۸۸

در توصیف سیگنال $x(t) = \frac{1}{1+|t|^3}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) توان ۲) انرژی ۳) توان و انرژی ۴) نه توان نه انرژی

دکتری ۹۰

سیگنال $x(t) = (1 - e^{-5t})u(t)$ کدام یک از خصوصیات زیر را دارد؟

۱) انرژی ۲) توان ۳) انرژی نوسانی دارد ۴) توان و انرژی

مثال

توان سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$$x(n)=\begin{cases}2 & n<-10\\ 4 & -10\le n\le 10\\ \frac{1}{6} & n>10\end{cases}$$

نکته: اگر سیگنالی متناوب باشد $E_x = \infty$ و توان آن در کل به صورت زیر است:

$$E_{x_{\text{کل}}} = \infty$$

$$p_x = p_{\text{یک دوره تناوب}} = \frac{\text{انرژی در یک دوره تناوب}}{\text{دوره تناوب}}$$

نکته: **توان سیگنالهای مثلثاتی**

$$\begin{cases} A\cos(at+b) \longrightarrow p = \dfrac{A^2}{2} \\ A\sin(at+b) \longrightarrow p = \dfrac{A^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\,e^{j(at+b)} \longrightarrow p = A^2 \\ A \longrightarrow p = A^2 \\ \tan(at+b) \\ \cot(at+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cos(an) \longrightarrow p_x = \begin{cases} \dfrac{A^2}{2} & a \text{ مضرب } \pi \text{ نباشد} \\ A^2 & a \text{ مضربی از } \pi \text{ باشد} \end{cases} \\ A\sin(an) \longrightarrow p_x = \begin{cases} \dfrac{A^2}{2} & a \text{ مضربی از } \pi \text{ نباشد} \\ 0 & a \text{ مضربی از } \pi \text{ باشد} \end{cases} \end{cases}$$

$$Ae^{jan} \longrightarrow p_x = A^2$$

نکته: اگر x(t) یک سیگنال با طول ∞ و دامنه محدود باشد داریم:

$$x(\infty) = A \qquad x(-\infty) = B$$

$$p_x = \frac{A^2 + B^2}{2}$$

مثال

توان سیگنال های زیر را محاسبه کنید.

I. $x(t) = u(t-2)$
II. $y(t) = 10$
III. $z(t) = u(t-2) + u(t+2)$
IV. $f(t) = u(t+2) - u(t-2)$

مثال

توان $f(t)$ داده شده کدام گزینه است؟

$$f(t) = e^{t}u(-t) + 2e^{-t}u(t) + u(t-1)$$

1) ∞ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) 0

نکته: $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n-N_0 m]$ باشد اگر z[n] سیگنال انرژی باشد x سیگنال توان است (به احتمال زیاد)

یادآوری

$$\sum_{k=a}^{\infty} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^a}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & |q|>1 \end{cases}$$

برق ۸۵.

توان و انرژی $x[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب کدام است؟

۱) ∞ و $\frac{41}{18}$ ۲) ∞ و 0 ۳) ∞ و ∞ ۴) $\frac{64}{9}$ و 0

سیگنال های زوج و فرد

❖ تعریف

- سیگنال زوج: سیگنالی که نسبتاً به محور عمودی متقارن است.

$x(t) = x(-t) \longrightarrow$ $x(t)$ زوج است

$x(t) = \cos(2t)$

$x(t) = 2^{|t|} + \sin(t^2)$

- سیگنال فرد: نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد.

$x(t) = -x(-t) \longrightarrow$ فرد

$x(t) = \sin(t)$

✓ **نکته**: اگر x(t) یا x[n] فرد باشد حتماً در مبدأ صفر است . x(0)=0

✓ **نکته**: هر سیگنالی را می‌توان به صورت مجموع یک سیگنال فرد و یک سیگنال زوج نوشت.

$$x(t) = \underbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{x(t)-x(-t)}{2}}_{\text{فرد}}$$

$ev\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ بخش زوج سیگنال

$odd\{x(t)\} = x_0(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$ بخش فرد سیگنال

