بسمه تعالی

جزوه آموزشی درس سیگنال سیستم

شامل درسنامه، نکات کنکوری، آموزش مفاهیم پایه سیگنال و حل تستهای کنکورهای سراسری ارشد و دکتری

مولف: سعید دهقانی

استفاده از این جزوه برای تمام دانشجویان از نظر مولف بلامانع است.

توضیحات جزوه:

- **جزوه حاضر در طول ضبط فیلم آموزشی سیگنال سیستم تهیه شده است و لذا این جزوه در کنار فیلم آموزشی یک مجموعه کامل برای درس سیگنال سیستم خواهد بود، در صورتی که در فهم برخی قسمتهای جزوه دچار مشکل شدید، به دلیل توضیحات شفاهی اضافه در حین تدریس است که در فیلمهای آموزشی آورده شده است و بخش عمده‌ای از این فیلم‌ها به صورت رایگان در سایت آموزشی www.liveamooz.com در دسترس می‌باشد.**
- **جزوه تهیه شده حاصل تجربه ۷ سال تدریس درس سیگنال سیستم در موسسات آموزشی تهران می‌باشد و سعی شده است در حین تدریس به تمامی سوالات احتمالی دانشجویان پاسخ داده شود و لذا در حل سوالات سعی بر این بوده است که ساده‌ترین مطالب نیز تدریس شود.**
- **در تهیه جزوه حاضر، با توجه به تجربه مولف در زمینه فعالیت در صنایع مختلف سعی شده است تا رویکرد کاربرد در عمل نیز به تدریس اضافه شده و با مثالهای عملی دیدگاه صحیح به دانشجویان منتقل شود.**
- **در جزوه حاضر، چون در حین تدریس آنلاین تهیه شده است، بیشتر از زیبایی ظاهری جزوه بر انتقال مفاهیم و بیان نکات تمرکز شده است و انشالله در مطالعه جزوه بابت ظاهر جزوه مولف را خواهید بخشید.**
- **در این جزوه رویه تدریس بدین صورت بوده است که ابتدا درسنامه با مثالهای عملی و ساده توضیح داده شده است، سپس نکات کنکوری در قالب حل تستهای کنکورهای ارشد و دکتری مهندسی برق، مهندسی کامپیوتر و ابزار دقیق از سال ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۷ ارائه شده است تا با مطالعه جزوه حاضر نیاز به کتب آموزشی دیگر نداشته باشید.**

جلسه نهایی

٪60 ← 30٪

تجزیه و تحلیل سیستم ها و سمگنالها
٪100 ٪90 57٪

اهداف ←
- موفقیت در کنکور (درصد بالای 60)
- درک مطالب درس
- آماده سازی برای آینده

روند برگزاری کلاس
- فیلم آنلاین ← درسنامه به همراه حل مثال و تست
- کلاس آنلاین ← توضیح مجدد در صورت درخواست
  حل تستهای بیشتر

دفع اشکال ←
- سایت
- ایلیمیشن
- کلاس آنلاین

منابع درسی ←
- جزوه کلاسهای حضوری
- جزوه کلاس آنلاین
- منبعی برای مطالعه صورت نگرفته

چیتا نیاز؟ ← درس میدیم
نوزاد میاد تا *

در فضای مختلط کار می کنیم ←

2 3
2+j 3+j → 3+2

دایره مثلثات:

حقیقی و مختلط و موهومی یعنی:

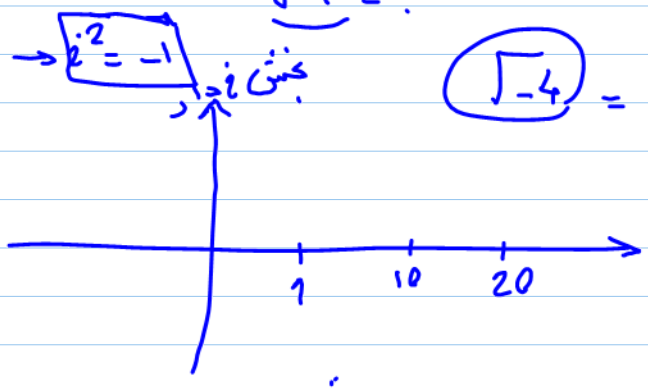
قرارداد

$\sqrt{-1} = i$ یا $j \rightarrow i^2 = -1$

$\sqrt{-4} = ?$

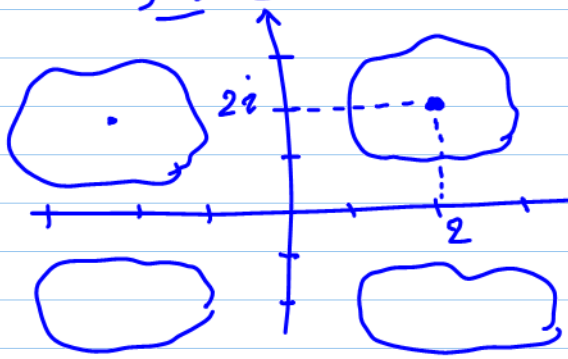
اعداد مختلط ←

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \times 4} = \sqrt{-1} \times \sqrt{4} = i \times 2$



موهومی = بخش i دار

حقیقی = بخش بدون i



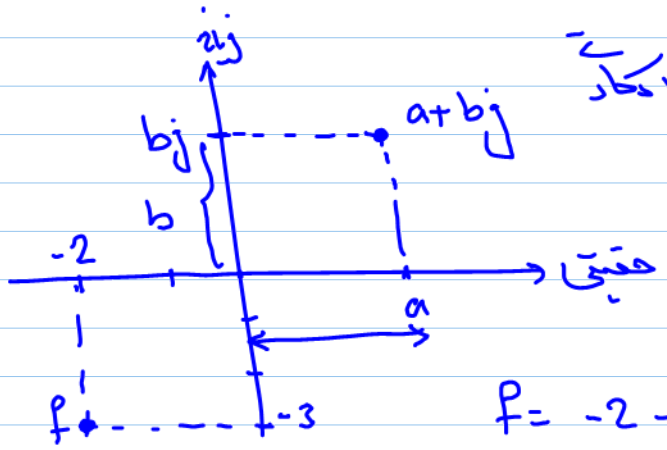
$3i = \sqrt{-9} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3i$ 3 4 5

اعداد با توانش ترکیبی از حقیقی و موهومی باشند ← اعداد مختلط

$g + bj = f$

$Re\{f\} = a$

$Im\{f\} = b$



$f = -2 - j3$

$Re\{f\} = -2 \quad Im\{f\} = -3$

$f = Re\{f\} + j\,Im\{f\}$ ← فرم کارتزین

$-10 + j15 = x + -jy$ $\quad x, y = ?$

$x = -10 \qquad -y = 15 \rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = -15 \end{cases}$

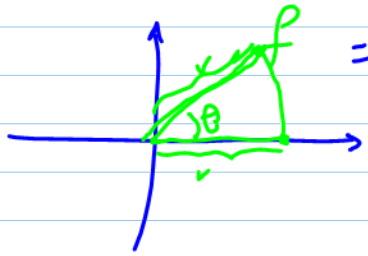
$(x+y) + j(x-y) = 5 + j(-1) = 5 - j$

$$+\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = -1 \end{cases}$$

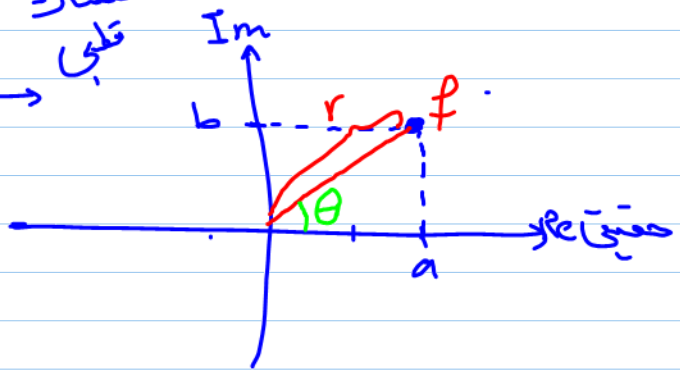
$2x = 4 \quad (x = 2)$

$2 - y = -1 \rightarrow 2 + 1 = y \quad (y = 3)$

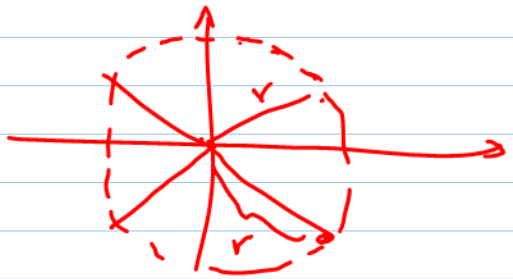
$f = a + bj$



فرم قطبی

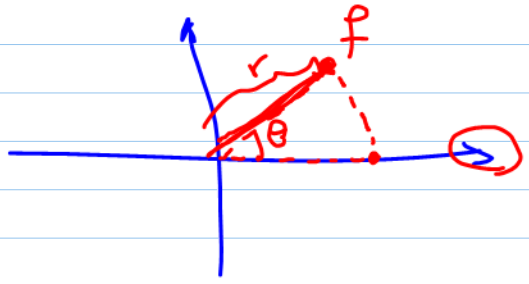


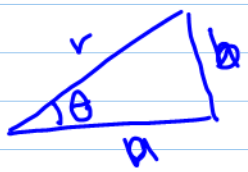
r بزرگی

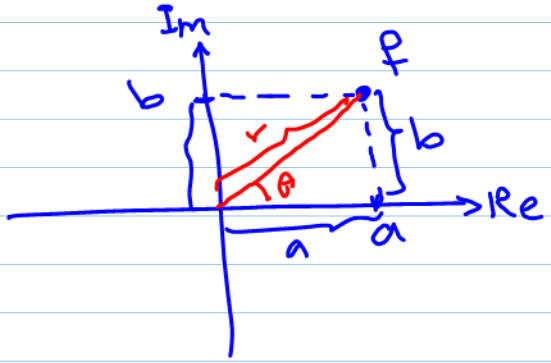


$f = Re\{f\} + j\,Im\{f\}$ = نمایش به شعاع r و با زاویه θ نسبت به محور حقیقی مثبت

$\begin{cases} r = & f \text{ اندازه} \\ \theta = & f \text{ فاز} \end{cases}$



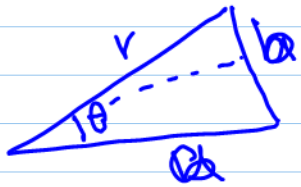




$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|f| = \sqrt{Re\{f\}^2 + Im\{f\}^2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r}$$



$$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \theta = \tan^{-1}(b/a)$$

← θ :ی'ز

؟ ... ← ا ~ ی'ز ← tan ، b/a ← b/a

$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

$$f = a + bj \Rightarrow$$

$$f \rightarrow \begin{cases} \text{اندازه} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{Re(f)^2 + Im(f)^2} = |f| \\ \text{زاویه} = \tan^{-1}(b/a) = \tan^{-1}\left(\frac{Im(f)}{Re(f)}\right) = \angle f \end{cases}$$

$$f = |f| \angle f = |f| e^{j\angle f}$$

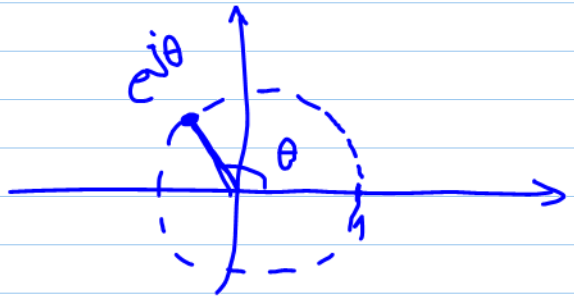
$$f = 2 e^{j20^\circ}$$

$$|f| = 2$$

$$\angle f = 20^\circ$$

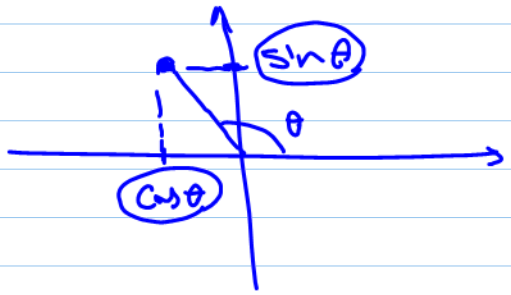
$e^{j\theta} = (1)\, e^{j(\theta)}$ = ناتج ضرب عددين

$$\boxed{|e^{j\theta}| = 1}$$



$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos\theta^2 + \sin\theta^2} = \sqrt{1} = 1$$

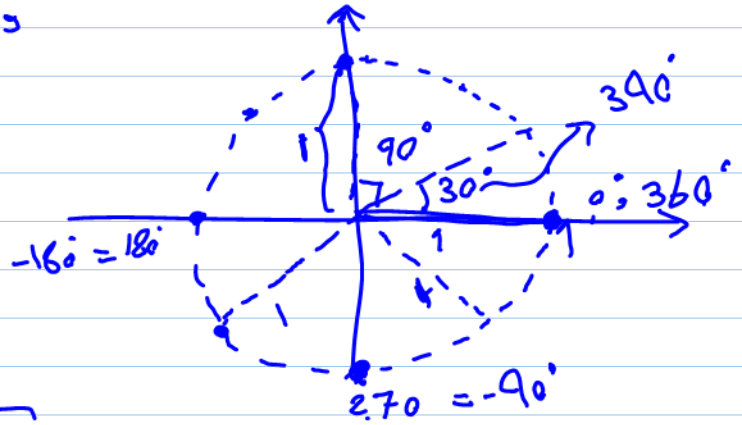


دائرة بنصف قطر = دائرة مثلثية
واحد

θ

$360^\circ = 0$

$390^\circ = 30^\circ$

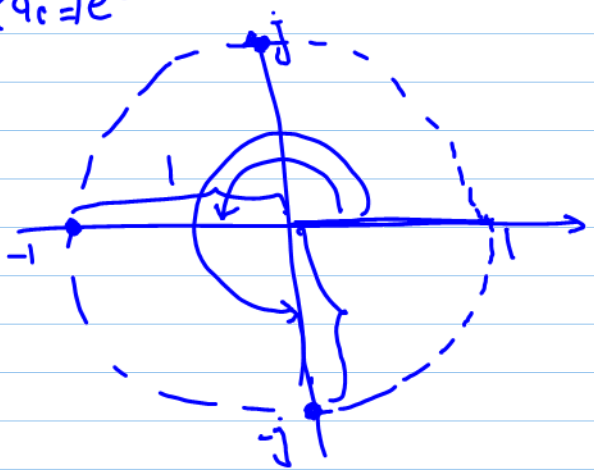


$f_1 = -1j \Rightarrow \begin{cases} |f_1| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \angle f = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ \end{cases} = 1\angle 90^\circ = 1e^{j90^\circ}$

$1 \rightarrow = 1\, e^{j0}$

$-1 \rightarrow = 1\, e^{j180^\circ}$

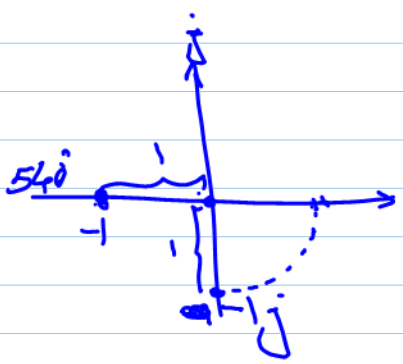
$-j \rightarrow = 1\, e^{j270^\circ}$



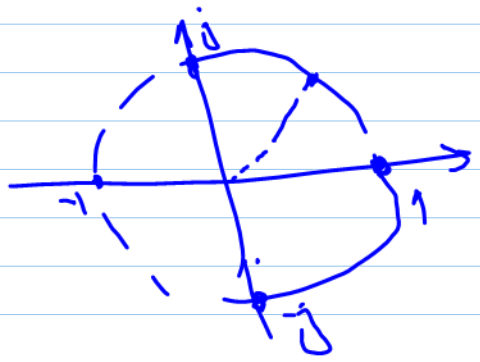
$1e^{j(-90^\circ)} = 0 + (-j) = -j$

$2e^{j540^\circ} = ?\ 2\left(1e^{j540^\circ}\right)$

$= 2(-1) = \boxed{-2}$



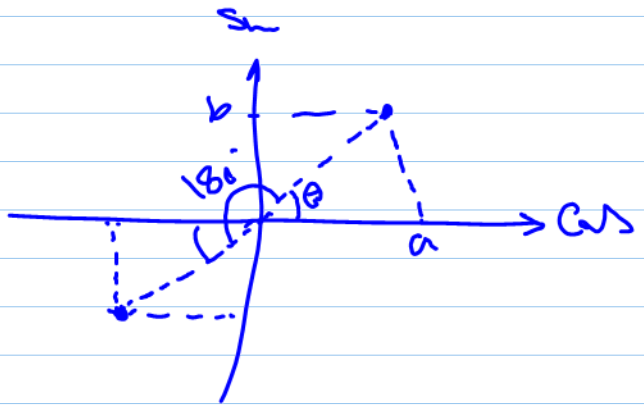
$r e^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$



$\cos(\theta + \pi) = ?$

$\cos(\pi - \theta)$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \begin{cases} \sin\theta \\ \cos\theta \\ \vdots \end{cases}$



$180^\circ = 1\pi$ رادیان

$90 = \pi/2$ $\quad 360 = 2\pi$

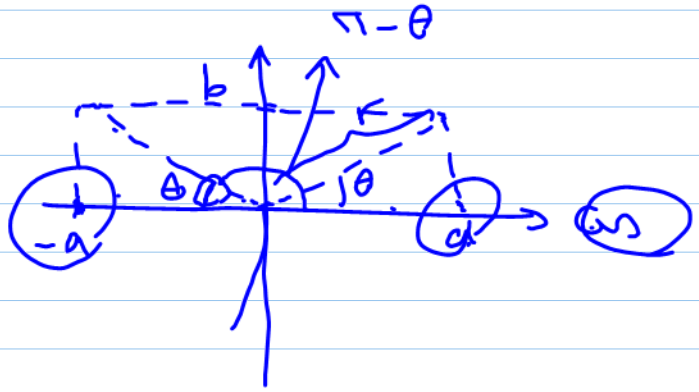
$-90 = -\pi/2$

رادیان و درجه

$\cos\theta = \frac{a}{r}$

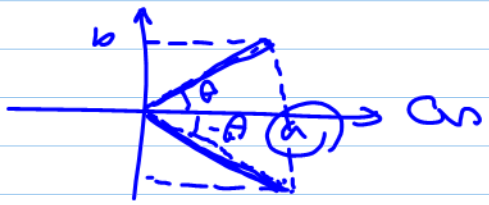
$\cos(\pi - \theta) = \frac{-a}{r}$

$= -\cos\theta$



$\cos\theta = \frac{a}{r}$

$\cos(-\theta) = \frac{a}{r} = \cos\theta$



① $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ تبدیل نمائی مطلب به دکارتی

② $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ ،

③ $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

④ $e^{j(2k\pi)} = 1 \Rightarrow e^{j0}, e^{j2\pi}, e^{j4\pi}, e^{j(-2\pi)}$

$e^{j(2k\pi+\pi)} = e^{j(2k+1)\pi} = -1$

$e^{j\pi k} = (-1)^k = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ $k =$ زوج

$k =$ فرد

$e^{j\pi n} \leftrightarrow (-1)^n$ حرجا

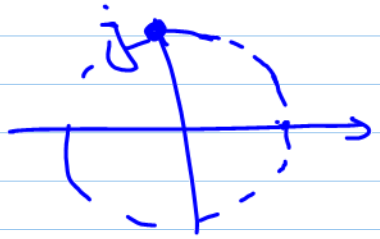
$e^{j(2k\pi + \pi/2)} = j$

$e^{j(2k\pi + \frac{3\pi}{2})} = -j$

$e^{j\frac{5\pi}{2}} = ?$

$e^{j(2+0.5)\pi}$

$= e^{j(2\pi + \pi/2)} = j$



$1e^{j\frac{5\pi}{2}} = 1 \times j$

$2.5\pi = 2\pi + \pi/2$

⑤ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$

$\Rightarrow A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta - \tan^{-1}(B/A))$

⑥ $\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \cos x \sin y$

$\cos(x \mp y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

⑦ $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

⑧ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

⑨ $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

---

② ⑤ ← مزب

④ ⑧ ؟ مزب 8 حت 4

وقتا a مزب ط لت b بوان نوت:

$a = b \times$ (عدد صحيح) $\pm$

8 مزب 4 بت. $4 = 8 \times (\not{4}?)$

كـ م.م ← $(4, 3) = 12$

$4: \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16$

$3: \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12$

کوچک‌ترین مضرب مشترک $\{4, 8\} = 8$

4 : 4 , 8

8 : 8 , 16

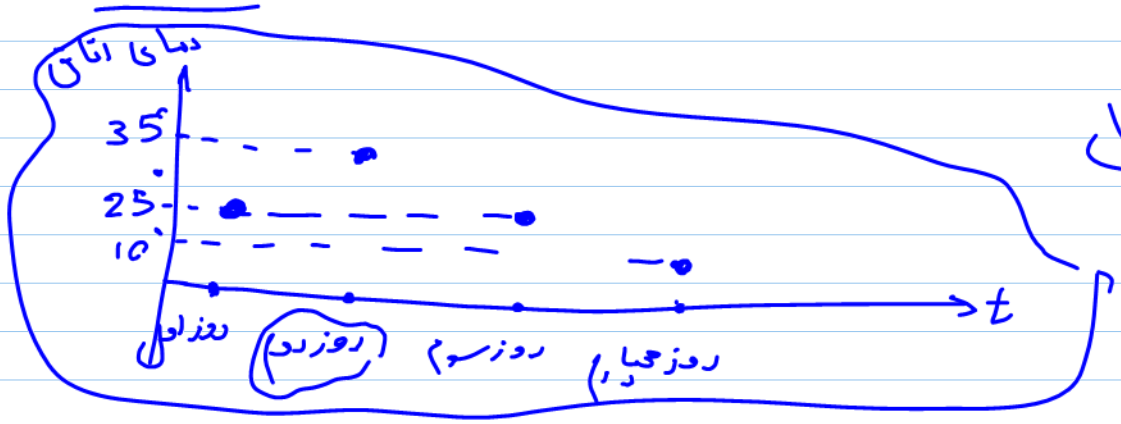
بحث انگیز درس

جلسه دوم سیگنال

تعریف سیگنال: هر تابع که اطلاعاتی را در مورد یک پدیده فیزیکی به ما بدهد.

تابعی از متغیر/ها مستقل

$y = f(x) = x^2 + x$



سیگنال

سیگنال بت: دمای اتاق — 25° — 35° — 25° — 10°

کدر خوب کار می‌کند؟

دما در دماهای مختلف ← سیگنال

متغیر مستقل

خودروی پژو 206 دارای استهلاک زیادی هست؟

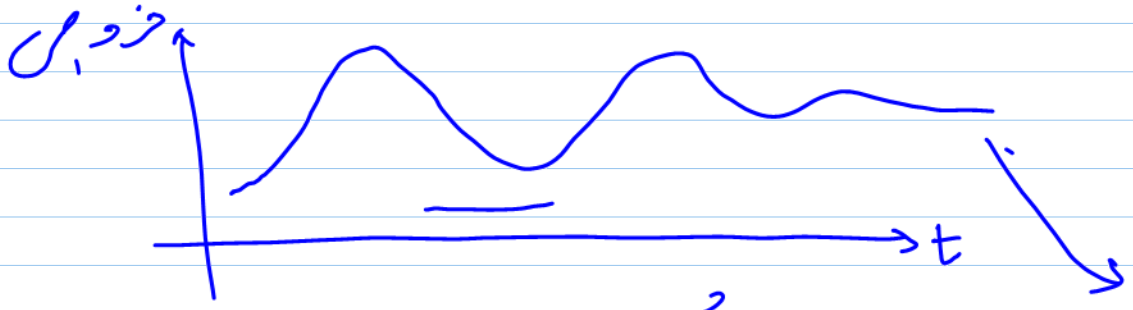
شتاب ۰ تا ۱۰۰ خودرو ←
- 2.5 s
- 3 s
- 4 s
- 5 s

خودرو استهلاک دارد.

در ماه اول 2.5 s
در ماه دوم 3 s
در سال اول 4 s
در سال دوم 5 s

هر پدیده براساس یک متغیر مستقل (معمولاً زمان) توصیف می‌شود.

سیگنال سری اعداد یا سیگنال تابع برحسب زمان که نحوه وقوع یک پدیده را بیان می‌کند یا گرینک سیگنال است.

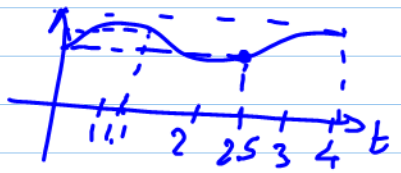


مشخصات سیگنال را بدست آورید.

سیگنال‌ها براساس معیارهای مختلف:

دسته‌بندی براساس زمان ←

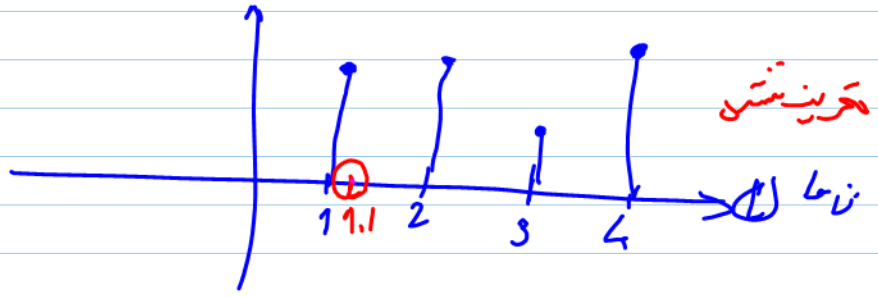
① پیوسته ② گسسته



↓

بازای کلیه زمانها مقداری تعریف شده دارد.

② بازای زمان در اعداد صحیح مقدار دارد و در اعداد غیرصحیح تعریف نشده است.





* سیگنال گسسته در اعداد غیرصحیح مقدار ندارد نه اینکه صفر باشد.

* معمولاً سیگنال پیوسته برحسب زمان (t)

$x(t)$ k یا n ... گسسته ... ...

$x[k]$ $x[n]$

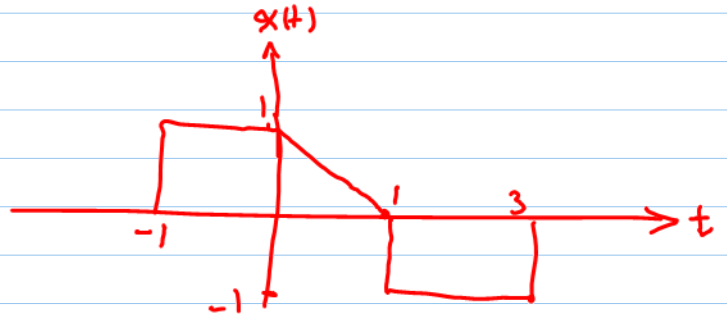
عملیات روی سیگنالها

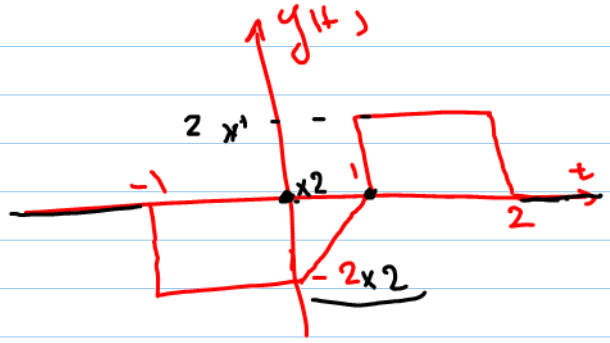
① جمع یا تفریق $x(t)+y(t)$ $x(t)-y(t)$

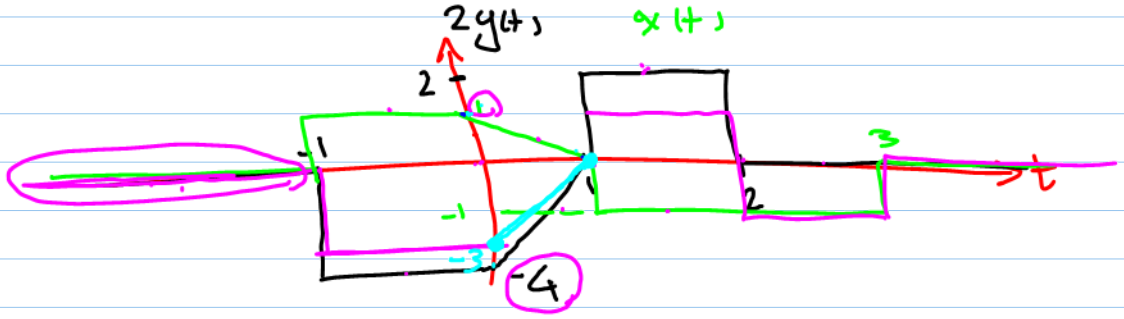
نقطه به نقطه با هم جمع یا تفریق می‌شود.

② ضرب عدد در سیگنال

در هر نقطه عدد در دامنه سیگنال ضرب می‌شود.

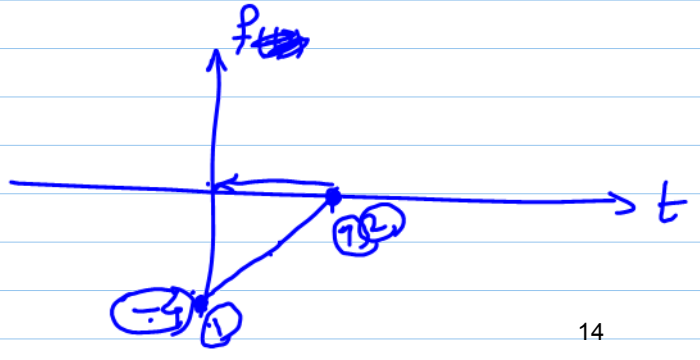






$x(t)+2y(t)=?$

$1+(-4)$



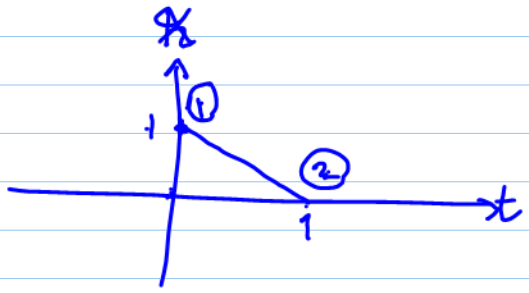
$f_{\text{مقدار}}(\text{مقدار } t) = ?$

$f_{-(10)} = \text{سینوس}(t-1)$

$f_{-(-4)} = \text{سینوس}(t-0)$

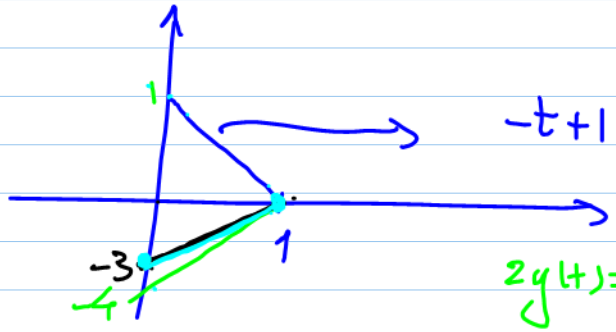
$$\text{شیب} = \frac{\text{② مقدار} - \text{① مقدار}}{\text{② } t - \text{① } t} = \frac{0-(-4)}{1-0} = 4$$

$$f + 4 = 4(t-0) \rightarrow \boxed{f = 4t - 4}$$



$$\text{شیب} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

$$x - 1 = \text{شیب}(t-0) \rightarrow \boxed{x = -t + 1}$$



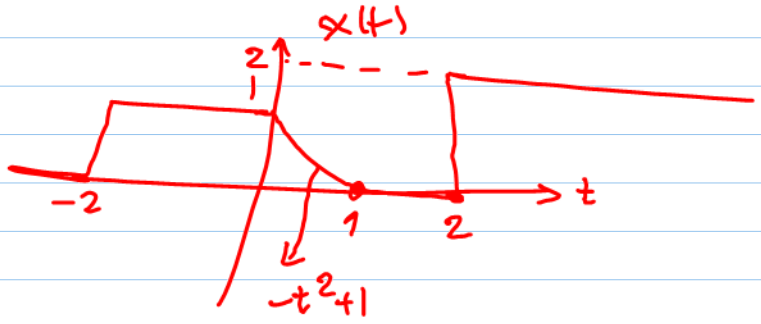
$-t+1 = x(t)$

$2y(t) = 4t - 4$

$h(0) = -3$

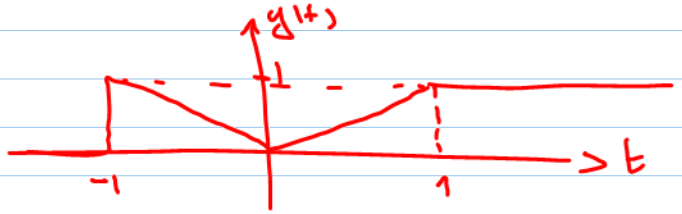
$h(1) = 0$

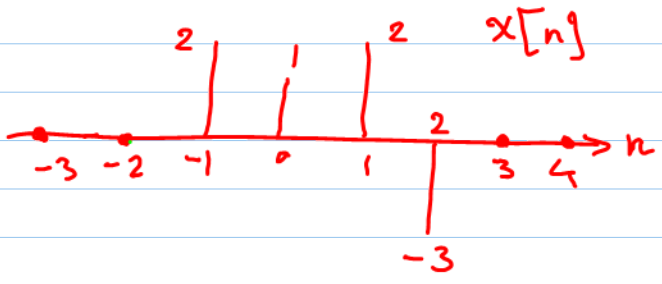
$$h = x(t) + 2y(t) = -t + 1 + 4t - 4$$
$$= 3t - 3$$

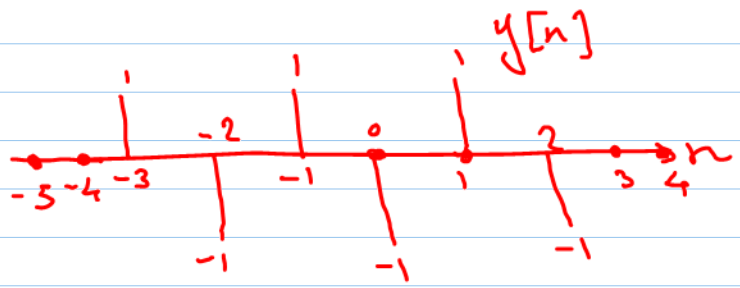


مثال (غریبه)

$x(t) - y(t) = ?$

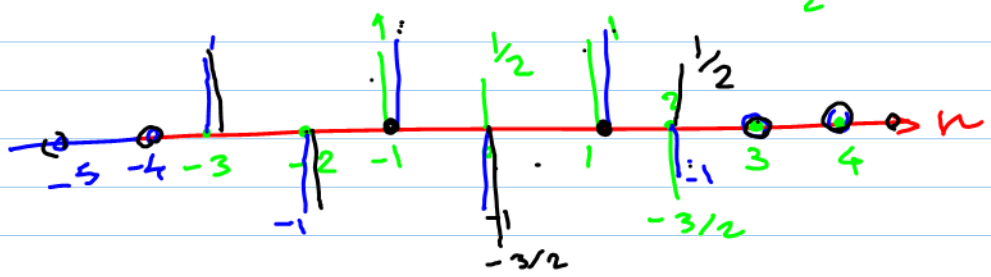




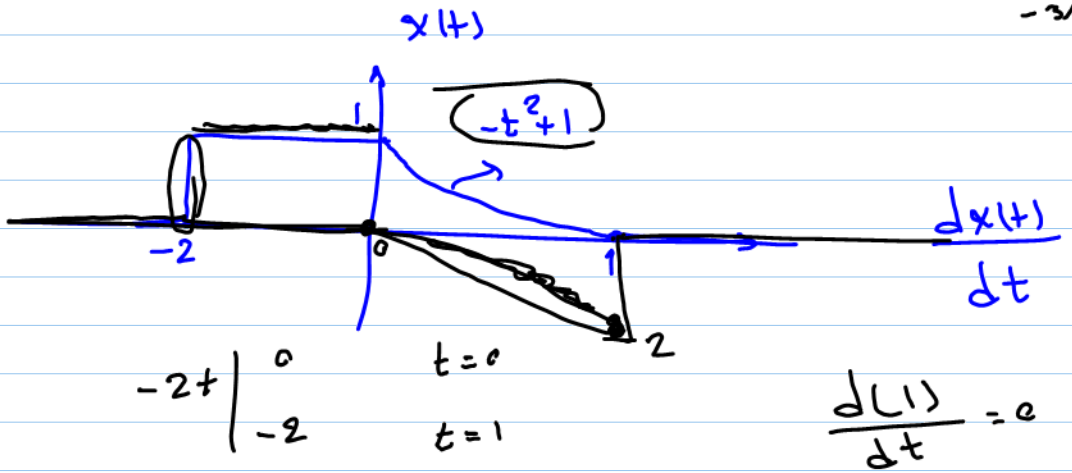


$y[n] - \left(\frac{1}{2}\right) x[n] = ?$

$y[n] - \frac{1}{2}x[n]$ = الحل



مثال ③



$\frac{dx(t)}{dt}$

$\frac{d(-t^2+1)}{dt} = -2t$

$-2t \Big|_{-2}^{0}$ $\quad t=0$ $\quad t=1$

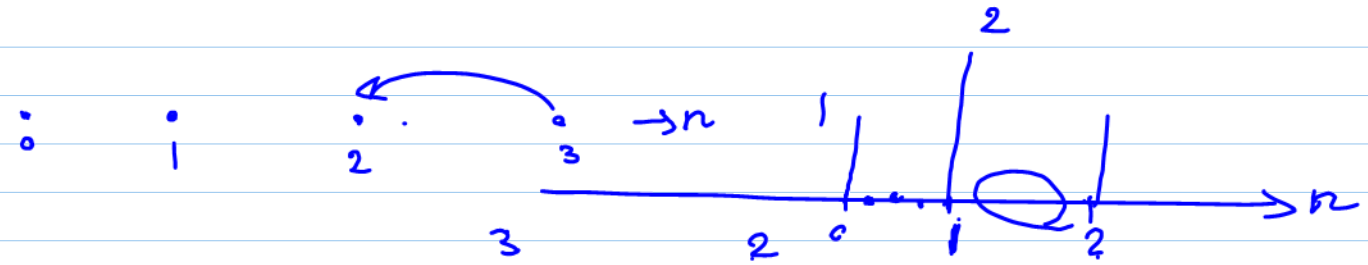
$\frac{d(1)}{dt} = 0$

تفاضل

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(t+0^+) - x(t)}{0t}$$

$$= \frac{x(t) - x(t-0^+)}{0t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\text{قيمة } x \text{ في الحالة الثانية} - \text{قيمة } x \text{ في الحالة الأولى}}{\text{الحالة الثانية} - \text{الحالة الأولى}}$$

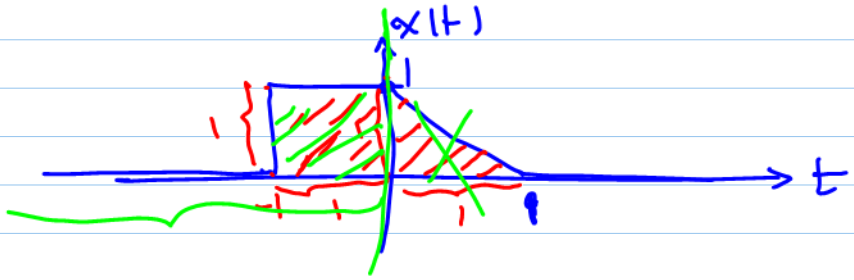


$$\frac{x[n] - x[n-1]}{n - (n-1)} = x[n] - x[n-1]$$

$3 \quad 2$

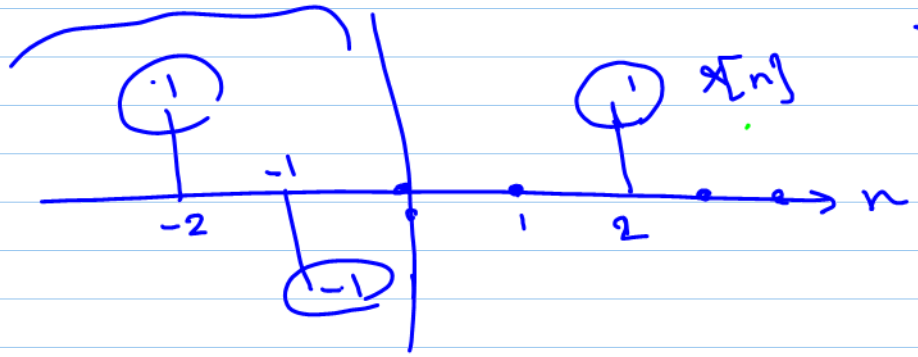
$x[3] - x[2]$

④ انتگرال پذیری = { پیوسته = مساحت زیر منحنی ; گسسته = مجموع سیگنال (اعداد روی محور عمودی) }



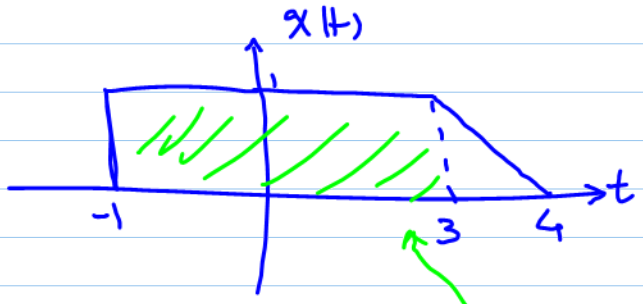
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ = مثبت + منفی = $|x| + \frac{|x|}{2} = \frac{3}{2}$

$\int_{-\infty}^{0} x(t)\,dt$ = منفی = -1



$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ =

$1 + (-1) + 1 = 1$



$$\int_{-\infty}^{3} x(\alpha)\, d\alpha = ?$$

متغیر زمان

مثال

$$\int_{-\infty}^{3} x(-2\tau+1)\, d\tau = ?$$

$$\int_{-\infty}^{3} x(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{3} x(\underbrace{-2\tau+1}_{\alpha})\, d\tau \longrightarrow \int_{0}^{\infty} x(\alpha)\, d\alpha$$

$$\alpha = -2\tau + 1$$

$$d\alpha = -2\, d\tau + 0 \longrightarrow d\alpha = -2\, d\tau \qquad d\tau = -\frac{1}{2} d\alpha$$

$$\int_{\infty}^{0} x(\alpha) \times -\frac{1}{2}\, d\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{3} x(-2\tau+1)\, d\tau$$

$$\alpha = -2\tau + 1$$

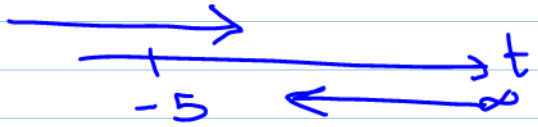
$\tau : -\infty \longrightarrow 3$

$\alpha : ? \longrightarrow ?$

$\infty \qquad -5$

$\tau = -\infty \rightarrow \alpha = -2 \times -\infty + 1 = +\infty$

$\tau = 3 \rightarrow \alpha = -2 \times 3 + 1 = -5$

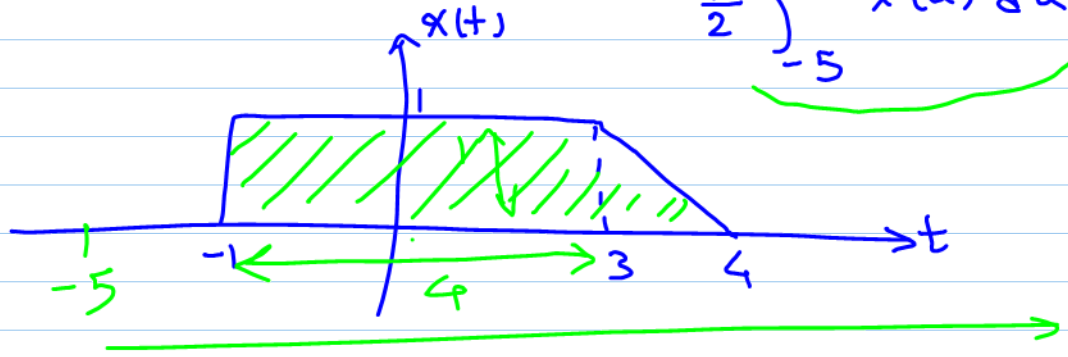


$$\int_{\infty}^{-5} -\frac{1}{2} x(\alpha)\, d\alpha$$

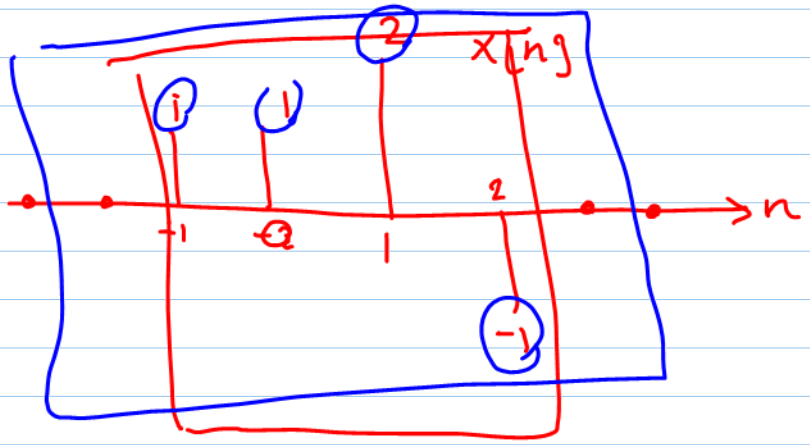
$$= -1 \times \int_{-5}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) x(\alpha)\, d\alpha \quad -1 \int_{-5}^{\infty}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \int_{-5}^{\infty} x(\alpha)\, d\alpha} = \int_{-\infty}^{3} x(-2\tau+1)\, d\tau$$

$$\frac{1}{2}\int_{-5}^{\infty} x(\alpha)\,d\alpha = ?$$



جواب = $1\times 4 + \frac{1\times 1}{2} = 4.5$



$$\sum_{n=-1}^{2} x[-2n+1]$$

$$\sum_{k=-1}^{2} x[k] = 1+1+2+-1 = 3$$

$$\sum_{n=-1}^{2} x[-2n+1] = \sum_{\alpha=+3}^{-3} x[\alpha]$$

$\alpha = -2n+1$

$n: -1 \longrightarrow 2$

$n=-1 \longrightarrow \alpha = 3$

$n=2 \longrightarrow \alpha = -3$

$\alpha: 3 \longrightarrow -3$

$$\sum_{k=a}^{b} f[k] = \sum_{k=b}^{a} f[k]$$

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = -1\int_{b}^{a} f(t)\,dt$$

جواب $= \sum_{\alpha=+3}^{-3} x[\alpha] = \sum_{\alpha=-3}^{3} x[\alpha]$

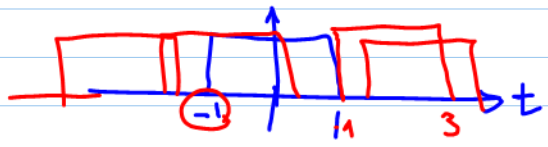
$= 1 + 1 + 2 + -1 = 3$ ✓

جلسه سوم سیگنال

عملیات روی متغیر t (یا n در سیگنال گسسته)

- شیفت
- مقیاس دهی

تعاریف سیگنال

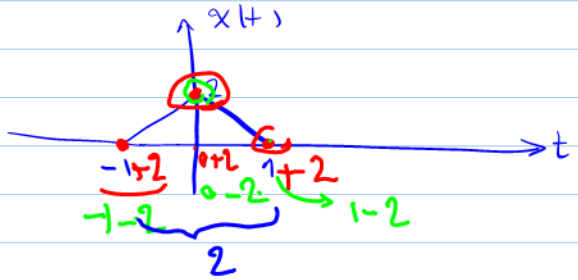


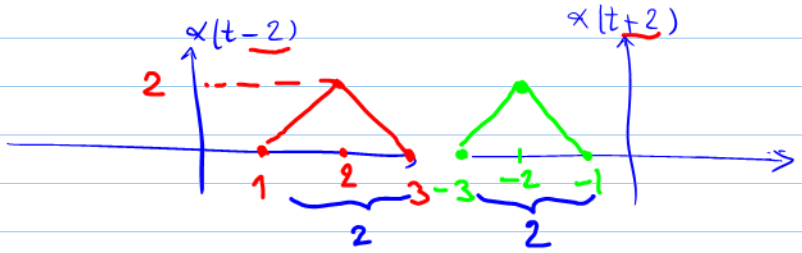
① شیفت زمانی یا انتقال:

$x(t-2)$

$x(t-a)$ ← سیگنال به اندازه a روی محور افقی به سمت راست حرکت می‌کند. $a>0$

$x(t+a)$ ← ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ چپ ~ ~





نکته: شیفت عرض سیگنال را تغییر نمی‌دهد.