اگر x(t) زوج باشد: $\begin{cases} x_e(t) = x(t) \\ x_0(t) = 0 \end{cases}$

اگر x(t) فرد باشد: $\begin{cases} x_e(t) = 0 \\ x_0(t) = x(t) \end{cases}$

دکتری ۹۰

اگر تابع $g(t) = t\sin(t)$ را به دو بخش زوج g_e و فرد g_0 تقسیم کنیم داریم:

۱) $g_0 = 0\ .\ g_e = t\sin(t)$

۲) $g_0 = 0\ .\ g_e = -t\sin(t)$

۳) $g_0 = t\sin(t)\ .\ g_e = 0$

۴) $g_0 = -t\sin(t)\ .\ g_e = 0$

✓ **نکته**: حاصلضرب دو سیگنال

الف) زوج ← زوج است

ب) فرد ← زوج است

ج) زوج و فرد ← فرد است

$$g(t) = t\sin(t)$$

❖ تعریف

دو سیگنال را متعامد گوییم اگر:

$$x_1(t) \perp x_2(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = 0$$

✓ **نکته**: هر دو سیگنال زوج و فرد بر هم عمودند. (متعامد هستند.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x_{\text{زوج}} \times y_{\text{فرد}}}^{\text{فرد}}\,dt = 0$$

❋ $\sin(\alpha t)$ بر $\cos(\beta t)$ عمود است.

❋ $e^{j\alpha t}$ بر *sin* و *cos* عمود است.

نکته! اگر x(t) و y(t) بر هم عمود باشند آنگاه

$$E\{x(t) + y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\}$$

$$p\{x + y\} = p_x + p_y$$

$$f(t) = \underbrace{1e^{j2t}}_{1^2} + \underbrace{2\cos(3t)}_{2}$$

نکته

$$x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

$$p_x = p_{x_e} + p_{x_0}$$

مثال

قسمت زوج سیگنال x[n] برابر با $x_e[n] = 3\cos(4n) + 3\cos(\pi n)$ می‌باشد اگر توان کل سیگنال x[n] برابر ۱۵ باشد، توان قسمت فرد آن کدام است؟

۱,۵ ۲,۵ ۶ ۳

✓ نکته

$\cos(\alpha n^t)$ بر $\cos(\beta n^t)$ اگر $\alpha \neq \beta$ باشد، عمود است.

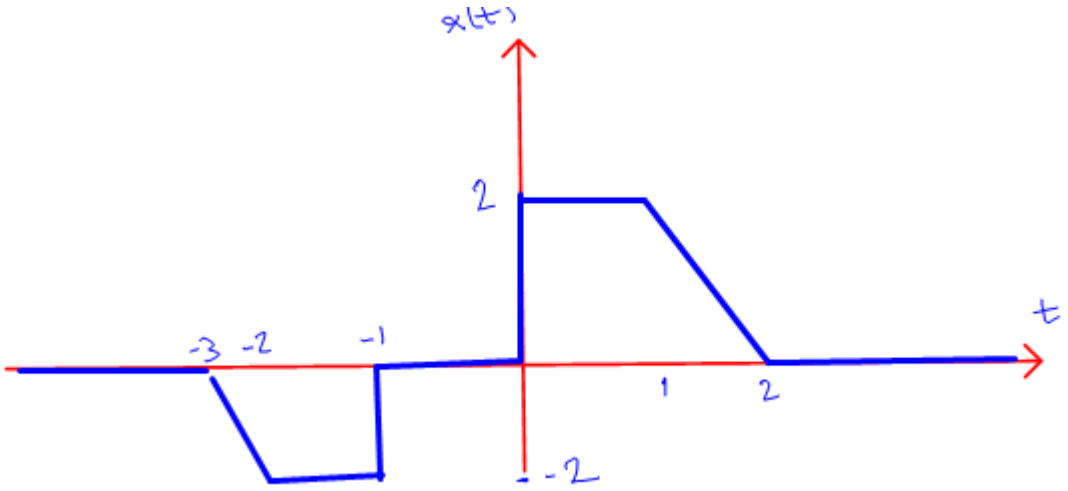
$\sin(\alpha n)$ بر $\sin(\beta n)$ اگر $\alpha \neq \beta$ باشد، عمود است.

$\checkmark \cos(4n) \perp \cos(\pi n)$

مثال

اگر $x_0(t)$ بیانگر قسمت فرد سیگنال x(t) باشد، در این صورت $\int_0^{\infty} x_0(t)dt$ کدام است؟

1.5 3 3.5 4.5



آزاد ۸۸

A و B را طوری تعیین کنید که Q_1 و Q_2 برهم عمود باشند.

۱) $A = -6$ و $B = +4$ ۲) $A = 6 , B = 4$

۳) $A = 4 , B = 6$ ۴) $A = 6 , B = -4$

$$Q_2(t) = \begin{cases} Ae^{-2t} + Be^{-e} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} , \quad Q_1 = \begin{cases} \sqrt{2}e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

معرفی سیگنال های پایه

۱) پله ← u

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$u(f(t)) = \begin{cases} 1 & f(t) \geq 0 \\ 0 & f(t) < 0 \end{cases}$$

$$u[f(n)] = \begin{cases} 1 & f(n) \geq 0 \\ 0 & f(n) < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = u(t^2 - 1) = \begin{cases} 1 & t^2 - 1 \geq 0 \\ 0 & t^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = u[n+2] - u[n-2]$$

✓ **نکته**: هرگاه انتگرال یا سیگمای شامل u دیدید ، اول u را ساده کنید.

$$\int_{\underbrace{-\infty}_{2}}^{\infty} f(t)\ \underbrace{u\left(\overbrace{t-2}^{1}\right)}_{t\geq 2}\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \underbrace{\left(\overbrace{u(t+2)-u(t-1)}^{2}\right)}_{-2\leq t\leq 1}\,dt$$

$$\sum_{\underbrace{k=0}_{10}}^{\infty} f(k)\ \underbrace{\overbrace{u(k-10)}^{1}}_{k>=10}$$

۲) ضربه : δ

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(f(t)) = \begin{cases} 1 & f(t) = 0 \\ 0 & f(t) \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(2t - 4)$$

خواص ضربه :

۱ – انتگرال ضربه

$$\int_b^c \delta(t - a)\ dt = \begin{cases} 1 & a \in [b, c] \\ 0 & a \notin [b, c] \\ & a \notin [1, \infty] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{2} \delta(t - 1)\ dt$$

$$\sum_{n=-2}^{3} \delta[n - 2]$$

۲- خاصیت غربالگری

$$x(t) \times \delta(t - 2) =$$

$$\begin{cases} x(t)\delta\left(\overbrace{t-t_0}^{t=t_0}\right) = x(t_0)\delta(t-t_0) \\ x[n]\delta\left[\underbrace{n-n_0}_{n=n_0}\right] = x[n_0]\delta[n-n_0] \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\ \delta\ \left[\underbrace{k-1}_{k=1}\right]$$

نکته: هر چیزی در δ ضرب شود اول خاصیت غربالگری اعمال می شود .

$$\underbrace{\delta(t-2)}_{x}\ \delta\left(\underbrace{t-10}_{t=10}\right) =$$

نکته : در انتگرال یاسیگما، هرگاه δ دیدید ابتدا خاصیت غربالگری را عمال کنید .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta\left(\underbrace{t-2}_{t=2}\right)\,dt$$

برق ۹۲

اگر $x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{t}{3})\ \delta(t - k\pi)$ و $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\pi t^2)\ \delta(t - k)$ و $x_3(t) = x_1(t) +$ $x_2(t)$ باشد در این صورت :

۱) x_1 و x_2 متناوب ولی x_3 نامتناوب ۲) هر سه متناوب

۳) x_1 متناوب و x_2 و x_3 نامتناوب ۴) هر سه نامتناوب

یادآوری : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{f(k)}_{M}\ z(t - kT_0)$ تناوب با $M \times T_0$

۳– جمع ضربه ها

$$(a + b)\delta(t) = a\delta(t) + b\delta(t)$$

چطور سیگنالی را برحسب ضربه بنویسیم :