~ شکل ~ ~ ~

② مقیاس دهی

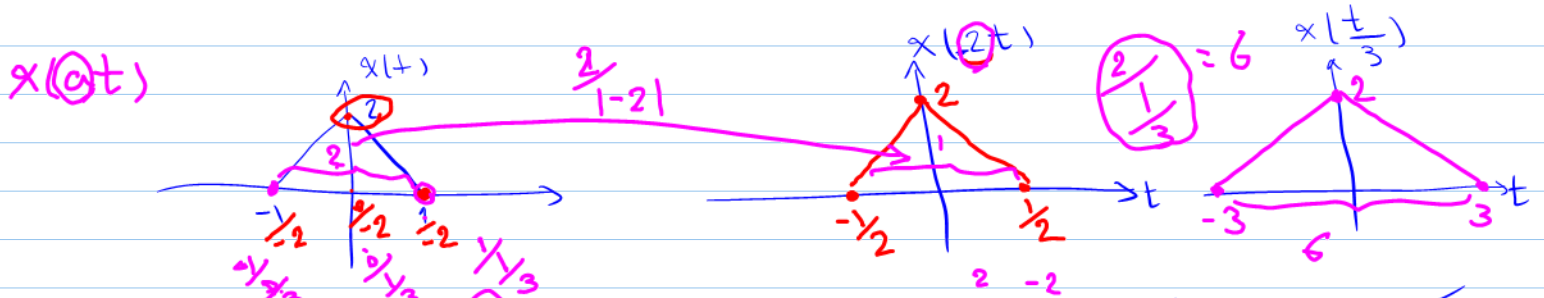
$x(at)$ ← محور افقی بر عدد a تقسیم می‌شود.

$x(\frac{t}{a})$ ← ~ ~ ~ ~ ضرب می‌شود

$x(\frac{1}{3}t)$

$x(t/2) = x(\frac{1}{2}t)$

$a \neq -1$ و $a \neq 1$

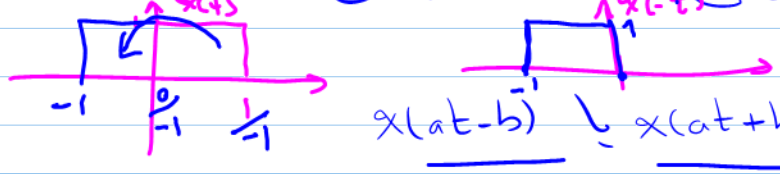


نکته: اگر $|a|>1$ باشد عرض سیگنال را $\frac{1}{a}$ برابر می‌کند و سیگنال فشرده‌تر می‌شود.

$x(at)$ ، $|a|<1$ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ بازتر

$x(at)$ ← عرض را $\frac{1}{|a|}$ برابر

$a<0$ باشد سیگنال نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود.

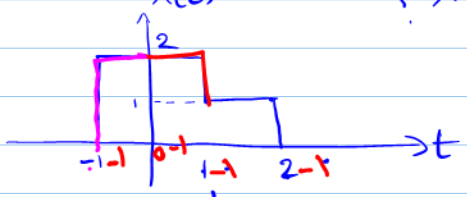


③ شیفت و مقیاس دهی ← $x(at-b)$ یا $x(at+b)$

ابتدا شیفت را اعمال می‌کنیم و سپس مقیاس دهی

$x(at+b)$

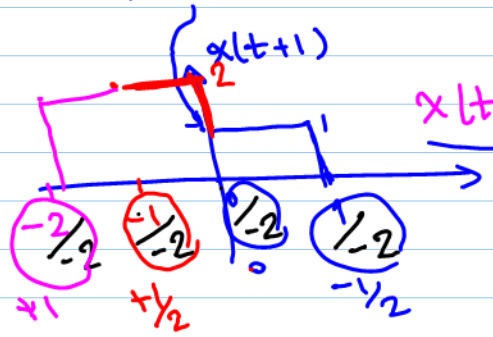
مثال: $x(t)$ ؟ $x(\frac{t}{2}-2)$ و $x(-2t+1)$



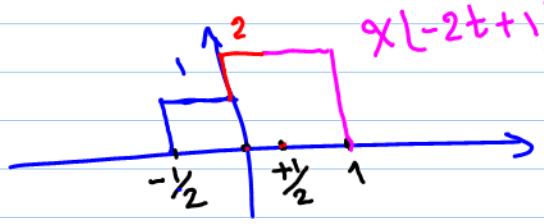
$x(-2t+1)$

$x(t+1)$

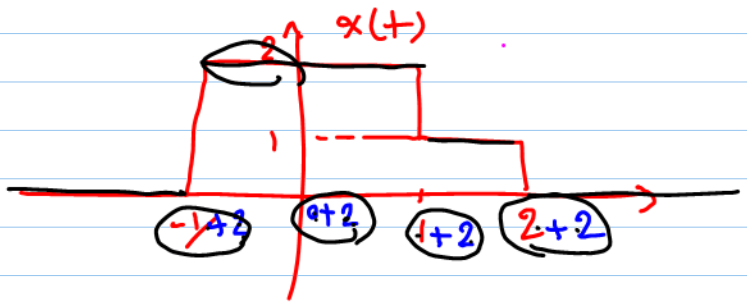
اول شیفت ←



$x(t+1)$

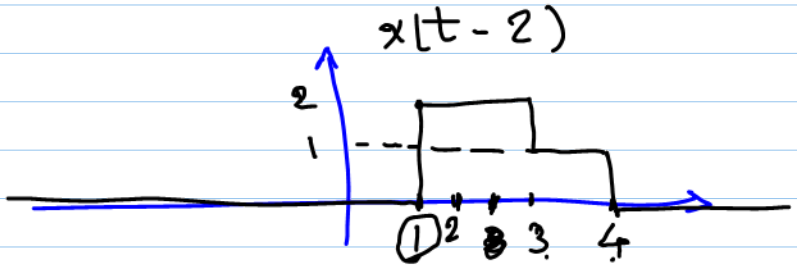


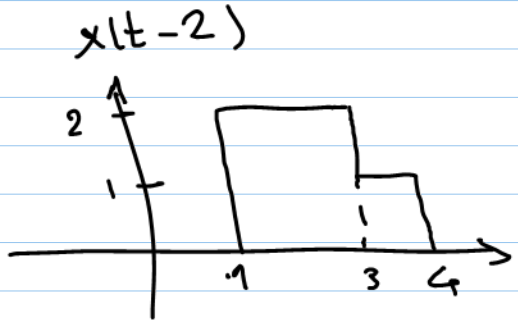
مثال:



$x(\frac{t}{2}-2)$

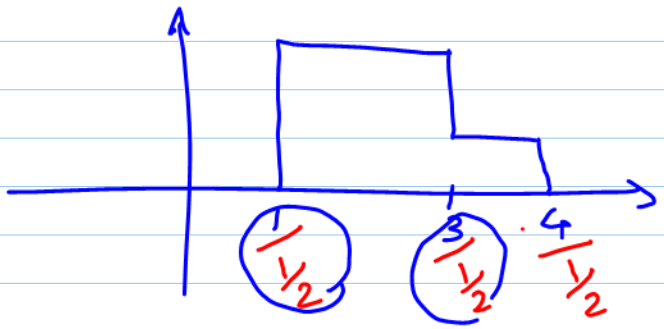
$x(t-2)$ ①



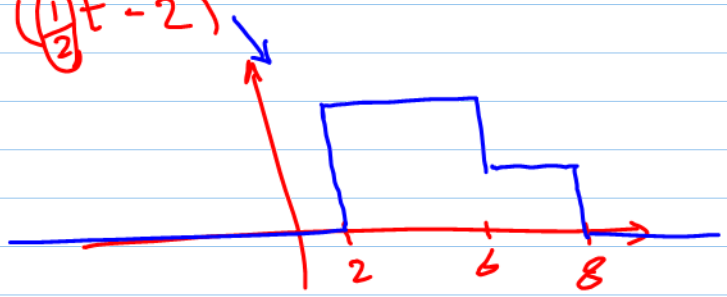


$x(t-2)$ اعمال شد ← منزیب $\frac{1}{2}t$ را روی $x(\frac{1}{2}t-2)$ ②

$x(t-2)$



$x(\frac{1}{2}t-2)$



$x(at+b)$ ← اول خود افقی با $\frac{b}{a}$ مع با سود و سپس

اعداد روی خود افقی بر a تقسیم می‌شود

سوال ۸۵ ... ص ۱۴ اگر $f(t)$ سیگنالی با دوره تناوب T و ماکزیمم واقع در $t=2$ باشد

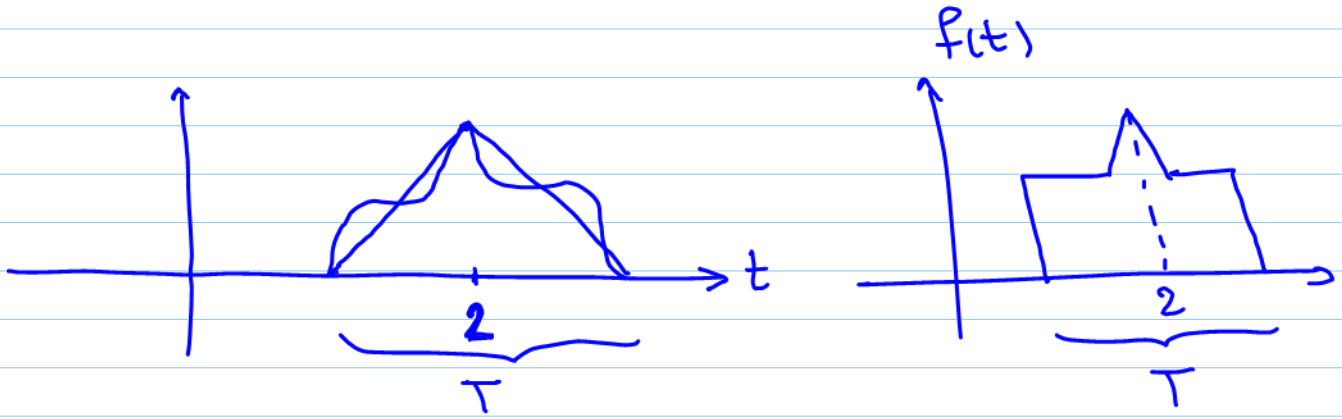
در این صورت دوره تناوب و محل ماکزیمم $f(rt-n)$ ، $r>0$ کدام است؟

۱) $-n$ ، $\frac{T}{r}$ ~~$\frac{n}{r}$~~

۲) $\frac{n}{r}$ ، $\frac{T}{r}$ ~~$\frac{2}{r}$~~

۳) n ، $\frac{T}{r}$ ~~$\frac{n-2}{r}$~~

۴) $\frac{n-2}{r}$ ، $\frac{T}{r}$ ~~$\frac{n+2}{r}$~~ ✓

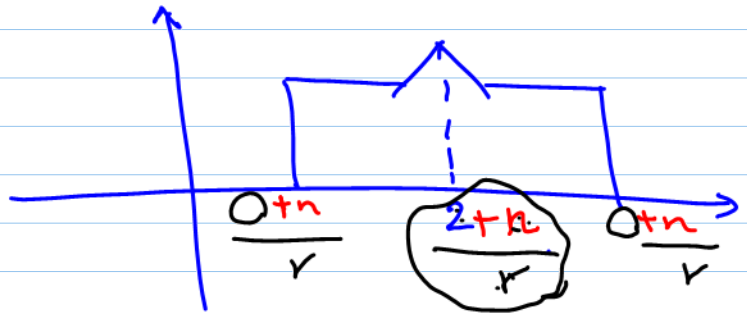


$f(rt-n)$ ← عرض سیگنال

سیگنال‌هایی عرض سیگنال تغییر نمی‌دهد

$f(t)$ با $f(rt)$ عرض سیگنال $\frac{1}{r}$ برابری کند.

$f(t)$ ، T ← $f(rt-n)$ عرض $\frac{T}{r}$



$f(rt-n)$

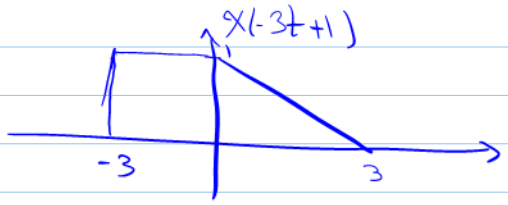
$f(t-n)$

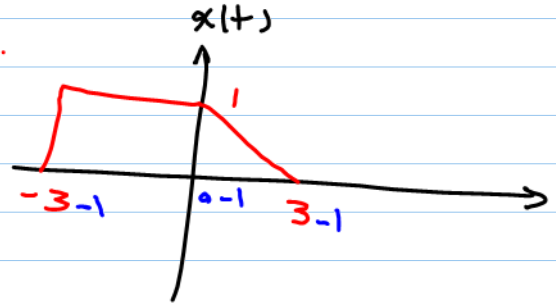
$f(rt-n)$

ماکزیمم $\frac{n+2}{r}$

مثال: $x(-3t+1)$ در شکل داده شده است. $\int_0^{\infty} x(t)\,dt = ?$

$x(t) \rightarrow x(-3t+1)$

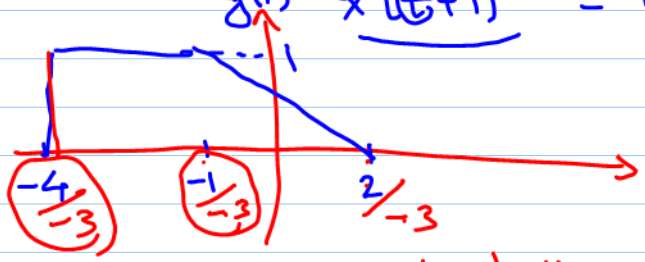


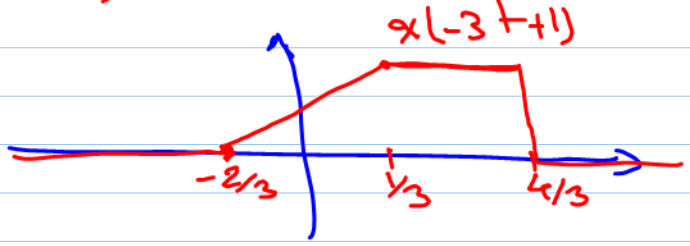


$x(-3t+1)$

$x(t+1)$

$y(t)$ $x(t+1) = y(t)$ $y(at)$





$y(-3t) = x(-3t+1)$

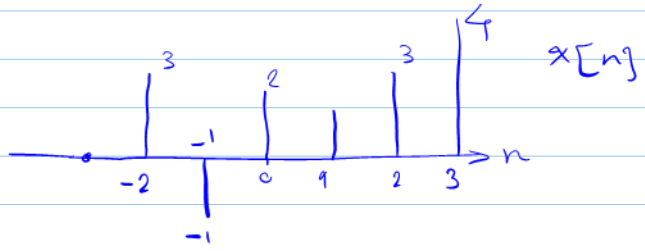
شیفت زمانی گسسته عیناً مثل شیفت زمانی پیوسته

توجه! مقدار شیفت باید عدد صحیح باشد.

$x[n-\frac{1}{2}]$ $x[n+2]$

مقیاس‌دهی زمانی گسسته:

$x[an]$ ← فقط برعدد a تقسیم می‌شود و اعداد غیرصحیح حذف می‌شوند.



$y(t) = x(t+b)$ ← $x(at+b)$

در $y(t)$ به جای t ← at می‌گذاریم

$y(at) = x(at+b)$

$x(-3t+1)$ ← $x(t)$

① ابتدا $y(t) = x(-3t+1)$

② در $y(t)$ به جای t باید چه مقداری قرار گیرد تا به $x(t)$ برسیم.

$y(t) = x(\underbrace{-3t+1}) \rightarrow x(t)$

$-3t+1 \rightarrow t$

-3 ← $\frac{1}{-3}t$

$y(-\frac{1}{3}t) = x(-3(-\frac{1}{3}t)+1) = x(t+1)$

عکس ضریب t را اعمال می‌کنیم.

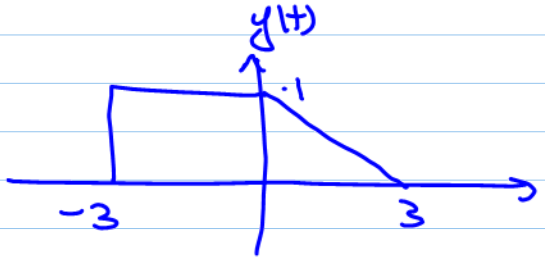
$y(\frac{1}{a}t) = x(t+b)$ ← $y(t) = x(at+b)$ ← $x(at+b)$

$f(t-b)$ را بدست آورید. ← $f(t) = x(t+b)$

اگر $x(at+b)$ داده و $x(t)$ را بخواهد ← $x(-3t+1)$

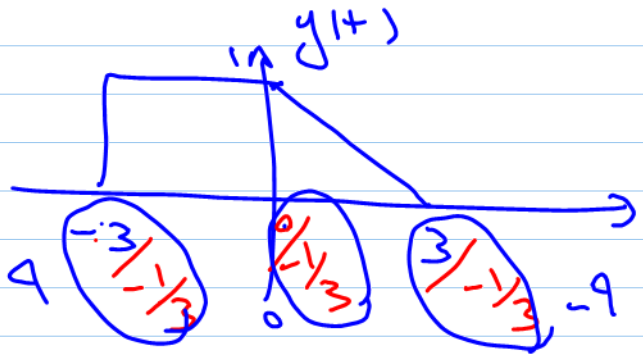
① $x(at+b) = y(t)$

② $y(\frac{1}{a}t)$ را بدست آورید



$x(-3t+1)$

$y\left(\frac{-1}{3}t\right)$



$f(t) = y\left(\frac{-1}{3}t\right)$



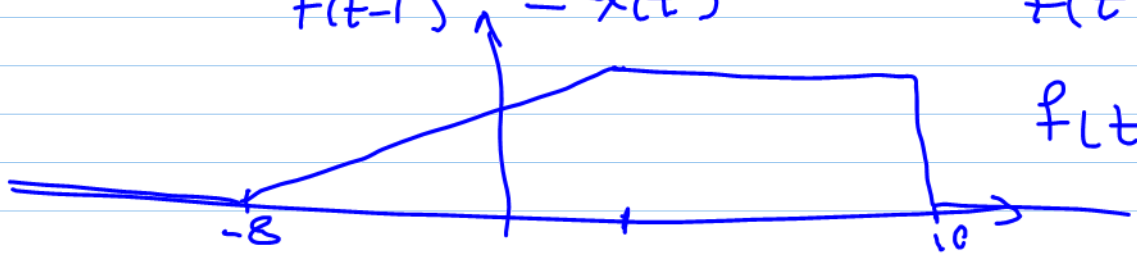
$x(-3t+1)$

$x(at+b)$

$f(t-1) = x(t)$

$f(t \pm b)$ (3)

$f(t-1)$



$x(t) \leftarrow x(at+b)$

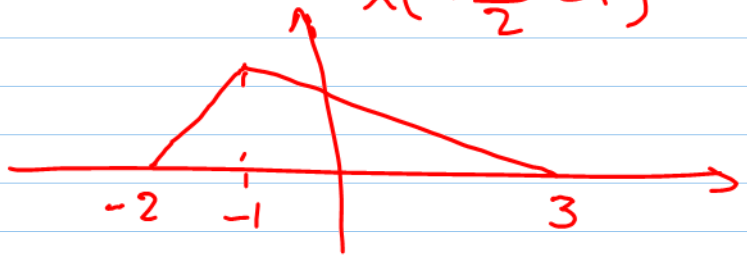
$x(at+b) = y(t)$ (1)

$f(t) = y\left(\frac{1}{a}t\right)$ (2)

$x(t) = f(t \pm b)$ (3)

$x\left(-\frac{1}{2}t-1\right)$ داده شده است $x(t)$ را بدست آورید.

$x\left(-\frac{t}{2}-1\right)$

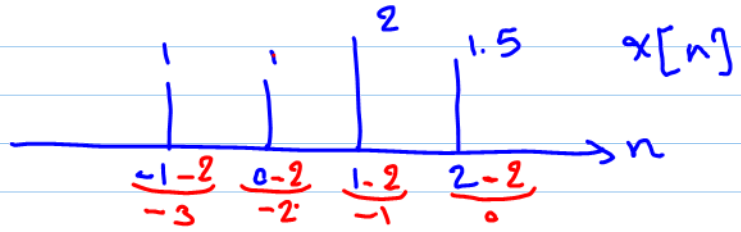


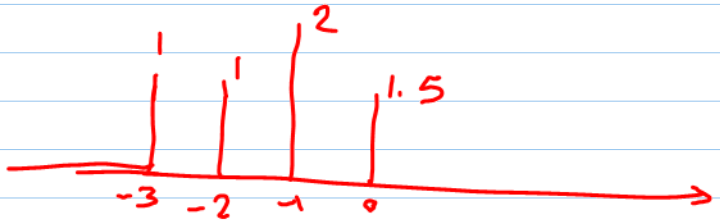
شیفت و مقیاس دهی برای سیگنال زمانی گسسته:

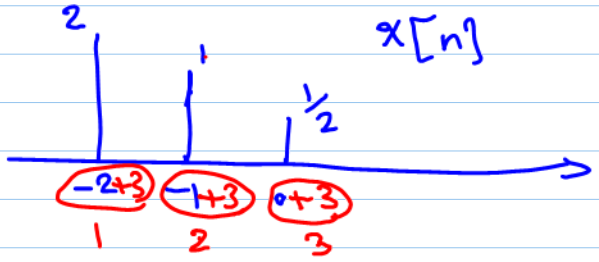
① شیفت زمانی $x[n-a]$ یا $x[n+a]$ عین پیوسته

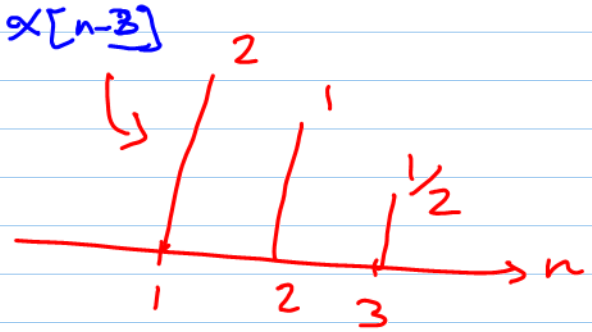
$x[n+a]$ ← خود افقی با $-a$ جمع می‌شود.

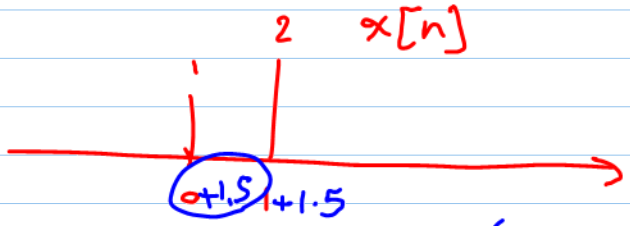
$x[n-a]$ ← ~ ~ a ~ ~





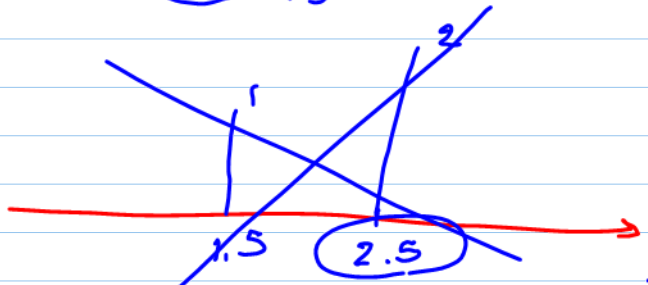






$x[n-1.5]$

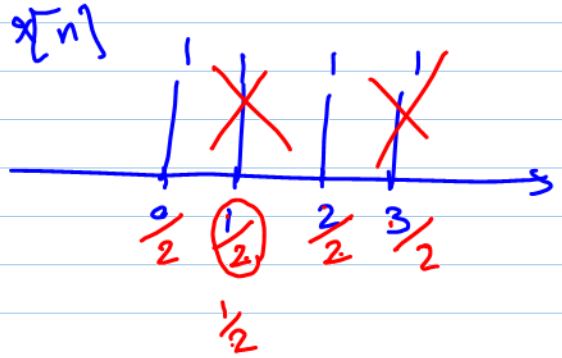
سیگنال زیر فقط دو مقدار صحیح مقدار دارد:

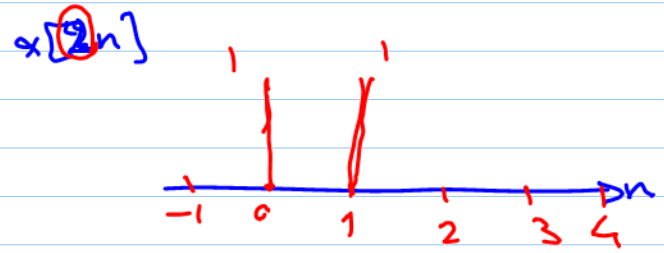


شیفت در سیگنال گسسته حتماً باید عدد صحیح باشد.

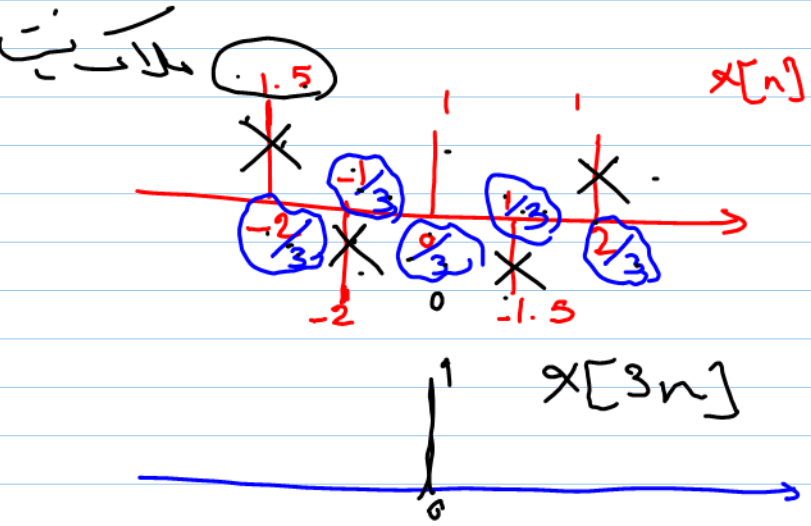
② مقیاس دهی ←

(I) $x[an]$ ← فوق افقی بر عدد a تقسیم می شود.





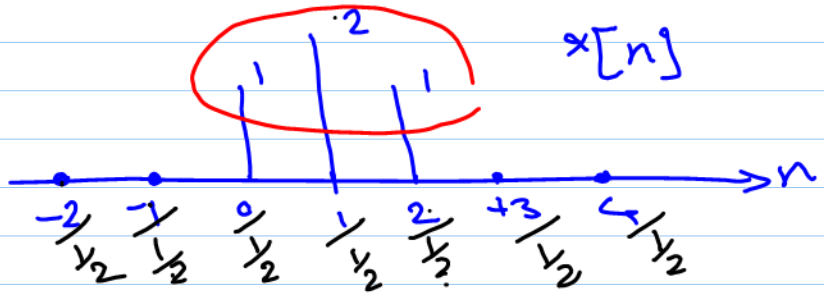
پس از تقسیم فوق افقی بر عدد a ، اعداد میز صحیح روی فوق افقی حذف می شوند

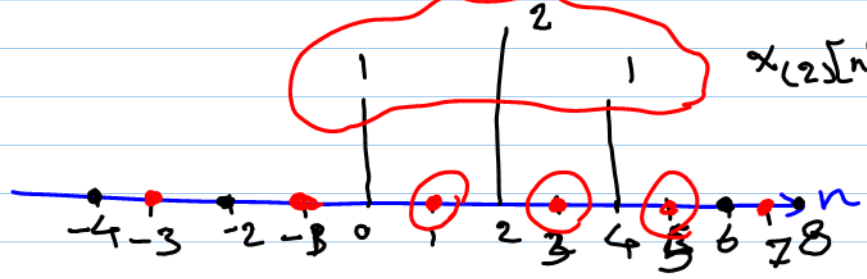


در $x[an]$ با مزن $a>1$ یا $a<-1$ ← تعدادی از عوض‌ها حذف می‌شود

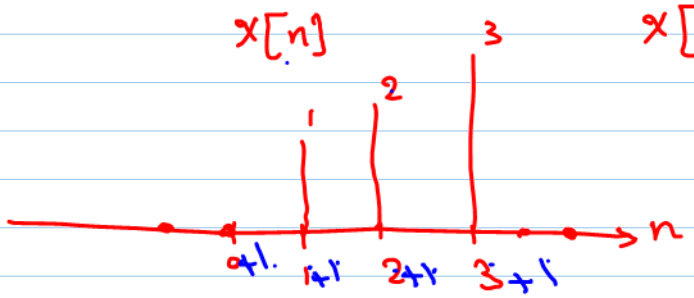
$x_{(a)}[n] \Leftarrow x\left[\frac{n}{a}\right]$ ②

فوق افقی در عدد a منوبی شود (بر $\frac{1}{a}$ تقسیم شود)

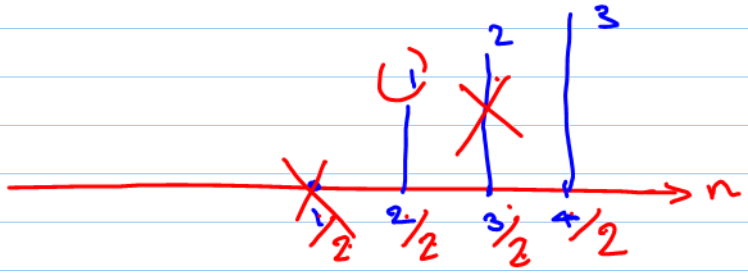




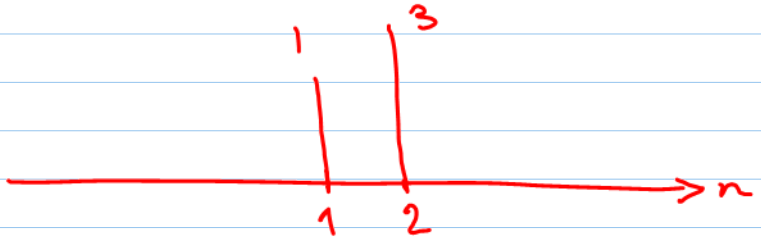
$x_{(2)}[n] = x\left[\frac{1}{2}n\right] = x\left[\left(\frac{1}{2}\right)n\right]$



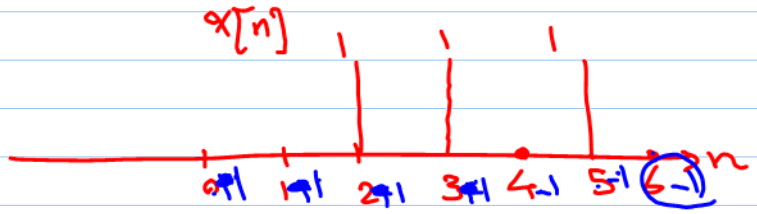
$x[2n-1]$ ① الحل



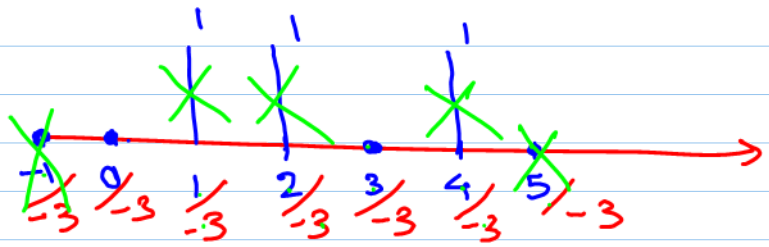
$x[n-1]$



$x[2n-1]$

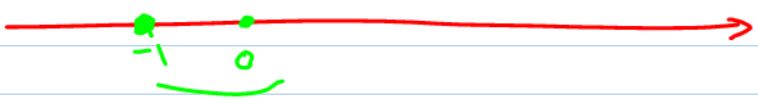


$x[-3n+1]$ ② الحل



$x[n+1]$

$x[-3n+1]$



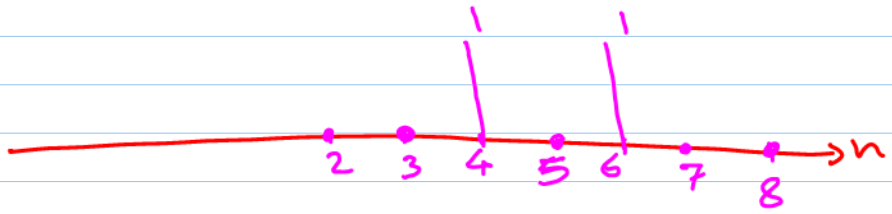
مثال ③ $x\left[\frac{n}{2}-1\right]$



$x[n-1]$



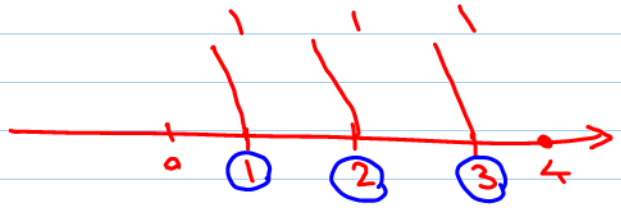
$x\left[\frac{1}{2}n-1\right]$



$$x_{(a)}[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{a}\right] & \text{اگر } n \text{ مضرب } a \text{ باشد} \\ 0 & \text{نباشد} \end{cases}$$

$$x_{(a)}[n-b]=\begin{cases} x\left[\frac{n-b}{a}\right] & \text{اگر } n-b \text{ مضرب } a \text{ باشد} \\ 0 & \text{نباشد} \end{cases}$$

مثال ④ $x_{(2)}[n-1]$



$$x[n]=\begin{cases} 1 & n=1,2,3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$x[1]=1 \qquad x[2]=1 \qquad x[3]=1$

$x[n]$ در بقیه جاها صفر است.

$x_{(2)}[n-1]$

$1-1=0$

$n-1$ مضرب 2 باشد $\rightarrow x\left[\frac{n-1}{2}\right]$

$n-1$ مضرب 2 نباشد $\rightarrow 0$

$$g[n] = x_{(2)}[n-1] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n-1 \text{ مضرب 2 باشد} \\ 0 & \text{نباشد} \end{cases}$$

$g[0]=0 \qquad g[1]=x\left[\frac{-1}{2}\right]$? ✗

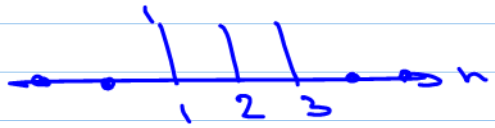
$x_{(a)}[n-b] \rightarrow$ b باید مضربی از a باشد

$n-2$ مضرب 2 باشد

$n-2$ نباشد $\rightarrow 0$

$$y[n]=x_{(2)}[n-2] = \begin{cases} x\left[\frac{n-2}{2}\right] & \\ 0 & \end{cases}$$

$$y[0]=x\left[\frac{0-2}{2}\right]=x[-1]=0$$



$y[1]=0$

(-1)

$y[2]=x\left[\frac{2-2}{2}\right]=x[0]=0$

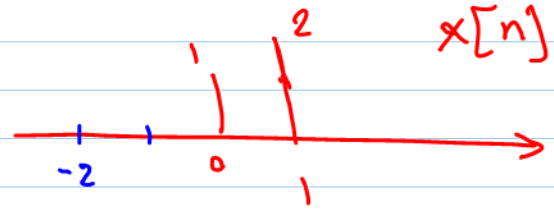
$y[3]=0$

$y[4]=x\left[\frac{4-2}{2}\right]=x[1]=1$

$y[5]=0$

$y[6]=x\left[\frac{6-2}{2}\right]=x[2]=1$

مثال : حل



$$y[n] = x_{(3)}[n-6] = \begin{cases} x\left[\frac{n-6}{3}\right] & \text{(1-6) } n-6 \text{ مضرب 3 باشد} \\ 0 & \text{بنابراین } n-6 \text{ ~ ~ نباشد.} \end{cases}$$

$y[0] = x\left[\frac{0-6}{3}\right] = x[-2] = 0$! 3 مضرب (0-6) = (-6)

$y[1] = 0$

$y[2] = 0$

$y[3] = x\left[\frac{+3-6}{3}\right] = x[-1] = 0$

$y[4]$ $\quad$ $y[5]$

$y[6]$ $\quad$ $y[7]$

$y[8]$ $\quad$ $y[9]$

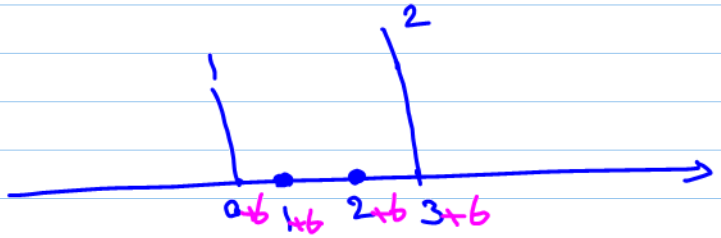
$x_{(a)}[n-b]$

$x_{(a)}[n \pm b] \leftarrow$ در $x[n]$ هر نقطه‌ای در عدد a ضرب می‌شود

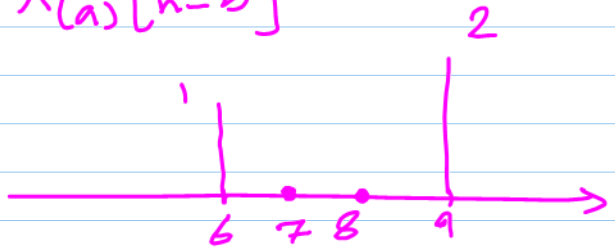
و سپس با عدد $\pm b$ جمع می‌شود.



$x_{(3)}[n-6]$



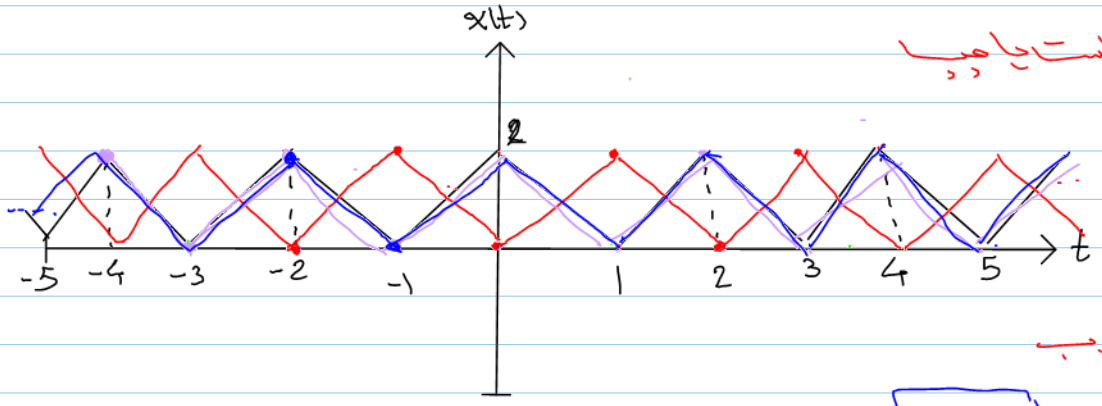
$x_{(a)}[n \pm b]$



جلسه چهارم سیگنال

سیگنالهای متناوب و نامتناوب (ریپوت)

④ سیگنال $x(t)$ را متناوب گوییم هرگاه بتوان عدد مثبت T_0 را یافت که $x(t \mp T_0) = x(t)$ ✓ آنگاه کوچکترین مقدار مثبت برای T_0 را دوره تناوب اصلی $x(t)$ گوییم



به اندازه T_0 به سمت راست یا چپ شیفت بدهیم

$x(t+1) \neq x(t)$

$x(t+4) = x(t)$ متناوب

$x(t+2) = x(t)$ ✓

$T_0 = 2$

$T_0 = 2$ و سیگنال $x(t)$ با ضابطه متناوب است

$x(t+4) = x(t)$

* اگر $x(t)$ دارای دوره تناوب اصلی T_0 باشد آنگاه

$x(t \mp mT_0) = x(t)$

$x(t+16) = x(t)$

$x(t-2) = x$ $\quad x(t-4) = x(t)$ $\quad x(t-8) = x(t)$

2 مضارب $\rightarrow \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots$

① سیگنال مثلثی ←

(I) $A \sin(at \mp b) \rightarrow T_0 = \left| \frac{2\pi}{a} \right|$

(II) $A \cos(at \mp b) \rightarrow T_0 = \left| \frac{2\pi}{a} \right|$

(III) $A e^{j(at \mp b)} \rightarrow T_0 = \left| \frac{2\pi}{a} \right|$

(IV) $A\tan(at\mp b)$, $A\cot(at\mp b)$ $\longrightarrow$ $T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

(V) $|\sin(at\mp b)|$, $|\cos(at\mp b)|$ $\longrightarrow$ $T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

نکته: اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T_1

T_2 ~ ~ ~ ~ $y(t)$ و

$Ax(t)\mp By(t)\longrightarrow T_0=$ ک.م.م $\{T_1,T_2\}$

توجه: اگر $\{T_1,T_2\}$ ک.م.م وجود نداشته باشد

سیگنال غیرمتناوب است.

$$f(t)=\underbrace{2\sin(3\pi t+\frac{\pi}{6})}_{T_1=\left|\frac{2\pi}{3\pi}\right|=\frac{2}{3}}-\underbrace{3\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})}_{T_2=\left|\frac{2\pi}{2\pi}\right|=1}$$

ک.م.م $\{\frac{2}{3},1\}=\begin{cases}+2\\-2\end{cases}$ $\boxed{T_0=2}$

1: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots$

$\frac{2}{3}$: $\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm2,\dots$

$$x(t)=\underbrace{|\sin(\frac{4}{3}t)|}_{T_1=\left|\frac{\pi}{4/3}\right|=\frac{3\pi}{4}}+\underbrace{\cos(\frac{2}{3}t)}_{T_2=\left|\frac{2\pi}{2/3}\right|=3\pi}-\underbrace{\tan(\frac{2\pi}{3}t)}_{T_3=\left|\frac{\pi}{2\pi/3}\right|=\frac{3}{2}}$$

ک.م.م $\{T_1,T_2,T_3\}=$ وجود ندارد

$\frac{3\pi}{4}$: $\pm\frac{3\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{9\pi}{4},\pm3\pi,\pm\frac{15\pi}{4},\dots$

3π: $\pm3\pi,\pm6\pi,\pm9\pi,\dots$ $\}$ 3π

$\frac{3}{2}$: $\pm\frac{3}{2},\pm3,\pm\frac{9}{2},\dots$

نکته ← عدد متناظر π با عددی به π ندارد هرگز نسبت مشترک نخواهد داشت.

$x(t), T_1$ و $y(t), T_2$ (II)

در مورد دوره تناوب و یا متناوب بودن $x(t)+y(t)$ یا $x(t)/y(t)$ همواره نظر داد. و در صورت امکان باید تبیین ~ جمع یا تفریق شود

$$x(t) = \underbrace{2\sin 2t \cos(3t)}$$

$$2\sin(2t) \longrightarrow T_1 = \left|\frac{2\pi}{2}\right| = \pi$$

$$\cos(3t) \longrightarrow T_2 = \left|\frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3}$$

$$x(t) = \sin(2t+3t) + \sin(2t-3t)$$

$$x(t) = \underbrace{\sin(5t)} + \underbrace{\sin(-t)}$$

$$T_1 = \left|\frac{2\pi}{5}\right| \qquad T_2 = \left|\frac{2\pi}{-1}\right|$$

$$T_x = \overset{l.c.m}{\{} \frac{2\pi}{5}, 2\pi \} = \boxed{2\pi}$$

$x(t) = \underbrace{\sin(200\pi t + 0.5\pi)} - \underbrace{\cos(800t)}$ (آزاد) نوع ۹۱

متناوب $T_0 = \frac{1}{100}$ (3 $T_0 = \frac{\pi}{400}$ (2 $T_0 = \frac{\pi}{100}$ (1

$$T_{\sin} = T_1 = \left|\frac{2\pi}{200\pi}\right| = \frac{1}{100}$$

$$T_{\cos} = T_2 = \left|\frac{2\pi}{800}\right| = \frac{\pi}{400}$$

$$T_x = l.c.m\left\{\frac{1}{100}, \frac{\pi}{400}\right\}$$

وجود ندارد =

مثال: دوره تناوب $y(t) = e^{j\pi t}\, x(t)$ و $x(t) = e^{j\frac{7}{2}t}\cos(t/2)$ کدام است؟

1) $T_x = 2\pi$, $T_y = \frac{2\pi}{3+\pi}$

2) $T_x = 2\pi$, $T_y = \frac{2\pi}{4+\pi}$

3) $T_x = \pi$, $T_y = \frac{2\pi}{3+\pi}$

4) $T_x = 2\pi$, y نامتناوب

$$x(t) = e^{j\frac{7}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}t\right) \qquad \cos\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{t}{2}}$$

$$= e^{j\frac{7}{2}t}\left(\frac{1}{2}e^{jt/2} + \frac{1}{2}e^{-jt/2}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}$$

$$T_1 = \left|\frac{2\pi}{4}\right| \qquad T_2 = \left|\frac{2\pi}{3}\right|$$

$$T_x = \text{l.c.m}\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\} = 2\pi \checkmark$$

$\frac{\pi}{2}$: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \ldots$

$\frac{2\pi}{3}$: $\pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3}, \pm 2\pi$

$$y(t) = e^{j\pi t}\, x(t)$$

$$T_3 = \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2 \qquad T_x = 2\pi$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}$$

$$j\pi t + j4t = j(\pi+4)t$$

$$y(t) = e^{j\pi t}\left(\frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}\right) = \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j3t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j(\pi+4)t} + \frac{1}{2}e^{j(\pi+3)t}$$

$$T_4 = \left|\frac{2\pi}{\pi+4}\right| \qquad T_5 = \left|\frac{2\pi}{\pi+3}\right|$$

$T_4 = \frac{2\pi}{\pi+4} : \pm\frac{2\pi}{\pi+4}, \pm\frac{4\pi}{\pi+4}, \pm\frac{6\pi}{\pi+4}, \dots$

$T_5 = \frac{2\pi}{\pi+3} : \pm\frac{2\pi}{\pi+3}, \pm\frac{4\pi}{\pi+3}, \pm\frac{6\pi}{\pi+3}, \dots$

$\text{l.c.m}\{T_4, T_5\} =$ و جود ندارد

$\frac{2}{3} : \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}\times 3 = \pm 2, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{2}{3}\times 6 = 4$
$, \pm\frac{14}{3}, \pm\frac{16}{3}, \pm 6 = \frac{2}{3}\times 9$

$\frac{3}{2} : \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\times 2 = 3, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{3}{2}\times 4 = \pm 6$

مثال: کدام گزینه نادرست است؟

1) دوره تناوب سیگنال $x(t) = \tan(\sin(t))$ برابر π است.

2) ~ ~ ~ $x(t) = \frac{\sin(\frac{5}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ برابر 2π است. درست

3) سیگنال $x(t) =$ ~ متناوب با 4π است. درست

4) $x(t) = e^{j\frac{7}{2}t}\cos(t/4)$ برابر با 195 است. نادرست

نکته: اگر $f(t)$ متناوب با T_0 باشد سیگنال $g(f(t))$
و $g(\cdot)$ یک تابع دلخواه است، برابر T_0 یا باشد.

$x(t) = \underbrace{\tan}_{g}\left(\underbrace{\sin(t)}_{f}\right) \rightarrow T_x = 2\pi$

$\sin(t) \rightarrow T_0 = 2\pi$

$x(t)$ $T_x \overset{?}{=} \pi$? $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

$x(t+\pi) = x(t)$

$x(t+\pi) = \tan(\sin(t+\pi)) = \tan(-\sin(t))$

$= -\tan(\sin(t)) \overset{?}{\neq} x(t)$

2) $x(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{5}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \rightarrow T_x = 2\pi$

$\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$

$$= \frac{\frac{1}{2j}e^{j\frac{5}{2}t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{5}{2}t}}{\frac{1}{2j}e^{j\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{1}{2}t}}$$

$$= \frac{e^{j\frac{5}{2}t} - e^{-j\frac{5}{2}t}}{e^{j\frac{t}{2}} - e^{-j\frac{t}{2}}} = ?$$

Soja: $\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$

$$x(t) = \frac{e^{j\frac{5}{2}t}\left(1 - e^{-j5t}\right)}{e^{jt/2}\left(1 - e^{-jt}\right)}$$

$$= e^{j2t} \times \left(\frac{1 - e^{-j5t}}{1 - e^{-jt}\,\alpha}\right)$$

$\alpha^5 = \alpha^{n+1}$, $n = 4$

$\alpha = e^{-jt}$

$e^{-j5t} = (e^{-jt})^5$, α^5

$$\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$= e^{j2t}\left(\frac{1-\alpha^{4+1}}{1-\alpha}\right)$$

$$= e^{j2t}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4\right)$$

$$= e^{j2t}\left(1 + e^{-jt} + e^{-j2t} + e^{-j3t} + e^{-j4t}\right)$$

$$= e^{j2t} + e^{jt} + 1 + e^{-jt} + e^{-j2t}$$

π $\quad 2\pi$ $\quad 2\pi$ $\quad \left|\frac{2\pi}{-2}\right| = \pi$

نکته ← سیگنال ثابت $f(t)=9$ متناوب است ولی دوره

متناوب اصلی برای آن تعریف نمی شود چون کوچکترین T_0

برابر $\varepsilon=0^+$ است.

نکته ← $x[n]=$ توجه‌ی $\left\{\begin{array}{l}\text{ک.م.م}\\ \varepsilon=0^+\end{array}\right.$

$T_x=$ ک.م.م $\left\{2\pi, 2\pi, \varepsilon=0^+, \cancel{4\pi}, \cancel{2\pi}\right\}$

$=\left\{(2\pi), \cancel{0^+}\right\}=(2\pi)$

2) دوره متناوب اصلی $x(t)$ برابر 2π است.

3) $x(t)$ متناوب با (4π) است.

(4π) (2π)

اگر $x(t)$ متناوب با دوره متناوب اصلی (T_0) باشد با هر مضربی از T_0

متناوب است.