۴- مقیاس دهی

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$$

$$* \ \boldsymbol{\delta(af(t)) = \frac{1}{|a|}\delta(f(t))}$$

$$\delta(2t) = \frac{1}{|2|}\,\delta(t)$$

$$* \ \boldsymbol{\delta[af[n]] = \delta[f[n]]}$$

$$\delta[2n-2] = \delta[n-1] \qquad \delta[2n] = \delta[n]$$

۵- انتگرالی از مشتق ضربه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(z-t_0)\,\delta^{(n)}(z)dz = (-1)^n \left.\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right|_{t=t_0}$$

۶- تبدیل ضربه های چندجمله‌ای به ضربه‌های شیفت یافته

$$\delta(t^2-1) \text{ یا } \delta(\cos(t)(t-2)) = ?$$

$$\delta(f(t)) = \sum_{i} \frac{\delta(t - t_i)}{\left|f'(t)\right|_{t=t_2}\left|}$$

t_i ها ریشه های $f(t)$ هستند.

مثال

عبارت زیر را بر حسب δ های شیفت یافته بنویسید.

$$\delta\left(\underbrace{8t - t^3}_{f(t)}\right) = ?\ .$$

نکته : هرگاه داخل δ عبارتی به غیر $at \mp b$ باشد از خاصیت فوق استفاده می کنیم

$$\delta(at \mp b)$$

برق ۹۰.

حاصل انتگرال زیر که در آن δ تابع ضربه و δ' مشتق آن است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) -۱

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} [(t+2)\,\delta'(t+1) + (e^{-|t|} + t^2 + 2)\,\delta\,(e^{-|t|} + t^2 + 1)]dt$$

ارتباط ضربه و پله :

1) $\frac{du(t+a)}{dt} = \delta(t+a)$

مشتق پله = ضربه

2) $u[n+a] - u[n+a-1] = \delta[n+a]$

$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t-t_0)dt = u(\beta - t_0) - u(\alpha - t_0)$

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} \delta(n-n_0) = u[m_2 - n_0] - u[m_1 - 1 - n_0]$$

مثال

عبارات داده شده را برحسب u بنویسید.

الف) $\sum_{k=-\infty}^{n-2}(k+2)\ \delta[k+1]$

ب) $\sum_{k=-\infty}^{n} 3^k\ \delta[2-k]$

ج) $\int_{t-5}^{t} z^2\delta(2z-6)dz$

آزاد ۸۸

تابع $e^{-t}\delta'(t)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\delta'(t)$ ۲) $\delta(t)+\delta'(t)$ ۳) $-\delta'(t)$ ۴) 0

یادآوری

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)g(t)\big)=f'(t)g(t)+g'(t)f(t)$$

آزاد ۸۹.

مقدار انتگرال $I = \int_0^{\infty} (t^2+1)\ \left(\delta'(t-3) + \delta\,(t^2-1)\right)dt$ کدام است؟

۱) -4 ۲) 5- ۳) 7 ۴) 8

خواص سیستم ها

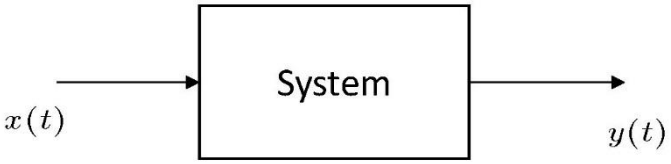
سیستم زمان پیوسته : اگر ورودی و خروجی سیستم پیوسته باشد

سیستم زمان گسسته : اگر ورودی و خروجی سیستم گسسته باشد.

خواص سیستم ها ←
- خطی
- TI یا TV
- حافظه
- معکوس پذیری
- علّی
- پایداری

❖ ضابطه سیستم

رابطه ریاضی که خروجی y در لحظه t یا n را برحسب ورودی x بیان می کند و این رابطه به ازای تمام ورودی ها صادق است.



➢ **توجه**: ضابطه سیستم خروجی را به ازای هر ورودی توصیف می کند.