«جلسه پنجم سیگنال»

متناوب بودن سیگنال‌های زمان گسسته:

یادآوری:

$$x(t+T_0) = x(t)$$

$x[n]$ متناوب است اگر بتوان N_0 صحیح مثبتی یافت که اگر $x[n]$ را به اندازه N_0 شیفت دهیم روی خود $x[n]$ بیفتد.

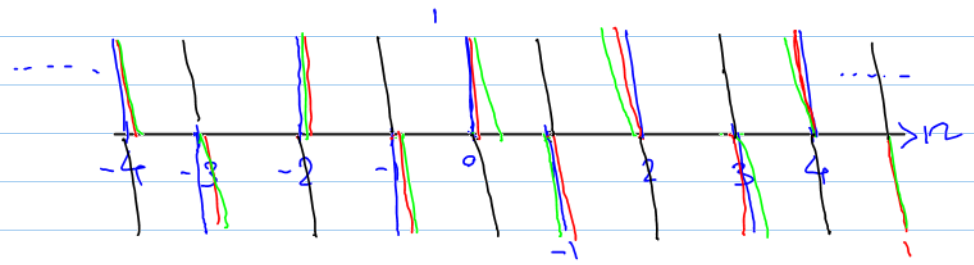
$$x[n+N_0] = x[n]$$

یادآوری: در سیگنال‌های زمان گسسته مقدار شیفت باید عدد صحیح باشد.

$x[n+0.5]$ $\quad$ $x[n+\frac{1}{2}]$

کوچکترین عدد صحیح و مثبت N_0 که $x[n+N_0]=x[n]$ دوره تناوب اصلی $x[n]$

$x[n] = e^{j\pi n}$ ؟



$N_0 = 4$

$x[n-4] = x[n]$

$x[n]$ متناوب است.

$$x[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n = \text{زوج} \\ -1 & n = \text{فرد} \end{cases}$$

$x[n-2] = x[n]$

عدد صحیح و مثبتی که حداقل از 2 وجود دارد $x[n-1] \stackrel{?}{\neq} x[n]$

$N_0 = 2$

$x[n] = e^{j\pi n}$ متناوب است و دارای $N_0 = 2$ می‌باشد.

$x[n-2] = x[n]$

$x[n-4] \stackrel{?}{=} x[n]$

اگر $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی N_0 باشد، با هر عدد صحیح m نیز mN_0 هم متناوب است.

$$x[n \mp N_0] = x[n]$$

$$x[n \mp 2N_0] = x[n] \qquad x[n \mp 3N_0] = x[n]$$

$$x[n \mp mN_0] = x[n] \qquad m \text{ اعداد صحیح}$$

① سیگنال‌های سینوسی

$$\begin{cases} A\sin(an+b) \\ A\cos(an+b) \longrightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{a}\right| \\ A\,e^{j(an+b)} \end{cases}$$

اگر $N_{0\,\text{اولیه}}$ صحیح باشد که $N_0 = N_{0\,\text{اولیه}}$.

اگر $N_{0\,\text{اولیه}}$ عدد صحیح نشود، آنگاه ممکن است N_0 برابر مضربی از $N_{0\,\text{اولیه}}$ باشد تا دوره تناوب اصلی عدد صحیح شود.

$$\begin{cases} x[n] = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}n + 2\right) \\ y[n] = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n + 2\right) \end{cases}$$

$y \rightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{\pi/4}\right| = 8 \rightarrow$ عدد صحیح است $\rightarrow \boxed{N_0 = 8}$

$x \rightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{3\pi/8}\right| = \frac{16}{3}$ نیست $\rightarrow \boxed{N_0 = 16}$

$\frac{16}{3}$: $\pm\frac{16}{3}$, $\pm\frac{32}{3}$, ± 16

$$x[n] = \cos\left(\frac{3}{8}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{3/8}\right| = \frac{16\pi}{3} \rightarrow$ عدد صحیح نیست $\rightarrow N_0$ وجود ندارد

ناسناوب : x

$\frac{16\pi}{3}$: $\pm\frac{16\pi}{3}$, $\pm\frac{32\pi}{3}$, $\pm 16\pi$, $\pm\frac{64\pi}{3}$, ...

عدد مثبت

هیچ مضربی از عدد π ، صحیح نباشد.

نکته: در سیگنالهای مثلثاتی یعنی (sin, cos, tan, cot و ...) اگر ضریب n در e^{jon} ، دارای π باشد، متناوب است.

حتماً باید ضریب n مضربی از (π) باشد.

$e^{j\frac{3\pi}{8}n}$ نامتناوب $\cos\left(\frac{3}{8}n\right)$ متناوب

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}n\right)$ متناوب

ضریب n باید یک عدد گویا $\times \pi$ باشد.

$\tan\left(\frac{\pi}{2}n\right) \rightarrow N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{\pi}{\pi/2}\right| = 2$ عدد صحیح $\rightarrow N_0 = 2$

نکته ← اگر N_0 اولیه به صورت یک عدد گویای غیرصحیح باشد ($\frac{8}{3}$ ، $\frac{5}{2}$ و ...) ← N_0 = مخرج N_0 اولیه

$N_{0\ \text{اولیه}} = \frac{16}{3} \rightarrow N_0 = 16$

$x[n] = 2e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n + \pi/2\right)}$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{3\pi/4}\right| \times \frac{8}{3} \rightarrow N_0 = 8$

$y[n] = 2e^{j\left(\frac{3}{4}n + \pi/2\right)}$ نامتناوب

$z[n] = 2e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n + \pi/2\right)}$ نامتناوب

$f[n] = 2e^{j\left(\frac{3}{4\pi}n + \pi/2\right)}$ نامتناوب

$\tan(an+b)$, $\cot(an+b)$ $|\sin(an+b)|$ $|\cos(an+b)|$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{\pi}{a}\right| \rightarrow$ N_0

N_2 متناوب با $x_2[n]$ ، N_1 متناوب با $x_1[n]$

$x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow$ $N_0 =$ ک.م.م $\{N_1, N_2\}$

$$x[n] = \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}_{N_1} + \underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}n}}_{N_2}$$

$N_{\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{-\pi/2}\right| = 4$ ✓ $\quad N_1 = 4$

$N_{2\text{ اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{\pi/4}\right| = 8 \quad N_2 = 8$

$\longrightarrow N_0 =$ ک.م.م $\{4, 8\} = 8$

اگر یکی از ضرایب باشد سعی کنید تبدیل به حاصل جمع شود.

$$x[n] = \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}n}}_{N_1} \times \underbrace{\cos(\pi n)}_{N_2}$$

$N_1 = \left|\frac{2\pi}{\pi/2}\right| = 4 \qquad N_2 = \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2$

$$\cos(\pi n) = \frac{1}{2}e^{j\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n}$$

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n}\left(\frac{1}{2}e^{j\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n}\right)$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\underbrace{e^{j\frac{3\pi}{2}n}}_{N_3} + \frac{1}{2}\underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}_{N_4}$$

$N_{3\text{ اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{3\pi/2}\right| = 4/3 \longrightarrow \quad N_3 = 4$

$N_{4\text{ اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{-\pi/2}\right| = 4 \longrightarrow \quad N_4 = 4$

$N_{0x} = g.c.d\{4,4\} = 4$

توضیح داده

$\cos(\pi n) = (-1)^n \qquad e^{j\pi n} = (-1)^n$

$\cos(\pi n) = (-1)^n \qquad (-1)^{-n} = (-1)^n$

$\cos(\pi n) = e^{j\pi n} \qquad \cos(-\pi n) = \cos(\pi n)$

$e^{-j\pi n} = e^{j\pi n}$ ✓?

$\cos(\pi n) = e^{j\pi n}$

$\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = e^{-j\pi n}$

$e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} = \left(e^{j\pi n}\right)^{(-1)} = \left((-1)^n\right)^{-1}$

$(-1)^n = (-1)^{-n}$

$(-1)^{-n} = \left((-1)^n\right)^{-1} = \frac{1}{(-1)^n}$

$n=-2$

$(-1)^{-(2)^n} = 1 = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1}$

$n=-3$

$(-1)^3 = -1 = \frac{1}{(-1)^{(3)}} = \frac{1}{-1} = -1$

$x[n] = e^{j\pi/2\, n} \cos(\pi n)$

$\cos(\pi n) = e^{j\pi n}$

$x[n] = e^{j\pi/2\, n} \cdot e^{j\pi n} = e^{j\frac{3\pi}{2} n}$

N_0 اولیه $= \left| \frac{2\pi}{3\pi/2} \right| = 4/3$ $\quad N_0 = 4$

تأثیر عملیات‌های زمانی روی دوره تناوب:

$x(t)$ متناوب با T_0 و $x[n]$ متناوب با N_0

① ضرب شدن در عدد ثابت (نه تابع زمان) روی دوره تناوب اثر ندارد.

$e^{j\frac{\pi}{2}} x[n] \rightarrow N_0$ $\quad 2j\,x[n] \rightarrow N_0$

$e^{2} x(t) \rightarrow T_0$ $\quad e^{j\frac{\pi}{2}n} x[n]$ ✗

② شیفت روی دوره تناوب اثر ندارد.

$x[n-a]$ $\quad x[n+a] \rightarrow N_0$

$x(t-b)$ $\quad x(t+b) \rightarrow T_0$

③ مقیاس‌دهی

$x(t), T_0$ ← پیوسته $\quad x(at) \rightarrow \frac{T_0}{|a|}$

$x(t), T_0$ $\quad x(2t) \rightarrow \frac{T_0}{2}$ $\quad x(-t) \rightarrow \frac{T_0}{|-1|} = T_0$

$x(\frac{1}{2}t) \rightarrow \frac{T_0}{1/2} = 2T_0$

$x_{(m)}[n]$ $\quad x[n/m] \rightarrow |m| N_0$

$x_{(2)}[n] \rightarrow |2| N_0 = 2N_0$

$x[mn] \rightarrow$ را تا جای ممکن ساده می‌کنیم، آنگاه $\frac{N_0}{|m|}$

دوره تناوب $x[mn]$ برابر با مورد آخر ساده شده است $\frac{N_0}{|m|}$

$x[n]$, $N_0 = 8$

$x[3n] \rightarrow \frac{8}{|3|} = \frac{8}{3}$ $\quad N_0 = 8$

$x[n]$, $N_0 = 15$

$x[10n]$ ⟶ ؟ $\quad \frac{15}{|10|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \rightarrow N_0 = 3$

مثال: $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی $N_0=3$ است.

دوره تناوب اصلی $y[n] = x_{(3)}[n] + x[2n]$ را بیابید.

N_1 $\quad$ N_2

$N_{0y} =$ ک.م.م $\{N_1, N_2\} =$ ک.م.م $\{3,4\} = 9$

$x[n]$, $N_0 = 3$

$x_{(3)}[n] \rightarrow N_1 = 3 \times 3 = 9$ $\quad$ ($m=3$, $N_0=3$)

$x[2n] \rightarrow \frac{3}{|2|} = \frac{3}{2} \rightarrow N_2 = 3$

غلط

$x(t)$, $T_0 = 5$

$y(t) = x(2t) + x(\frac{5}{2}t) \rightarrow T_{0y} = ?$

نکته: $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t - mT_0) \rightarrow z(t)$ سیگنال ملموزات.

$x(t)$ متناوب با T_0 یعنی مزیب کمارنده $\sum$ است.

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{|t-(2)m|} \rightarrow \boxed{T_{0x} = 2}$

$z(t) = 2^{|t|}$ $\quad$ $z(t - m\times 2) = 2^{|t - m\times 2|}$

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t - \frac{1}{2}k)}$ $\quad$ $\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t - m\times T_0)$

$z(t) = e^{t}$ $\quad$ $z(t - m\times T_0) = e^{(t - m\times T_0)}$

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t - \frac{T_0}{2}k)} \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(t - mxT_0)}$$

$$T_0 y = \frac{1}{2}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(t - \frac{1}{2}k)}$$

نکته:

اگر $f(m)$ یک سیگنال گسسته با دوره تناوب M_0 باشد

آنگاه سیگنال $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, z(t - mxT_0)$ با دوره تناوب $M_0 x T_0$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{j\pi n}}_{f(n)} \underbrace{\cos(t - 2n)}_{\text{پیوسته}}$$

$t -$ خارج‌شده $\times T_0$

$$e^{j\pi n} \rightarrow M_0 = \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2 \qquad T_0 = 2$$

مخرج خارج‌شده یکی در میان پیوسته

دوره تناوب $x = M_0 \times T_0 = 2 \times 2 = 4$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{گسسته}} \underbrace{2^{-|t - 3k|}}_{\text{پیوسته}}$$

T_0

$$T_x = M_0 \times T_0 = 4 \times 3 = 12$$

M_0: $\sin\left(\frac{3\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$ اصلی $M_0 = \left|\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}}\right| = \frac{4}{3}$

$M_0 = 4$

$T_0 = 3$

$t -$ خارج‌شده $\times$ عدد

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \, e^{j\left(t - \frac{1}{2}k\right)}$$

$(-1)^k$ ⇒ $e^{jk\pi}$ ⇒ $T_0 = \frac{1}{2}$

$(-1)^k = \cos(\pi k) \rightarrow \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2 = M_0$

$T_y = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

جلسه ششم سیگنال

مثال: دوره تناوب سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{(t-3n)^2} \qquad y(t) = \sum_{n=0} 2^{|t-2n|}$$

$$f[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right) \qquad h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^6\right)$$

$$c[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^{12}\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{(t-3n)^2}$$

$$z(t) = 2^{t^2}$$

$$z(t-3n) = 2^{(t-3n)^2}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - T_0 n) \rightarrow T_0 = 3$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

جلسه مطالبتان داریم ← می‌توانیم از نکته استفاده کنیم.

اگر $T_0 > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$y(t+T_0) = y(t)$$

$y(t)$ متناوب است.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t-2n|} = 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots + 2^{|t-2\times 10|}$$

$$y(t+T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t+T_0-2n|}$$

$$= 2^{|t+T_0|} + 2^{|t+T_0-2|} + \dots$$

$$= 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots$$

$$y(t) = 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + 2^{|t-4|} + 2^{|t-6|} + \dots$$

$$y(t+T_0) = 2^{|t+T_0|} + 2^{|t+T_0-2|} + 2^{|t+T_0-4|} + 2^{|t+T_0-6|} + \dots$$

$T_0 > 0$

$T_0 = 2$

$$y(t+T_0) = 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + 2^{|t-4|} + \dots$$

به ازای هیچ $T_0 > 0$ ای $y(t+T_0) \neq y(t)$ بنابراین $y(t)$ متناوب نیست

حل $x(t)$ را به صورت سری می‌نویسیم:

طول هر $T_0 = 2$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

$$x(t+2) = x(t)$$

$$x(t+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t+2-2n|}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

$$x(t) = 2^{|t-2(-\infty)|} + \dots + 2^{|t+4|} + 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots + 2^{|t-2\infty|}$$

($n=-2$, $n=-1$)

$$x(t+2) = 2^{|t+2-2(-\infty)|} + \dots + 2^{|t+4|} + 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots$$

$2+\infty = \infty$; $n=-1$; $n=0$

$$2^{|t+(2-2\infty)|} \quad (-\infty)$$

$$x(t) = 2^{|t+\infty|} \quad \checkmark$$

$$x(t+2) = 2^{|t+\infty|} \quad \checkmark$$

روش دوم

$$x(t+2) = x(t)$$

$$x(t+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t+2-2n|}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

$$x(t+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2(n-1)|}$$

$n-1=k$

$n=-\infty \rightarrow k=-\infty$

$n=\infty \rightarrow k=\infty$

$$x(t+2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2k|}$$

متغیر تکراری k

متغیر تکراری k

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

متغیر تکراری n

تناوب برقرار است.

مثال:

$$f[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)$$

در سیگنال گسسته، اگر آرگومان به توان برسد ←

$x[n]$ N_0 تناوب با $\rightarrow$ $x[n^2] \rightarrow$ $\frac{N_0}{2}$ اگر N_0 مزدوج باشد

N_0 ~ ~ ~ باشد

$x[n^{\text{فرد}}] \rightarrow N_0$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right]$ $\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \rightarrow$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16 \rightarrow N_0 = 16$

$n \rightarrow n^2$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right] \rightarrow \frac{16}{2} = 8$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \longrightarrow N_0 = 16$

$n \to n^2$ ↓

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right] \longrightarrow N_0 = 8$

$\frac{16}{2}$ ↓

$$h[n] = \cos\left[\frac{\pi}{8}n^{6}\right] = \cos\left[\frac{\pi}{8}(n^2)^3\right]$$

$n \to n^2$

$n \to n^{\text{فرد}}$ تواں n را به صورت حاصلضرب 2 و اعداد فردی بنویسم.

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \longrightarrow N_0 = 16$

$n \to n^2$ ↓

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right] \longrightarrow N_0 = 8$

$n \to n^3$ ↓

$\cos\left[\frac{\pi}{8}(n^3)^2\right] \longrightarrow N_0 = 8$

$$C[n] = \cos\left[\frac{\pi}{8}n^{12}\right] = \cos\left[\frac{\pi}{8}\left((n)^3\right)^2\right]$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{8}(n^3)^{4}\right]$$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \longrightarrow 16$

$n \to n^3$ ↓

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^3\right] \longrightarrow (16)$

$n \to n^{(2)}$ ↓

$\cos\left[\frac{\pi}{8}(n^2)^3\right] \longrightarrow 8$

$n \to n$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}(n^2)^2\right]^3 \longrightarrow 4$ ✓

انرژی و توان:

$x(t)$

$E_{x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$ ← انرژی

انرژی $x(t)$ در بازه t_1 تا t_2

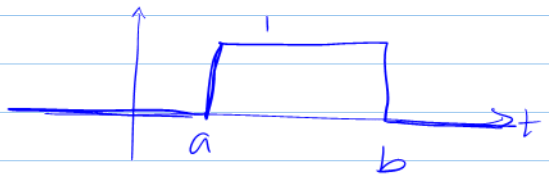
$E = |x(t)|^2$ انرژی لحظه‌ای

$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ انرژی کل

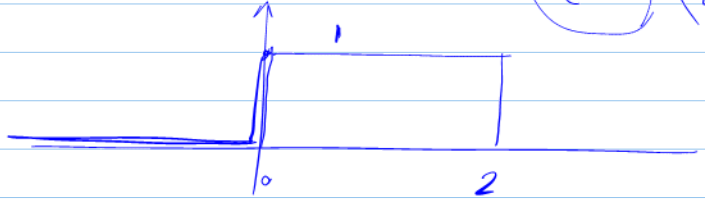
$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$ گسسته

$x(t) = e^{j\frac{\pi}{3}t}\left[u(t) - u(t-2)\right]$ ← مثال

نکته: $u(t-a) - u(t-b)$ ← مثال به فرم زیر است:



$e^{j\frac{\pi}{3}t}\left(u(t-0) - u(t-2)\right) = \begin{cases} 0 \times e^{j\frac{\pi}{3}t} & t < 0 \\ 1 \times e^{j\frac{\pi}{3}t} & 0 \le t \le 2 \\ 0 \times e^{j\frac{\pi}{3}t} & t > 2 \end{cases}$

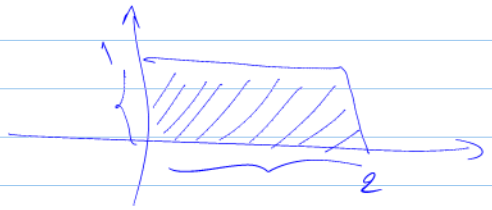


$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{j\frac{\pi}{3}t} & 0\le t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases} \qquad |x(t)| = \begin{cases} |0| & t<0 \\ |e^{j\frac{\pi}{3}t}| & 0\le t\le 2 \\ |0| & t>2 \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \qquad |x(t)| = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\le t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

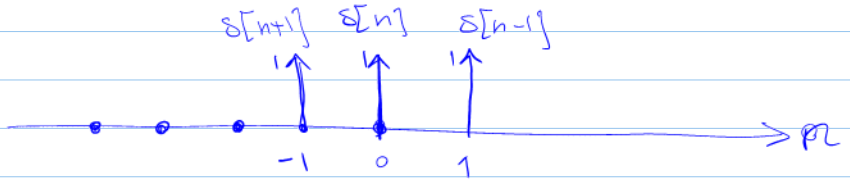
$$= \int_{-\infty}^{0} 0^2 \, dt + \int_{0}^{2} 1^2 \, dt + \int_{2}^{\infty} 0^2 \, dt$$

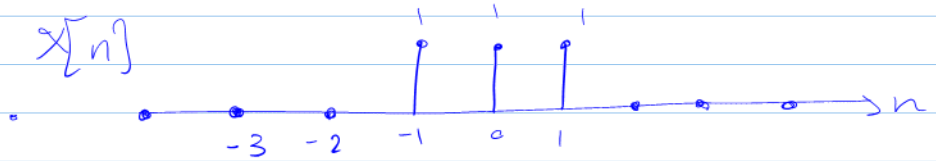
$$= \int_{0}^{2} 1^2 \, dt = 1\times 2 = 2$$



مثال:

$$x[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$$



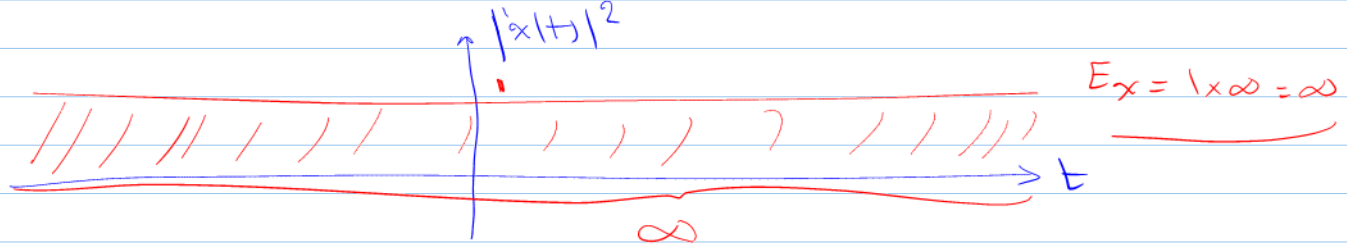


$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \underbrace{|0|^2 + \cdots + |0|^2}_{0} + |1|^2 + |1|^2 + |1|^2 + \underbrace{|0|^2 + \cdots}_{0}$$

$$E_x = 1 + 1 + 1 = 3$$

نکته: انرژی سیگنال برابر ساعت زیر خودش $|x|^2$ است.

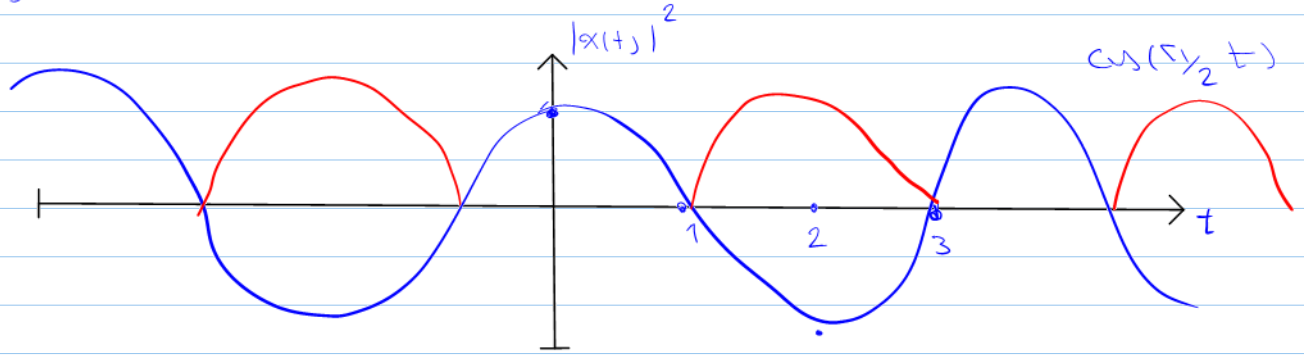
$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t} \qquad |x(t)|^2 = 1^2$$

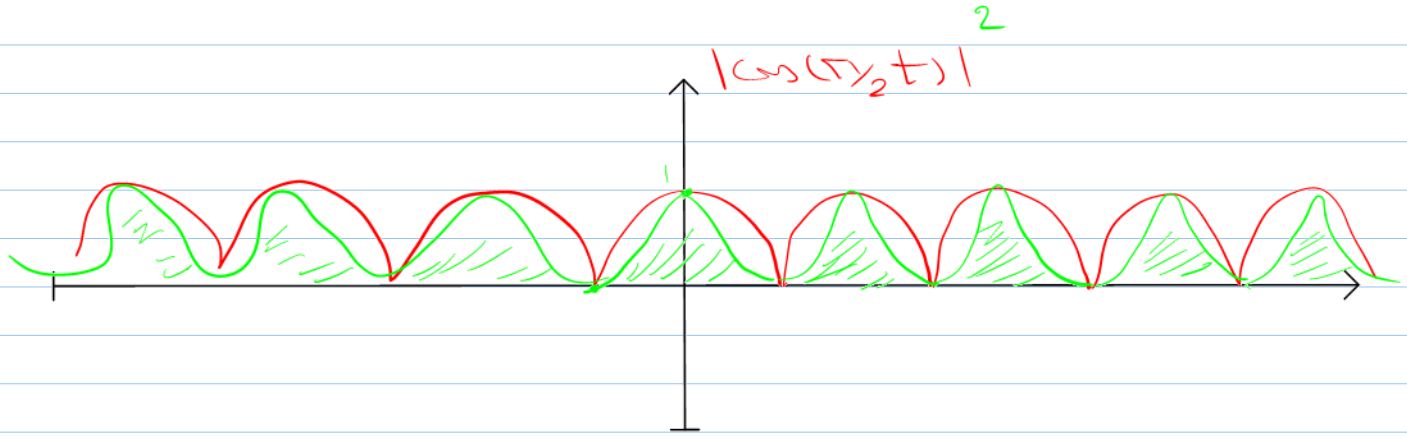


$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

$$|x(t)|^2 = \left|\cos\left(\tfrac{\pi}{2} t\right)\right|^2$$

توان لحظه‌ای



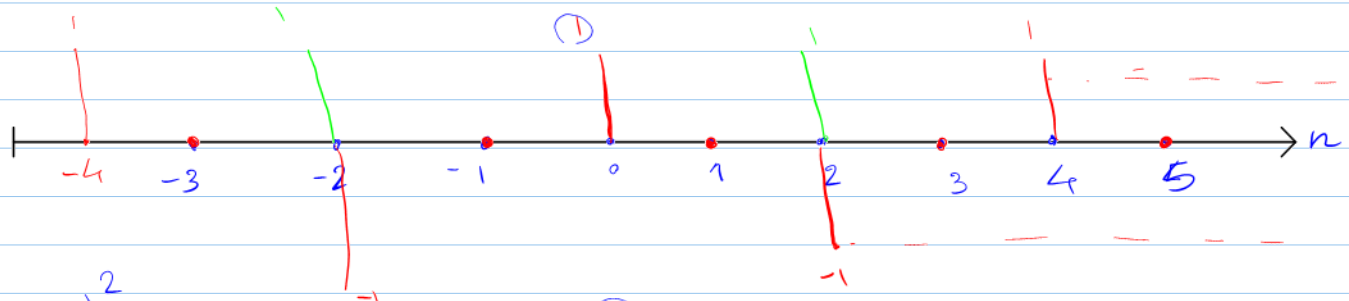


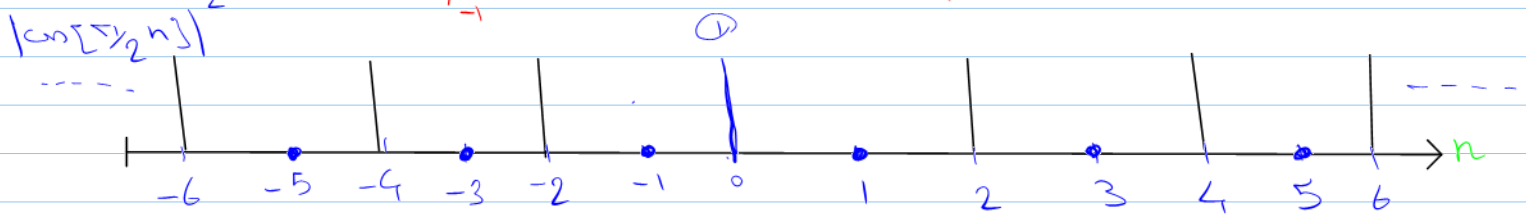
$$E_x = a \times \infty = \infty$$

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2} n\right]$$

$$|x[n]|^2 = \left|\cos(\pi/2\, n)\right|^2$$

$|\cos[\pi/2\, n]|$



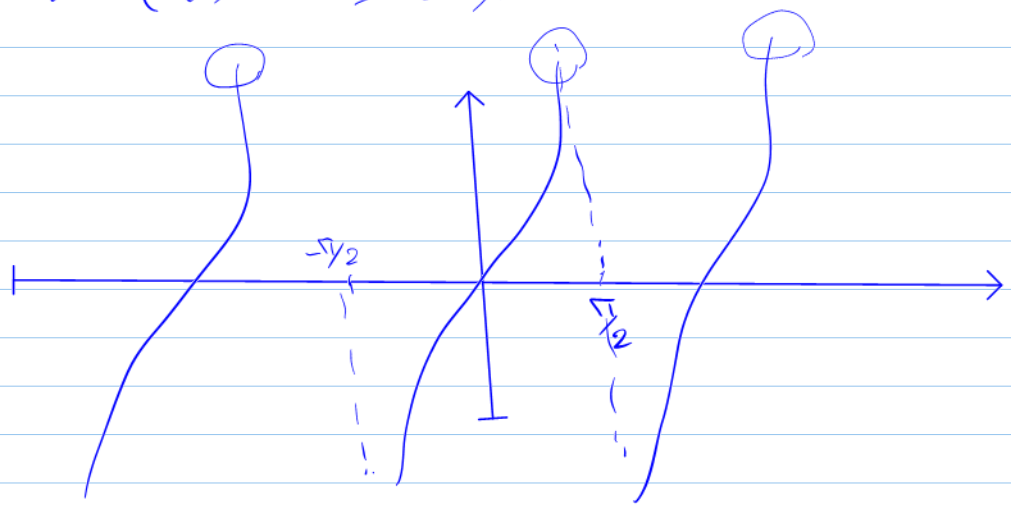


$$E_x = 1 + 1 + 1 + \dots = 1 \times \infty = \infty$$

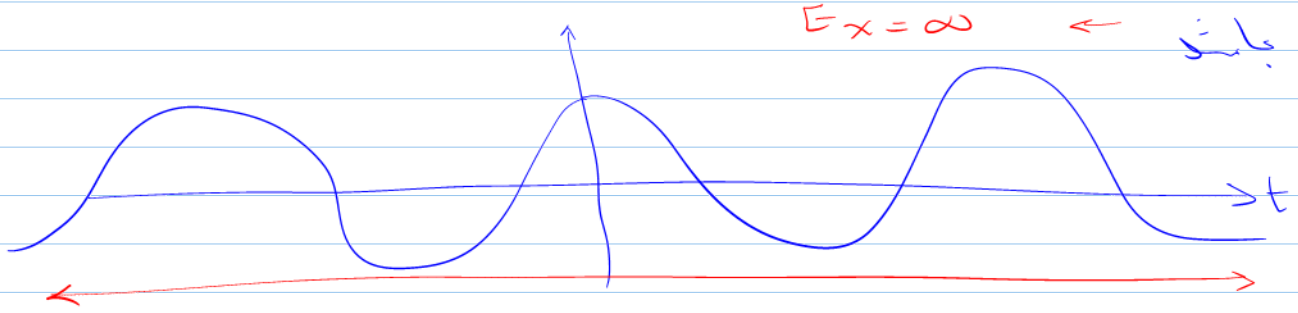
نکته:

① اگر دامنه سیگنال حتی در یک نقطه به سمت بی‌نهایت برود انرژی سیگنال ∞ است.

$$x(t) = \tan(t) \longrightarrow E_x = \infty$$



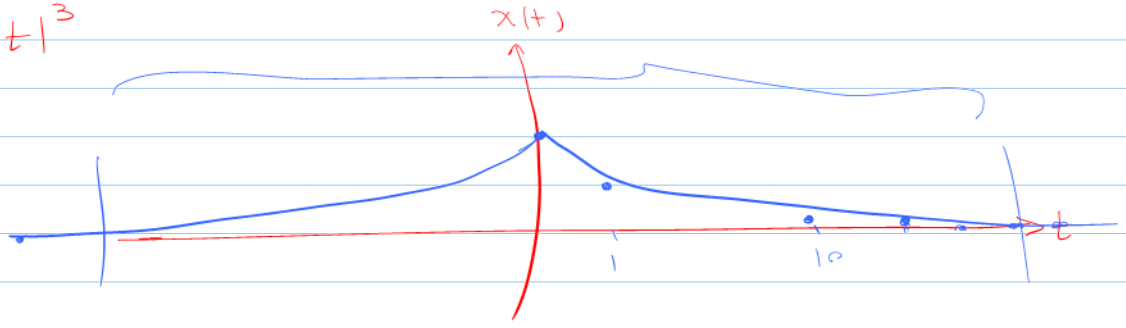
② اگر طول سیگنال محدود باشد یعنی از $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار نیز



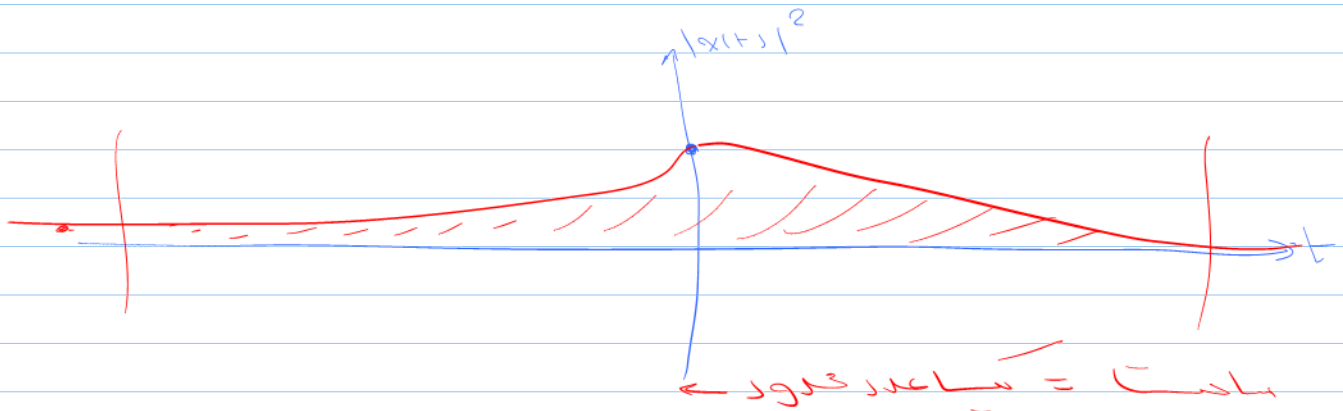
$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2} n\right]$$

③ اگر سیگنال متناوب باشد ← $E_x = \infty$

$$x(t) = \frac{1}{1 + |t|^3}$$



$$|x(t)|^2 = \left| \frac{1}{1+|t|^3} \right| = \left(\frac{1}{1+|t|^3} \right)^2$$



بله است = بیشتر عدد خلود ←

④ آن دامنه سیگنال خواره در حال کاهش به سمت صفر باشد انرژی

عددی محدود است.

$$x(t) = (1 - e^{-5t})\, u(t)$$

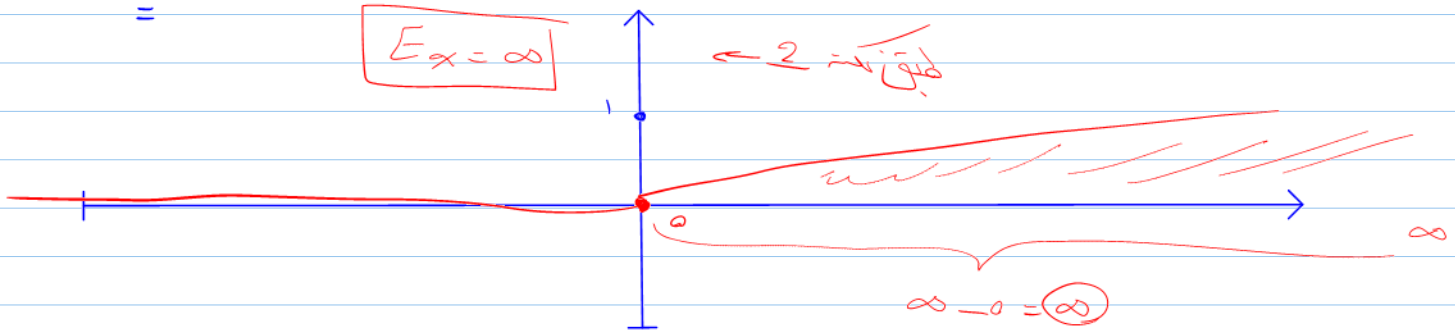
$t = 0 \rightarrow (1 - e^{0})\, u(0) = 0$

$t = \infty \quad (1 - e^{-\infty})\, u(\infty) = 1$

$t = -\infty$

=

$E_x = \infty$ ← 2 بیشتر



$\infty - 0 = \infty$

جلسه هفتم سیگنال

توان سیگنال:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \frac{\text{انرژی سیگنال}}{\text{بازه زمانی}}$$

$$P_{(t_1,-t_2)} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}{t_2 - t_1}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}{2T} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2\infty}$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2}{2N+1}$$

مثال:

$$x[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2}{2N+1} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}{2\times\infty+1}$$

$$P_x = \frac{3}{2\times\infty+1} = 0$$

$$P_x = \frac{E_x}{2\times\infty} \qquad \frac{a}{2\times\infty} = 0$$

نکته. اگر انرژی سیگنال عدی محدود باشد توان ۰ است.

اگر توان ~ ~ ~ انرژی ∞ است.

$$P_x = 2 = \frac{?}{2\times\infty} = \frac{4\times\infty}{2\times\infty}$$

سیگنال انرژی ← اگر انرژی سیگنال عددی محدود و غیرصفر باشد

" توان ← " توان " " " " " "

- بی‌توان و بی‌انرژی ← اگر توان سیگنال ∞ باشد.

اگر سیگنال انرژی باشد ← توان ∞

" " توان " ⟸ انرژی ∞

تشخیص سیگنال توان و انرژی با روش نمودار:

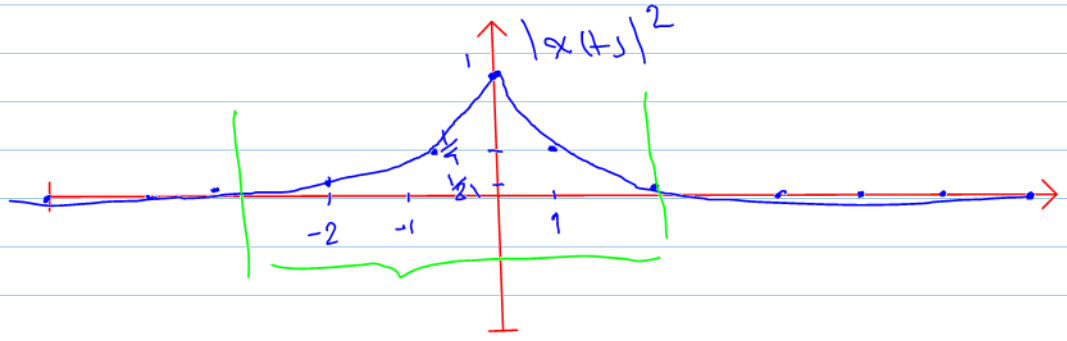
① نمودار تقریبی $|x(t)|^2$ یا $|x[n]|^2$ را رسم می‌کنیم.

② با توجه به شکل نمودار داریم:

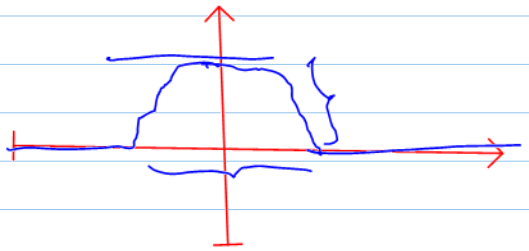
آزاد ۹۸ . $x(t) = \frac{1}{1+|t|^3}$ ۱) توان ۲) انرژی ✓

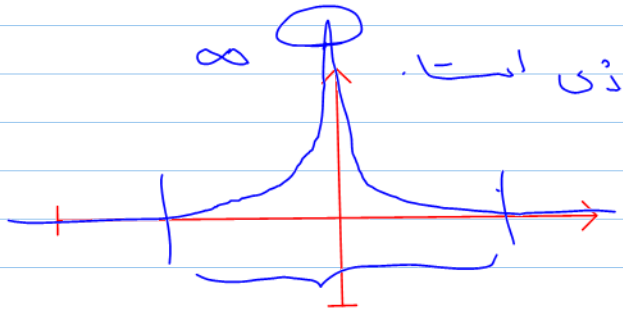
۳) توان و انرژی ۴) نه توان نه انرژی ←

$$|x(t)|^2 = \left|\frac{1}{1+|t|^3}\right|^2 = \left(\frac{1}{1+|t|^3}\right)^2$$



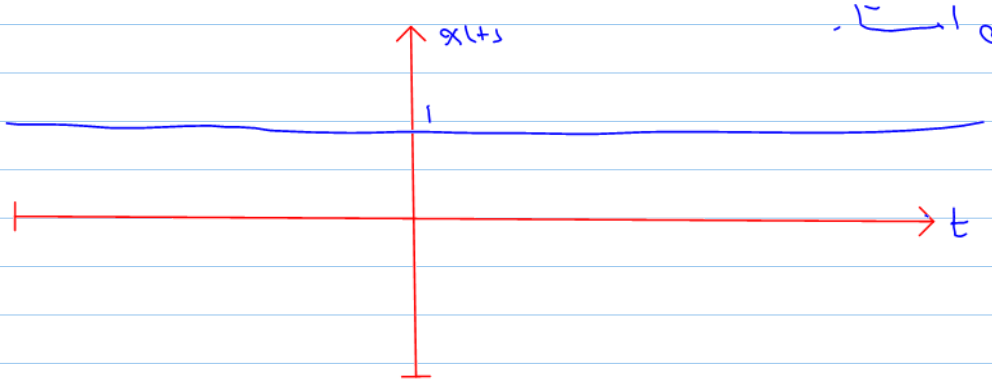
نکته 1. اگر توان $|x(t)|^2$ دارای طول محدود باشد و داشته ∞ نشود سیگنال

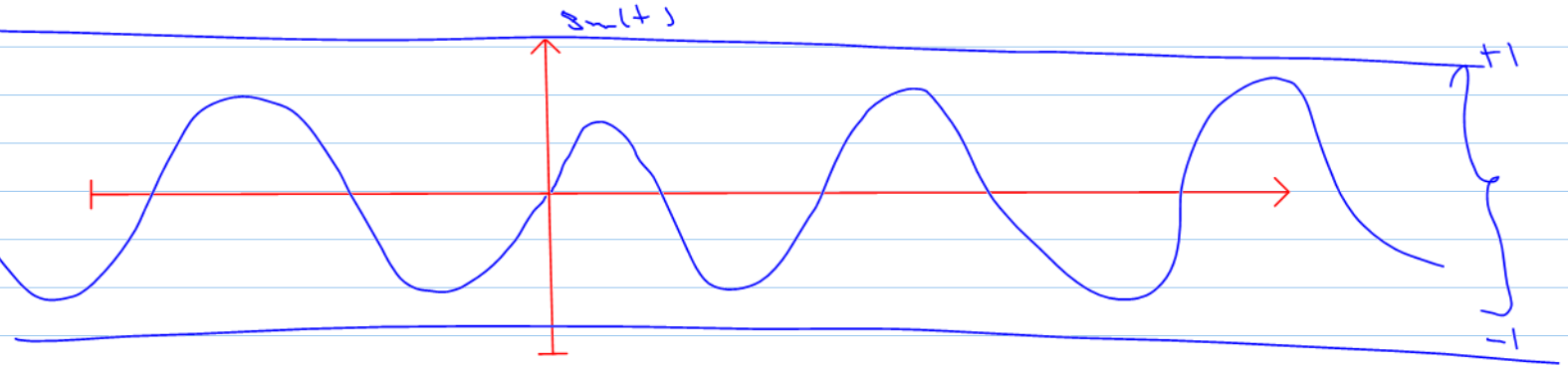


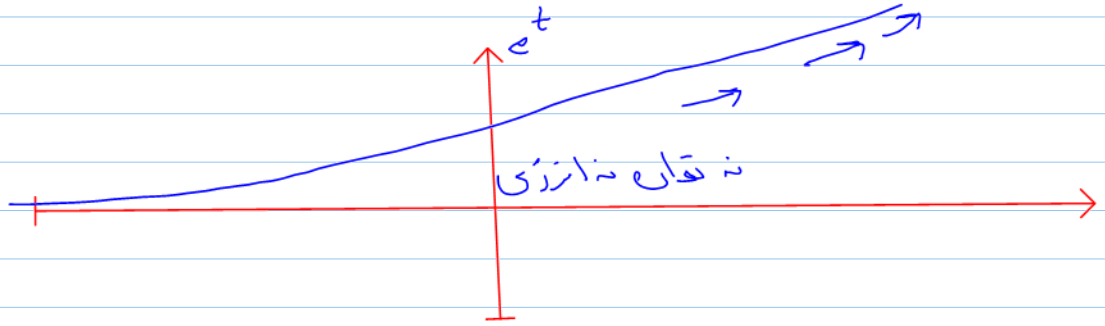


انرژی است.

نکته 2. اگر طول سیگنال ∞ باشد و داشته در حال افزایش نباشد و همچنین سیگنال توان است.





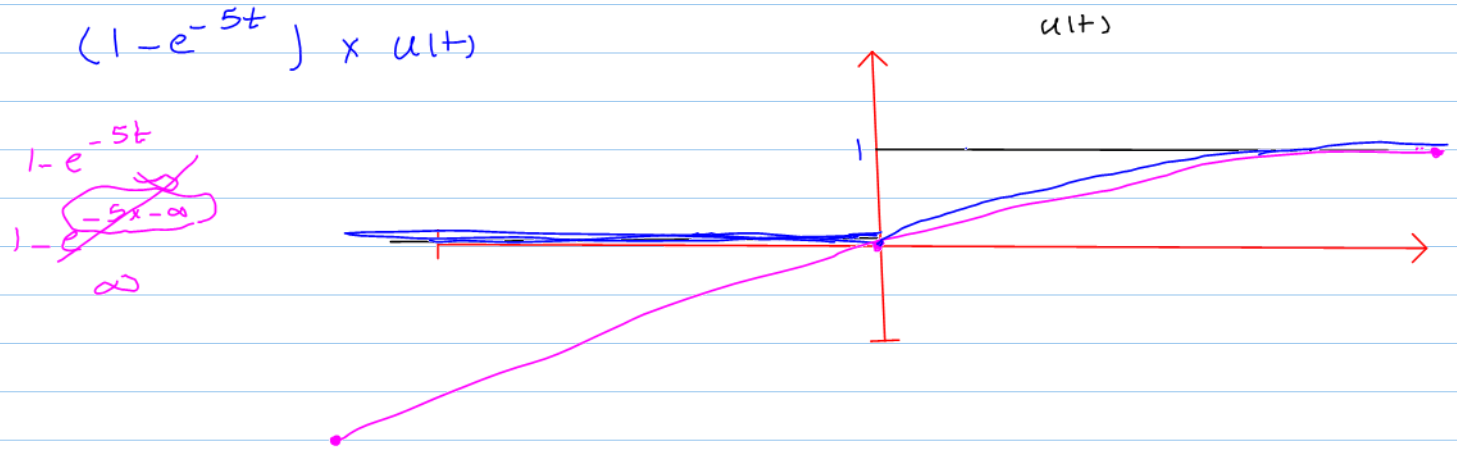


مثال مکتری ص 9. سیگنال $x(t) = (1 - e^{-5t}) u(t)$

1) انرژی (2) توان 3) انرژی نوسانی دارد 4) ~~توان و انرژی~~

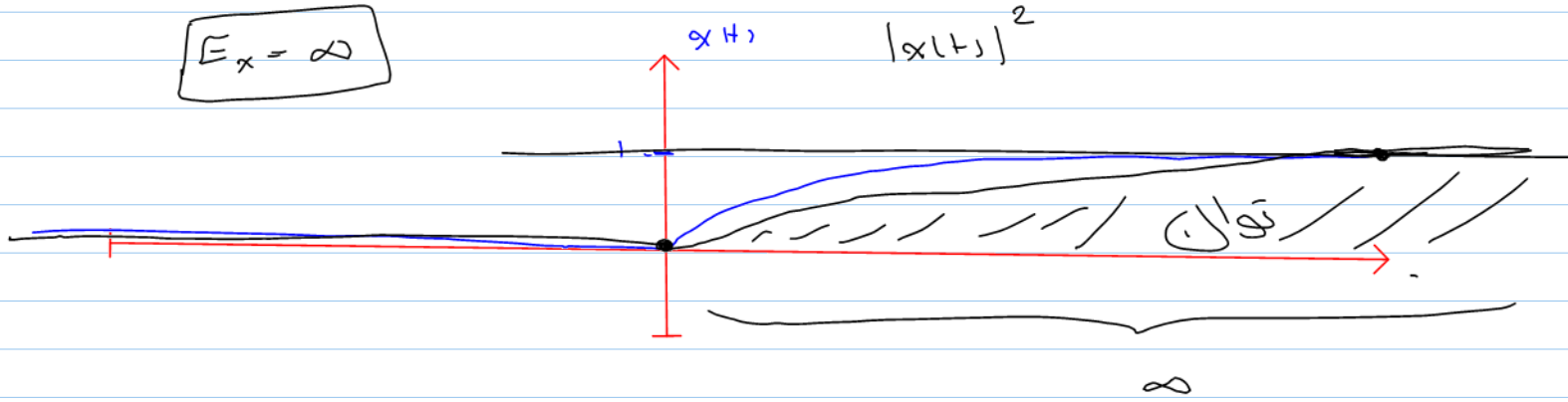
$$|x(t)| = |(1-e^{-5t})u(t)|$$

$(1-e^{-5t}) \times u(t)$



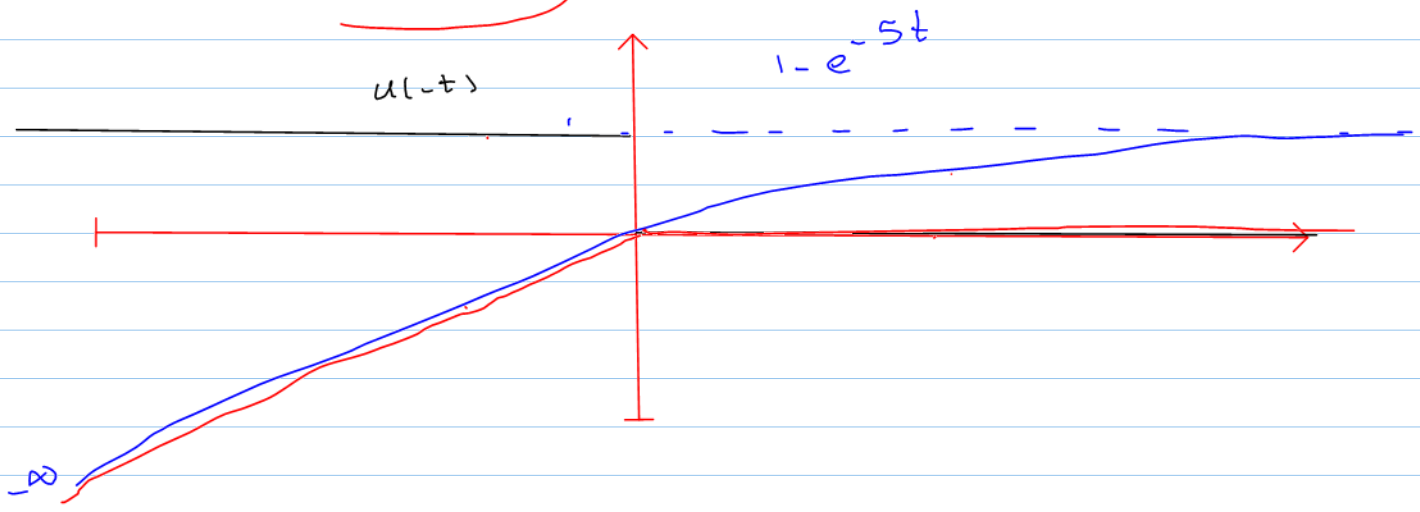
$1-e^{0} = 1-1 = 0$ $\quad t=\infty$ $\quad 1-e^{-5\times\infty} = 1$

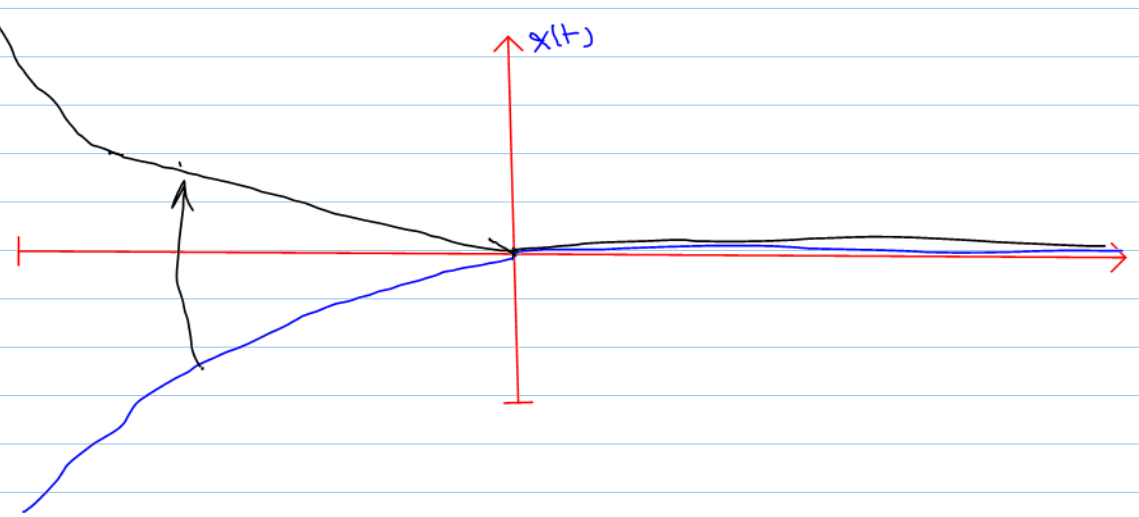
$E_x = \infty$



$|x(t)|^2 = (x(t))^2$ توان لحظه‌ای $x(t)$

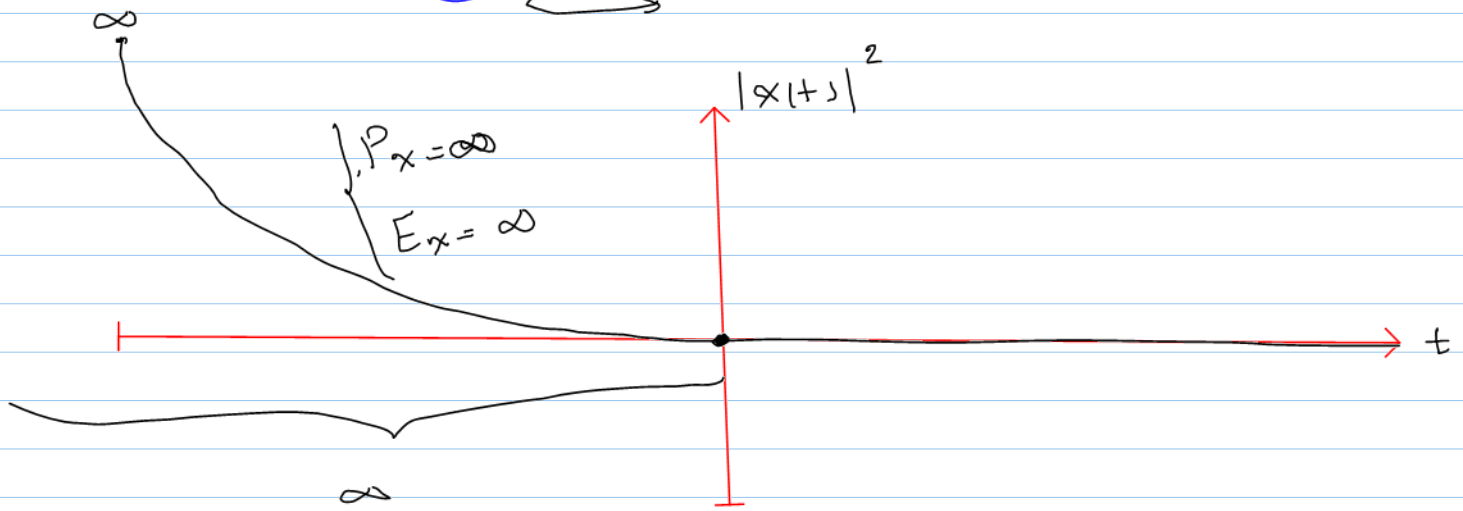
$x(t) = (1-e^{-5t})u(-t)$





$|x(t)| = |x(t)|$

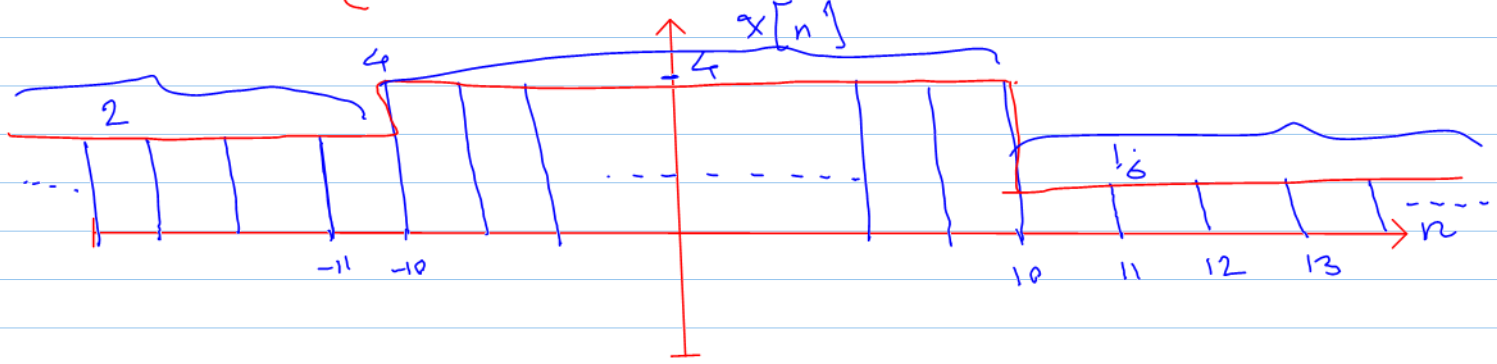
(ناپایا) — (پایا)



$$x(n) = \begin{cases} 2 & n < -10 \\ 4 & -10 \le n \le 10 \\ \frac{1}{6} & n > 10 \end{cases}$$

سوال سیگنال؟

$\frac{1}{2}$ ✗ ✗ 2



$0 < P_x < \infty$ ← سیگنال توان است.

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_x = \frac{E_x}{2\times\infty+1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-11} |2|^2 + \sum_{-10}^{10} |4|^2 + \sum_{11}^{\infty} |\tfrac{1}{6}|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-11} 4 + \sum_{-10}^{10} 16 + \sum_{11}^{\infty} \frac{1}{36}$$

$$= 4(-11-(-\infty)+1) + 16(10-(-10)+1) + \frac{1}{36}(\infty-11+1)$$

$$= -44 + 4\times\infty + 4 + 160 + 160 + 16 + \frac{1}{36}\times\infty - \frac{11}{36} + \frac{1}{36}$$

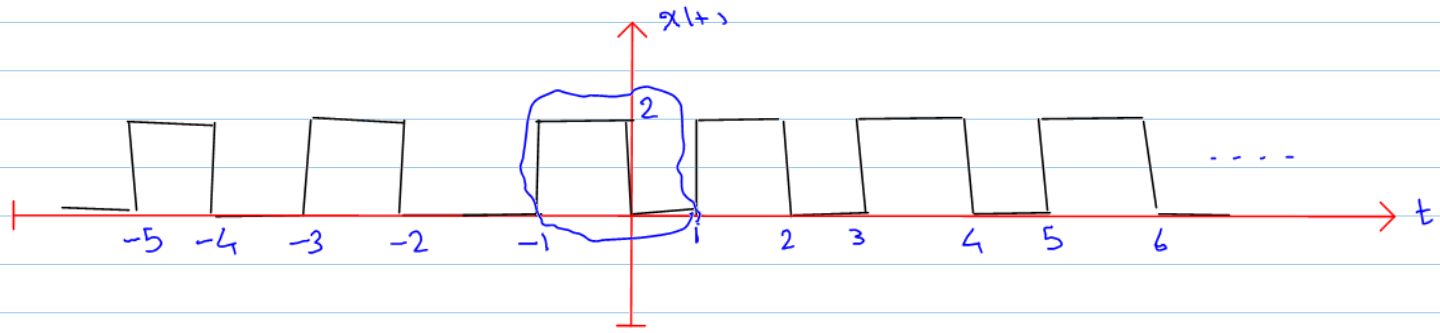
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x|^2 = 4\times\infty + \frac{1}{36}\times\infty = (4+\frac{1}{36})\times\infty$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \times \sum_{-\infty}^{\infty} |x|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{(4+\frac{1}{36})\times\infty}{2N+1}$$

$$= \frac{(4+\frac{1}{36})\times\infty}{2\times\infty+1} = 2+\frac{1}{72}$$

نکته: اگر سیگنالی متناوب باشد $E_x=\infty$ و توان آن محدود بوده و به صورت زیر است:

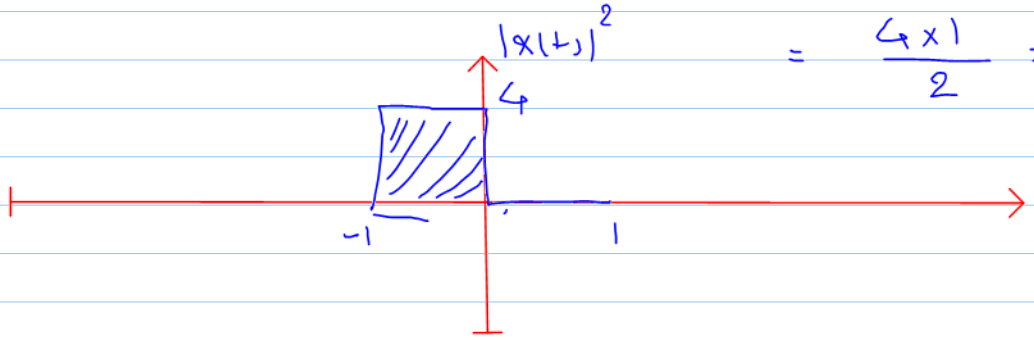
$$P_{\text{کل}} = P_{\text{یک دوره تناوب}}$$



E_x ، P_x = ?

$E_x = \infty$

$P_x = P_{\text{توان دوره‌ای}} = \dfrac{\text{انرژی یک دوره تناوب}}{\text{دوره تناوب}} = \dfrac{\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 \, dt}{2}$



$= \dfrac{4 \times 1}{2} = 2$

$A\cos(at+b) \longrightarrow P = \dfrac{A^2}{2}$

$A\sin(at+b) \longrightarrow P = \dfrac{A^2}{2}$

$A e^{j(at+b)} \longrightarrow P = A^2$

$A \longrightarrow P = A^2$

$\tan(at+b)$, $\cot(at+b) \longrightarrow P = \infty$

$A\cos(an) \longrightarrow P_x = \begin{cases} \frac{A^2}{2} & a \text{ صحیح باشد} \\ A^2 & a \text{ صحیح نباشد} \end{cases}$

$A\sin(an) \longrightarrow P_x = \begin{cases} A^2/2 & a \text{ صحیح باشد} \\ 0 & a \text{ صحیح نباشد} \end{cases}$

$$A e^{jan} \longrightarrow P_x = A^2$$

نکته ← اگر $x(t)$ سیگنال با طول ∞ و دامنه محدود باشد و از

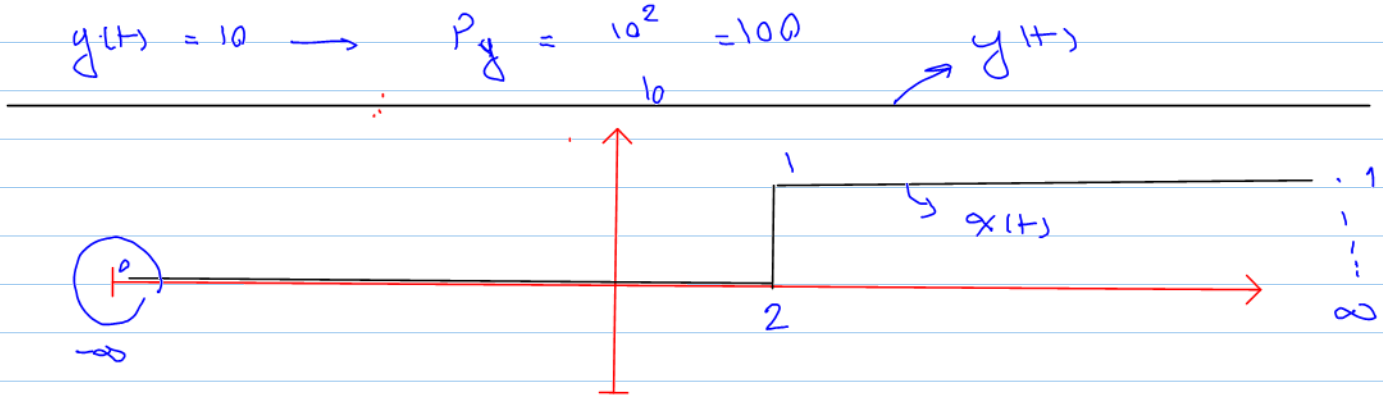
$$x(\infty) = A \qquad x(-\infty) = B$$

$$P_x = \frac{A^2 + B^2}{2}$$

$$x(t) = u(t-2) \qquad y(t) = 10$$

$$Z(t) = u(t-2) + u(t+2)$$

$$y(t) = 10 \longrightarrow P_y = 10^2 = 100$$



$$P_x = \frac{0^2 + 1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

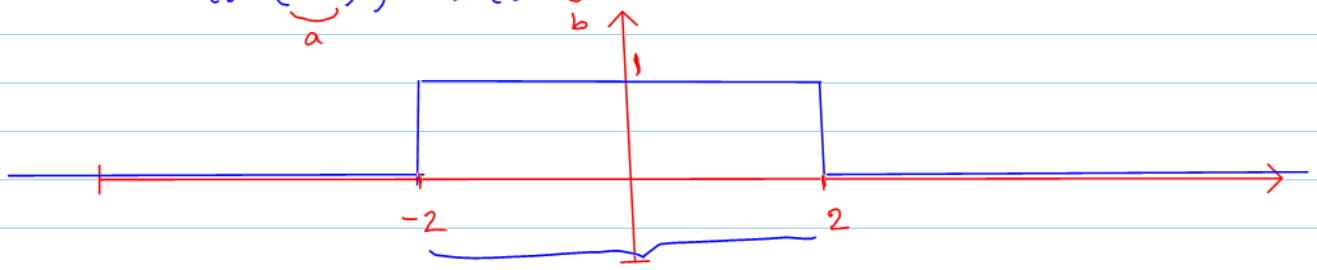
$$Z(t) = u(t+2) + u(t-2)$$



$$P_x = \frac{0^2 + (2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$f(t) = u(t+2) - u(t-2)$ $\quad u(t-a) - u(t-b)$

$u(t-(-2)) - u(t-2)$



$P_f = \frac{0^2 + 0^2}{2} = 0$ $\quad P=0$ ← انرژی

$f(t) = e^{t}u(-t) + 2e^{-t}u(t) + u(t-1)$ $\quad$ ؟ $P_{f(t)}$ را بیابید

1) ∞ $\quad$ 2) $\frac{1}{2}$ $\quad$ 3) $\frac{3}{2}$ $\quad$ 4) 0

$t=0 \rightarrow f(0) = e^{0}u(-0) + 2e^{-0}u(0) + u(0-1)$

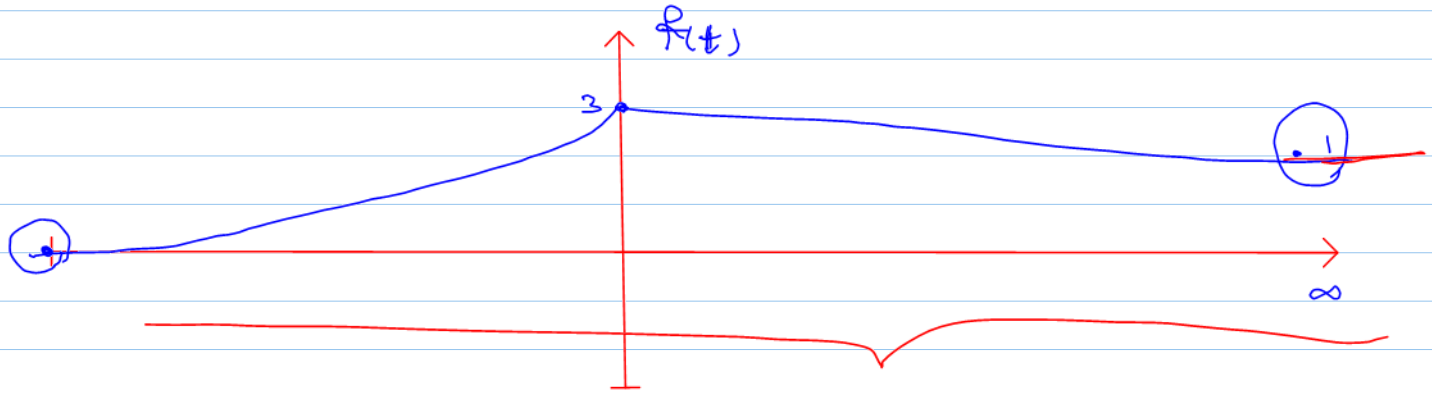
$= 3$

$t=\infty \rightarrow f(\infty) = e^{\infty}u(-\infty) + 2e^{-\infty}u(\infty) + u(\infty-1)$

$= 0 + 0 + 1 = 1$

$t=-\infty \rightarrow f(-\infty) = e^{-\infty}u(\infty) + 2e^{\infty}u(-\infty) + u(-\infty-1)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$



$P_f = \frac{0^2 + 1^2}{2} = \frac{1}{2}$

مثال دیگر: $E_f = \infty$

برق ۸۵ . تولن و انرژی $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب کدام‌اند؟

(۱ ∞ , $\frac{41}{18}$ ✓ E P

(۲ ∞ , ∅ ✗ E P

(۳ ∅ , ∞ ✗ P E

(۴ $\frac{6}{9}$, ۰ ✗ E P

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n - N_0 m]$ N_0

$z[n] = 2^{-|n|}$ $z[n-2m] = 2^{-|n-2m|}$

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$

$x[n]$ متناوب با $N_0 = 2$ ← $E = \infty$

$P = \frac{E}{2 \times \infty} = \frac{\infty}{2 \times \infty} = 1/2$

نکته . $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n - N_0 m]$ با استفاده از $z[n]$ سیگنال

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t - T_0 m)$ انرژی یا توان x سیگنال

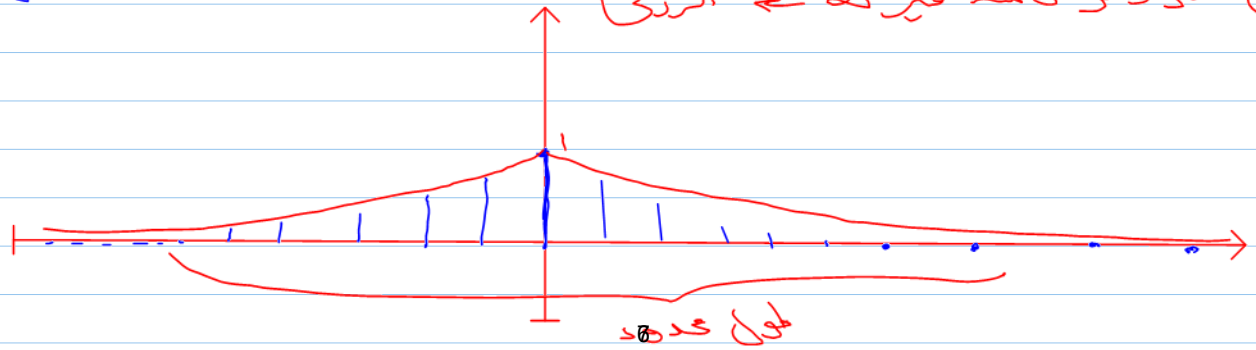
(توان است و به احتمال زیاد)

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ $z[n] = 2^{-|n|}$

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n-2m]$

$z[n] = 2^{-|n|}$

طول خود و دامنه غیر ∞ ← انرژی



$x[n]$, $N_0 = 2$

$$P_x = \frac{P_{\text{one period}}}{n=0,1} = \frac{\sum_{<2>} |x[n]|^2}{2}$$

$$P_x = \frac{\sum_{n=0}^{1} |x[n]|^2}{2} = \frac{|x[0]|^2 + |x[1]|^2}{2}$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|} \qquad |-1| = -(-1)$$

$$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|0-2m|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|2m|}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-(-2m)} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1} \underbrace{2^{2m}}_{4^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{2^{-2m}}_{(\frac{1}{4})^m}$$

$$2^{2m} = (2^2)^m = 4^m \qquad \left(\underbrace{2^{-2}}_{\frac{1}{4}}\right)^m$$

$$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{-1} 4^m + \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^m}_{q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^a}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & |q|>1 \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^m = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \checkmark$$

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} 4^{m} \qquad m' = -m \longrightarrow m = -m'$$

$$m = -\infty \qquad m' = \infty$$

$$m = -1 \qquad m' = 1$$

$$\sum_{m'=1}^{\infty} \left(4^{-1}\right)^{m'} = \sum_{m'=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m'} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$\boxed{x[0] = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}}$$

$$P_x = \frac{|x[0]|^2 + |x[1]|^2}{2}$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|1-2m|}$$

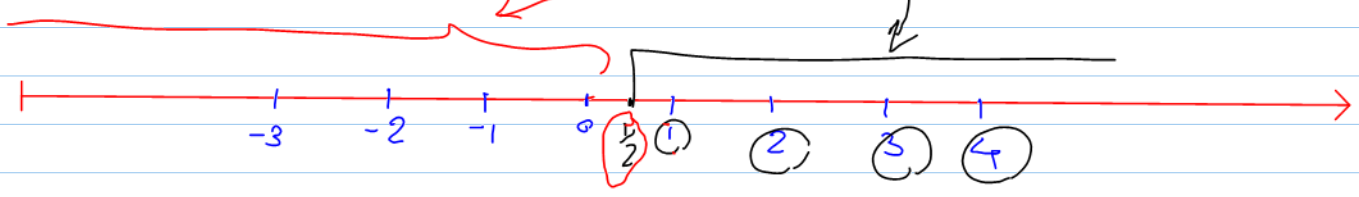
$1-2m \geq 0 \rightarrow \boxed{m \leq \frac{1}{2}}$

$1-2m < 0 \rightarrow m > \frac{1}{2}$

$m = -1, -2, -3, \ldots$

$0, \boxed{1, 2, \ldots}$

$$|1-2m| = \begin{cases} -1+2m & m > \frac{1}{2} \\ 1-2m & m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$|1-2m| = \begin{cases} -1+2m & m \geq 1 \\ 1-2m & m \leq 0 \end{cases}$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|1-2m|} = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-(1-2m)} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-(-1+2m)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-1+2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{1-2m} \qquad 2^{a-b} = 2^a 2^b$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-1} \times 2^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{1} \times 2^{-2m}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{0} 4^m\right) + 2\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m\right)$$

$$\frac{4}{3} \qquad \frac{(1/4)^1}{1-1/4} = \frac{1}{3}$$

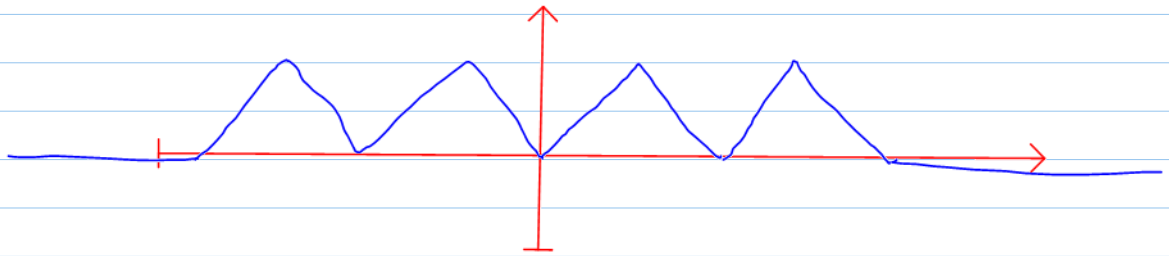
$$x[1] = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$P_x = \frac{(5/3)^2 + (4/3)^2}{2} = \frac{\frac{25}{9} + \frac{16}{9}}{2} = \frac{41}{18} \checkmark$$

«جلسه هشتم سیگنال»

زوج و فرد ←

سیگنال زوج: سیگنالی که نسبت به محور y متقارن است.



$x(t) = x(-t)$ ⟵ $x(t)$ زوج است.

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

$x(t) = \cos(2t)$

$x(-t) = \cos(2(-t)) = \cos(-2t) = \cos(2t)$

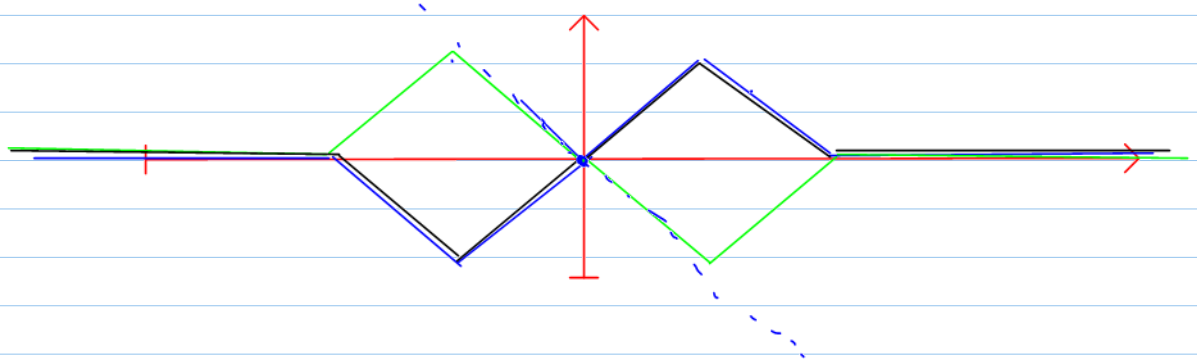
$x(t) = x(-t)$ ⟵ زوج $\quad |-t| = |-1 \times t| = |-1| \times |t| = 1 \times |t| = |t|$

$x(t) = 2^{|t|} + \sin(t^2)$

$x(-t) = 2^{|-t|} + \sin((-t)^2)$

$= 2^{|t|} + \sin(t^2) = x(t)$

سیگنال فرد: نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد.



$x(t) = -x(-t)$ ⟵ فرد $\quad \sin\theta = -\sin\theta$

$x(t) = \sin(t) \qquad x(-t) = \sin(-t) = -\sin(t)$

$x(t) = -x(-t) = \sin(t)$ ✓

فرد

اگر $x(t)$ یا $x[n]$ ... $x(0) = 0$

نکته: هر سیگنالی را می‌توان به صورت مجموع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد نوشت.

زوج

$$y(t) = \underbrace{\frac{y(t) + y(-t)}{2}}_{x(t)} + \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

$x(t) \stackrel{?}{=} x(-t)$ ✓

$$x(t) = \frac{y(t) + y(-t)}{2}$$

$$x(-t) = \frac{y(-t) + y(-(-t))}{2}$$

$$= \frac{y(-t) + y(t)}{2} = x(t)$$

$$z(t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

$$z(-t) = \frac{y(-t) - y(t)}{2} \qquad -z(-t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

$z(t)$ فرد

$$z(t) = -z(-t)$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{x(t) + x(-t)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}_{\text{فرد}}$$

بخش زوج سیگنال $even\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$

بخش فرد سیگنال $odd\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

اگر $x(t)$ زوج باشد:

$$\begin{cases} x_e(t) = x(t) \\ x_o(t) = 0 \end{cases}$$

اگر $x(t)$ زوج باشد

$x_e(t) = 0$

$x_o(t) = x(t)$

تمرین: اگر تابع $g(t) = t\sin(t)$ را به دو بخش زوج g_e و فرد g_o تقسیم کنید.

1) $g_e = t\sin(t)$, $g_o = 0$ ✓

2) $g_e = -t\sin(t)$, $g_o = 0$

3) $g_e = 0$, $g_o = t\sin(t)$

4) $g_e = 0$, $g_o = -t\sin(t)$

$$g(t) = g_e + g_o$$

$$g_e = \frac{g(t) + g(-t)}{2} = \frac{t\sin(t) + (-t)\overbrace{(\sin(-t))}^{-\sin(t)}}{2} = \frac{t\sin(t) + t\sin(t)}{2}$$

$$= t\sin(t)$$

$$g_o = \frac{t\sin(t) - (-t)(\sin(-t))}{2} = \frac{t\sin(t) - t\sin(t)}{2} = 0$$

$f_1(t) = t$ تابع فرد $\quad f_2(t) = \sin(t)$ فرد

$f_1(-t) = -t \rightarrow f_1(t) = -f_1(-t)$

حاصلضرب دو سیگنال

الف) زوج ← زوج

ب) فرد ← زوج

ج) زوج و فرد ← فرد

$g(t) = \underbrace{t}_{\text{فرد}}\ \underbrace{\sin(t)}_{\text{فرد}} = \text{زوج}$

$g_e = g(t) \qquad g_o = 0$

نکته: هر دو سیگنال زوج و فرد بر هم عمودند. (متعامدهستند)

$$x_1(t) \perp x_2(t) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(t)\, dt = 0$$

فرد × زوج = فرد ، زوج × زوج = زوج

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x_{\text{زوج}} \times y_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}}\, dt = 0$$

* $\sin(\alpha t)$ بر $\cos(\beta t)$ عمود است.

* $e^{j\alpha t}$ بر $\sin$ و $\cos$ عمود است.

نکته: اگر $x(t)$ و $y(t)$ بر هم عمود باشند آنگاه

$$E\{x(t)+y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\}$$

$$P\{x+y\} = P_x + P_y$$

$$f(t) = \underbrace{1e^{j2t}}_{1^2} + \underbrace{2\cos(3t)}_{2}$$

$$P_f = 1 + 2 = P_{e^{j2t}} + P_{2\cos(3t)}$$

تمرین $g(t) = 2\cos(2t) + 2\sin(4t)$

$$x(t) = \underbrace{x_e(t)}_{} + \underbrace{x_o(t)}_{}$$

$$P_x = P_{x_e} + P_{x_o}$$

مؤلفه زوج سیگنال $x[n]$ برابر با $x_e[n] = 3\cos(4n) + 3\cos(\pi n)$ باشد

اگر توان کل سیگنال $x[n]$ برابر 15 باشد، توان مؤلفه فرد آن کدام است؟

3 6 2.5 1.5

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$P_x = 15$ $P_{x_o} = ?$

$P_x = P_{x_e} + P_{x_o}$

15 زوج ?

$A\cos(an) \rightarrow \begin{cases} \frac{A^2}{2} & a \text{ مخالف صفر باشد} \\ A^2 & a \text{ مساوی صفر باشد} \end{cases}$

$$x_e[n] = 3\cos(4n) + 3\cos(\pi n)$$

$$3\cos(4n) \longrightarrow P = \frac{3^2}{2}$$

$$3\cos(\pi n) \longrightarrow P = 3^2 = 9$$

نکته! اگر $\cos(\alpha n)$ و $\cos(\beta n)$ باشد، خواهد بود.

" " " " $\sin(\alpha n)$ و $\sin(\beta n)$

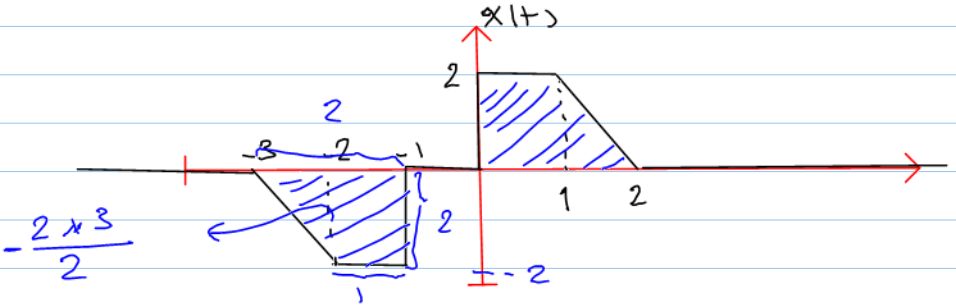
$\cos(4n) \perp \cos(\pi n)$ ✓

$$P_{x_e} = \frac{3^2}{2} + 3^2 = 13.5$$

$$P_x = 15 = 13.5 + P_{x_o} \rightarrow \boxed{P_{x_o} = 1.5}$$

اگر $x_o(t)$ مؤلفه فرد سیگنال $x(t)$ باشد، در این صورت $\int_0^\infty x_o(t)dt$ کدام است؟

1.5 3 3.5 4.5



$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty x(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty x(-t)\,dt$$

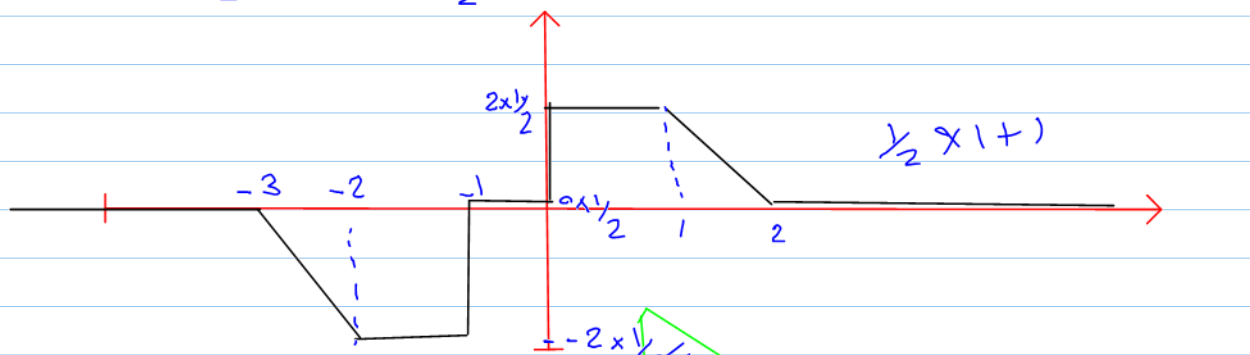
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\times(1+2)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\times(3)}{2}\right) = 3 \checkmark$$

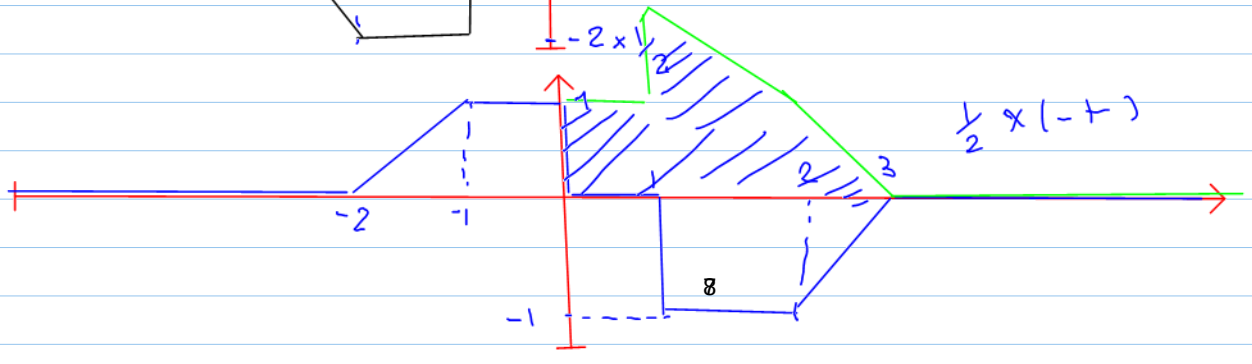
$$\int_0^\infty x(-t)\,dt \qquad -t = t' \longrightarrow -dt = dt' \qquad dt = -dt'$$

$$\int_0^{-\infty} -x(t')\,dt' = -\int_{-\infty}^{0} -x(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{0} x(t')\,dt'$$

$\leftarrow x_o(t)$: فرد یا

$$x_o(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t)$$





$$\Phi_2(t) = \begin{cases} Ae^{-2t} + Be^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad \Phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\, e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

. M باز ۱

A و B را طوری تعیین کنید که Φ_1 و Φ_2 بر هم عمود باشند.

1) $A = -6, B = +4$ 2) $A = 6, B = 4$ 3) $A = 4, B = 6$

4) $A = 6, B = -4$

عمود بودن یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t)\, \Phi_2(t)\, dt = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \Phi_1(t)\, \Phi_2(t)\, dt + \int_{0}^{\infty} \Phi_1(t)\, \Phi_2(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\, e^{-t}\right)\left(Ae^{-2t} + Be^{-t}\right) dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} A\sqrt{2}\, e^{-3t} + B\sqrt{2}\, e^{-2t}\, dt \qquad \int e^{at}\, dt = \frac{1}{a} e^{at}$$

$$= A\sqrt{2} \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, dt + B\sqrt{2} \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt$$

$$= A\sqrt{2}\left(\frac{1}{-3} e^{-3t}\Big|_0^{\infty}\right) + B\sqrt{2}\left(\frac{+1}{-2} e^{-2t}\Big|_0^{\infty}\right)$$

$$= A\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3} e^{-3\times\infty} - \left(-\frac{1}{3} e^{-3\times 0}\right)\right) + B\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} e^{-2\times\infty} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2\times 0}\right)\right)$$

$$= A\frac{\sqrt{2}}{3} + B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

1) $\quad 4\frac{\sqrt{2}}{3} + -6\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

4) $\frac{6\sqrt{2}}{3} + \frac{-4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$ ✓

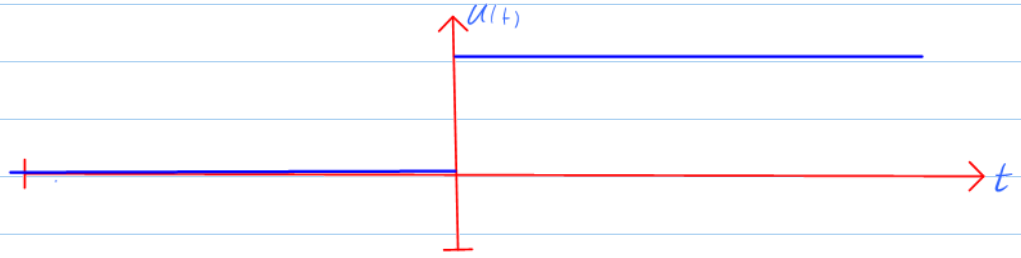
جلسه بعد ← معرفی سیستم‌های خواص سیستم‌ها

جلسه ۹ سیگنال

سیگنال‌های پایه

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

پله واحد ← u ①



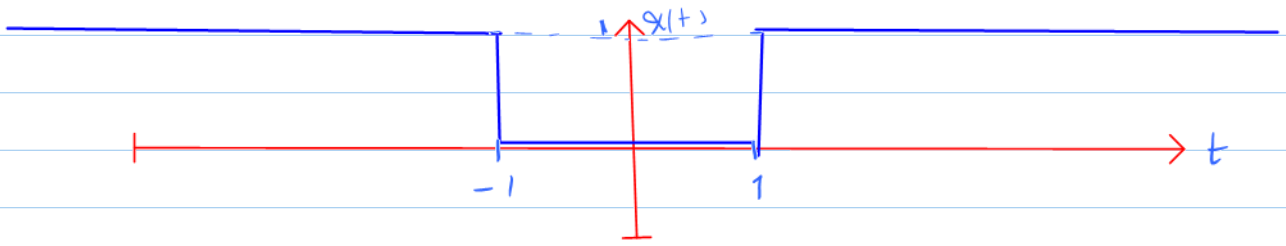
$$u(f(t))=\begin{cases}1 & f(t)\geq 0\\ 0 & f(t)<0\end{cases} \qquad u[f(n)]=\begin{cases}1 & f(n)\geq 0\\ 0 & f(n)<0\end{cases}$$

$$x(t)=u(t^2-1)=\begin{cases}1 & t^2-1\geq 0\\ 0 & t^2-1<0\end{cases}$$

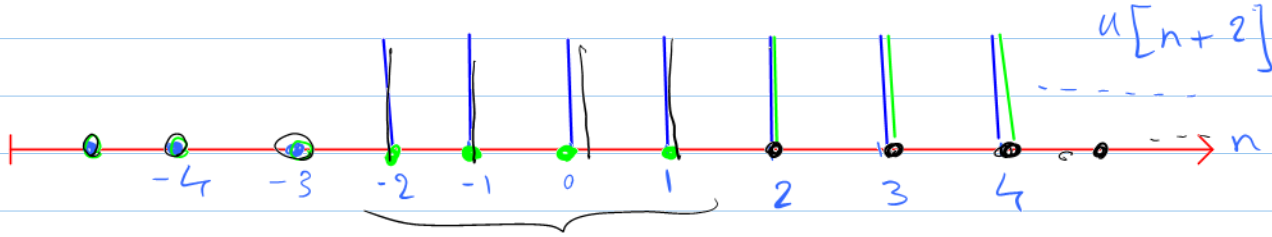
$t^2-1\geq 0 \longrightarrow t^2\geq 1 \longrightarrow |t|\geq 1 \longrightarrow \boxed{t\geq 1 \text{ یا } t\leq -1}$

$t^2-1<0 \longrightarrow t^2<1 \longrightarrow |t|<1 \longrightarrow -1<t<1$

$$x(t)=u(t^2-1)=\begin{cases}1 & t\geq 1 \text{ یا } t\leq -1\\ 0 & -1<t<1\end{cases}$$



$$x[n]=u[n+2]-u[n-2]$$



$$u[n+2] = \begin{cases} 1 & n+2 \geq 0 \rightarrow n \geq -2 \\ 0 & n+2 < 0 \rightarrow n < -2 \end{cases}$$

$$u[n-2] = \begin{cases} 1 & n-2 \geq 0 \rightarrow n \geq 2 \\ 0 & n-2 < 0 \rightarrow n < 2 \end{cases}$$

نحوه در انتگرال یا سیگما:

هرگاه انتگرال شامل u دیدید، اول u را صفر کنید.

$$\int_{2}^{\infty} f(t)\, \underbrace{u(t-2)}_{t \geq 2}\, dt = \int_{2}^{\infty} f(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \underbrace{\left(u(t+2) - u(t-1)\right)}_{-2 \leq t \leq 1}\, dt$$

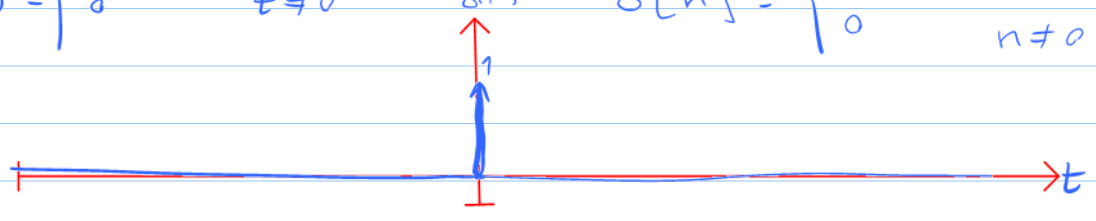
$$u(t+a) - u(t-b) = \begin{cases} 1 & -a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{1} f(t)\, \underbrace{\left(u(t+2) - u(t-1)\right)}_{-2 \leq t \leq 1}\, dt = \int_{-2}^{1} f(t)\, dt$$

$$\sum_{k=10}^{\infty} f(k)\, \underbrace{u(k-10)}_{k \geq 10} = \sum_{k=10}^{\infty} f(k)$$

② ضربه δ:

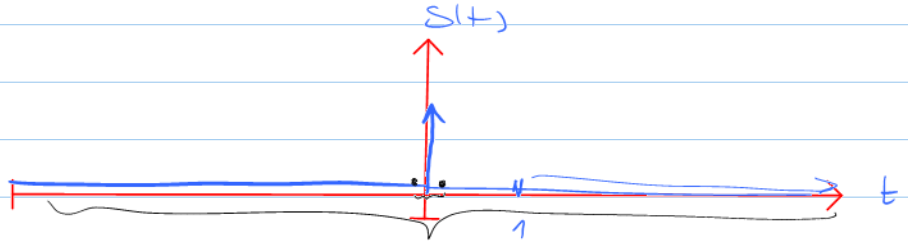
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



$$\delta(f(t)) = \begin{cases} 1 & f(t)=0 \\ 0 & f(t)\neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(2t-4) = \begin{cases} 1 & 2t-4=0 \rightarrow t=2 \\ 0 & 2t-4\neq 0 \rightarrow t\neq 2 \end{cases}$$

خواص ضربه:



1- انتگرال ضربه

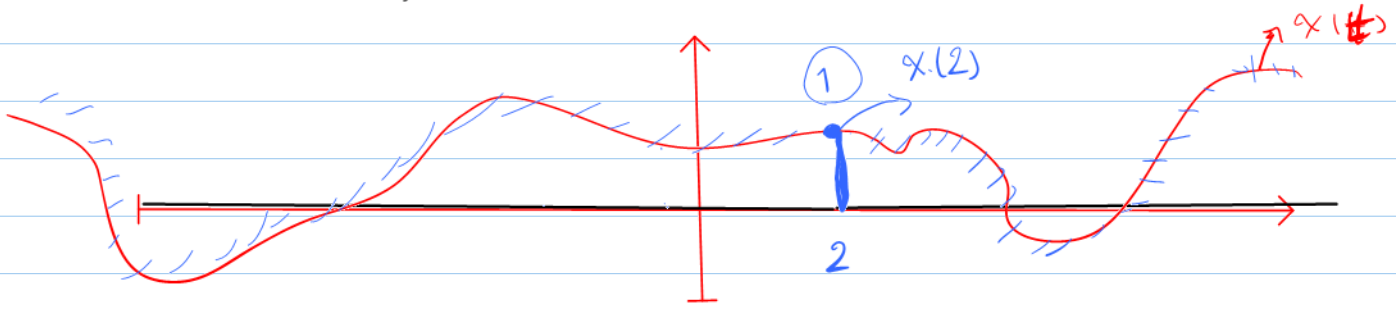
$$\int_b^c \delta(t-a)\,dt = \begin{cases} 1 & a\in[b,c] \\ 0 & a\notin[b,c] \\ & 0\notin[1,\infty] \end{cases}$$

$$\int_1^{\infty} \delta(t)\,dt = 0 \qquad \int_{-\infty}^{2} \delta(t-1)\,dt = 1$$

$$\sum_{n=-2}^{3} \delta[n-2] = 1$$

2- خاصیت غربالگری:

$$x(t)\times\delta(t-2) = x(2)\,\delta(t-2)$$



$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0) \qquad (t=t_0)$$

$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0] \qquad (n=n_0)$$

مثال:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\delta[k-1] = \cos\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)\delta[k-1] = 0$$

$k=1$

هرجایی در δ مورد نظر صفر شود، کل حاصلضرب برابر صفر می‌شود.

$$\delta(t-2)\,\delta(t-10) = \delta(8)\,\delta(t-10) = 0$$

$t=10$

$$\delta(8) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases} = 0$$

$$\delta(t-2)\,\delta(t-2) = 1\cdot\delta(t-2) = \delta(t-2)$$

$t=2$

نکته: در انتگرال یا سیگنال، هرگاه δ دیدید ابتدا حاصلضرب عبارتی را با آن حل کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-2)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(2)\,\delta(t-2)\,dt$$

$t=2$

$x(2)$ مقدار x در لحظه 2 می‌باشد.

$$= x(2)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)\,dt = x(2)\times 1 = x(2)$$

(2)

سؤال ۹۵. اگر $x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\delta(t-k\pi)$ و $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos(\pi t^2)\,\delta(t-k)$

و $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ باشد در این صورت:

۱) x_1، x_2 متناوب ولی x_3 نامتناوب

2) هر سه متناوب

۳) x_1 متناوب و x_2، x_3 نامتناوب

۴) هر سه نامتناوب

حل دانشجو

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{t}{3}\right) \delta(t - k\pi)$$

$t = k\pi$

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \delta(t - k\pi)$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,\mathbb{Z}(t - kT_0)$: یادآوری

$M \times T_0$ متناوب با

$f(k)$

M

$$f(k) = \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) \rightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \checkmark$$

$f(k)$ ، $M = 6$

$T_0 = \pi \rightarrow x_1(t)$ ، $6 \times \pi$

x_1 متناوب با 6π است.