*** از روی یک ورودی خاص ، ضابطه تولید نمی شود.**

مثال

در یک سیستم به ازای ورودی $x(t) = \cos(t)$ خروجی $2\cos^2(t) - 1$ تولید می شود، ضابطه سیستم را بدست آورید.

➢ **توجه**: خروجی در لحظه t یا n باید برحسب ورودی ها توصیف شود.

$y(t) = x(2t) + x(t)$ ✓

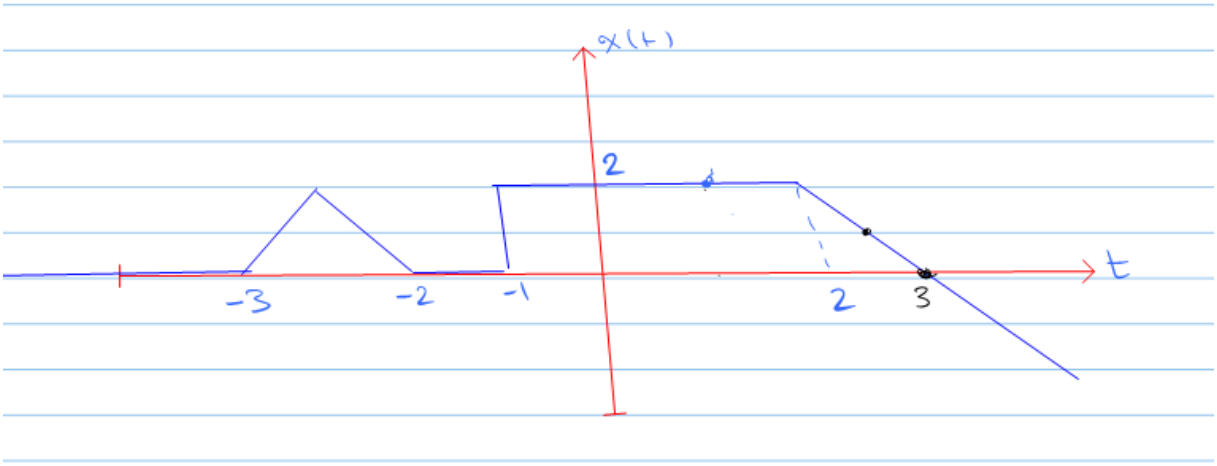
$y\left(\underbrace{t-2}_{*}\right) = x(2t) + x(t)$ ×

$\underbrace{y[n] - y[x-1]}_{y \text{ مشتق}} = x\,[n]$

مثال

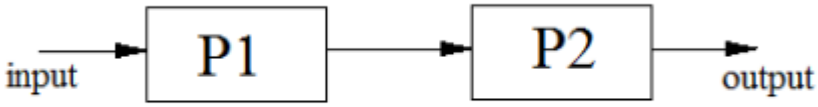
سیستمی با ضابطه زیر داده شده است. به ازای $x(t)$ نشان داده شده در شکل، خروجی را رسم کنید.