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\pi t^2)\, \delta(t - k)$$

$t = k$

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(\pi k^2)}_{f(k)}\, \delta(t - k)$$

$T_0 = 1$

اگر سیگنال گسسته $f(k)$ متناوب با M باشد ...

$\cos(\pi k^2) \rightarrow N_0 = ?$

$\cos(\pi k) \rightarrow N_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

k^2

$\cos(\pi k^2) \rightarrow N_0 = 2$

$x_2(t) \rightarrow M \times T_0 = 2 \times 1 = 2$

$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$

T_0 ← 6π ← 2

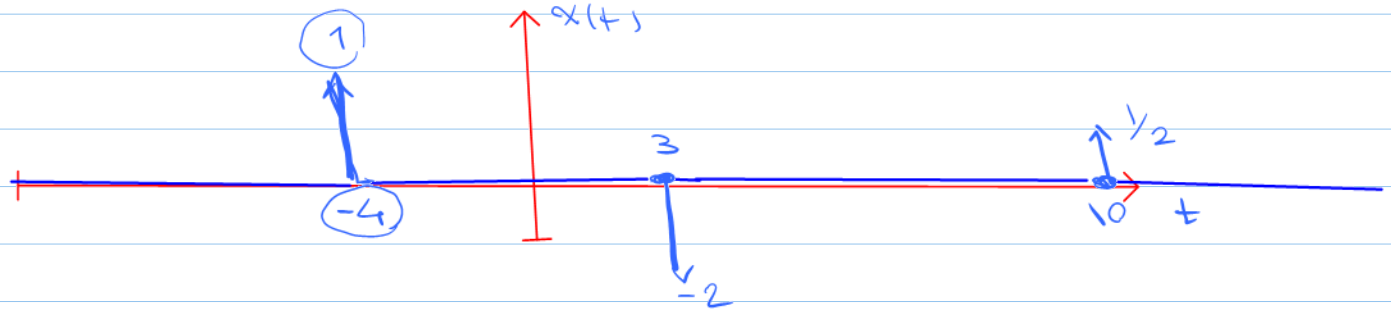
x_3 غیرتناوبی

وجود ندارد $= T_0 =$ ک.م.م $\{6\pi, 2\}$

3- جمع ضربه‌ها

$(a+b)\,\delta(t) = a\,\delta(t) + b\,\delta(t)$

جهت پیکانی را برحسب ضربه بنویسید:



$x(t) = -1\,\delta(t-(-4)) + -2\,\delta(t-3) + \frac{1}{2}\,\delta(t-10)$

4- مقیاس دهی

$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$

(*) $\delta(a\,f(t)) = \frac{1}{|a|}\,\delta(f(t))$

$\delta(2t) = \frac{1}{|2|}\,\delta(t)$



(*) $\delta[a f[n]] = \delta[f[n]]$

حل:

$\delta[2n] = \delta[n]$

$\delta[2n-2] = \delta[n-1]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta^{(n)}(\tau - t_0)\,d\tau = ?$$ -5

انتگرالی از مشتق ضربه:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_0)\,\delta^{(n)}(\tau)\,d\tau = (-1)^n \left.\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right|_{t=t_0}$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|f'(t)|_{t=t_i}|}$$ -6

$\delta(t^2 - 1)$ و $\delta(\cos(t)(t-2)) = ?$

t_iها ریشه‌های $f(t)$ هستند.

$\delta(\underbrace{8t - t^3}_{f(t)}) = ?$ برحسب ضابطه‌ی ضربه بنویسید.

① ریشه‌های $f(t)$: $8t - t^3 = 0$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \sqrt{8} \\ t_3 = -\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\delta(8t - t^3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta(t - t_i)}{|f'(t_i)|}$$

$$f'(t) = 8 - 3t^2$$

$$\delta(8t - t^3) = \frac{\delta(t-0)}{|8 - 3\times 0^2|} + \frac{\delta(t - \sqrt{8})}{|8 - 3(\sqrt{8})^2|} + \frac{\delta(t - (-\sqrt{8}))}{|8 - 3(-\sqrt{8})^2|}$$

$$\delta(8t - t^3) = \frac{\delta(t)}{8} + \frac{\delta(t-\sqrt{8})}{16} + \frac{\delta(t+\sqrt{8})}{16}$$

هرگاه داخل δ عبارتی به غیر $at \mp b$ باشد از خاصیت (6) استفاده می‌کنیم.

$$\delta(at \mp b)$$

مثال ۹. حاصل انتگرال زیر که در آن δ تابع ضربه و δ' مشتق آن است، کدام است؟ 2 ۰ ۱ -۱

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[(t+2)\,\delta'(t+1) + (e^{-|t|} + t^2 + 2)\,\delta(e^{-|t|} + t^2 + 1) \right] dt$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (t+2)\,\delta'(t+1)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-|t|}+t^2+2)\,\delta(e^{-|t|}+t^2+1)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(t+2)}_{x(t)}\,\delta^{(1)}(t+1)\,dt = (-1)^1\,1 = -1$$

n, $-t_0$, $t_0 = -1$

$t+1 = t-(-1)$, t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta^{(n)}(\tau - t_0)\,d\tau = (-1)^n\,x^{(n)}(t_0)$$

$$x'(\tau) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-|t|}+t^2+2)\,\underline{\delta(e^{-|t|}+t^2+1)}\,dt$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

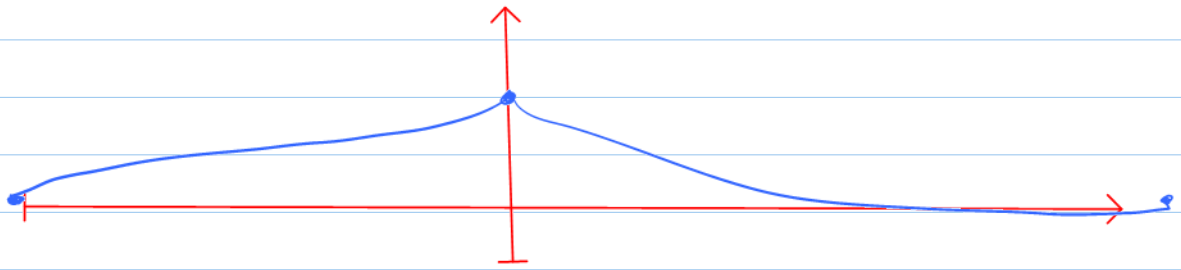
$$\delta(at \mp b) \longrightarrow$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}$$

$$\delta(\underbrace{e^{-|t|}+t^2+1}_{f(t)}) = ?$$

$$e^{-|t|}+t^2+1 = 0 \longrightarrow t = ?$$

$e^{-|t|}$, t^2 , 1



$e^{-|t|} > 0$ هردو (مثبت) > 0

$t^2 \geq 0 \rightarrow t^2+1 \geq 1$

$1 > 0$

$$e^{-|t|} + t^2 + 1 \geq 1$$

$$\delta(e^{-|t|} + t^2 + 1) = 0$$

$$\delta(F(t)) = \begin{cases} \infty & F(t) = 0 \\ 0 & F(t) \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-|t|} + t^2 + 2) \times 0 \, dt = 0$$

$$I = -1 + 0 = -1$$

ارتباط ضربه و پله :

1) $\frac{du(t+a)}{dt} = \delta(t+a)$

ضربه = مشتق پله

2) $u[n+a] - u[n+a-1] = \delta[n+a]$

$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t-t_0)\,dt = u(\beta - t_0) - u(\alpha - t_0)$

$\sum_{k=m_1}^{m_2} \delta(n-n_0) = u[m_2 - n_0] - u[m_1 - 1 - n_0]$

الف) $\sum_{k=-\infty}^{n-2} (k+2)\,\delta[k+1]$

ب) $\sum_{k=-\infty}^{n} 3^k\,\delta[2-k]$

ج) $\int_{t-5}^{t} z^2\,\delta(2z-6)\,dz$

$$\sum_{k=-\infty}^{n-2} (k+2)\,\delta[\underbrace{k+1}_{k=-1}] = ?$$

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} \delta[k-n_0] = u[m_2-n_0] - u[m_1-1-n_0]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n-2} (-1+2)\,\delta(k+1) = \sum_{k=-\infty}^{\overbrace{n-2}^{m_2}} \delta(\underbrace{k+1}_{n_0=-1}) \quad (k=-\infty = m_1)$$

$$= u[n-2+1] - u[-\infty + \infty]$$

$$= u[n-1] - u[-\infty] = u[n-1]$$

$$\sum_{k=a}^{b} \delta[k-c] = \begin{cases} 1 & c \in [a,b] \\ 0 & c \notin [a,b] \end{cases}$$:يُذكّر

$$\hookrightarrow) \sum_{k=-\infty}^{n} 3^k\,\delta[\underbrace{2-k}_{k=2}] = \sum_{k=-\infty}^{n} \overbrace{3^2}\,\delta[2-k] =$$

$$= 9 \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[2-k]$$

$$= 9 \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k-2] = 9\left(u[n-2] - u[-\infty + 2]\right)$$

$$= 9\,u[n-2]$$

$$\delta[a f(n)] = \delta[f(n)]$$

$$\delta[\underbrace{-1(k-2)}_{2-k}] = \delta[k-2]$$

2) $\int_{t-5}^{t} \tau^2 \delta(2\tau - 6)\, d\tau$ ($\tau = 3$)

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0)\, dt = u(\beta - t_0) - u(\alpha - t_0)$$

$$= \int_{t-5}^{t} 9\,\delta(2\tau - 6)\, d\tau = 9\int_{t-5}^{t} \delta(2\tau - 6)\, d\tau$$

$$\delta(a f(t)) = \frac{1}{|a|}\delta(f(t))$$

$$\delta(2(\tau - 3)) = \frac{1}{|2|}\delta(\tau - 3)$$

$$= 9\int_{t-5}^{t} \frac{1}{2}\delta(\tau - 3)\, d\tau = \frac{9}{2}\int_{\alpha=t-5}^{\beta=t} \delta(\tau - 3)\, d\tau$$

$$= \frac{9}{2}\left(u(t-3) - u(t-5-3)\right)$$

$$= \frac{9}{2}\left(u(t-3) - u(t-8)\right) \checkmark$$

آزاد ۳۷ . تابع $e^{-t}\delta'(t)$ برابر کدام گزینه است؟

$\delta'(t)$ $\quad \delta'(t) + \delta(t)$ $\quad -\delta(t)$ $\quad 0$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right) = f'(t)g(t) + g'(t)f(t)$$

$$e^{-t}\delta'(t) = ?$$

$$e^{-t}\delta(t) = e^{-0}\delta(t)$$

$t=0$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\delta(t)\right) = \frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$-e^{-t}\delta(t) + e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t)$$

$$-\delta(t) + e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t)$$

$$e^{-t}\delta'(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

آزاد ۹۸ . حاصل انتگرال $I = \int_0^{\infty} (t^2+1)\left(\delta'(t-3) + \delta(t^2-1)\right) dt$ کدام است؟

8 7 -5 -4

$$I = \int_0^{\infty} \left((t^2+1)\,\delta'(t-3) + (t^2+1)\,\delta(t^2-1) \right) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} (t^2+1)\,\delta'(t-3)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\infty} (t^2+1)\,\delta(t^2-1)\,dt}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \underbrace{(t^2+1)}_{x(t)}\, \overset{n=1}{\overset{\downarrow}{\delta}}(t-\underbrace{3}_{t_0})\,dt = (-1)^1 \times 2(+3) = \underline{-6}$$

$$\int x(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = (-1)^n\, x^{(n)}(t_0)$$

$$x(t) = t^2+1 \qquad x'(t) = 2t$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} (t^2+1)\,\delta(t^2-1)\,dt$$

$\delta(t^2-1)$ → $t = \pm 1$?

$$\delta(at \mp b)$$

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}$$

$$I_2 = 2\int_0^{\infty} \delta(t^2-1)\,dt = ?$$

$t_1 = 1$

$t_2 = -1$

$$\delta(t^2-1) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}$$

$f(t) = t^2-1 \longrightarrow$ $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ $\qquad f'(t) = 2t$

$$\delta(t^2-1) = \frac{\delta(t-1)}{|2\times 1|} + \frac{\delta(t-(-1))}{|2\times -1|}$$

$$\delta(t^2-1) = \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)$$

$$I_2 = \int_0^\infty (t^2+1)\left(\frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)\right) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}(t^2+1)\,\delta(t-1)\,dt + \int_0^\infty \frac{1}{2}(t^2+1)\,\delta(t+1)\,dt$$

($\delta(t-1)$: $t=1$; $\delta(t+1)$: $t=-1$)

$$= \int_0^\infty \delta(t-1)\,dt + \int_0^\infty \delta(t+1)\,dt$$

$$= 1 + 0 = 1$$

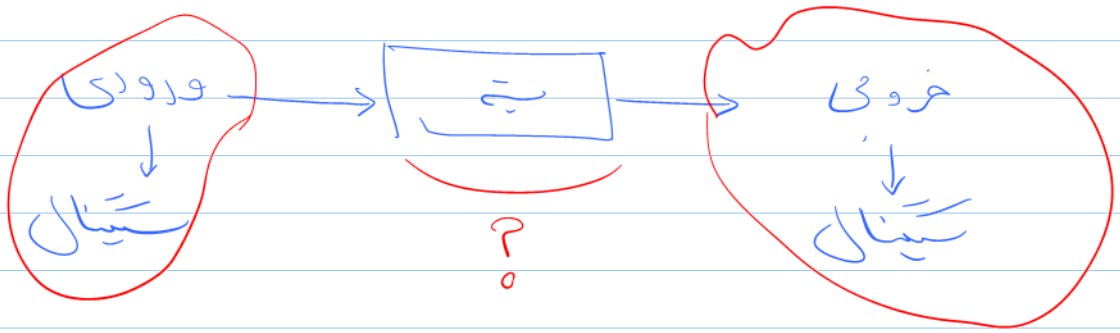
$$I = -6 + 1 = -5$$

$$2 \neq 5$$

خواص سیگنال‌ها

↓

تجزیه و تحلیل سیستم



سیستم زمان پیوسته: اگر ورودی و خروجی سیستم پیوسته باشد

سیستم گسسته: ... گسسته

خواص سیستم‌ها ← خطا

TI یا TV

حافظه

معکوس پذیری

علی

پایداری

«جلسه دوم سیگنال»
«بررسی سیستم‌ها»

سیستم: هر جعبه‌ای که ورودی و خروجی دارد.



$y(t) = x(t) + x(t-2)$

توصیف ریاضی سیستم = معادله

معادله سیستم: رابطه ریاضی‌ای که خروجی y در لحظه t یا n را برحسب ورودی x بیان می‌کند و این رابطه به ازای همه ورودی‌ها صادق است.

معادله سیستم خروجی را به ازای هر ورودی توصیف می‌کند.



$y(t) = x^2(t) - 1$

* از روی یک یا دو ورودی خاص، معادله قابل تشخیص نیست.



$y(t) = x^2(t) + x(t-1)$

$\sin(t) \longrightarrow \sin^2(t) + \sin(t-1)$

$u(t) \not\longrightarrow u^2(t) + u(t-1)$ ✗

در یک سیستم به ازای ورودی $x(t) = \cos(t)$ خروجی $2\cos^2(t) - 1$ تولید می‌شود. معادله سیستم؟

$x(t) = \cos(t) \longrightarrow y(t) = 2\cos^2(t) - 1$

$y(t) = 2x^2(t) - 1$ ~~معادله سیستم~~ ✗

$2\cos^2 - 1 = \cos(2t)$

$x(t) = \cos(t) \longrightarrow y(t) = \cos(2t) = x(2t)$

$y(t) = x(2t)$ X

* حرفی در لفظ t یا n باید برحسب ورودی ها توسیا شود.

$y(t) = x(2t) + x(t)$ ✓

$y(t-2) = x(2t) + x(t)$ X

$t - 2 = t' \longrightarrow t = t' + 2$

✓ $y(t') = x(2(t'+2)) + x(t'+2)$

$\int_{-\infty}^{t} \frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} x(t)$ X $\qquad \underline{y(t)} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ ✓

$\underbrace{y[n] - y[n-1]}_{\text{سنتی } y} = x[n]$ X

$y[n] = y[n-1] + x[n]$ X

معادل زیر: $\frac{dy}{dt} = x \longrightarrow \int \frac{dy}{dt} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

$\sum (y[n] - y[n-1]) = \sum x[n]$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} y[k]-y[k-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} y[k] - \sum_{k=-\infty}^{n} y[k-1] = ? \quad y[n]$$

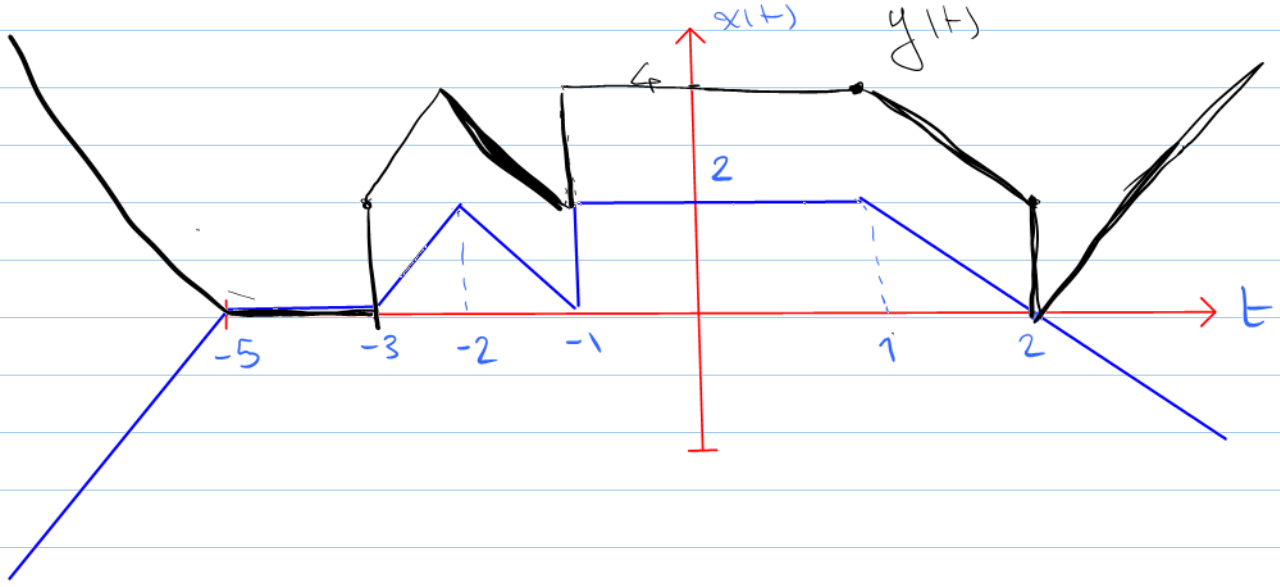
$$y[n]+y[n-1]+\dots+y[-\infty] - (y[n-1]+y[n-2]+\dots+y[-\infty-1])$$

$$= y[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \checkmark$$

مثال. سیستمی با معادله زیر داده شده است. پاسخ $y(t)$ سیستم را به ورودی $x(t)$ داده شده در شکل، حدوداً رسم کنید.

$$y(t) = \begin{cases} x(t)+2 & x(t)>0 \\ -x(t) & x(t)\le 0 \end{cases}$$

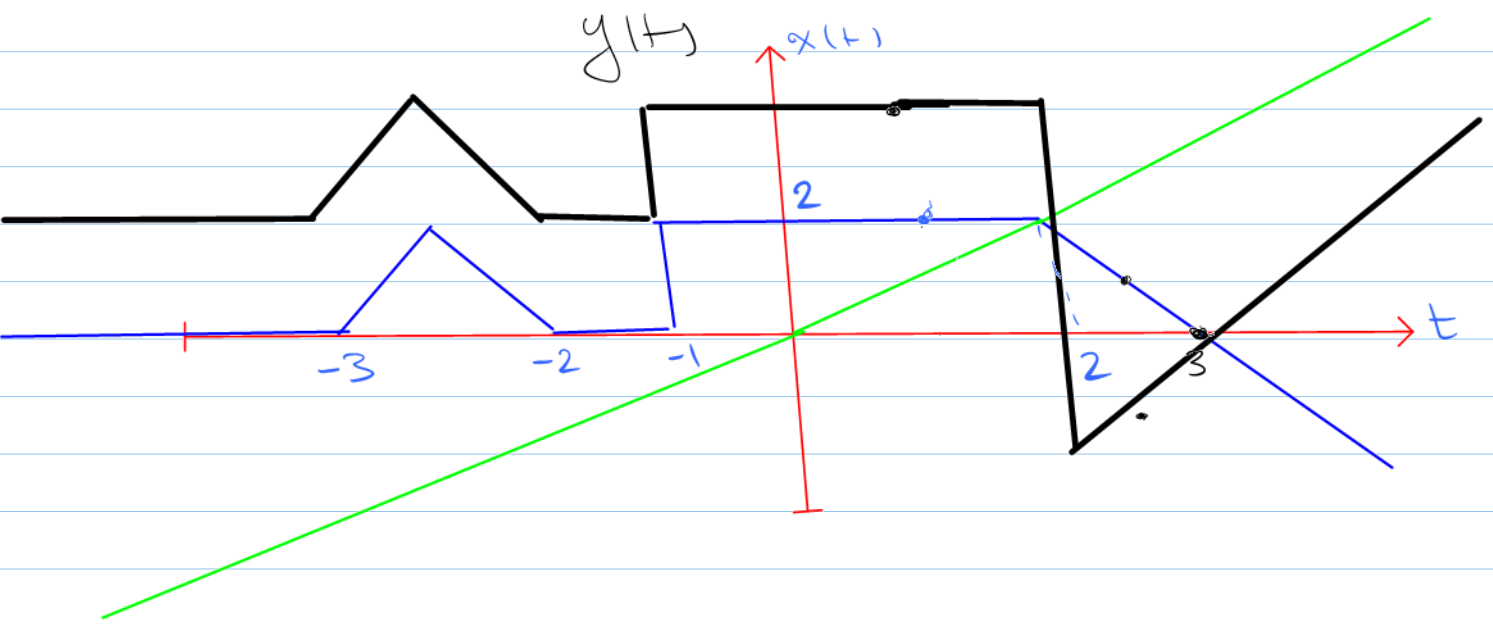


$t=1 \rightarrow x(1)=2 \rightarrow y(1) = 2+2=4$

به ازای ورودی $x(t)$ ، خروجی سیستم را رسم کنید.

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + 2 & x(t) \geq t \\ -x(t) & x(t) < t \end{cases}$$

$f(t) = t$



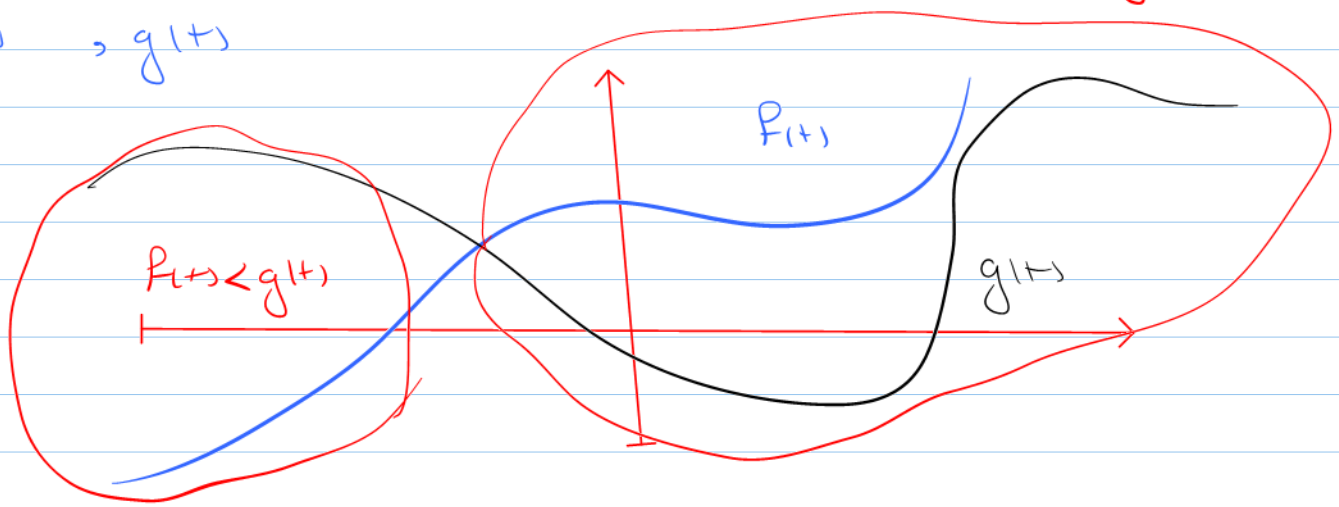
$t=1 \leq x(t)=2$ ✓ $\longrightarrow$ $y(t) = 2 + 2 = 4$

$t=3 \geq x(t)=0 \longrightarrow$ $y(t) = -x0 = 0$

$t=2.5 \geq x(t)=1 \longrightarrow$ $y(t) = -1 = -1$

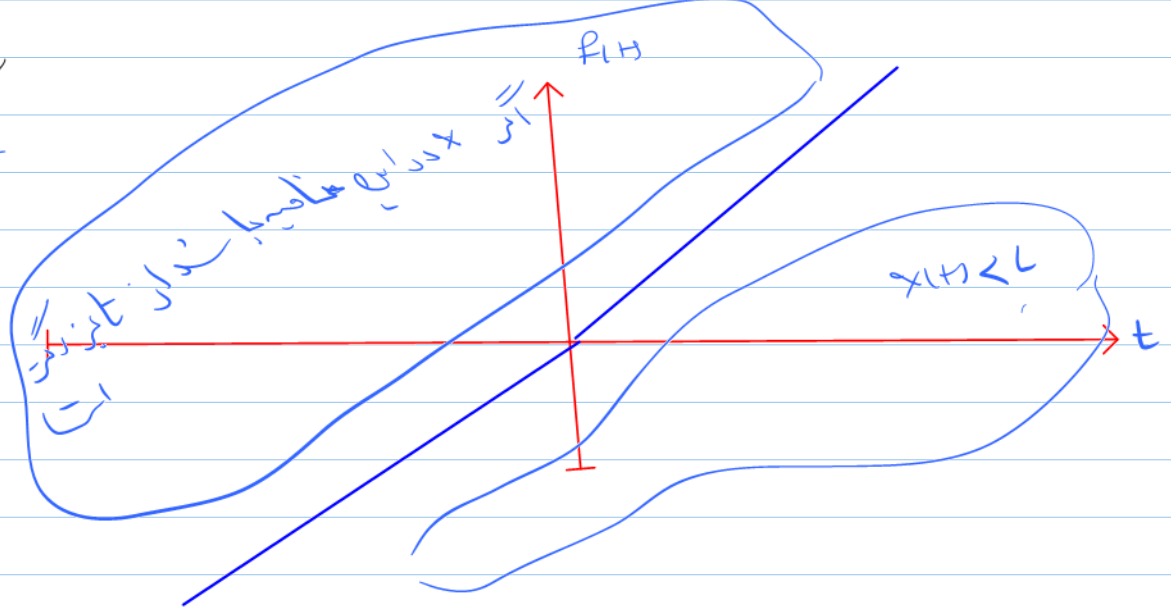
$f(t) \geq g(t)$

$f(t)$ ، $g(t)$

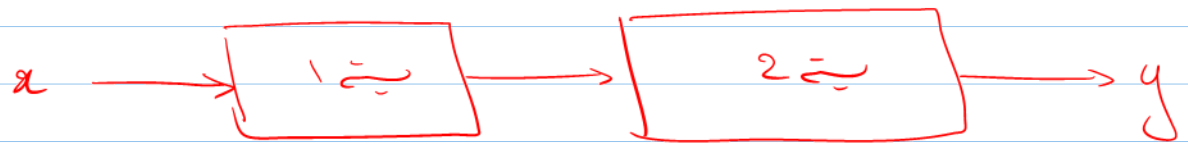


$f(t) = t$

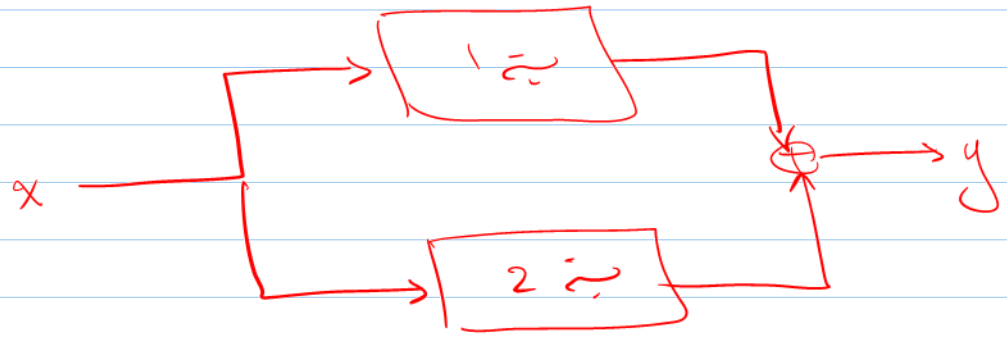
$x(t) \geq t$



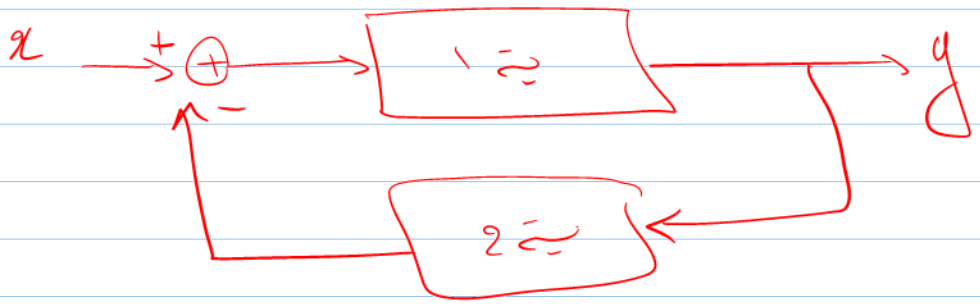
مثال سیستم‌های سری - موازی - فیدبک



سری



موازی

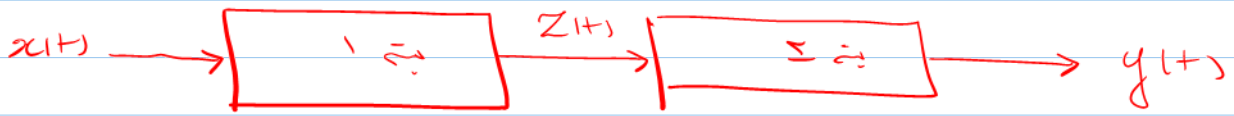


فیدبک

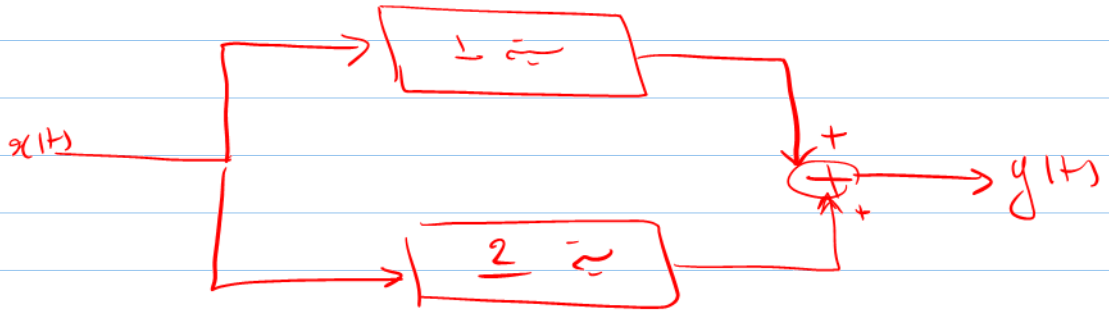
مثال. سیستم زیر را یکبار به صورت سری و یکبار به صورت موازی متصل کنید. رابطه کلی سیستم ها را بدست آورید.

(1) $y(t) = \begin{cases} x^2(-3t+1) & x(t) \geq 0 \\ -x(2t-1) & x(t) < 0 \end{cases}$

(2) $y(t) = x^2(t+1) - 4$



سری



موازی

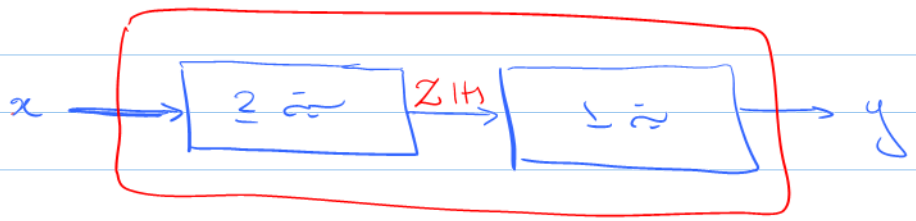
سیستم ۲ → ورودی x → سیستم ۲ → خروجی $z(t) = x^2(t+1) - 4$

ورودی f → سیستم ۲ → $y(t) = f^2(t+1) - 4$ ~~$y(t)$~~

$f(t)$ → سیستم ۲ → $y(t) = f^2(t+1) - 4$

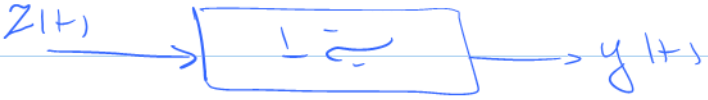
$z_{x(t)}$ → سیستم ۱ → $y(t) = \begin{cases} z^2(-3t+1) & z_{x(t)} \geq 0 \\ -z(2t-1) & z_{x(t)} < 0 \end{cases}$

سیستم کلی



$z(t) = x^2(t+1) - 4$ سیستم 2

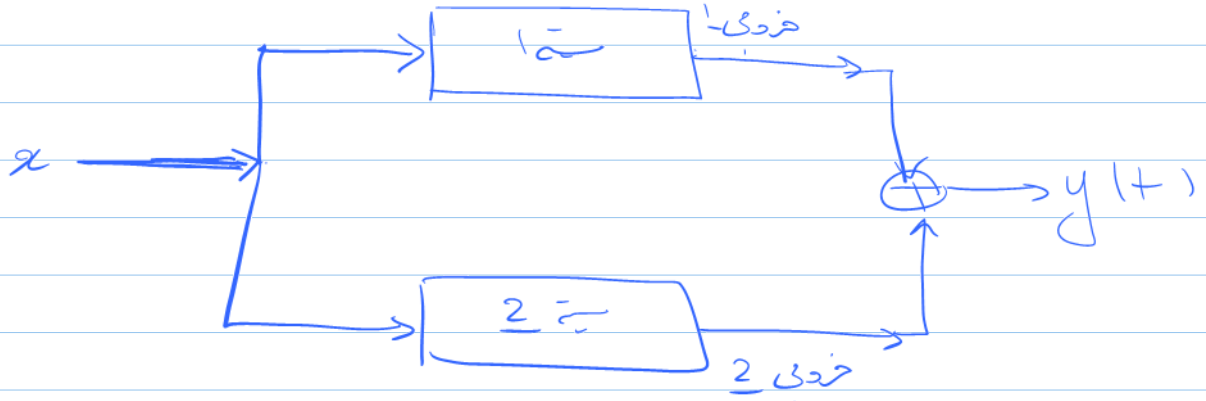
$$y(t) = \begin{cases} z^2(-3t+1) & z(t) \geq 0 \quad \text{سیستم 1} \\ -z(2t-1) & z(t) < 0 \end{cases}$$



$$\text{سیستم کلی } y(t) = \begin{cases} (x^2(-3t+2) - 4)^2 & x^2(t+1) - 4 \geq 0 \\ -x^2(2t) + 4 & x^2(t+1) - 4 < 0 \end{cases}$$

$z(t) = x^2(t+1) - 4$ $\qquad z(-3t+1) = \left(x^2((-3t+1)+1) - 4\right)^2$

$-z(2t-1) = -\left(x^2(2t-1+1) - 4\right)$



$$\text{خروجی } 1 = \begin{cases} x^2(-3t+1) & x(t+1) \geq 0 \\ -x(2t-1) & x(t+1) < 0 \end{cases}$$

$$\text{خروجی } 2 = x^2(t+1) - 4$$

$$y(t+1) = \text{خروجی } 1 + \text{خروجی } 2$$

$$= \begin{cases} x^2(-3t+1) & x(t+1) \geq 0 \\ -x(2t-1) & x(t+1) < 0 \end{cases} + \begin{cases} x^2(t+1) - 4 & x(t+1) \geq 0 \\ x^2(t+1) - 4 & x(t+1) < 0 \end{cases}$$

$$y(t+1) = \begin{cases} x^2(-3t+1) + x^2(t+1) - 4 & x(t+1) \geq 0 \\ -x(2t-1) + x^2(t+1) - 4 & x(t+1) < 0 \end{cases}$$

بررسی خواص سیستما

جلسه ۱۱ سیگنال

«خواص سیستم‌ها»

۱- خطی بودن: سیستم خطی است اگر وقتی اگر علی بوده و خاصیت جمع آثار را داشته باشد.

علی: یعنی اگر ورودی در یک عدد ضرب شود، خروجی هم در آن عدد ضرب می‌شود.







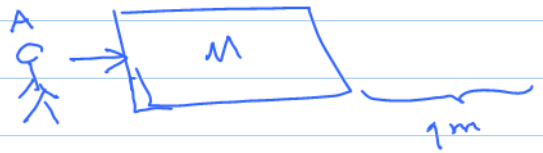


خاصیت جمع آثار: اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند، خروجی آن‌ها هم با هم جمع می‌شود.

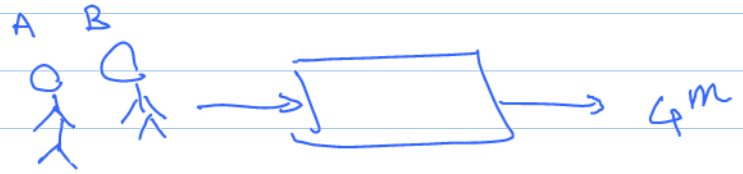


















در سیستم خطی اگر ورودی در عددی ضرب شود خروجی هم در آن عدد ضرب می‌شود، و اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند خروجی‌ها هم با هم جمع می‌شوند.

دو شرط بررسی خطی بودن (خطی‌گی):

سیستم $y = x(t+1) + x(t-1)$

① $x_1 \longrightarrow y_1(t+1) = x_1(t+1) + x_1(t-1)$

② $x_2 \longrightarrow y_2(t+1) = x_2(t+1) + x_2(t-1)$

③ ورودی $= ax_1 + x_2$

$y(t) =$ ورودی لحظه t + ورودی لحظه $t-1$ $= x(t) + x(t-1)$

$y_3(t) = ax_1(t)+x_2(t) + ax_1(t-1)+x_2(t-1)$

حال بررسی کنیم آیا y_3 برابر با ay_1+y_2 هست یا نه؟

$a(x_1(t)+x_1(t-1)) + (x_2(t)+x_2(t-1)) = ay_1+y_2$

$ax_1(t) + ax_1(t-1) + x_2(t) + x_2(t-1) = y_3$

$ay_1+y_2 = y_3 \rightarrow$ خطا است.

سپس: $y(t) = 2x(t)+1$

خروجی $=$ ورودی $\times 2 + 1$

① $x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = 2x_1(t) + 1$

② $x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = 2x_2(t) + 1$

③ $a x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = 2(a x_1(t) + x_2(t)) + 1$

④ $a y_1 + y_2 \overset{?}{=} y_3$

$2a x_1(t) + a + 2x_2(t) + 1 \overset{?}{\neq} 2a x_1(t) + 2x_2(t) + 1$

غیرخطی (خطی - خنثی)

بررسی خطا بودن یا دینامیک بودن سیستم:

عملگرهای خطی: $\frac{d}{dt}$ و $\int$

$x^0(t) = 1$ $\qquad$ $2x^0(t) = 2 \leftarrow$ عدد یعنی $x^0(t)$

* اگر در معادله سیستم متغیر x دارای توان غیر از ۱ باشد یا در حاصل ضرب قرار گیرد یا در تابع غیرخطی قرار گیرد سیستم غیرخطی است و در غیر اینصورت سیستم خطی است.

* در بردی خطی بودن فقط به x بستگی دارد که x ندارد یا عددی

ثابت می‌شود. داخل x را کاری ندارد.

$y(t) = 2x'(t+1) + 1x^0$ → غیرخطی

$\tan(x)$

$y(t) = x'(t^2-1) + x'(\tan(t+1))$ خطی

$y(t) = \underbrace{\cos(t)}_{\text{عدد}} x(t+1) + \underbrace{e^{t^2-1} \times e^{\tan(t)}}_{\text{عدد}} x(t)$

$y = \text{عدد} \times x'(t+1) + \text{عدد} \times x'(t)$ خطی

نکته

* در بردی خواص فقط از دیدی مناسبه سیستم انجام می‌شود.

آیا سیستم $y[n] - y[n-1] = x[n]$ خطی است؟ (از مناسبه قبل)

$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n}}_{\text{عملگر خطی}} x[k]$ → خطی

؟مناسبه سیستم

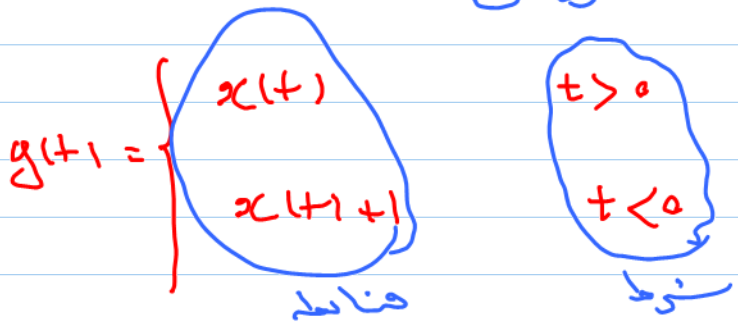
Im ~ ~ ~ موهومی . ~ ~

Re ← عددی که کلیت حقیقی را جدا می‌کند.

عدد غیر حقیقی

$y(t) = \underbrace{Re}_{\text{تابع}}\{\underbrace{x(t)}_{\text{غیر خطی}}\}$

غیر خطی



سیستم‌های چند مبدله‌ای:

اگر x (ورودی) در سیستم

چند مبدله‌ای باشد سیستم با شرط زیر خطی است:

(1) تمام مبدله‌ها خطی باشند

(2) شرط‌ها برحسب x نباشد.

$g = x(t)$

$g(t) = x(t)+1$ ✗

مثال: کدام یک از سیستم‌های زیر خطی است؟

1) $g(t) = \begin{cases} \cos(t)x(t+2) & t>0 \\ \frac{x^2(t-1)}{x(t)} & t\le 0 \end{cases}$

2) $g(t) = \begin{cases} x(t) & x(t-1)<1 \\ x(t)+\cos(t) & x(t-1)\ge 1 \end{cases}$

3) $g(t) = \begin{cases} x(t)+\cos(t)x(t) & t>0 \\ 3 & t=0 \\ x(t) & t<0 \end{cases}$

4) $g(t) = \begin{cases} x(t) & t<1 \\ -x(t)+tx(t) & t\ge 1 \end{cases}$

حل حل دانشجو

$$g(t)=\begin{cases} x(t)+\cos(t)x(t+2) & t>0 \\ \dfrac{x^2(t-1)}{x(t)} & t\le 0 \end{cases}$$ ✗1

$$g(t)=\begin{cases} x(t)+\cos(t)x(t) & t>0 \\ 3x^0 & t=0 \\ x(t) & t<0 \end{cases}$$ ✗3

$$g(t)=\begin{cases} x(t)x(t-1) & t>1 \\ x(t)+\cos(t)x(t) & 1\ge t \end{cases}$$ ✗2

$$g(t)=\begin{cases} x(t) & t>1 \\ -x(t)+tx(t) & 1\ge t \end{cases}$$ ✓4

$$y(t) = \begin{cases} \cos(t)\, x(t-2) & t > 0 \\ \dfrac{x^2(t)}{x(t)} & t \le 0 \end{cases}$$

$y(t) = \cos x\, x(t-2)$ ✓

$y(t) = \dfrac{x^2(t-1)}{x(t)}$ غير خطي ، مزج ، $= x(t)$

2) $$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t-1) > 1 \\ x(t) + \cos(t) & x(t-1) \le 1 \end{cases}$$ X

$y(t) = x'(t)$ ✓

$y(t) = x'(t) + \cos x(t)$ غير خطي

3) $$y(t) = \begin{cases} x(t) + \cos(t)\, x(t) & t > 0 \\ 3 & t = 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$$

$y(t) = x'(t) + \cos x\, x'(t)$ ✓

$y(t) = 3\, x'(t)$ X

نکته: اگر سیستمی باشد به ازای ورودی $x=0$، حتماً $y=0$ می‌شود.

4) $y(t) = \begin{cases} x(t) & t>1 \\ -x(t) + t\,x(t) & t\le 1 \end{cases}$ ✓

$y(t) = -\dot{x}(t) + \text{عدد} \times \dot{x}(t)$ ✓

2- تغییر پذیری با زمان:

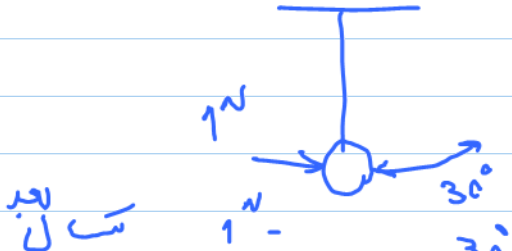


$y(t) = \sin(t) + 2$

تغییر پذیر با زمان: یعنی خود سیستم (مشخصات سیستم) با گذر زمان تغییر کند.

اگر خودروی ما موقع رد شدن از کنار ۵ تا ۱۰۰ تا، ۲ ثانیه است.

پس از ۱ سال اگر شتاب بازدم ۵ تا ۱۰۰ تا ۲ ثانیه باشد؟



سیال بعد ← تغییر ناپذیر

مشخصات سیستم ← مقایسه سیستم

اگر مقایسه سیستم با گذر زمان تغییر نکند سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

$y(t) = x(t)$ $\quad t=1$

$y(t) = 10x(t)$ $\quad t=10$

$y(t) = tx(t)$

تغییرناپذیر با زمان : TI

تغییر پذیر با زمان : TV

روش بررسی : تستی

اگر ورودی سیستم به اندازه a شیفت پیدا کند و خروجی هم به اندازه a شیفت پیدا کند سیستم TI است.

$x(t) \longrightarrow y(t)$

$x(t-a) \longrightarrow y(t-a) \Leftarrow TI$

① $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ ② ورودی $x_1(t-a) \longrightarrow y_2(t)$

③ $y_2(t) \overset{?}{=} y_1(t-a)$

$y(t) = 2x(t) + 1$

① $y_1(t) = 2x_1(t) + 1$ ② $y_2(t) = 2x_1(t-a) + 1$

$y_1(t-a) = 2x_1(t-a) + 1 = y_2(t) \longrightarrow TI$

$y(t) = t\,x(t)$

① $y_1(t) = t\,x_1(t)$ ② $x_1(t-a) \longrightarrow y_2(t) = t\,x_1(t-a)$

③ $y_1(t-a) = (t-a)\,x_1(t-a) \overset{?}{\neq} y_2(t)$ TV

حل تمرین: سیستم اگر دارای شرایط زیر باشد TV است و غیراینصورت TI است:

① متغیر زمان بیرون x باشد ② داخل x، متغیر زمان فقط جا میاعدد

جمع یا تفریق شود و غیراینصورت TV است.

$y(t) = x(t+1)$ TI

$y(t) = t\,x(t)$ TV

خلاصه: اگر یکی از ۲ شرط زیر برقرار نباشد سیستم TV است ولی اگر هیچکدام برقرار نباشد TI است:

۱) متغیر t یا n بیرون x باشد. ۲) داخل x دستکاری غیرازشیفت انجام شود.

در بردی TV یا TI بودن به آرگومان داخل کار داریم.

$y(t) = x(-t+1)$ TV

عملیات ضرب

$y(t) = x^2(t-1)$ ✓ TI

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n > 0 \\ -x[n] & n \le 0 \end{cases}$$ TV

عملیات قدرمطلق

$y(t) = \tan(x(t)) + x(|t|)$ TV

نکته: اگر در مقابله سیت u یا δ داریم قبل از بردن x آیا I آبودن باید آن‌ها را ساده کنیم.

$$y[n] = x[n]\,u[n]$$

$$y[n] = x[n] \times \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$ TV

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\,\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]\,\delta[n-k]$$

($\delta[n-k]$: $k = n$)

$$y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[n-k]$$

($\delta[n-k]$: $k = n$)

$n \in [-\infty, n]$ ✓

$y[n] = x[n] \rightarrow$ TI

نکته: اگر داخل x به جای n یا t، عدد ثابت جابجایی باشد TV است.

$y[n] = x[2]\,x[n]$ TV

کدام یک از سیستم‌های زیر TI است؟

1) $y(t) = \cos(t)\, x(t-1)$

2) $y(t) = \sqrt{x(t-1)}$

3) $y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} \tan(x(t)) & x(t) > 0 \\ -\tan(x(-t)) & x(t) \leq 0 \end{cases}$

کدام یک از سیستم‌های زیر TI است؟

1) $y(t) = \cos(t)\, x(t-1)$ — TV

2) $y(t) = \sqrt{x(t-1)}$ ✓

3) $y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} \tan(x(t)) & x(t) > 0 \\ -\tan(x(-t)) & x(t) \leq 0 \end{cases}$

نکته: سیستم‌های دارای عملیات انتگرال:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

اگر هرکدام از شرط‌های زیر نقض شود سیستم TV است:

اما اگر همگی این شرط‌ها برقرار باشد و باز هم TV بودن یا نبودن را بخواهیم بررسی کنیم:

① متغیر انتگرال‌گیری با متغیر زمان خودی مستقل باشد.

② حدود انتگرال‌گیری عددثابت (غیر از $\pm\infty$) نباشد.

TV

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2} x(\tau)\, d\tau$$

③ حدود انتگرال‌گیری اگر آرگومان مزاحمی همچون t داشته باشد غیر از شیفت روی آن انجام شود.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t-1} x(\tau)\, d\tau$$

اگر تمام شرط‌های سه‌گانه برقرار باشد دوگام آخر:

① $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

② $x_1(t-a) \longrightarrow y_2(t)$

$y_2(t) = y_1(t-a) \rightarrow TI$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(t)\, dt$$

TV

$$y(t) = \int_{t}^{2t} x(\tau)\, d\tau$$

① ✓ ② ✓ ③ X → TV

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓ حافظه‌دار ←

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau)\, d\tau$

$x_1(t-a) \rightarrow y_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau - a)\, d\tau$

$y_1(t-a) \overset{?}{=} y_2(t)$

$$y_1(t-a) = \int_{t-a-1}^{t-a+1} x_1(\tau)\, d\tau \overset{?}{=} \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau - a)\, d\tau$$

$\tau - a = \tau' \rightarrow d\tau = d\tau'$

$\tau: t-1 \rightarrow t+1$

$\tau': t-1-a \rightarrow t+1-a$

$$y_2(t) = \int_{t-1-a}^{t+1-a} x_1(\tau')\, d\tau' \overset{?}{=} \int_{t-a-1}^{t-a+1} x_1(\tau)\, d\tau$$

TI

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓ وأما:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$x_1(t-a) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau-a)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$y_1(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau)\, e^{-(t-a-\tau)}\, d\tau \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau-a)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

(متغير افتراضي) x_1

τ'

$$\tau - a = \tau' \rightarrow \quad d\tau = d\tau' \quad \rightarrow \quad \tau = \tau' + a$$

τ: $-\infty \rightarrow t$

τ': $-\infty \rightarrow t-a$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau')\, e^{-(t-(\tau'+a))}\, d\tau'$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau')\, e^{-(t-a-\tau')}\, d\tau'$$

$$\text{II} \quad y_1(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau)\, e^{-(t-a-\tau)}\, d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-k]\, e^{-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-k]\, e^{-k}$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n-k]\, e^{-k}$$

$$x_1[n-a] \longrightarrow y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n-k-a]\, e^{-k}$$

$$y_1[n-a] = \sum_{k=-\infty}^{n-a} x_1[n-a-k]\, e^{-k} \overset{?}{\neq} \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n-k-a]\, e^{-k}$$

TV

جلسه ۱۲ سیگنال

برو تا ۸۳

۷. رابطهٔ ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته به صورت $y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{|x(t)|}; & x(t) \neq 0 \\ 0; & x(t) = 0 \end{cases}$ می‌باشد. این سیستم:

۱) خطی و تغییرپذیر با زمان است.

۲) خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

۳) غیرخطی و تغییرپذیر با زمان است.

۴) غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.

حل دانشجو

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 \times x(t) & x(t) = 0 \end{cases}$$

x در شرط‌های غیرخطی

غیرخطی و TI

۷۸- رابطهٔ بین ورودی و خروجی در یک سیستم زمان گسسته به‌صورت زیر است: برق ۹۵

$$y[n]=\begin{cases}\mathrm{Re}\{x[n-1]\} & n \text{ زوج}\\ \mathrm{Re}\{x[n-1]+x[n-2]\} & n \text{ فرد}\end{cases}$$

کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) خطی و تغییرناپذیر با زمان

۲) خطی و تغییرپذیر با زمان

۳) غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان

۴) غیرخطی و تغییرپذیر با زمان

حل دانشجو:

$y[n]=\begin{cases}\mathrm{Re}\{x[n-1]\} & n \text{ زوج}\\ \mathrm{Re}\{x[n-1]+x[n-2]\} & n \text{ فرد}\end{cases}$

غیرخطی و تغییرناپذیر

n زوج ←

n فرد

غیرخطی

۳۷

آزاد ۹۸: کدام یک از دو سیستم زیر تغییر ناپذیر با زمان است؟

(الف) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x[n-k]$

(ب) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x[k-n]$

1) الف 2) ب 3) هر دو 4) هیچ‌کدام

(الف) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|} x[n-k]$

① ✓ ② ✓ ③ ✓ خطی، تغییرناپذیر

$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|} x_1[n-k]$

$x_1[n-a] \longrightarrow y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|} x_1[n-k-a]$

$y_1[n-a] = \sum_{k=-\infty}^{n-a} 2^{-|k|} x_1[n-a-k]$ ✗ $\neq ?$ $\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|} x_1[n-a-k]$ ✗

TV

(2) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|} x[k-n]$

① ✓ ② ✓ ③ ✓ خطی، تغییرپذیر

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x_1[k-n]$$

$$x_1[n-a] \rightarrow y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x_1[k-n-a]$$

$$y_1[n-a] = \sum_{k=-\infty}^{n-a} 2^{-|k|}\, x_1[\underline{k-(n-a)}] \overset{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x_1[\underline{k-n-a}]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n-a} 2^{-|k|}\, x_1[\underbrace{k-n+a}_{k''}] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}\, x_1[\underbrace{k-a}_{k'}-n]$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{n-a} 2^{-|k'+a|}\, x_1[k'-n]$$

$k-a = k'$

$k = k'+a$

$k: -\infty \rightarrow n$

$k': -\infty \rightarrow n-a$

$k+a = k'' \rightarrow$

$k: -\infty \rightarrow n-a$

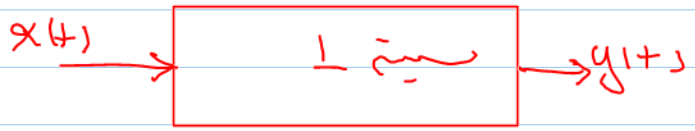
$k'': -\infty \rightarrow n$

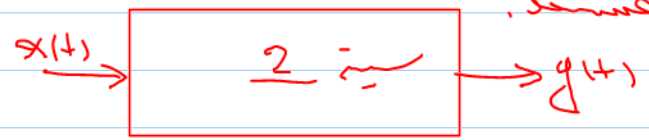
TV

$$\sum_{k''=-\infty}^{n} 2^{-|k''-a|}\, x_1[\underline{k''-n}] \overset{?}{\neq} \sum_{k'=-\infty}^{n-a} 2^{-|k'+a|}\, x_1[\underline{k'-n}]$$

X

برق ۹۳. کدام یک از سیستم‌های زیر می‌تواند LTI باشد؟ f و g توابعی ثابت و غیر صفر از t هستند.





سیستم 1: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, g(\alpha - t)\, d\alpha$

سیستم 2: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$

1) فقط 1 2) فقط 2 3) هردو 3) هیچکدام

حل دانشجو

۱ ـ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, g(\alpha - t)\, d\alpha$ LTI و TI خطا

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x'(\alpha) \times \cdots\, d\alpha$ خطی

عدم خطی

① ✓ ② ✓ ③ ✓ خطی

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\alpha)\, g(\alpha - t)\, d\alpha$

$x_1(t-b) \longrightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\alpha - b)\, g(\alpha - t)\, d\alpha$

$y_1(t-b) = \int_{-\infty}^{t-b} x_1(\alpha)\, g(\alpha - (t-b))\, d\alpha \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{t} x_1(\underbrace{\alpha - b}_{\alpha'})\, g(\alpha - t)\, d\alpha$

$\alpha - b = \alpha'$ $\quad d\alpha = d\alpha'$

$\alpha = \alpha' + b$ $\quad \alpha: -\infty \longrightarrow t$

$\alpha': -\infty \longrightarrow t-b$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t-b} x_1(\alpha')\, g(\alpha'+b-t)\, d\alpha'$$

α' بدل α

$$\| $$

$$y_1(t-b) = \int_{-\infty}^{t-b} x_1(\alpha)\, g(\alpha+b-t)\, d\alpha$$

TI

LTI = TI و خطي

2 ـ:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t-\alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha$$

$>x<$

$$y(t) = \int \dot{x}(t-\alpha) \times >x< \longrightarrow$$

خطي

① ✓ ② ✓ ③ ✓

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\, x_1(t-\alpha)\, d\alpha$$

$$x_1(t-b) \longrightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\, x_1(t-\alpha-b)\, d\alpha$$

$$y_1(t-b) = \int_{-\infty}^{t-b} f(\alpha)\, x_1(t-b-\alpha)\, d\alpha \overset{?}{\neq} y_2(t)$$

نکته:

هرگاه مورد سوال این باشد که سیستمی دینامیکی خاصی است یا نه و در صورت دینامیکی بودن یا خیر بودن آن را بررسی کنیم:

$$x_1(t) = \cos(t) \longrightarrow y_1(t) = f(t)$$

$$x_2(t) = \sin(t) \longrightarrow y_2(t) = ?$$

باید ورودی جدید را با استفاده از خاصیت خطی سیستم برحسب ورودی اول بنویسیم و سپس عملیات را روی خروجی اول اعمال کنیم تا خروجی سیستم بدست آید.

عملیات جبری:
- ورودی و خروجی را با توان درجه عدد مزبور کرد.
- ورودی های مختلف را با هم جمع یا تفریق کرد.

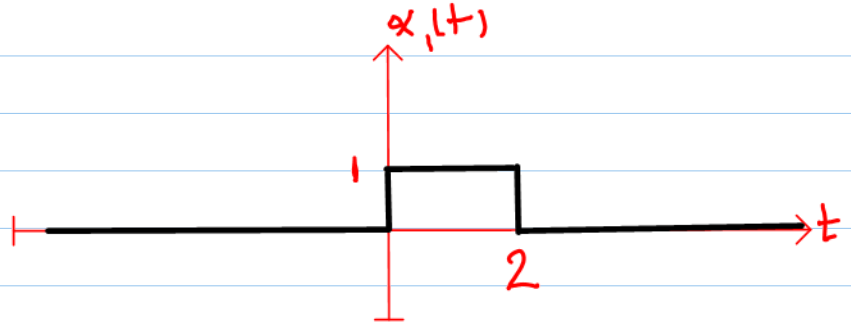
حفظا ←

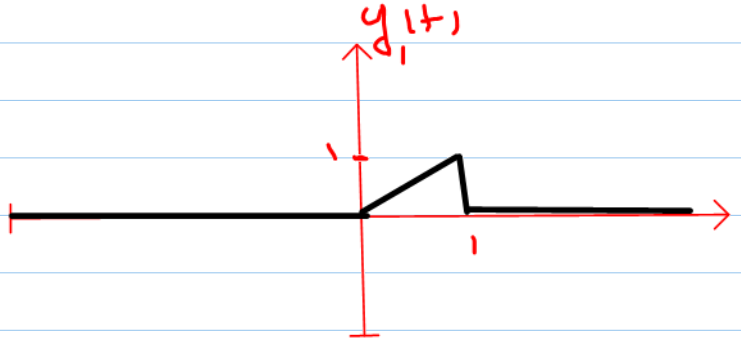
TI ← اگر ورودی را شیفت دهیم خروجی هم شیفت پیدا می‌کند.

عملیات جبری ← شیفت

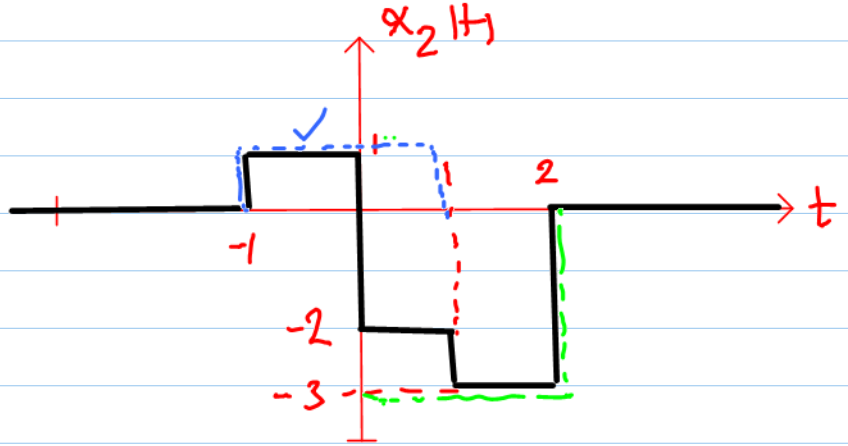
مثال: در یک سیستم LTI، به ازای ورودی $x_1(t)$، خروجی $y_1(t)$ بدست آمده است.

خروجی سیستم به ازای $x_2(t)$ را بدست آورید.





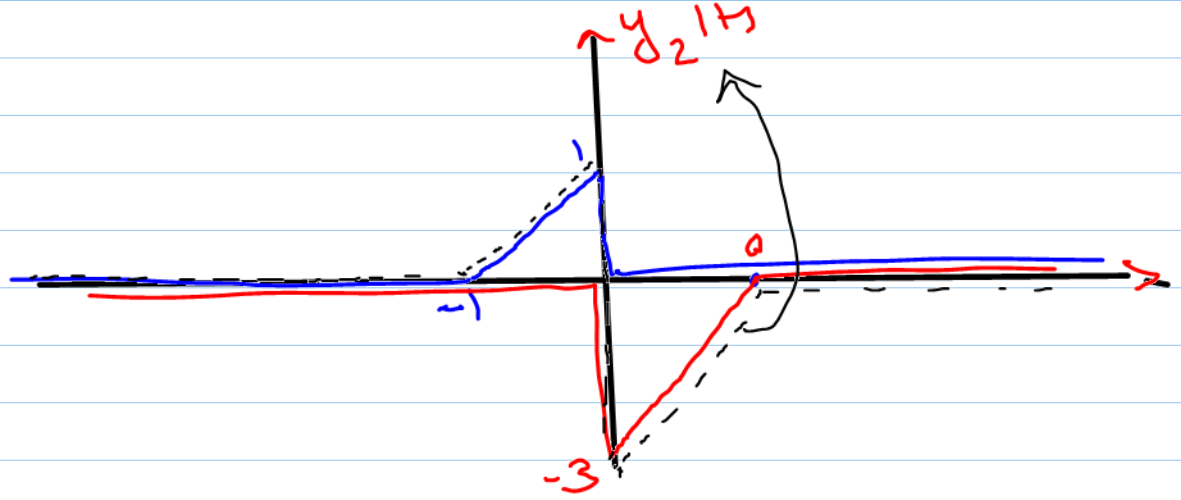
LTI



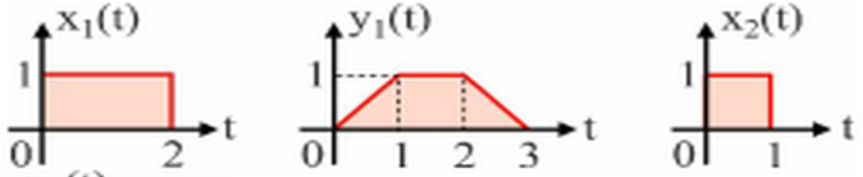
عملیات جبری: جمع با یک ثابت، ضرب در یک عدد

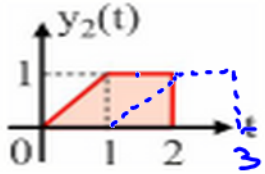
$$x_2(t) = x_1(t+1) + -3x_1(t)$$

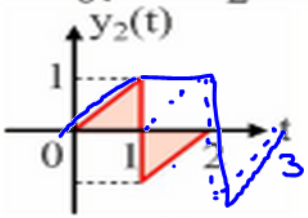
$$y_2(t) = y_1(t+1) + -3y_1(t)$$

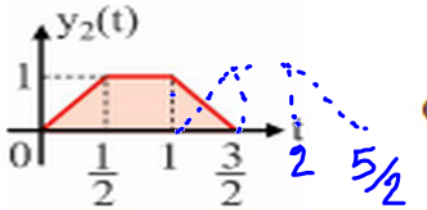


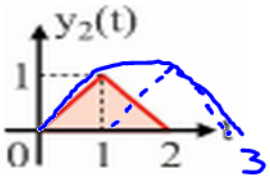
۶۸. با اعمال $x_1(t)$ به ورودی یک سیستم LTI، خروجی $y_1(t)$ حاصل می‌شود. اگر $x_2(t)$ به ورودی همین سیستم اعمال گردد، خروجی $y_2(t)$ به کدام است؟ برق ۹۲

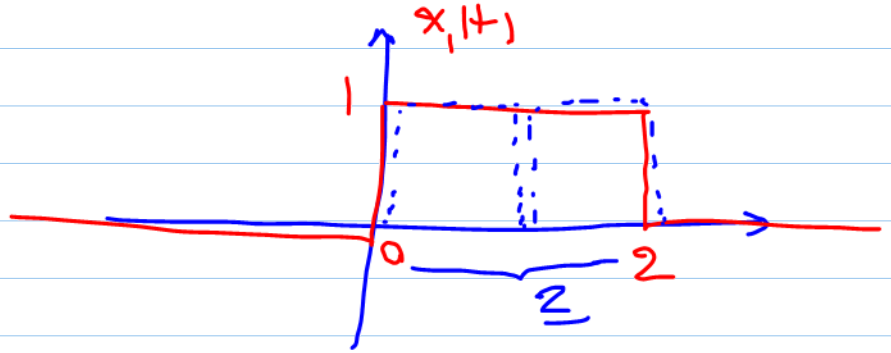


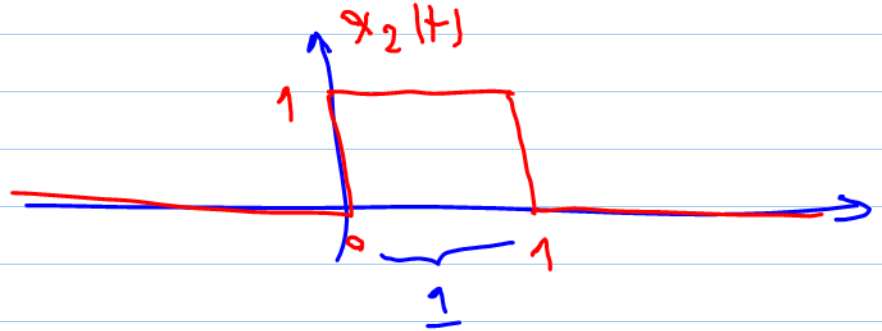
۱)


۲)


۳)


۴) ✓






ضرب عدد در سیگنال
جمع دو سیگنال
شیفت

} LTI

$$x_1(t) = x_2(t) + x_2(t-1)$$

$$y_1(t) = \underbrace{y_2(t) + y_2(t-1)}_{?}$$

✓

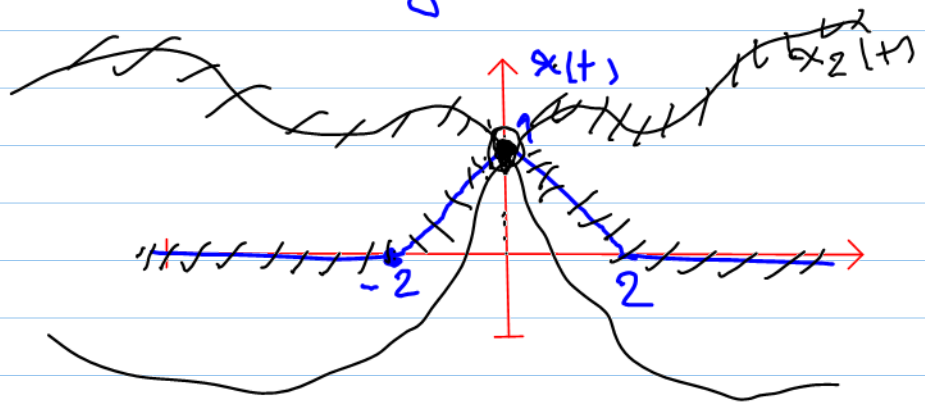
جلسه ۱۳ سیگنال

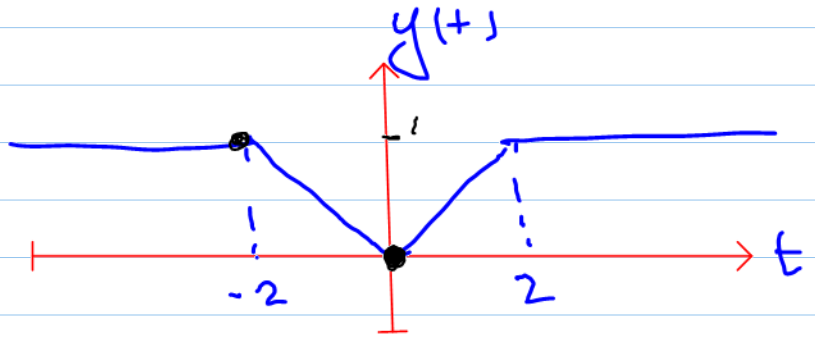
«خواص سیستم‌ها»

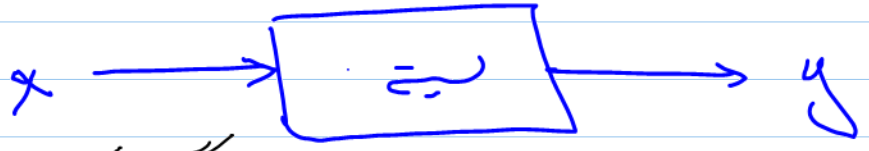
3. حافظه دار:

اگر خروجی سیستم در هر لحظه فقط به ورودی در آن لحظه وابسته باشد سیستم را بدون حافظه گوییم.

$t=2$ $\quad y(2)=F(x(2))$







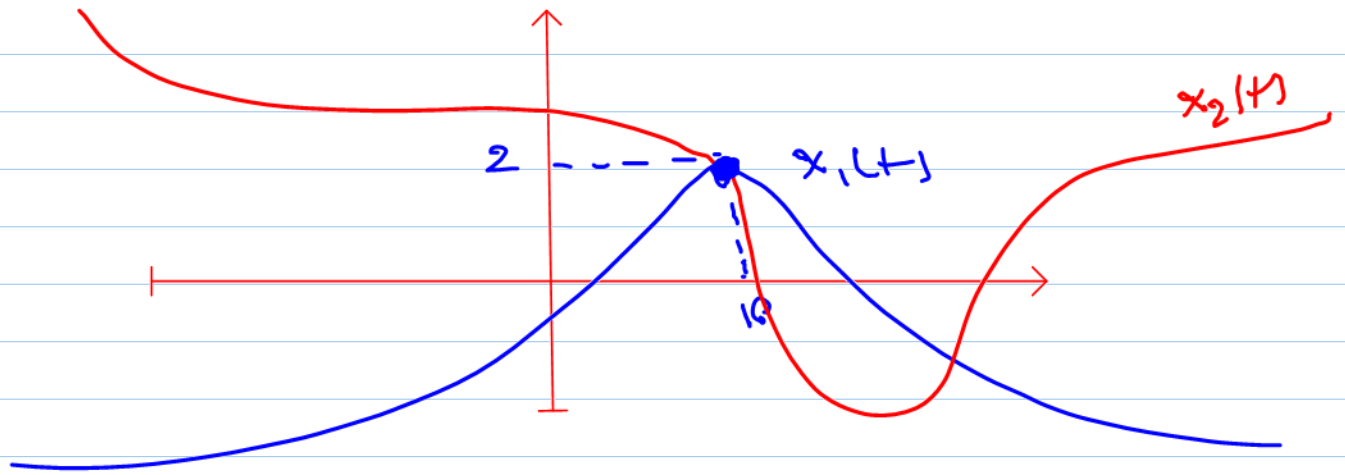
اگر در ثانیه $t=-2$ ورودی ۵ باشد

در 2- تا برابر ۱ خواهد شد.

$y_2(t)$ در لحظه ۵ چقدر است؟

A B

مثال: اگر شخص نابینا را در نظر بگیریم هرکجا به او عذاب دهد متشکر می‌شود.



سیستم بدون حافظه برای هر دو سیگنال x_1 و x_2 در لحظه $t=10$ خروجی یکسانی دارد.

روش بدی برای سیستم بدون حافظه بودن: (داخل x را کار داریم)

اگر روی آرگومان x، داخل x عملیاتی انجام شود سیستم بدون حافظه است.

$$y(t) = (t+2)\,x(t)$$

$y[n] = x[n] + x[n-1]$ حافظه دار

$x(t)$

$y(t) = x(t) + x(t)\,x(2)$ حافظه دار

$y[n] = x[n]\,\delta[n-10]$ حافظه دار

اگر n یا t دیگر اول سوال نباشد

$n=10$

$y[n] = x[10]\,\delta[n-10]$

حافظه دار

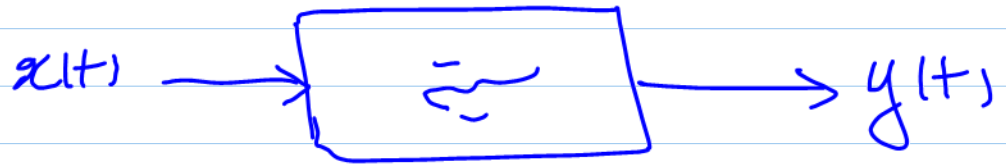
$y[n] = x\left[\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right]$ حافظه دار

$\frac{n}{3}$ جزء صحیح

$y(t) = x(t^2) + x(|t|)$ حافظه دار

④ علّی بودن : (در واقعیت وجود دارد)

اگر خروجی سیستم در هر لحظه به آن لحظه یا لحظات قبل وابسته باشد سیستم علّی است. (به آینده وابسته نباشد)



$y(10)$ به $x(12)$ وابسته باشد غیرعلّی

$t=10$ $x(12)$

دمای اتاق به دمای کولر وابسته است.

~~سایت~~ غیرعلّی

3 امروز دمای اتاق برابر 20° می‌شود اگر خروجی دمای کولر به 18° برسد.

بردی علّی بودن (داخل x را کار داریم).

آرگومان y را می‌نویسیم و آرگومان تمام x ها را می‌نویسیم. اگر به ازای تمام t ها آرگومان x ها بزرگتر از آرگومان y شود سیستم علّی است.

$$y(t) = x(-3)\ x(t-1)$$

y	x
t	-3
	t-1

$\forall t$

0

-10

$t \geq -3$ ✗ → غیر علّی

$t \geq t-1$ ✗

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t > 0 \\ x(-|t|) & t \leq 0 \end{cases}$$

y	x	
	$t-1$	; $t>0$ ✓
t		
	$-\lvert t\rvert$	; $t\le 0$ ✓

نعم

$10 \ge 10$ ✓

$t \ge t-1$; $t>0$ ✓

$t \ge -\lvert t\rvert$; $t\le 0 \rightarrow \lvert t\rvert = -t$

$\hookrightarrow t \ge -(-t) \rightarrow$ $t \ge t$ ✓

$y[n] = n^2\, x[n]$

بدون حافظة ، نعم

y	x
n	n

$n \ge n$ ✓

ملاحظة:

* بدون حافظة ← صما "نعم" دائما.

* حافظه دار ✗ بی‌حافظه

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-2} x(\tau)\, \cancel{u(t-2-\tau)}^{1}\, d\tau$$

$t-2-\tau \geq 0 \longrightarrow \tau \leq t-2$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-2} x(\tau)\, d\tau$$

y	x
t	τ ; $\tau \leq t-2$ ✓

بی‌حافظه

$t \overset{?}{\geq} \tau$ $\qquad \tau \leq t-2 < t \longrightarrow \tau \leq t$ ✓

$$y(t) = \int_{\cancel{-\infty}\ 1}^{\cancel{\infty}\ t+1} x(\tau)\, \cancel{u(\tau-1)}^{1}\, \cancel{u(t-\tau+1)}^{1}\, d\tau$$

$\tau \geq 1$ $\qquad \tau \leq t+1$

$$y(t) = \int_{1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

غیر علی

$t \not\geq \tau$; $1 \leq \tau \leq t+1$

$10 \not\geq 10.5$

$t = 10$

$1 \leq \tau \leq 11$

$\tau = 10.5$ $\tau = 5$

$\tau = 1$

$10 \geq 5$ ✓

$10 \geq 10.5$ ✗

برق ۹۲ . سیستم توصیف شده با $y(t) = x(\frac{t}{2}) + x(t-1)$ کدام، ستخواص زیر دارد؟

۱) خطی، ۲۷، غیرعلی 2) غیرخطی، ۲۷، غیرعلی 3) خطی، ۲۱ و غیرعلی

4) غیرخطی، ۲۱ و علی

$y(t) = x'(\frac{t}{2}) + x'(t-1)$

2و4 حذف ← خطی

$\frac{t}{2}$ ↓

۲۷ → ۱. ✓

t	$\frac{t}{2}$ X_1 → غیرعلّی	$t \geq \frac{t}{2}$	$-2 \not\geq -1$
	$t-1$;	$t \geq t-1$ ✓	

برق ۹۱. منابع یک سیستم به صورت $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)u(z-t)dz$ داشته. این سیستم

تغییر ..... بازمان و ..... است.

۱) پذیر، علّی 2) ناپذیر، علّی 3) پذیر، غیرعلّی 4) ناپذیر، غیرعلّی

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(\tau - t)\, d\tau$$

$u(\tau - t) = 1$ when $\tau \geq t$

$$y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)\, d\tau$$

t	τ ; $\tau \geq t$ ✗

t ~~$\leq$~~ τ ; $\tau \geq t$

10 ~~$\leq$~~ 20

$t = 10$ $\tau \geq 10$, $\tau = 20$

$$y(t) = \int_{t}^{\infty} x(\tau)\, d\tau$$ ① ✓ ② ✓ ③ ✓ تایم وار

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{t}^{\infty} x_1(\tau)\, d\tau$

$x_1(t-a) \rightarrow y_2(t) = \int_{t}^{\infty} x_1(\tau - a)\, d\tau$

$y_1(t-a) \stackrel{?}{=} y_2(t) \rightarrow \int_{t-a}^{\infty} x_1(\tau)\, d\tau \stackrel{?}{=} \int_{t}^{\infty} x_1(\underbrace{\tau - a}_{\tau'})\, d\tau$

$\tau - a = \tau' \rightarrow d\tau = d\tau' \; ; \quad \tau = \tau' + a$

$\tau : t \to \infty$

$\tau' : t-a \to \infty$

τ, τ' معادل ✓

$$y_2(t) = \int_{t-a}^{\infty} x_1(\tau')\, d\tau' = \int_{t-a}^{\infty} x_1(\tau)\, d\tau = y_1(t-a)$$

$$y_2(t) = y_1(t-a) \longrightarrow \text{TI} \checkmark$$

تست ۹۴. در مورد سیستم مقابل کدام گزینه صحیح است؟

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & x(t-1) \le 1 \\ x(t-2) & x(t-1) > 1 \end{cases}$$

۱) علی و خطی ۲) علی و غیر خطی

۳) غیر علی و خطی ۴) غیر علی و غیر خطی

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & ; \ x(t-1) \le 1 \\ x(t-2) & ; \ x(t-1) > 1 \end{cases}$$

غير خطي

t	$t-1$;	$t \geq t-1$ ✓
	$t-2$;	$t \geq t-2$ ✓

→ خطي

«جلسه ۱۴ سیگنال»

«خواص سیستم»

5- پایداری: سیستم را پایدار گوئیم اگر به ازای ورودی محدود، خروجی محدود شود.

اگر بتوان x ورودی را یافت که به ازای آن y نامحدود شود، سیستم ناپایدار است.

پایدار $\quad |x(t)|<\infty \rightarrow |y(t)|<\infty$

به ازای هر t ای (حتی $t=\pm\infty$) y محدود است.

$y(t)=x(t) \rightarrow$

* اگر x ورودی، فرض است، دیگر حتی فرض را بررسی نکنید.

$$y(t)=\frac{x(t)}{1+x^2(t)}$$

$$1+x^2(t)=0 \rightarrow x(t)=\pm j$$

$$x(t)\rightarrow \pm j \rightarrow y(t)=\frac{j}{1+(-1)^2}=\frac{j}{0^+}=\infty j$$ ناپایدار

$$y(t)=e^{1/x(t)} \qquad x(t)\rightarrow 0 \qquad x(t)=0^+ <\infty$$

$y(t) = e^{1/0^+} = e^{\infty} = \infty$ ناپایدار

$y(t) = e^{j/|x(t)|}$ $\quad x(t) \to 0 \quad$ $j/|x| = \infty j$

$y(t) = e^{\infty \times j} = \underline{\cos(\infty)} + j\underline{\sin(\infty)} \Rightarrow |y(t)| \leq 1$ پایدار

$y(t) = e^{j/x(t)}$ $\quad x(t) = 0^+ j \quad \frac{j}{x(t)} = \frac{1}{0^+} = \infty$

$y(t) = e^{\infty} = \infty$ ناپایدار

$y(t) = t\,x(t)$ اگر ورودی کران دار باشد خروجی کران دار نیست $x(t) = A < \infty \Rightarrow y(t)$

$y(t) = t \times A$ $\quad y(\infty) = \infty \times A = \infty \to$ ناپایدار

$$y[n] = \begin{cases} \frac{1}{1 + x^2[n]} & x[n] \neq 0 \\ 0 & x[n] = 0 \end{cases}$$

$x^2[n] = -1 \to x[n] = \pm j$

$x[n] \to j \Rightarrow y[n] = \frac{1}{1+(1^+ j)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ ناپایدار

$x[n] = 1^+ j$

$y(t) = \int_{-t}^{t} \tau \underbrace{x(\tau)}_{A} d\tau$ $\quad y(t) = A\int_{-t}^{t} \tau\, d\tau = A\left(\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-t}^{t}\right)$

$= A\left(\frac{t^2}{2} - \frac{(-t)^2}{2}\right) = 0$

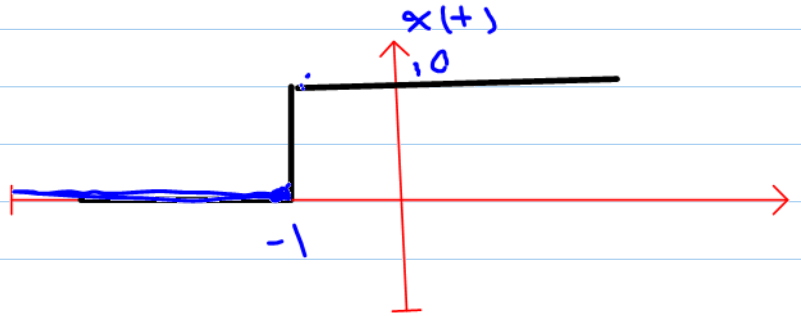
$x(t) = u(t) \to$ $\quad y(t) = \int_{\cancel{-t}\,0}^{t} \tau \cancel{x(\tau)}^{1} d\tau = \frac{t^2}{2}$

$y(\infty) = \frac{\infty^2}{2} = \infty$ ناپایدار

اگر به ازای کلیه ورودی های محدود، خروجی محدود شود، دلیل بر پایداری است.

" " " نامحدود " " ناپایداری است.

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$



$$y(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{\Delta t} = \infty$$ ناپیوسته

$$g(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{1 - x(t)} & x(t) \neq 1 \\ 1 & x(t) = 1 \end{cases}$$

$x(t)=1$

$$x(t) = \underline{1 + \Delta t} \longrightarrow y(t) = \frac{1 + \Delta t}{1 - (1 + \Delta t)} = \frac{1 + \Delta t}{-\Delta t} = \underline{-\infty}$$ ناپیوسته

$$y[n] = \tan(x[n])$$

$$x[n] = \frac{\pi}{2} \longrightarrow y[n] = \infty$$

برق ۵۸. سیستم با معادله $y[n]=\begin{cases} n & n<x[-n] \\ x[n] & n>x[-n] \end{cases}$ ... است.

۱) علی و پایدار ۲) غیرعلی و پایدار ۳) علی و ناپایدار ۴) غیرعلی و ناپایدار

حل دانشجو

غیرخطی و ۳۷ و حافظه‌دار

$y[n]=\begin{cases} n\times x^{5}[n] & n<x[-n] \\ x[n] & n>x[-n] \end{cases}$

y	x
n	n ✓
	-n ✗ غیرعلی

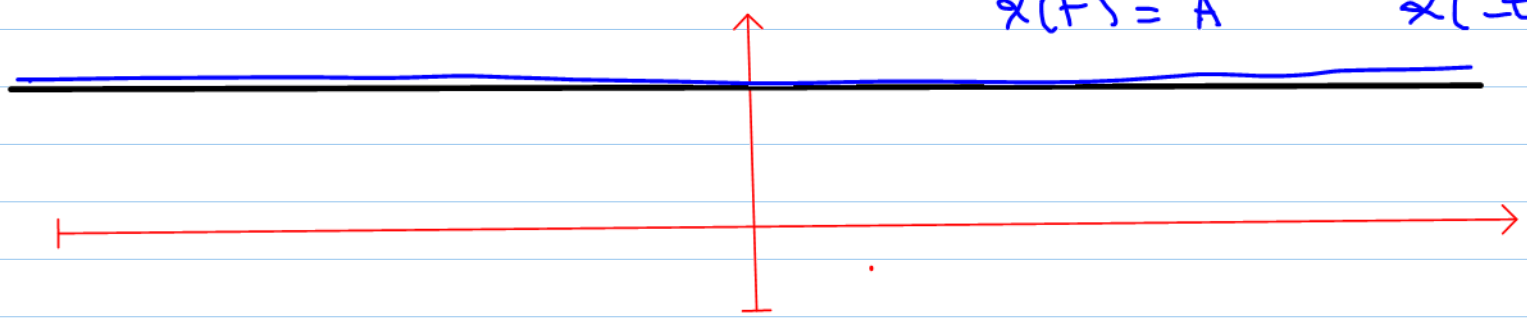
$n \geq n$ ✓

$n \geq -n$ ✗ $\quad -10 \geq 10$ ✗

علی بودن ؟

$x[n] = A$ $\quad x[-n] = A$

$x(t) = A$ $\quad x(-t) = A$



$$y[n] = \begin{cases} n & n < A \\ A & n \geq A \end{cases}$$

$n = +\infty$

$y[+\infty] = A$ ناپایدار

$n = -\infty$ $\quad y[-\infty] = -\infty$

برای n سیستم زیر کدام دسته خواهد بود؟

1) غیرعلی، LTV، ناپایدار 2) علی، LTV، پایدار 3) علی، LTV، ناپایدار

4) علی، LTI، پایدار

$$y(t) = \frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$$

$$y(t) = \frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$$

غیر خطی ، TV ، حافظه دار ، ناپایدار

$x(t-1) = 0^+$
$x(t) = 0^+$
$\rightarrow$ $y(t) = \frac{\sin(0^+ + 2t)}{0^+} = \frac{\sin(2t+0^+)}{0^+} = \infty$

t	t
	t-1

$t \geq t$ ✓
$t \geq t-1$ ✓
$\rightarrow$ علی

برق 19 . در مورد سیستمی با مشابه

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

کدام گزینه نادرست است ؟ 1) علی و پایدار 2) غیر خطی و TI 3) غیر خطی و بدون حافظه 4) علی و TI

غیر خطی ، LTI ، حافظه دار

علی ، پایدار

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \leq 0 \end{cases}$$

y	x
t	t
	t-2

$t \geq t$ ✓

$t \geq t-2$ ✓

$$x(t) = A \longrightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & A > 0 \\ A+A & A \leq 0 \end{cases}$$

برق ۹۱. رابطه بین ورودی و خروجی سیستم $y[n] = \sum_{k=-1}^{\infty} x[n-k^2]$ است. این سیستم

تغییر ... بازمان و ... است.

۱) بیزمان و پایدار ۲) نابیزمان و پایدار ۳) بیزمان و ناپایدار ۴) نابیزمان و ناپایدار

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{\infty} x^1[n-k^2]$$

حطی ، حافظه دار ، TV ،
نایایدار ، علی

① ✓ ② ✗ → TV

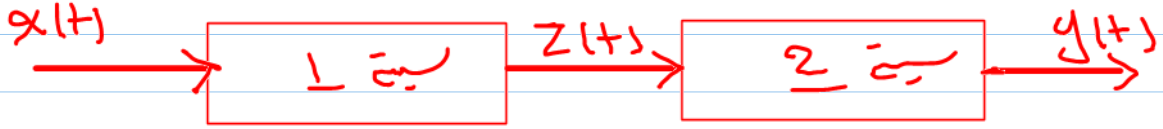
$$x[n] = A \rightarrow x[n-k^2] = A \rightarrow y[n] = \sum_{k=-1}^{\infty} A = A(\infty - (-1) + 1)$$
$$= A \times \infty = \infty$$

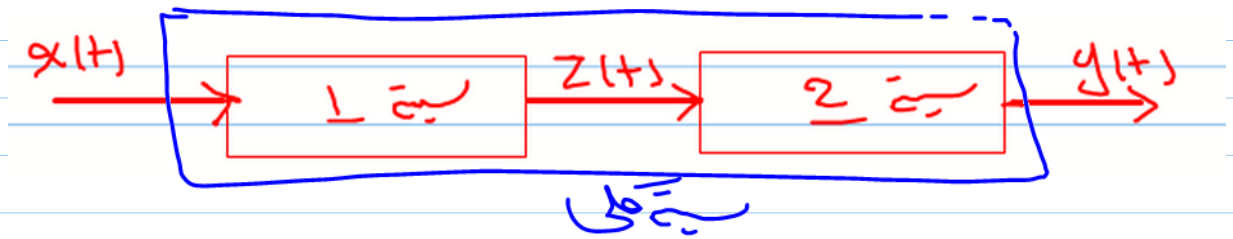
y	x
n	$n-k^2$; $k=-1 \rightarrow \infty$

$n \geq n-k^2$ ✓ علی

دکتری ۹۱ . در شکل زیر سیستم ۱ با ضابطه $y(t) = \frac{z(t)}{t} + 1$ و سیستم ۲ با ضابطه $z(t) = ty(t) + t^2$ داده شده است. در مورد سیستم کلی کدام گزاره نادرست است؟

۱) حطی ۲) بدون حافظه ۳) TV ۴) پایدار


x(t)
1 سيستم
z(t)
2 سيستم
y(t)



① $x(t) = \frac{z(t)}{t} + 1$ ② $y(t) = tz(t) + t^2$

$y(t) =$ بر حسب $x(t)$

① $tx(t) = z(t) + t \rightarrow$

$z(t) = tx(t) - t$

② $y(t) = t(tx(t) - t) + t^2 = t^2x(t) - t^2 + t^2$

سیستم کل $y(t) = t^2x(t)$

$y =$ سیستم $x'(t)$

خطی

بدون حافظه

TV

علی

ناوایدار

$t \geq t$ ✓

$x(t) = A \rightarrow y(t) = t^2 \times A$

$y(\infty) = \infty^2 \times A = \infty$

جلسه ۵: سیگنال و سیستم

۶) معکوس پذیری: اگر بتوان از روی خروجی سیستم، ورودی آن را به صورت منحصر به فرد تعیین کرد یعنی سیستم معکوس پذیر است.



مثال:



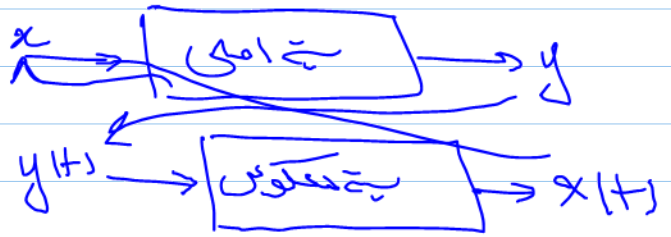
$20° \rightarrow T = 10\,Nm$



$100\,km/h \rightarrow$ دور موتور $= 3500$

$y(t) = \sin(t) \rightarrow x(t) = \cos(t)$

$y(t) = \sin(t) \rightarrow x(t) = \begin{cases} \cos(t) \\ \sin(t) \end{cases}$



بررسی معکوس پذیری:

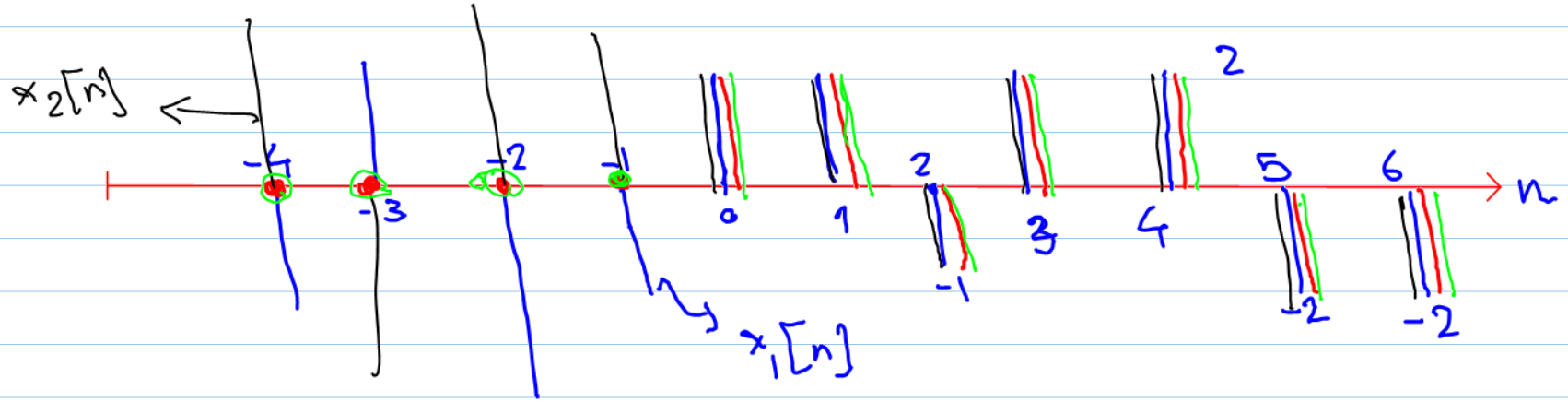
$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = y_2(t) \rightarrow x_1(t) = x_2(t) \\ y_1 \neq y_2 \rightarrow x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

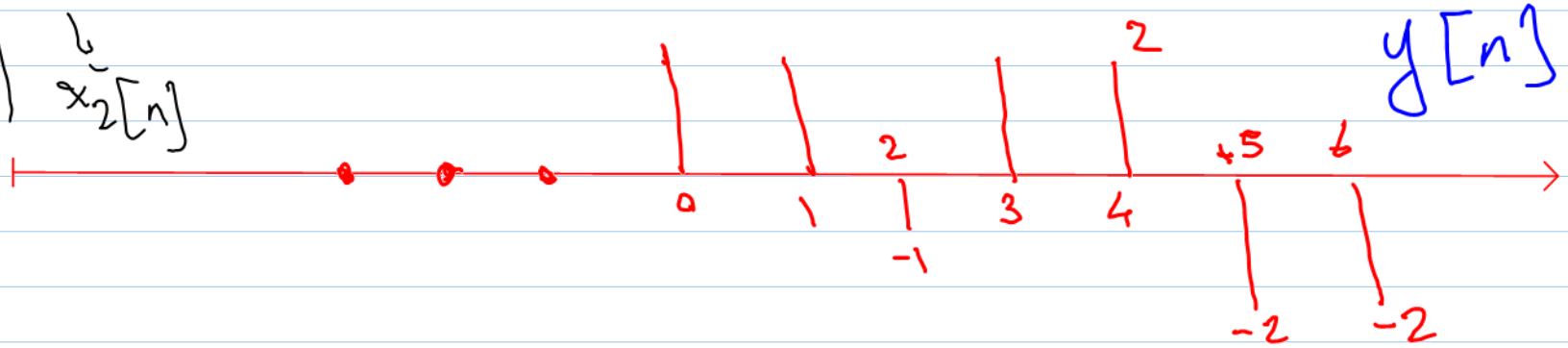
بررسی سلولی پذیری

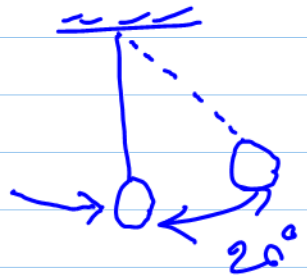
① ورودی در آن زمانها روی حرفی ارتباط باشد.