$$y(t)=\begin{cases}x(t)+2 & x(t)>0\\ -x(t) & x(t)\le 0\end{cases}$$



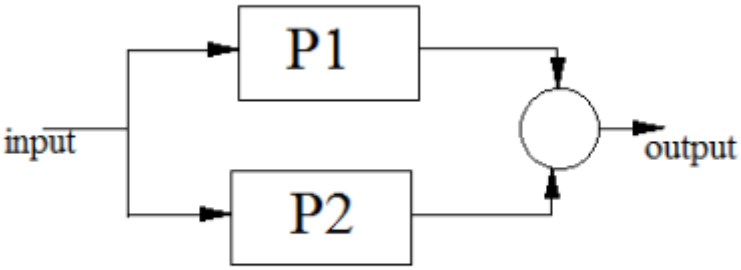
اتصال سیستم ها: سری – موازی – فیدبک

❖ اتصال سری



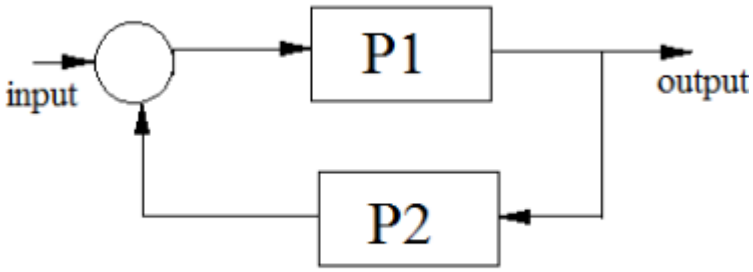
(a) Series

❖ اتصال موازی



(c) parallel

❖ اتصال فیدبک



(b) feedback

مثال

سیستم های ۱ و ۲ را یک بار به صورت سری، یک بار به صورت موازی متصل می کنیم. رابطه کلی سیستم ها را بدست آوردید.

(1) $$y(t)=\begin{cases}x^2(-3t+1) & x(t)\geq 0\\ -x(2t-1) & x(t)<0\end{cases}$$

(2) $$y(t)=x^2(t+1)-4$$

خواص سیستم ها

❖ خطی بودن

سیستم خطی است اگر و تنها اگر همگن بوده و خاصیت جمع آثار را داشته باشد.

همگن: یعنی اگر ورودی در یک عدد ضرب شود، خروجی هم در آن عدد ضرب می شود.

خاصیت جمع آثار: اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند، خروجی آنها هم با هم جمع می شود.

در سیستم خطی اگر ورودی در عددی ضرب شود خروجی هم در آن عدد ضرب می شود، و اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند خروجی ها هم با هم جمع می شوند.

مثال

خطی بودن سیستم زیر را بررسی کنید.

$$y(t) = x(t-1) + x(t)$$

✓ **نکته:** در بررسی خطی بودن فقط به X نگاه می کنیم هر عبارتی که X ندارد یک عدد فرضی می شود. داخل X را کاری نداریم.

✓ **نکته:** اگر در ضابطه سیستم متغیر x دارای توان غیر از ۱ باشد یا در مخرج قرار بگیرد یا در یک تابع غیرخطی قرار گیرد غیرخطی است در غیر اینصورت سیستم خطی است.

مثال

خطی بودن سیستم‌های زیر را بررسی کنید.

1. $y(t) = x(t) + 2x(\tan(t))$
2. $y(t) = 2x(t^2 - 1) + 3$
3. $y(t) = \cos(t)\ x(t) + e^{t^2-1} \times e^{\tan(t)}\ x(t)$
4. $y(t) = \frac{x(t-2)}{2} + \frac{2x(t^3)}{x(t^2-1)}$
5. $y[n] = x[n-3] + |x[n]|$
6. $y(t) = Re(x(\sin(t)) + \sin(x(t)))$
7. $y(t) = \int_{-2}^{\infty} x(\tau - 1)d\tau$
8. $y(t) = \int_{-x(2)}^{\infty} x(\tau - 1)d\tau$
9. $y[n] = Im(x(|n-2|) + Re(x(n-2))$

✓ **نکته**: بررسی خواص فقط از روی ضابطه سیستم انجام می شود.

مثال

آیا سیستم $y[n]-y[n-1]=x[n]$ خطی است؟

سیستم های چند ضابطه ای:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t > 0 \\ x(t) + 1 & t < 0 \end{cases}$$

ضابطه شرط

اگر x (ورودی) در یک سیستم

چند ضابطه ای باشد سیستم به شرط زیر خطی است:

(۱) تک تک ضابطه ها خطی باشند

$$y = x(t)$$

(۲) شرط ها برحسب x نباشند

مثال

کدام یک از سیستم های زیر خطی است؟

(1

$$y(t) = \begin{cases} \cos(t)\, x(t+2) & t > 0 \\ \dfrac{x^2\,(t-1)}{x(t)} & t \le 0 \end{cases}$$

(2

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t-1) > 1 \\ x(t) + \cos(t) & x(t-1) \le 1 \end{cases}$$

(3

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + \cos(t)\, x(t) & t > 0 \\ 3 & t = 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$$

(4

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t > 1 \\ -x(t) + \mathrm{t}\,x(t) & t \le 1 \end{cases}$$