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



$y[n] \longrightarrow \begin{cases} x_1[n] \\ \downarrow \\ x_2[n] \end{cases}$



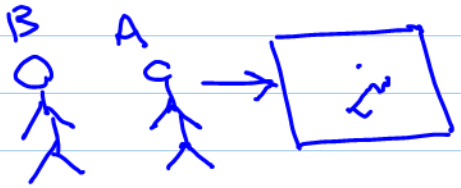


تمرین 3

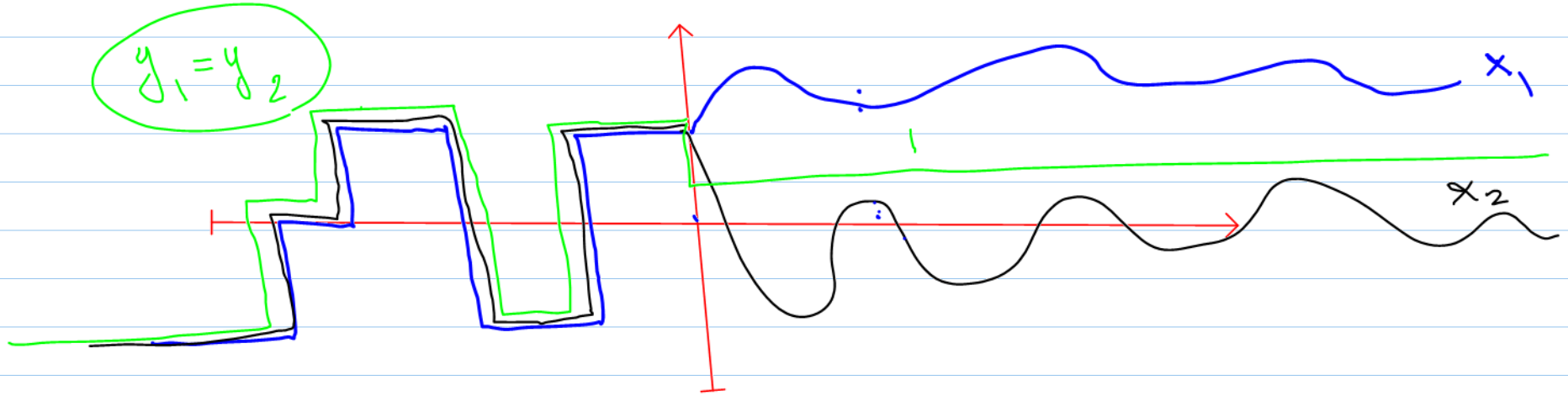
مرتبه اول $25°$

مرتبه دوم $0°$

مرتبه سوم $0°$



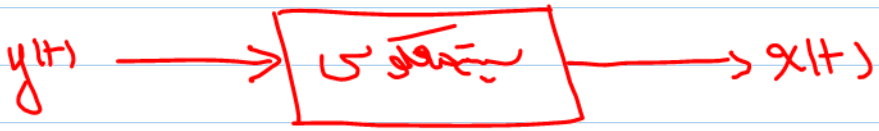
$$g(t_1) = \begin{cases} x(t) & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



در زمانهای مثبت حرکت مستقل از ورودی است.

(2) $x(t)$ یا $x[n]$ را بتوان به صورت یک تابع بدون ابهام از y ها نوشت.

$$y(t) = x^2(t) \longrightarrow x(t) = +\sqrt{y(t)} \text{ یا } x(t) = -\sqrt{y(t)}$$



(10-

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 1 \\ 1 & t < 1 \end{cases}$$

$t \quad , t \geq 1$

سیستم وارونپذیر

بررسی شرط اول:

خطی: جواب کامل x اگر بتوان کاملا را از صفر-تولید کرد شرط

(1) برقرار است.

2) $y[n] = x[3n]$

① : $3n \rightarrow 1$ — $3n =$ مضرب اعداد صحیح ۳ را تولید می‌کند

$n \neq 1/3$ — $n =$ عدد صحیح

3) $$y(t+1) = \begin{cases} x(t-1) & ; \ t \geq 1 \\ x(-t+1) & ; \ t < 1 \end{cases}$$

①
$$\begin{cases} t-1 & ; \ t \geq 1 \rightarrow (t-1) \geq 0 \rightarrow \text{اعداد مثبت را تولید می‌کند} \\ -t+1 & ; \ t < 1 \rightarrow (-t+1) > 0 \rightarrow \text{---} \end{cases}$$

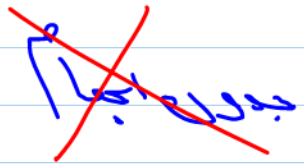
اعداد منفی با زوج شدن x تولید می‌شود

④ $y(t) = x^3(t+1)$

$-\infty < t < \infty$ — $-\infty < t+1 < \infty$

① $t+1$; $10.5 \rightarrow t = 9.5$ ✓

② $x(\underbrace{t+1}_{t'}) = \sqrt[3]{y(t)}$ $\quad t+1 = t' \rightarrow t = t'-1$

$$\boxed{x(t') = \sqrt[3]{y(t'-1)}} \rightarrow$$ 

$$\begin{cases} x_1(t+1) = e^{j\pi/3} \rightarrow y(t) = e^{j\pi} = -1 \\ x_2(t+1) = e^{-j\pi/3} \rightarrow y(t) = e^{-j\pi} = -1 \end{cases}$$

نکته: در سیگنال به دلیل کار در صفای فقط، هر چیز جلوی y برحسب x حکم ثابت را دارد. (غیر از $y = x(t)$)

$y(t) = x(t) + x^2(t)$ X

$y(t) = x(t) + x^3(t)$ X

$y(t) = x^3(t)$

برق ۱۱. سگنال سینوسی $y(t)=\frac{1}{2}x(4-2t)$ کدام است؟

1) $y(t)=x(2-t)$

2) $y(t)=x(t-2)$

3) $y(t)=2x(2-\frac{t}{2})$

4) $y(t)=2x(-2-\frac{t}{2})$

حل دانشجو

$$y(t) = \frac{1}{2}\, x(4-2t)$$

① $4-2t$; $\quad -\infty < t < \infty \rightarrow -\infty < 4-2t < \infty$ ✓

$2.5 \rightarrow \quad t = 3/4 \rightarrow \quad 4 - 2\times 3/4 = 2.5$

$-2 \quad t = 3 \rightarrow \quad 4 - 2\times 3 = -2$

②

$$2\,y(t) = x(\underbrace{4-2t}_{t'})$$

$t' = 4 - 2t$

$t = -\frac{t'}{2} + 2$

$$2\,y(-t'/2 + 2) = x(t')$$

$2y(2 - t'/2) \longrightarrow$ [سیستم] $\longrightarrow x(t')$ خروجی

t (t') خروجی در لحظه t = $2 \times$ ورودی در لحظه $(2 - t'/2)$ (t)

$y(t') = 2 \times x(2 - t'/2) \rightarrow \quad y(t) = 2\,x(2 - t/2)$

سوال ۴۰. رابطه ورودی - خروجی یک سیستم زمان گسسته به صورت $y[n]=x[n \bmod 27]$ است. در مورد این سیستم کدام گزینه نادرست است؟ (mod یعنی باقیمانده)

۱) علی ۲) خطی ۳) معکوس ناپذیر ۴) متغیر با زمان

$y[n] = x[n \bmod 27]$

* باقیمانده عدد a بر b برابر با عدی مثبت بین ۰ و b است.

$$\begin{array}{r|l} 26 & 27 \\ 27 & 1 \\ \hline (1) & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -28 & 27 \\ -27 & -1 \\ \hline (-1) & \end{array} \times \qquad \begin{array}{r|l} -28 & 27 \\ -54 & -2 \\ \hline (26) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 27 \\ 0 & 0 \\ \hline (2) & \end{array}$$

$$0 \leq n \bmod 27 < 27$$

$y[n] = x[n \bmod 27]$

حتما؟ ✓

۳۷ یا I۲ ← روی n داخل * عملیات میزان تغییرات ← ۳۷

حافظه ← حافظه دار

n	$n \bmod 27$ X

$n \geq (n \bmod 27)$ X

غیرعلی

$n = -1 \rightarrow \quad -1 < 26$

معکوس پذیری ✗

پایداری ؟ ✓

① $0 \leq n \bmod 27 \leq 26$

$x[n] = A \qquad x[n \bmod 27] = A$

$y[n] = A < \infty$

برق ۸۶ . (با اندکی تغییر)

رابطه بین ورودی x و خروجی y در سیستم زیر داده شده است. کدام یک از گزینه‌ها درست است؟

۱) هر ۲ ۲) فقط ۱ و 2 ۳) فقط ۱ و 3

۴) فقط 2 و 3

پاسخ ۱: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

2 سـ : $y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) x[n]$

3 سـ : $y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) x(t)$

1) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

① k : $-\infty < k \le n$ → $-\infty \le k \le n$

$k \le n$ $\quad$ $n: -\infty \to \infty$ $\quad$ $-\infty \le k \le n \le \infty$ ✓

1000 → $k \le 1000$ → $k = 1000$

② $x[n] =$ برعکس y

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow y[n] - y[n-1] = x[n]$

$x[n] = y[n] - y[n-1]$

$\frac{1}{a}$ ✓

سیستم سکوس پذیر.

2) $y[n] = \cos(\frac{\pi}{3} n)\, x[n]$

3) $y(t) = \cos(\frac{\pi}{3} t)\, x(t)$

① t : ✓ ② $x(t) = \frac{y(t)}{\cos(\frac{\pi}{3} t)}$ ✗

$t = \frac{3}{2} \rightarrow x(t) = \frac{y(3/2)}{\cos(\frac{\pi}{3} \times \frac{3}{2})}$

$x(\frac{3}{2}) = \frac{y(3/2)}{0} = \frac{\text{عدد}}{0} \rightarrow$ [illegible]

2) $y[n] = \cos(\frac{\pi}{3} n)\, x[n]$

① n ✓ ② $x[n] = \frac{y[n]}{\cos(\frac{\pi}{3} n)}$ ✓

$\frac{\pi}{3} n = \frac{\pi}{2} \rightarrow n = \frac{3}{2}$ ✗ n: [illegible]

$\frac{\pi}{3}n = \frac{3\pi}{2} \rightarrow n = \frac{9}{2}$ X

بدلیل صحیح بودن n حذف می‌شود $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

ادامه سوال در پذیرای جلسه آینده

جلسه ۱۴ سیگنال

برق ۸۹

در مورد سیستمی که رابطهٔ ورودی ـ خروجی آنها به صورت زیر می‌باشد، کدام گزینه نادرست می‌باشد؟

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

۱) این سیستم علّی و پایدار است.

۲) این سیستم غیرخطی و TI است.

۳) این سیستم TI و معکوس‌ناپذیر می‌باشد.

۴) این سیستم معکوس‌پذیر و حافظه‌دار می‌باشد.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

y	x
t	t ✓
	t-2 ✓

$t \geq t$ ✓

$t \geq t-2$ ✓

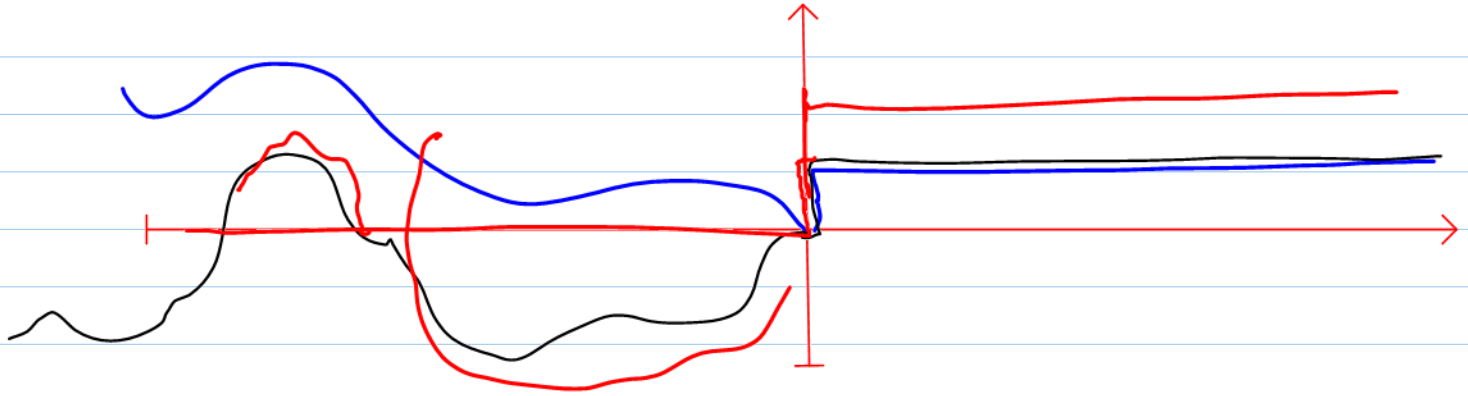
غیرخطی ، TI ، حافظه‌دار ، علی

پایدار ، معکوس ناپذیر

$x(t) = A \rightarrow$ $y(t) = \begin{cases} 0 & A < 0 \\ A + A = 2A & A \geq 0 \end{cases}$

$y(t) = \begin{cases} 0 \\ 2A \end{cases} < \infty$

$x(t-2) = A$



$y(t) = 0$ ⟶



شرط سکوس پذیری: ① ورودی بازای تمام زمانها و تمام مقادیر x در دامنه مزدی از دامنه باشد.

$x = -10 \qquad x = -1000 \rightarrow y = 0$

② رابطه x برحسب y به صورت تابع و بدون ابهام قابل تعیین باشد.

مکانیکال سیستم گانه ۵

اگر شرط ① سیستم پذیرای ابدی کاردینالی بودن شرط ② آسان پذیر بودن، از مکانیکال سیستم گانه استفاده می‌کنیم.

$$y(t) = x(t)\, x(t-2)\, x(t-10)$$

① t, $t-2$, $t-3$ ✓

② $x(t) =$ برحسب yها

$$x(t) = \frac{y(t)}{x(t-2)\, x(t-3)}$$

① اگر سیستم خطی باشد، شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که اگر به ازای هر t داشته باشیم $y(t)=0$ آنگاه حتماً بتوان نتیجه گرفت که x به ازای هر t صفر بوده است.

$\forall t \rightarrow y(t)=0$ ~~$y(2)=0$~~

$\forall t, x(t)=0$

$$y(t)=\frac{x'(t)-x'(-t)}{2}$$

① t ✓ $-t$ ✓ ② $x(t)=?$ $x(t)-x(-t)=y(t)$

$y(t)=\frac{1}{2}\overset{①}{x'(t)}-\frac{1}{2}\overset{①}{x'(-t)}$ خطی

$y(t)=0 \xrightarrow{?} x(t)=0$

$y(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}=$ قسمت فرد $x(t) \Rightarrow$

$x(t)=t^2$ $\qquad y(t)=\frac{t^2-(-t)^2}{2}=0$

$\forall t\ y(t)=0$, $x(t)\neq 0$ معکوس‌پذیر

خوش‌تیپ ۹۶. سیستم با رابطه $y(t)=\int_{t-1}^{t}\cos(2\pi\alpha)x(\alpha)d\alpha$ چه نوع سیستمی است؟

1) LTV و معکوس‌پذیر
2) LTV و معکوس‌ناپذیر
3) LTI و معکوس‌پذیر
4) LTI و معکوس‌ناپذیر

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha$$

① α : $t-1 \le \alpha \le t$ ✓

10 ✓

$t = 10.5$

$9.5 \le \alpha \le 10.5$

② $$\frac{dy(t)}{dt} = \cos(2\pi t)\, x(t) - \cos(2\pi(t-1))\, x(t-1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \cos(2\pi t)\,[\, x(t) - x(t-1)\,]$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} \frac{1}{\cos(2\pi\alpha)}\, x(\alpha)\, d\alpha$$

نکات سوگانه :

① $y(t) = 1 \times x(\alpha)$

خطی

$y(t) = 0 \xrightarrow{?} x(t) = 0$

$$\int \cos(a\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{a} \sin(a\alpha)$$

$$x(t)=1 \longrightarrow y(t)=\int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\times 1\, d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi t)-\sin(2\pi(t-1))\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi t)-\sin(2\pi t)\right]=0$$

$$\sin(2\pi t-2\pi)=\sin(2\pi t)$$

$x(t)=1 \longrightarrow y(t)=0$

$y(t)=0 \not\longrightarrow x(t)=0$

معکوس ناپذیر

$$y(t)=\int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓

گام آخر

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\alpha)\, d\alpha$$

$$x_2(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\alpha-t_0)\, d\alpha$$

$$y_1(t-t_0) \stackrel{?}{=} y_2(t) \longrightarrow$$

$$\int_{t-t_0-1}^{t-t_0} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\alpha)\, d\alpha \stackrel{?}{=} \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\underbrace{\alpha-t_0}_{\alpha'})\, d\alpha$$

α' بدلالة α

$$\alpha' = \alpha - t_0 \qquad d\alpha' = d\alpha \qquad \alpha = \alpha' + t_0$$

α: $t-1 \longrightarrow t$

α': $t-1-t_0 \longrightarrow t-t_0$

TV

$$\int_{t-t_0-1}^{t-t_0} \underbrace{\cos(2\pi\alpha)}_{\times}\ \underbrace{x_1(\alpha)}_{\checkmark}\, d\alpha \neq \int_{t-1-t_0}^{t-t_0} \underbrace{\cos(2\pi(\alpha'+t_0))}_{\times}\ \underbrace{x_1(\alpha')}_{\checkmark}\, d\alpha'$$

نکات سیستم:

② اگر یک سیستم بدون حافظه باشد، شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک به یک بودن رابطه ریاضی y بر حسب x برای تمام t هاست.

$$y(t) = 2x^2(t) + t^2 x(t) + 1$$

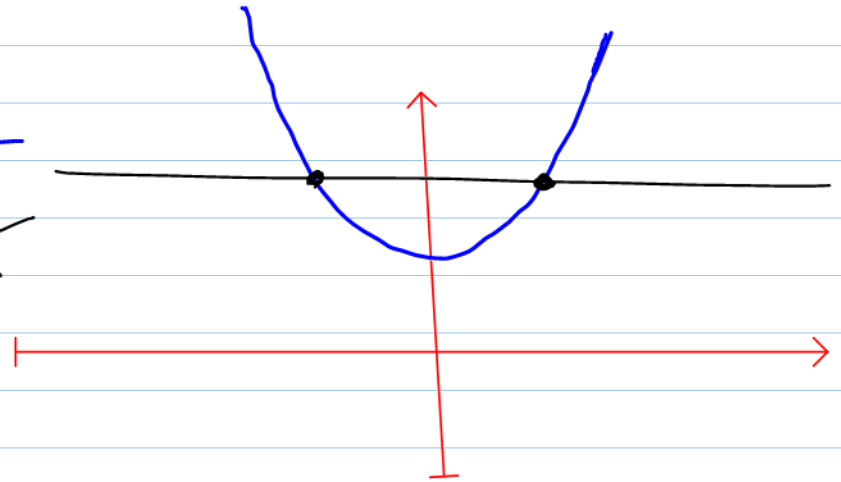
① ✓ ② → $x(t) = ?$ —

① نکته ✗

$$y = 2x^2 + t^2 x + 1$$

$t = 0$ → $y = 2x^2 + 1$ یک به یک است

معکوس ناپذیر



③ اگر رابطه سیستم در همان زمان، بین x بیان شده شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری، یک به یک بودن رابطه ریاضی y برحسب x (در دنیای مختلط) است.

$y[n] = x[n]\,x[n-1]\,x[n-2]$

$y = x^3 \longrightarrow x = e^{j\pi/3} \rightarrow y = -1$

$x = e^{-j\pi/3} \rightarrow y = -1$

معکوس ناپذیر

نکته: اگر معادله سیستم به صورت $y_{n+1} = g(n+1)\,f(x(n+1)) + h(n+1)$

باشد، برای معکوس پذیری، بخش های بدون x را می توان حذف کرد.

1) $y(t) = \frac{1}{1+\cos^2(t)}\,(x(t)+x^3(t))$

$y(t) = x(t) + x^3(t)$ $\quad y = x + x^3$ → سیستم بی‌باینت

→ معکوس پذیر

2) $y(t) = \frac{\sqrt{x(t)+x^3(t)}}{t^2+1} + e^{t^2-1}$

$y(t) = \sqrt{x(t)+x^3(t)}$ $\quad \rightarrow \quad y = \sqrt{x+x^3}$ سیستم بی‌باینت

→ معکوس ناپذیر

معکوس پذیری سیستم‌های چند متغیره:

① سیستم‌های زمانی ② سیستم‌های دینامیکی

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t > 0 \\ -x(t) & t \le 0 \end{cases}$$

اگر سؤالها روی زمان باشد سیستم زمانی است.

" " " x باشد " فاصله ای است.

برای بررسی معکوس پذیری ابتدا شرط ① و ② معکوس پذیری را بررسی کنیم.

سپس اگر سیستم زمانی باشد باید برای معکوس پذیری، شرط علّی بودن را

پوشش دهد.

اگر سیستم فاصله ای باشد باید شرط ها کاملاً هم بوده و پس از جایگذاری سؤالها

برحسب y، سؤالهای بدست آمده باهم تداخل نداشته باشند.

1) $y[n] = x_{(2)}[n]$

2) $$y(t) = \begin{cases} x(t) - 1 & x(t) \geq 0 \\ x(t) + 1 & x(t) < 0 \end{cases}$$

3) $$y(t) = \begin{cases} x^2(t) & x(t) \geq 0 \\ x(t) & x(t) < 0 \end{cases}$$

۱) $y[n] = x_{(2)}[n] \rightarrow y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n: \text{زوج} \\ 0 & n: \text{فرد} \end{cases}$

$\frac{n}{2} \rightarrow$ زوج: n

$n=7$ $\quad x[7]$

$3 \rightarrow \frac{6}{2} = 3$

$4: \frac{8}{2} = 4$

$-1: \frac{-2}{2} = -1$

$0: \frac{0}{2} = 0$

✓ (1)

x در خارج ضابطه روی فرجی اثر دارد.

خارج مقادیر x روی ~ ~

$y \rightarrow x[7]$ $\quad y[14] = x[7]$

$y[7] = 0$

$$\begin{cases} y[n] = x[n/2] \; ; & n: \text{زوج} \rightarrow x[\textcircled{n}] = y[2n] \\ y[n] = 0 & ; \; n \text{ فرد} \end{cases}$$ ②

$$y[n] = x\left[\frac{n}{2}\right] \; ; \quad n = 2k \; ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$y[2k] = x[k] \; ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x[3] = y[6] \qquad x[10] = y[20]$$

$$x[k] = y[2k] \; ; \quad \text{اعداد صحیح } k \rightarrow n$$

$$x[n] = y[2n]$$ ✓②

* سرخط‌های زیبای، عکاً زیبا را پوشش بدهد. ✓ ← عکس بزنید

2) $$y(t) = \begin{cases} x(t) - 1 & x(t) \geq 0 \\ x(t) + 1 & x(t) < 0 \end{cases}$$

① (t) ; ✓ ② (2) → ✓

$$\begin{cases} y[n] = x[n] - 1 \\ y[n] = x[n] + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x[n] \geq 0 \rightarrow \\ x[n] < 0 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x[n] = y[n] + 1 \; ; \; y[n] \geq -1 \\ x[n] = y[n] - 1 \; ; \; y[n] < 1 \end{cases}$$

$x \geq 0 \rightarrow (x-1) \geq -1$

y

$x < 0 \quad (x+1) < 1$



$$x[n] = \begin{cases} y[n] + 1 & y[n] \geq -1 \\ y[n] - 1 & y[n] < 1 \end{cases}$$

چون شرط‌ها برحسب y هستند داریم

سیگنال نامتغیر

3) $y(t) = \begin{cases} x^2(t) & x(t) \geq 0 \\ x(t) & x(t) < 0 \end{cases}$

$y(t) = \begin{cases} x^2(t) & x(t) \geq 1 \\ x(t) & x(t) < -1 \end{cases}$

$x(t) = 0$ X

① t ; ✓

② $\begin{cases} y(t) = x^2(t) & x(t) \geq 0 \end{cases}$ $\quad x(t) = \pm\sqrt{y(t)}$

$\begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} > 0 \end{cases}$

$y = x^2(t)$, $x(t) \geq 0$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} \checkmark \\ x(t) = -\sqrt{y(t)} \end{cases}$

$y(t) = x^2(t)$, $x(t) \geq 0$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} & ; \quad y(t) \geq 0 \\ x(t) = y(t) & ; \quad y(t) < 0 \end{cases}$

✓② شرط

شرط‌ها برحسب ۷ همپوشانی ندارند ← متمکوس پذیر

بسمه تعالی

آزمون فصل اول درس تجزیه و تحلیل سیستم ها

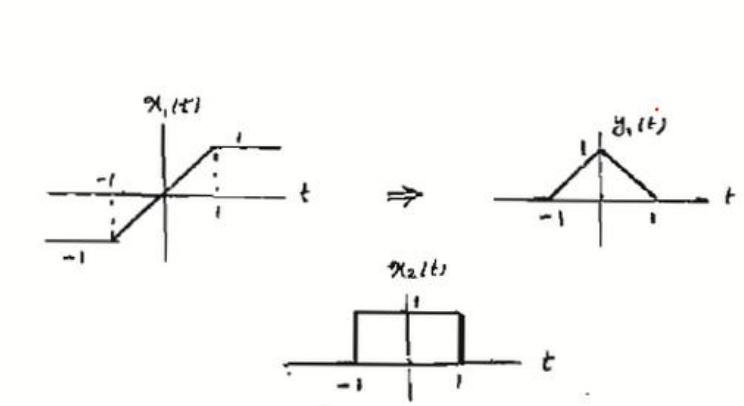
مدرس: سعید دهقانی

توضیحات:

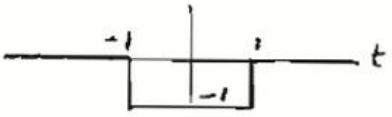
- هر زمان که به این نتیجه رسیدید که مطالعه فصل اول را به اتمام رسانده‌اید، به این آزمون پاسخ دهید.
- پس از آزمون، با توجه به پاسخ‌ها، برای هر شخص به صورت اختصاصی راهکارهایی برای تغییر روش مطالعه(در صورت نیاز) و برطرف نمودن ضعف‌ها ارسال خواهد شد.
- نتیجه این آزمون از نظر آموزشی و شناخت سطح علمی دانشجویان کلاس بسیار مهم می‌باشد،با پاسخ به این سوالات نقاط ضعف و قوت شما شناسایی شده و در کلاس سعی خواهد شد که نقاط ضعف برطرف شوند. لذا کسانی که در این آزمون شرکت نکنند، این فرصت را از دست می‌دهند که نقاط ضعف آنها شناسایی و در کلاس برطرف شود.
- پاسخ سوالات را به صورت خوانا نوشته و به صورت عکس هایی که در یک فایل پی دی اف ذخیره شده است، در قسمت رفع اشکال سایت آپلود نمایید.
- لطفاً در پاسخگویی به سوالات کاملاً صادقانه عمل کنید و در صورتی که برای حل سوال هیچ ایده‌ای هم ندارید، هرچیزی که در مورد سوال بلد هستید را بنویسید.
- اگر در هنگام حل سوال، مسائل ریاضی را بلد نیستید، لطفاً در پاسخ هر سوال اشاره کنید که چه بخشی را بلد نبودید.
- اگر در هنگام حل سوال مطلب مربوطه را مسلط هستید ولی صرفا به دلیل فراموشی نکته مربوطه قادر به پاسخ نیستید، به این موضوع اشاره کرده و سپس با مرور نکته مربوطه سوال را حل کنید.
- در حل سوالات سعی کنید یک راه حل تستی و یک راه حل تشریحی بنویسید.

سوال ۱:

پاسخ یک سیستم بدون حافظه تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ چیست؟



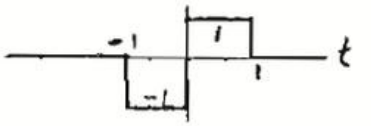
۱)



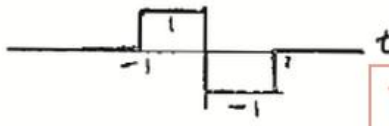
۲)



۳)



۴)



سوال ۲: رابطه ورودی-خروجی یک سیستم پیوسته با زمان خطی به صورت زیر داده شده است:

$$y(t-1)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(\tau-t)d\tau$$

$u(t)$ تابع پله واحد است. این سیستم تغییر ..... با زمان و ..... است.

۱) پذیر-علی
۲) پذیر-غیرعلی
۳) ناپذیر-علی
۴) ناپذیر-غیرعلی

سوال ۳: کدام گزینه در مورد سیستم با توصیف ورودی-خروجی $y(t) = \sin(t-1)\,\mathrm{x}(\cos(\mathrm{t}))$ صادق است؟

۱) TI، پایدار، بدون حافظه
۲) TV، پایدار، حافظه‌دار
۳) TV، پایدار، علی
۴) TI، پایدار، غیرعلی

سوال ۴: سیستم‌های توصیف شده با رابطه‌های ورودی-خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$s_1: y[n] = x_{(5)}[n]$$

$$S_2: y[n] = x[5n]$$

کدام گزینه درست است؟

۱) s_1 وارون پذیر و تغییر ناپذیر با زمان

۲) هر دو وارون پذیر و تغییرپذیر با زمان

۳) S_2 وارون ناپذیر، هر دو تغییرپذیر با زمان

۴) هر دو وارون ناپذیر و تغییر پذیر با زمان

سوال ۵- یک سیستم زمان گسسته با رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] = \begin{cases} x[n-1] & n \geq 1 \\ |x[n]| & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

در مورد این سیستم کدام گزینه نادرست است؟

۱) غیرخطی
۲) معکوس پذیر
۳) غیرعلی
۴) تغییرپذیر با زمان

سوال ۶: سیگنال $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی ۹ می باشد، $x[3n+5]$ دارای کدام خاصیت است؟

۱) متناوب با دوره تناوب اصلی ۹
۲) نامتناوب
۳) متناوب با دوره تناوب ۱۴
۴) سیگنال انرژی

سوال ۷: کدام یک از سیگنالهای زیر متناوب است؟

1)$odd\{u[n]\}$

2) $ev\{x[n]\}$

3)$odd\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]\}$

4)$ev\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]\}$

سوال ۸:

یک سیستم گسسته در زمان با رابطهٔ ورودی ـ خروجی به‌صورت $y[n] = \cos[\frac{\pi}{۲}x[n]]$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد متناوب‌بودن خروجی به‌ازای $x[n] = \frac{n^۲}{۴}$ صحیح است؟($\Omega_۰$ فرکانس اصلی در سیگنال‌های متناوب است.)

۱) $\Omega_۰ = \frac{\pi}{۳}$

۲) $\Omega_۰ = \frac{\pi}{۸}$

۳) $\Omega_۰ = \frac{\pi}{۴}$

۴) متناوب نیست.

سوال ۹:

سیستمی با رابطهٔ ورودی خروجی زیر تعریف شده است که در آن α مقدار ثابت و معلوم است.

$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(T-\alpha)dT$$

گزینهٔ درست در مورد این سیستم، کدام است؟ این سیستم:

۱) معکوس‌پذیر نیست و برای برخی مقادیر α علّی است.

۲) معکوس‌پذیر و به ازای برخی مقادیر α غیرعلّی است.

۳) معکوس‌پذیر و علّی نیست.

۴) معکوس‌پذیر و علّی است.

سوال ۱۰–

سیستم کلی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ به‌صورت شکل زیر را در نظر بگیرید: که در آن رابطهٔ ورودی و خروجی هر سیستم به‌صورت زیر داده شده است:

سیستم ۱: $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{۲}\right], & n \text{ is even} \\ ۰, & n \text{ is odd} \end{cases}$

سیستم ۲: $y[n]=x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۱]+\frac{۱}{۴}x[n-۲]$

سیستم ۳: $y[n]=x[۲n]$

کدام گزینه رابطهٔ ورودی ـ خروجی سیستم کلی را نشان می‌دهد؟



۱) $y[n]=\begin{cases} x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۱]+\frac{۱}{۴}x[x-۲], & n \text{ is even} \\ ۰, & n \text{ is odd} \end{cases}$

۲) $y[n]=\begin{cases} x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۲]+\frac{۱}{۴}x[n-۴], & n \text{ is even} \\ ۰, & n \text{ is odd} \end{cases}$

۳) $y[n]=x[n]+\frac{۱}{۴}x[n-۱]$

۴) $y[n]=x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۱]+\frac{۱}{۴}x[n-۲]$

جلسه ۱۴

فصل دوم: سیستم های LTI

کانولوشن: عملیات درهم تنیدن سیگنالها

تعریف ریاضی:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(\tau) d\tau$$

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] y[k]$$

معنی تعریف ریاضی فوق:

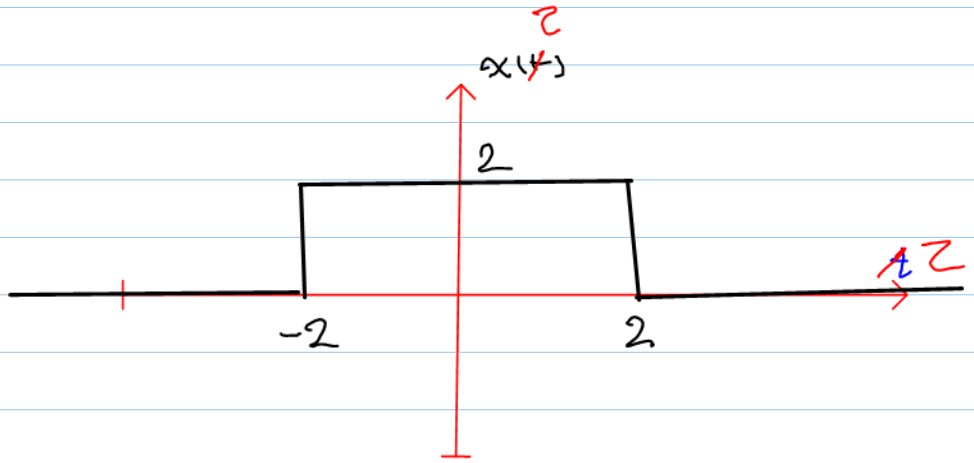
1- یکی از سیگنالها را قرینه زمانی کنید (هرکدام که ساده تر است)

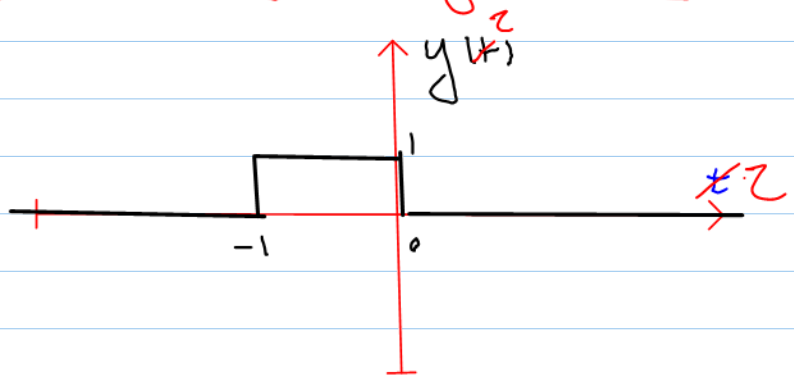
2- سیگنال قرینه شده را به اندازه t واحد شیفت دهید. (محور افقی را با t جمع کنید)

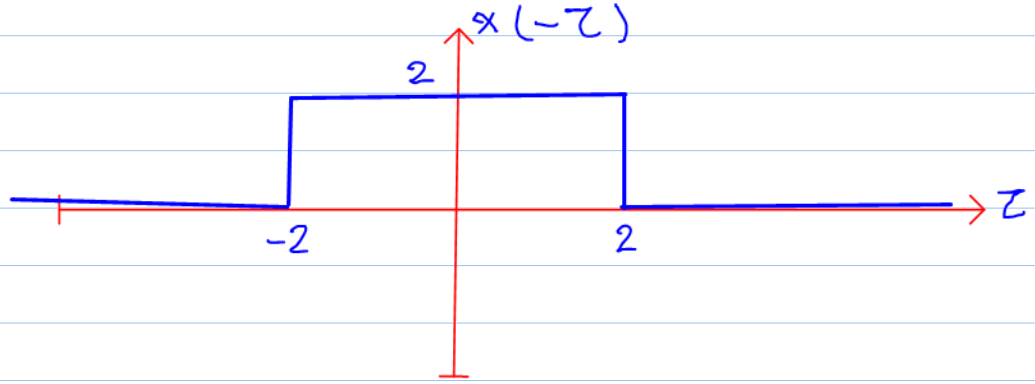
3- حاصلضرب سیگنال فوق را با سیگنال دوم به ازای t های مختلف حساب کنید.

4- مساحت زیر منحنی حاصلضرب سیگنالها را حساب کنید.

مثال: حاصل $x(t) * y(t)$ را حساب کنید.



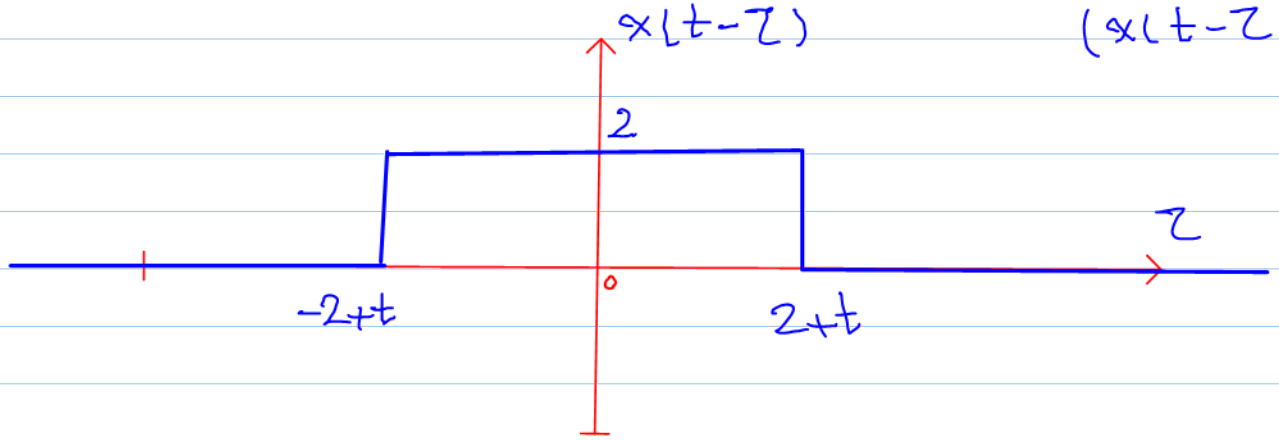




① به جای t روی محور افقی τ بنویسید.

② یکی از سیگنال‌ها را قرینه‌یابی بکنید $x(\tau-t)$

③ محور افقی را با t جمع کنید. $x(t-\tau)$



④ به ازای t های مختلف حاصلضرب سیگنال فوق را با سیگنال دوم حساب کنید. $x(t-\tau)\,y(\tau)$

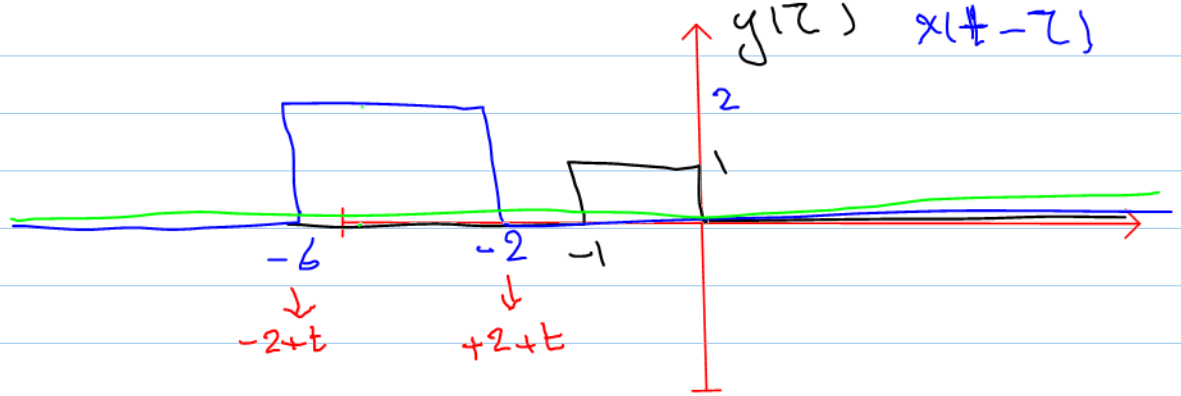


حالا می خواهیم $x(t-\tau)$ را هم روی سیگنال فوق رسم کنیم.

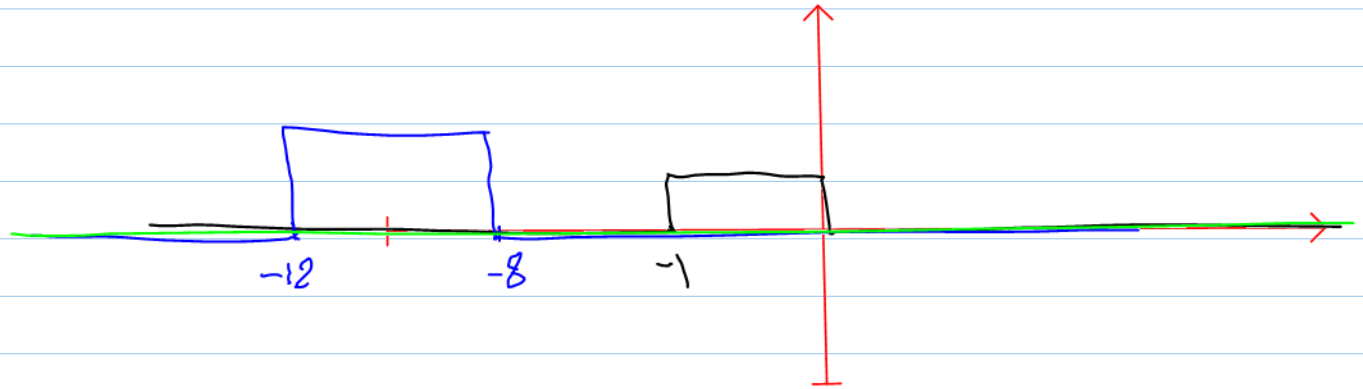
این کار را به ازای t های مختلف انجام می دهیم.

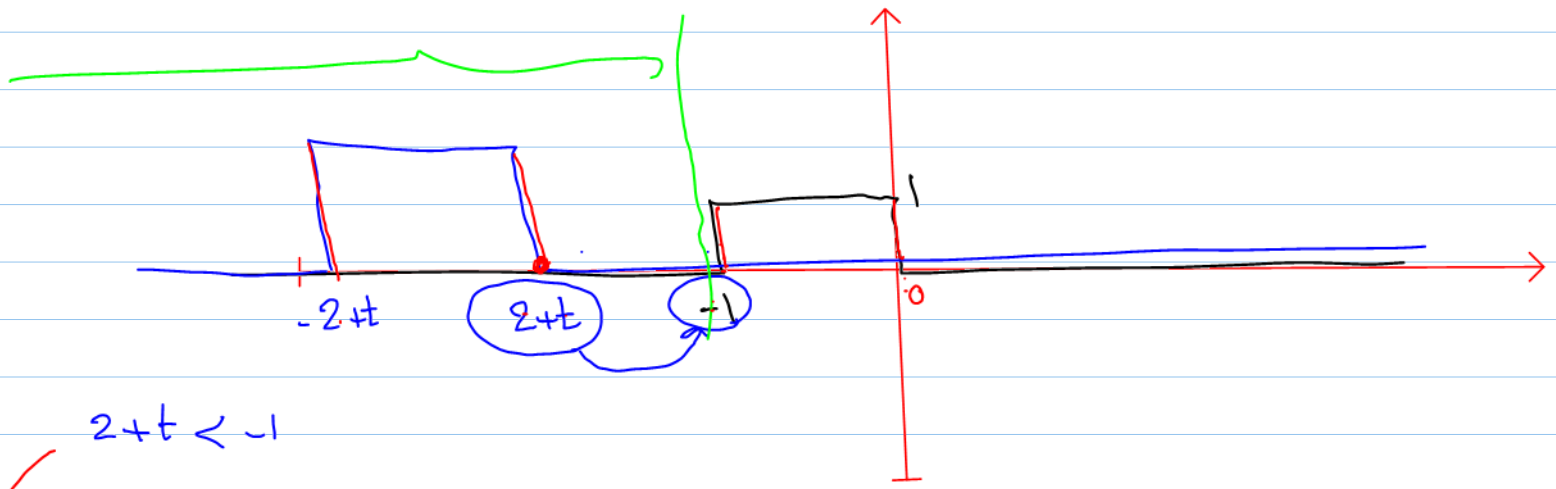
* t را طوری انتخاب می کنیم که حاصلضرب به ازای آن صفر نشود.

$t = -4$



$t = -10$

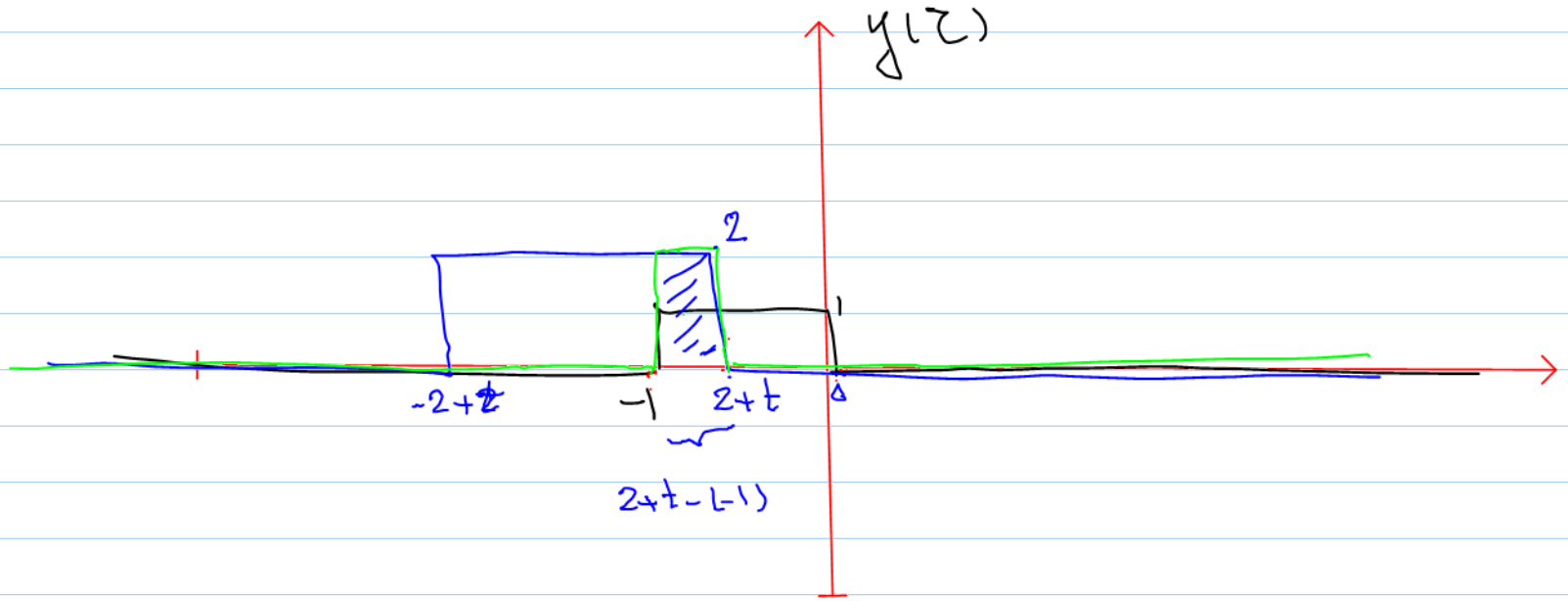




$2+t < -1$

$\rightarrow t < -3 \rightarrow \quad x(t-2)\,y(2) = 0$

حالت اول:

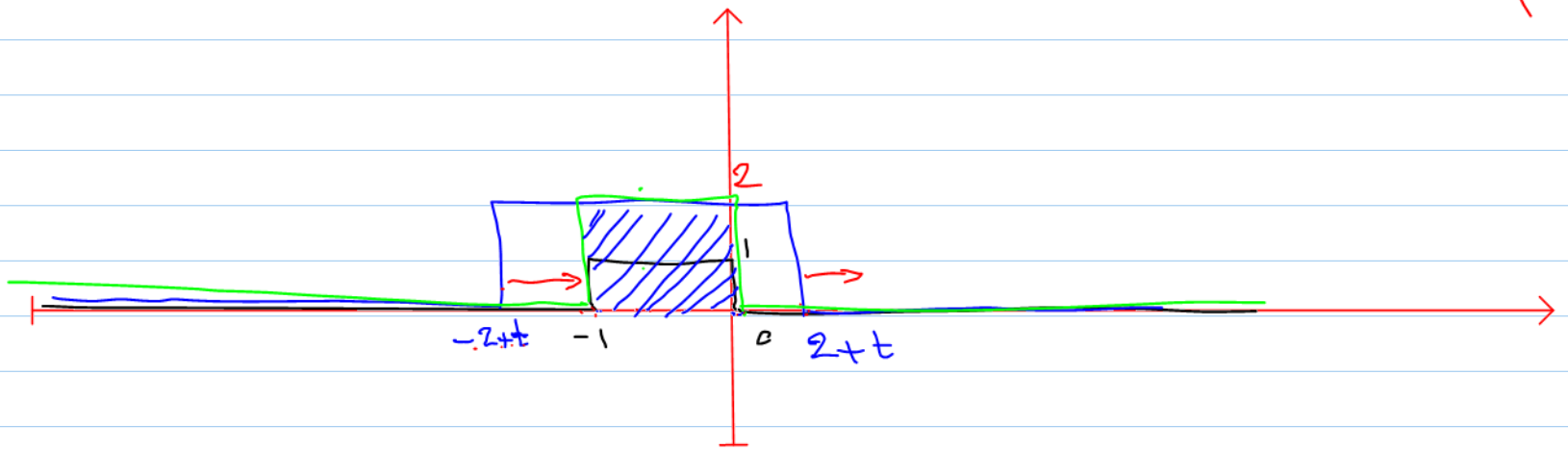


حالت دوم:

$-3 < t < -2 \rightarrow -1 < 2+t < 0$

مستطیلی با ارتفاع 2 و از -1 تا $2+t$ $\quad y(z)\,x(t-z) = 2+t$

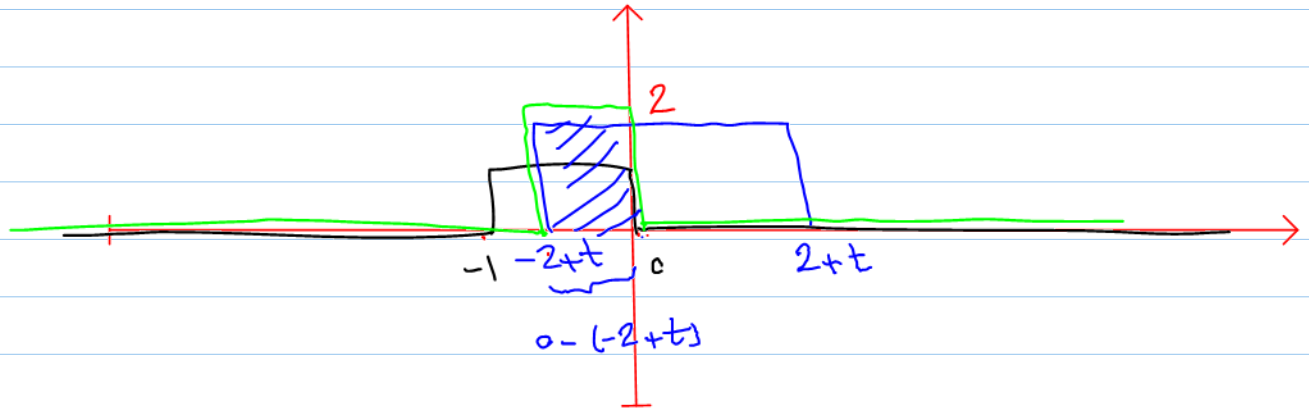
حالت سوم



$2+t>0$ و $-2+t<-1$ $\rightarrow$ $t>-2$, $t<1$ $\Rightarrow$ $-2<t<1$

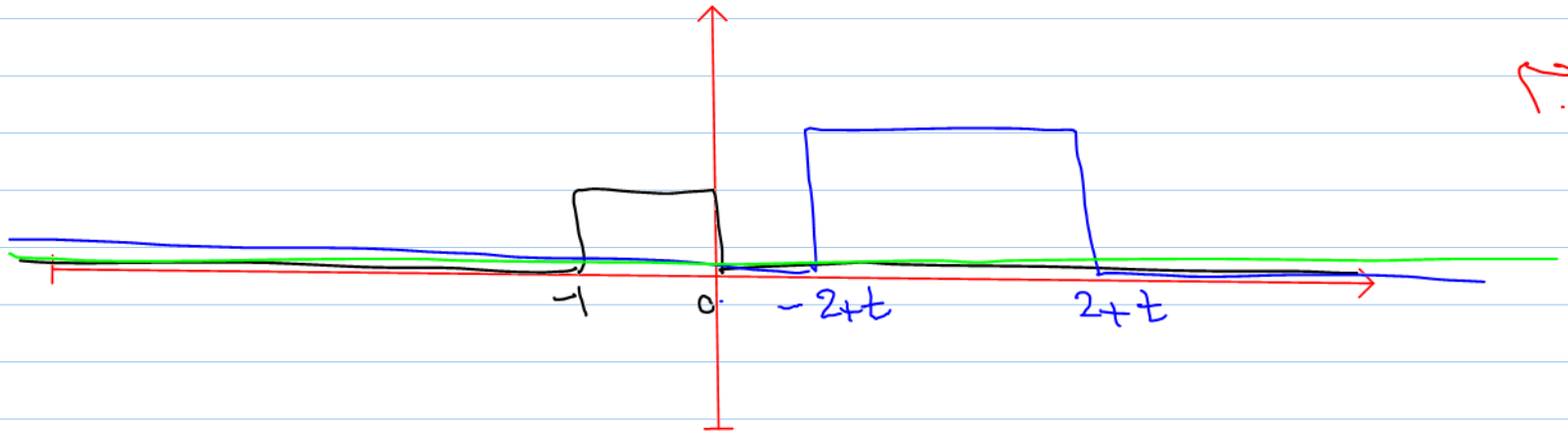
$x(t-\tau)\,y(\tau)$ = مستطیل با ارتفاع 2 بین 1- تا 0

حالت چهارم



$0 > -2+t > -1 \Rightarrow \quad 2 > t > 1$

$x(t-\tau)\,y(\tau) \neq -2+t \to 0$ ستقیل بدارتفاع 2 بین



خارت بینجم

$-2+t > 0 \rightarrow \quad t > 2 \Rightarrow \quad x(t-\tau)\,y(\tau) = 0$

⑤ ساعت زیر شخی حاملزب راصاحبانید.

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t < -3 \\ 2 \times (3+t) & -3 < t < -2 \\ 2 \times 1 & -2 < t < 1 \\ 2 \times (2-t) & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

حالت اول

حالت دوم

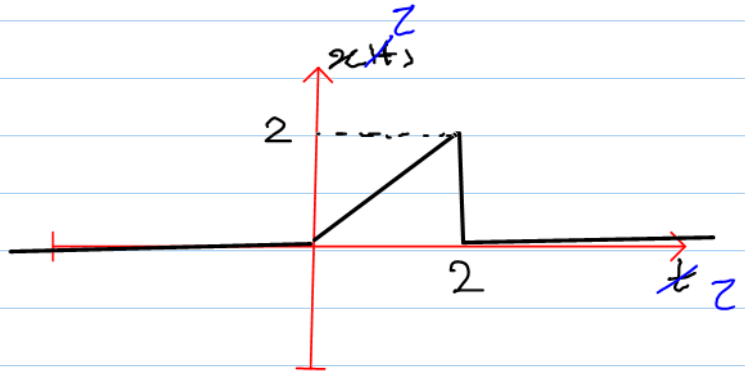
" سوم

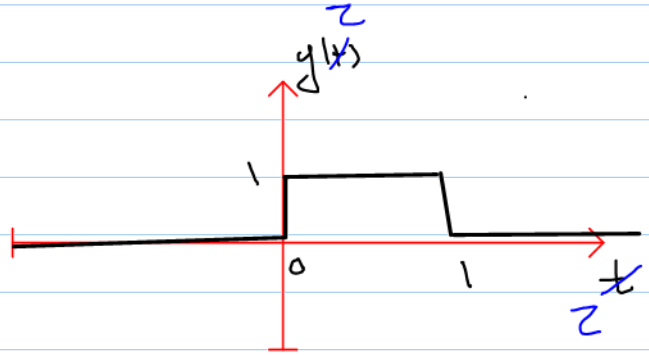
" چهارم

" پنجم

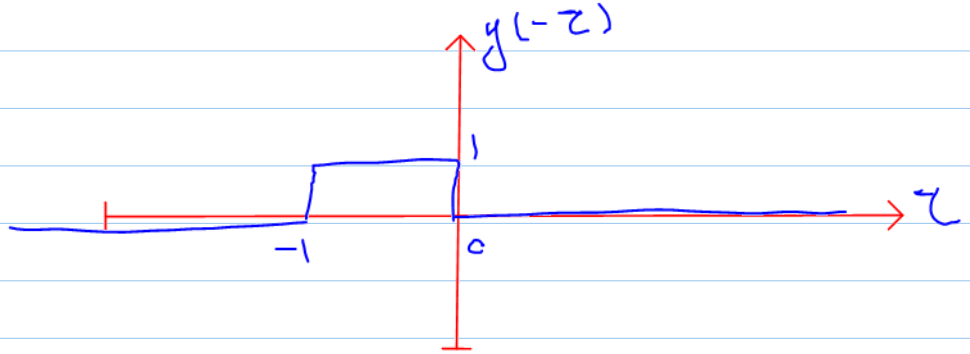
به عنوان تمرین باقیمانده کردن ۴ عملیات فوق را انجام دهید و حاصل کانولوشن را بدست آورید.

مثال. حاصل $x(t) * y(t)$ را حساب کنید.

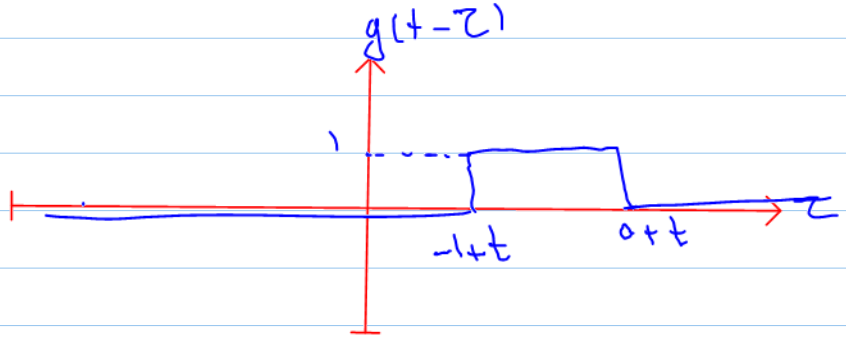




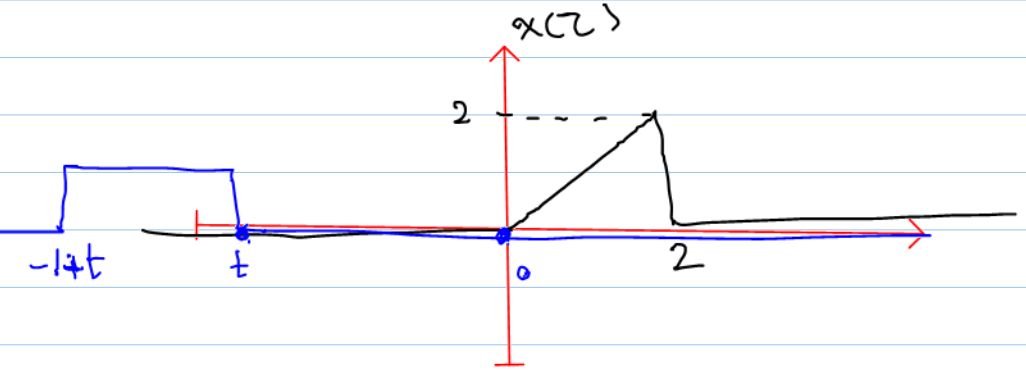
① یکی از سیگنال‌ها را تعریف کنید.



② حول t را با t جمع کنید. $y(t-\tau)$

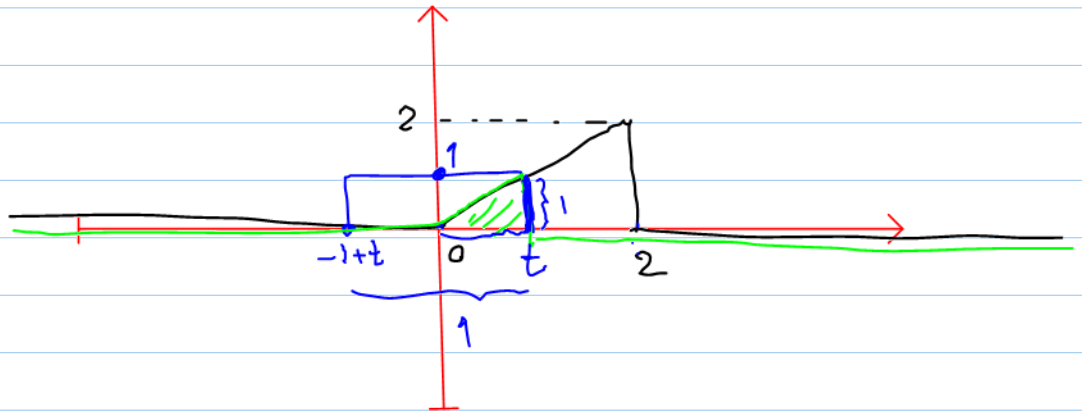


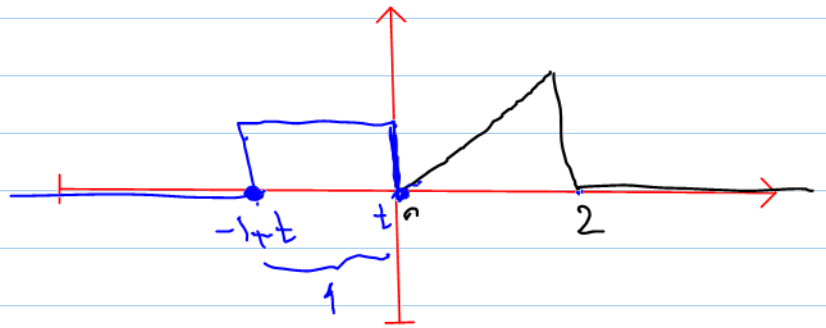
③ حاصلضرب $y(t-\tau)x(\tau)$ را به ازای مقادیر مختلف t رسم کنید.



حالت اول:

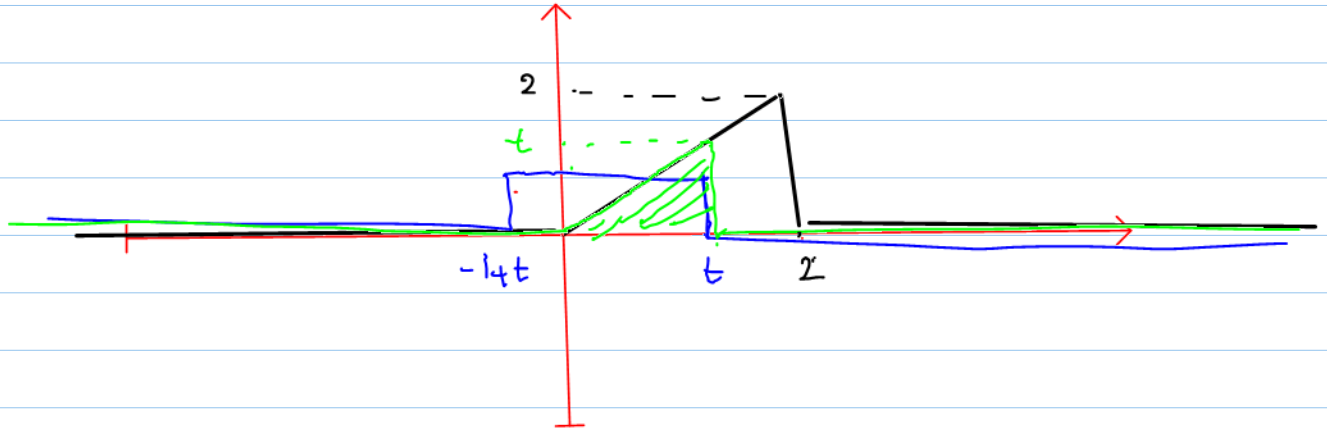
(1) $t<0 \rightarrow x(\tau)\,y(t-\tau) = 0$





(2) $t>0$, $-1+t<0 \rightarrow$ $0<t<1$

مساحت $= \frac{1}{2}\, t \times t = \frac{1}{2} t^2$

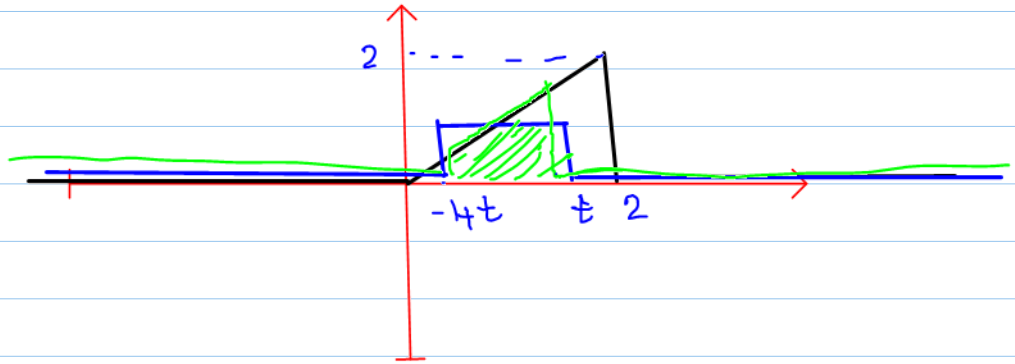


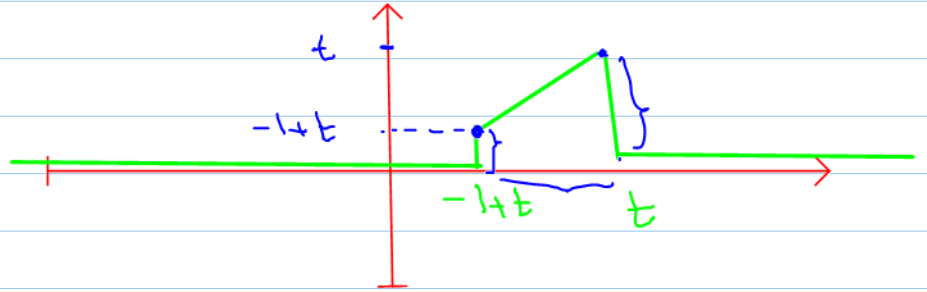
(3) $-1+t > 0$, $t < 2$

$\Rightarrow$ $1 < t < 2$

$$\text{Aire} = \frac{(t + t-1) \times (t - (t-1))}{2}$$

$$\text{Aire} = \frac{2t - 1}{2}$$



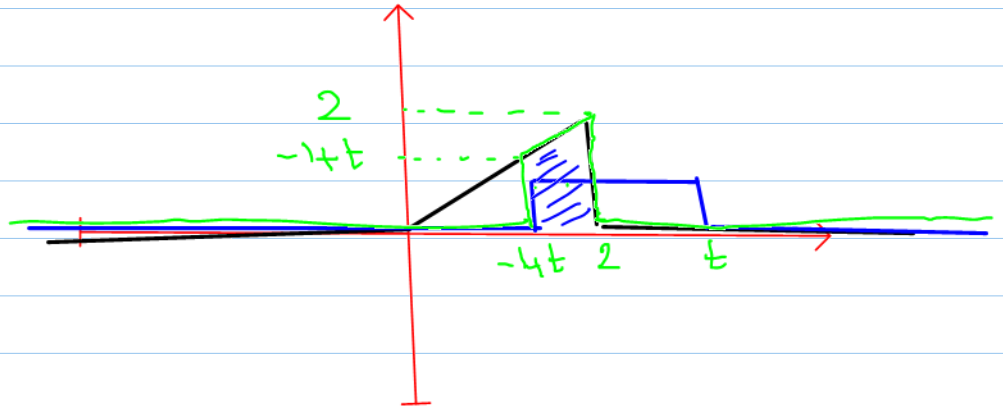


(4) $t > 2$, $-1+t < 2$

$2 < t < 3$

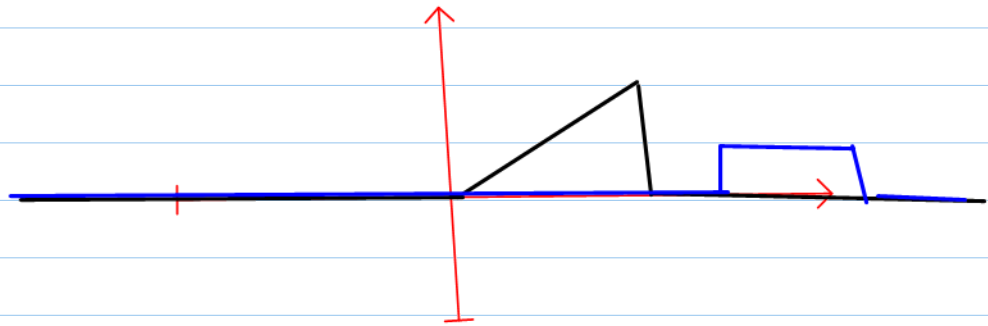
$$\text{Aire} = \frac{(-1+t+2)(2-(-1+t))}{2}$$

$$\text{Aire} = \frac{(t-1) \times (3-t)}{2}$$



(5) $-1+t>2 \longrightarrow t>3$

$-\infty < t < \infty$

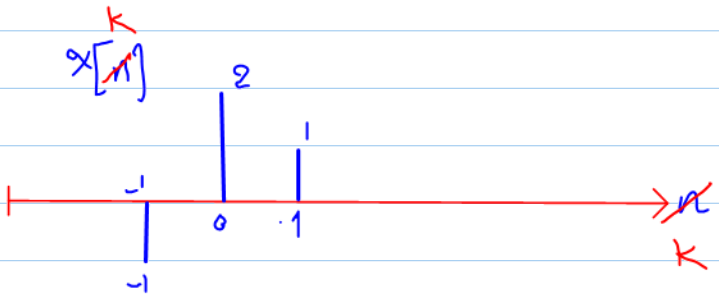


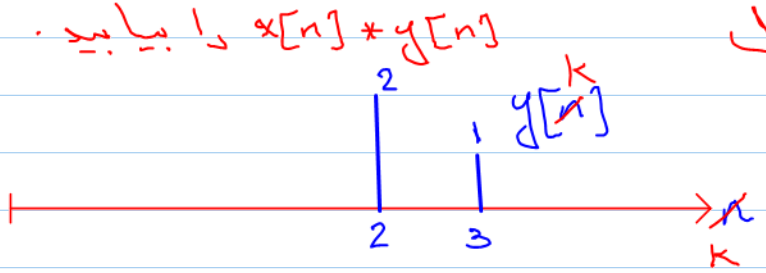
$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0<t<1 \\ \frac{2t-1}{2} & 1<t<2 \\ \frac{(t-1)(3-t)}{2} & 2<t<3 \\ 0 & t>3 \end{cases}$$

جلسه ۱۷ سیگنال

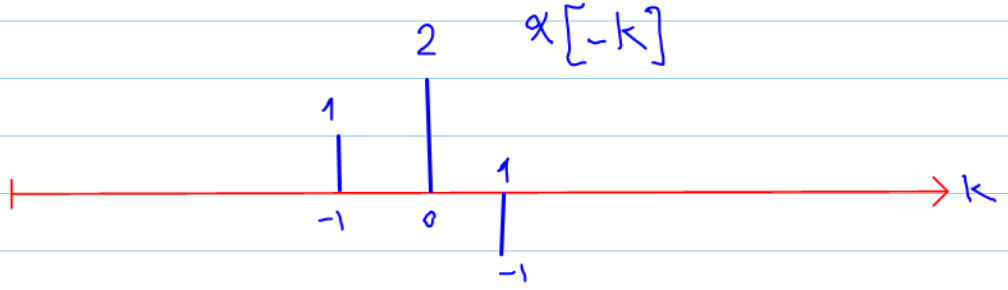
"کانولوشن"

مثال: حاصل $x[n]*y[n]$ را بیابید.

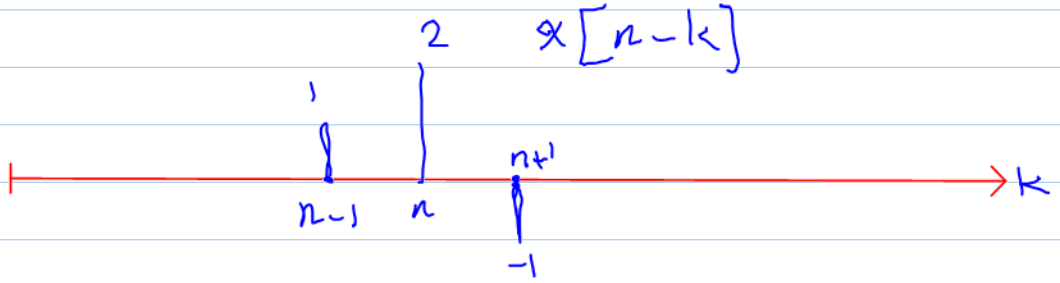




① یکی از سیگنال‌ها را قرینه کنید. (اول جمله مدام k می‌گذارید)

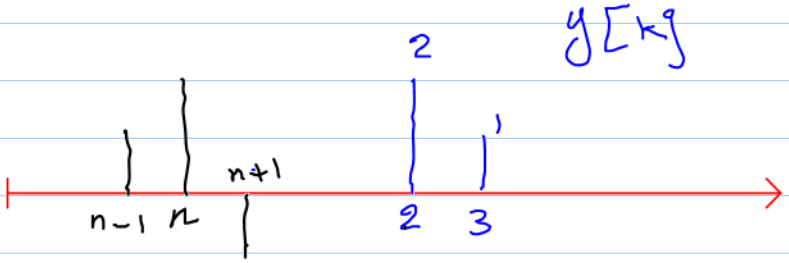


② هر لحظه را با n جمع کنید.



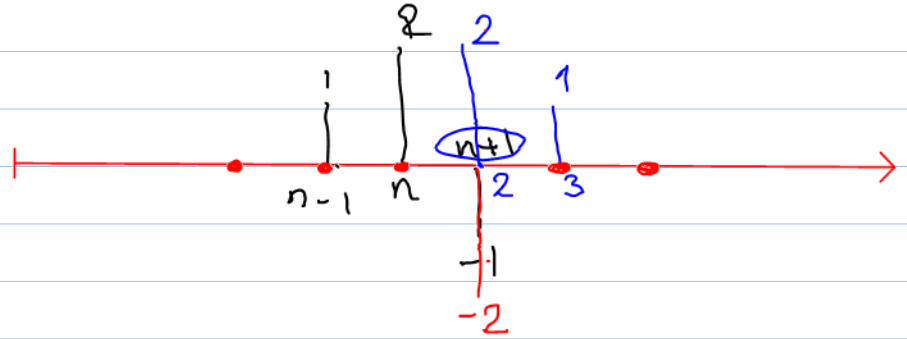
③ بازای n های مختلف حاصلضرب دو سیگنال را و حاصل کانولوشن را حساب کنید.

مجموع حاصلضرب از $-\infty$ تا $+\infty$



① $n+1<2 \rightarrow n<1 \rightarrow x[n]*y[n]=0$

② $n+1=2 \rightarrow n=1$



$x[n]*y[n]=-2$

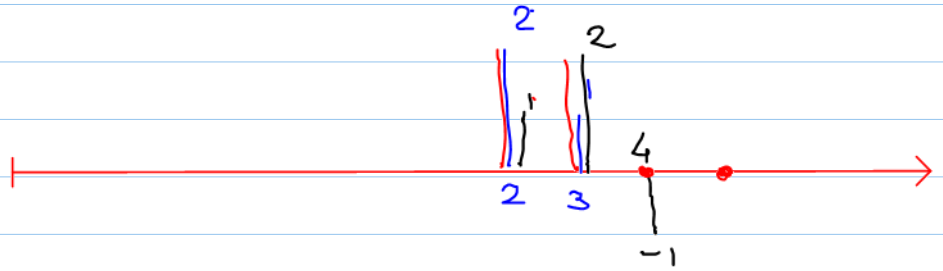
③ $n+1=3 \rightarrow n=2$



$x[n]*y[n]=3$

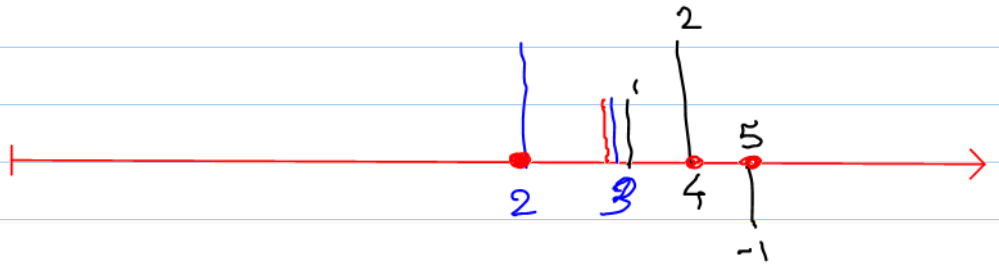
⑤ $n+1=4 \rightarrow n=3$

$x[n]*y[n]=4$



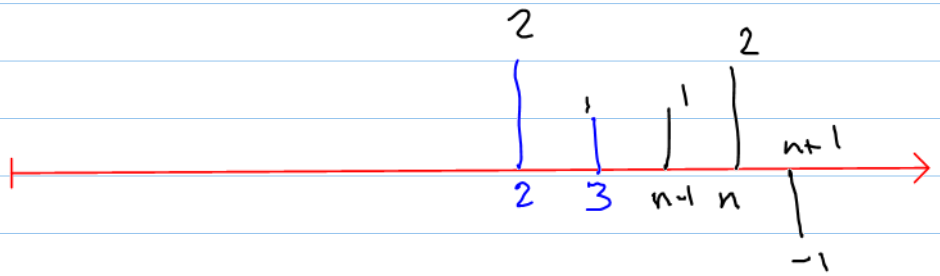
⑥ $n+1=5 \rightarrow n=4$

$x[n]*y[n]=1$



⑦ $n+1>5 \rightarrow n>4$

$x[n]*y[n]=0$



$$x[n]*y[n]=\begin{cases}0 & n<1\\ -2 & n=1\\ 3 & n=2\\ 4 & n=3\\ 1 & n=4\\ 0 & n>4\end{cases}$$

روش گرافیکی فقط وقتی به کار می‌رود که سوال شکل داده باشد.

روش محاسباتی:

مثال: با فرض $x[n]=u[n]$ و $y[n]=\delta[n-1]$ حاصل $x*y$ را محاسبه کنید؟

$$x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\,\delta[n-k-1]$$

($k=n-1$: خاصیت غربالگری)

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-1]\,\delta[n-k-1]$$

$$=u[n-1]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k-1] \quad (k=n-1) \Rightarrow \quad n-1\in(-\infty,\infty)$$

$$x[n]*y[n] = u[n-1] \times 1 = u[n-1]$$

$x[n] = \alpha^n (u[n] - u[n-10])$ $\quad y[n] = \beta^n u[n]$ $\quad 0 < \alpha, \beta < 1$: 가정

$x[n]*y[n] = ?$

$$u[n+a] - u[n+b] = \begin{cases} 1 & a \le n < b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x[n]*y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^k (u[k] - u[k-10]) \beta^{n-k} \underbrace{u[n-k]}_{n \ge k \to\, 1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} \underbrace{(u[k] - u[k-10])}_{0 \le k < 10 \to\, 1}$$

$0 \le k \le 9$

$$x[n]*y[n] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{9} \alpha^k \beta^{n-k} & n \ge 10 \\ \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} & 0 \le n < 10 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$n \geq 10 \rightarrow$ $\sum_{k=0}^{9} \alpha^k \beta^{n-k} \left(u[k] - u[k-10]\right)$ ($u[k]-u[k-10]=1$ for $0 \leq k \leq 9$)

$n < 10$ $\sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} \left(u[k] - u[k-10]\right)$ ($u[k]-u[k-10]=1$ for $0 \leq k \leq 9$)

$n < 0$ $\sum_{k=-\infty}^{-5} \alpha^k \beta^{n-k} \left(u[k] - u[k-10]\right)$ ($u[k]-u[k-10]=0$ for $0 \leq k \leq 9$)

$$x[n] * g[n] = \begin{cases} \beta^n \dfrac{1-(\frac{\alpha}{\beta})^{10}}{1-\alpha/\beta} & n \geq 10 \\ \beta^n \dfrac{1-(\frac{\alpha}{\beta})^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \frac{\beta^n}{\beta^k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

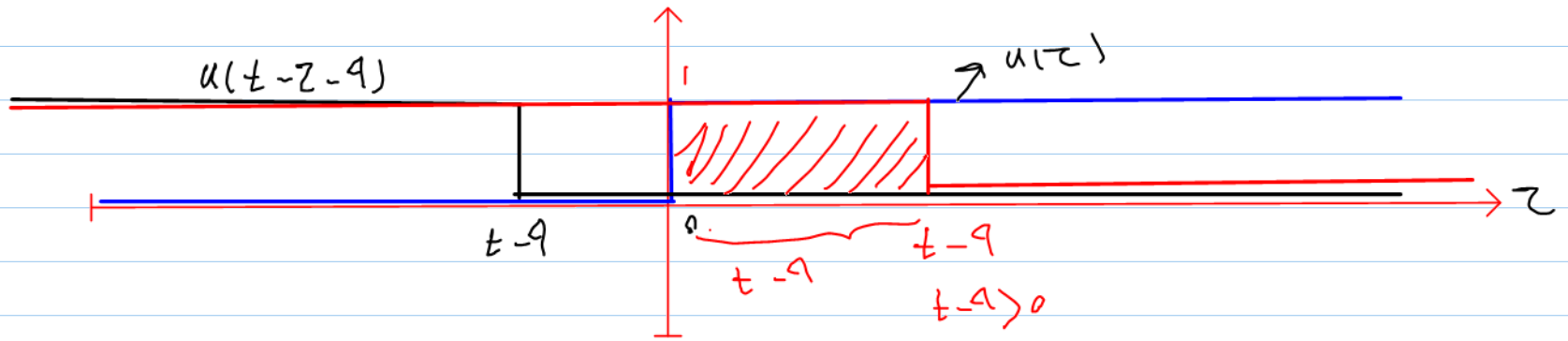
$$= \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\sum_{k=c}^{q} \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{10}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$$

$x(t) * y(t) = ?$, $y(t) = u(t-9)$, $x(t) = u(t)$.

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau-9)\, d\tau$$

$\tau \geq 0$, $\tau \leq t-9$



$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t-9 \leq 0 \\ t-9 & t-9 > 0 \end{cases}$$

نکات کانولوشن:

① عضو خنثی δ

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

② کانولوشن با متغیر شیفت یافته:

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

$$x[n] * \delta[n-a] = x[n-a]$$

با خاصیت جابجایی استفاده می‌شود.

$$\delta(t-9) * \delta(t-1) = ?$$

$x(t) = \delta(t-9)$

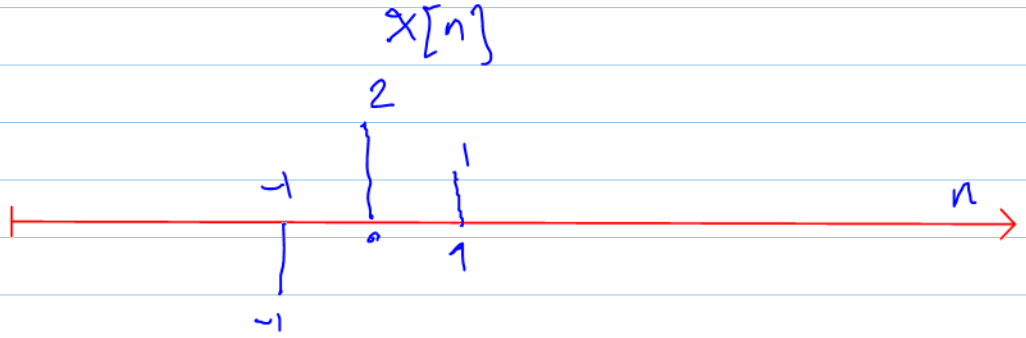
$x(t) * \delta(t-1) = x(t-1) = \delta(t-10)$

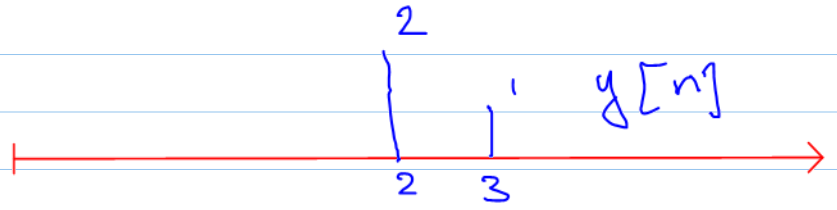
$x(t-1) = \delta(t-1-9) = \delta(t-10)$

* هرگاه بتوانیم به هر طریقی سیگنال را بصورت δ بنویسیم حاصل کانولوشن ساده‌تر می‌شود.

مثال.

$x[n] * y[n] = ?$





$x[n] = -1\,\delta[n+1] + 2\,\delta[n] + 1\,\delta[n-1]$

$y[n] = 2\,\delta[n-2] + 1\,\delta[n-3]$

$x[n]*(y[n]+z[n]) = x[n]*y[n] + x[n]*z[n]$ ③ خاصیت توزیع پذیری

$$x[n]*y[n] = (-\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1])*(2\delta[n-2]+\delta[n-3])$$

$$= -\delta[n+1]*2\delta[n-2] + (-\delta[n+1]*\delta[n-3])$$
$$+ 2\delta[n]*2\delta[n-2] + 2\delta[n]*\delta[n-3]$$
$$+ \delta[n-1]*2\delta[n-2] + \delta[n-1]*\delta[n-3]$$

$x[n]$

$-\delta[n+1]*2\delta[n-2] = -2\delta[n-2+1] = -2\delta[n-1]$

$$x[n]*y[n] = -2\delta[n-3] - 1\delta[n-2] + 4\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$
$$+ 2\delta[n-3] + \delta[n-4] = 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

⑤ خاصیت مشتق:

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * y(t) = x(t) * \frac{dy}{dt}$$

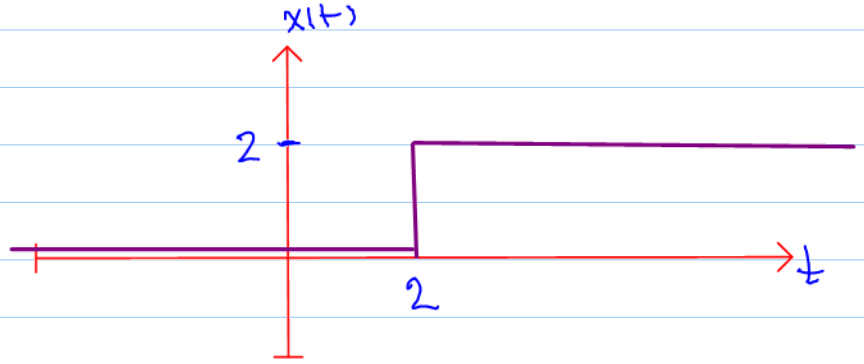
$$\frac{d}{dt}\left(x(t) * y(t)\right) = \frac{d}{dt}x(t) * y(t) = x(t) * \frac{dy}{dt}$$

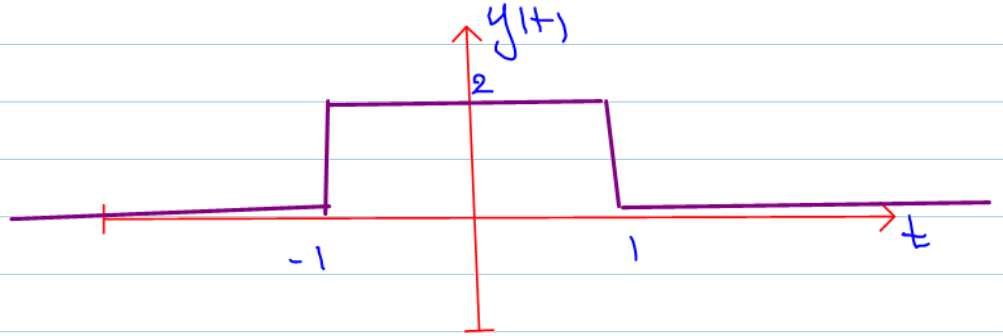
⑥ انتگرال

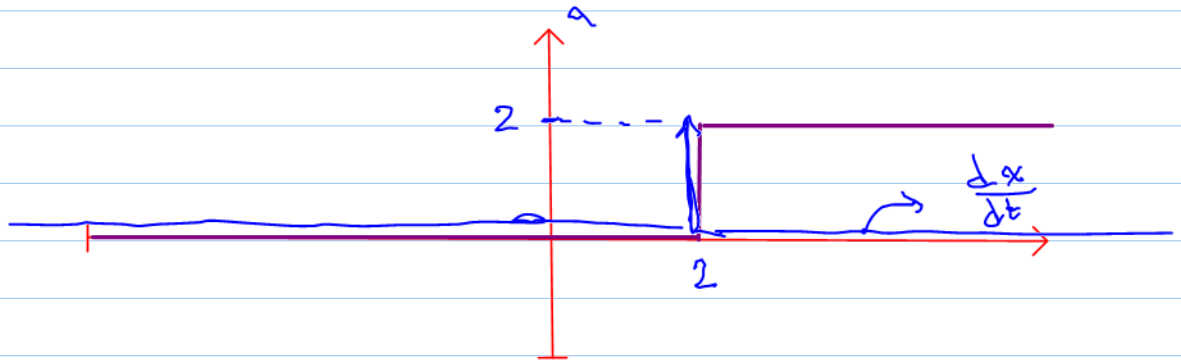
$$\int_{-\infty}^{t} x(z) * y(z)\, dz = x(t) * \int_{-\infty}^{t} y(z)\, dz$$

* هرگاه با مشتق یا انتگرال گیری توانستید یکی از سیگنالها را ساده کنید حتماً این کار را انجام دهید.

مثال: حاصل $x(t) * y(t)$ را بیابید.



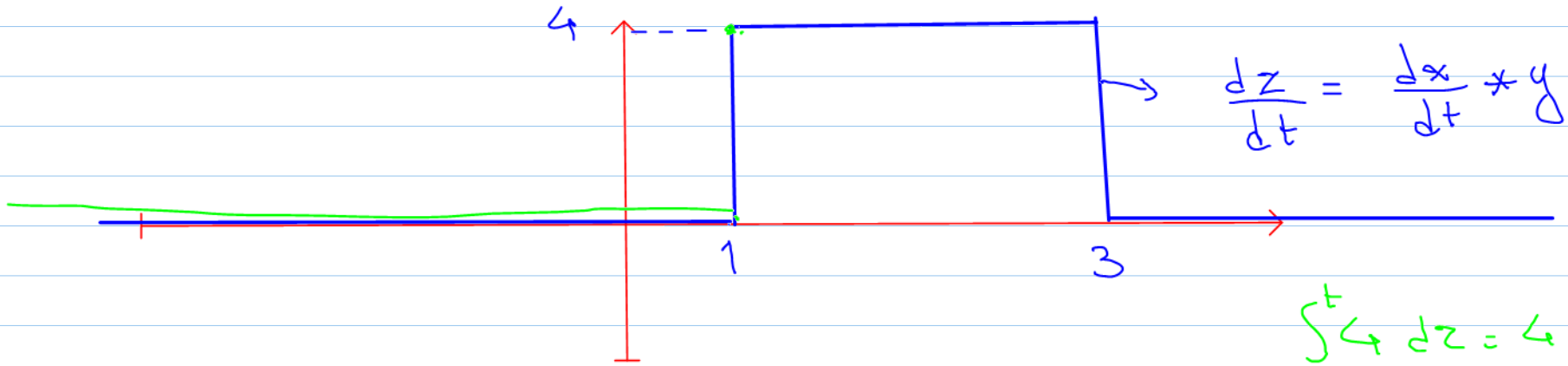




$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\,\delta(t-2)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} * y(t) = 2\,\delta(t-2) * y(t)$$

$$\frac{dx}{dt} * y(t) = 2\,y(t-2)$$

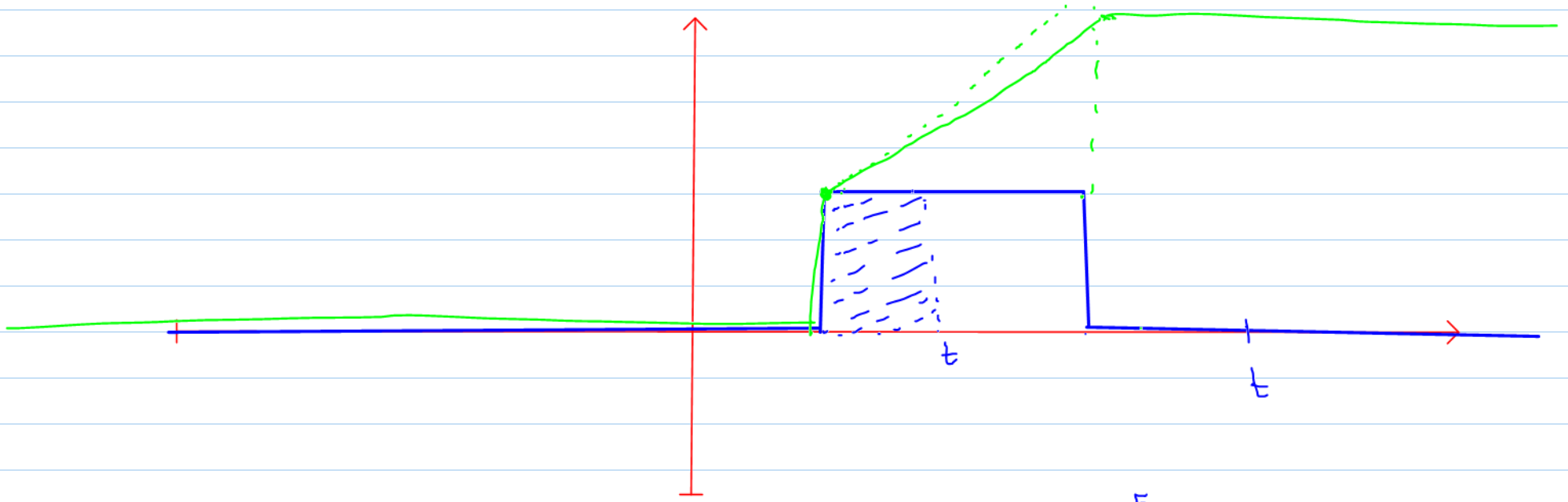


$$\int_{-\infty}^{t} 4\,dz = 4t$$

$$x(t) * y(t) = z(t) \longrightarrow \frac{dx}{dt} * y(t) = \frac{dz}{dt}$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{dz(z)}{dz}\,dz$$

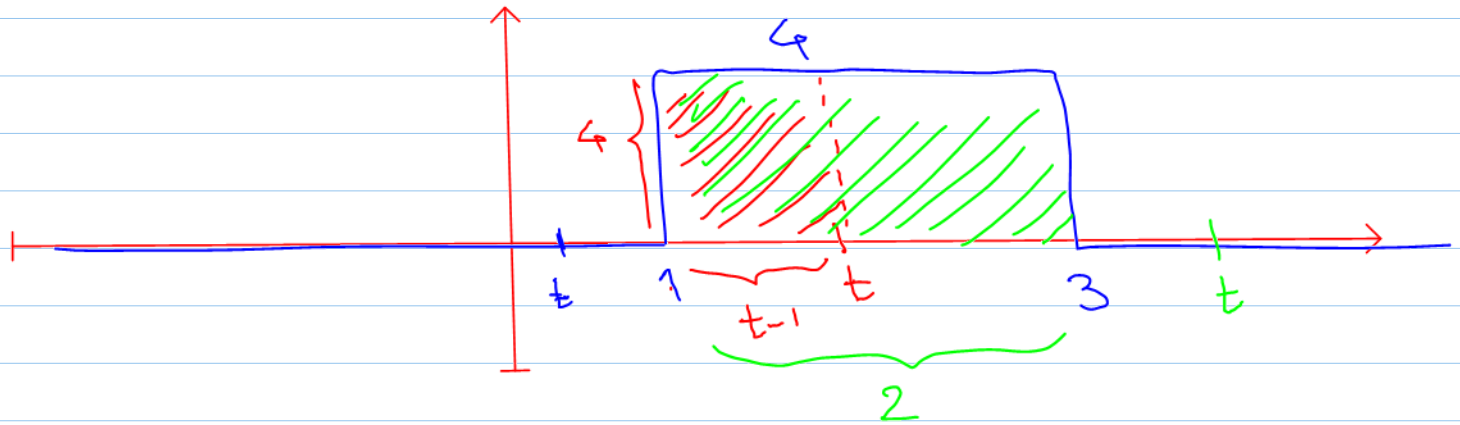
=



$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 4 & 1 \le t \le 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{0.5} 0 \, dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dz}{dt} \, dt = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 4(t-1) & 1 \le t \le 3 \\ 4 \times 2 & t > 3 \end{cases} = x(t) * y(t) = z(t)$$



اگر با مشتق گیری از یکی از سیگنالها جابه جا شده ترسیم شود، مشتق گرفته و حاصل انتگرال گیری

کانولوشن را با سیگنال دوم حساب کنید. در نهایت از سیگنال حاصل به ازای انتگرال

$t=-\infty$ تا $t=+\infty$ انتگرال بگیرید.

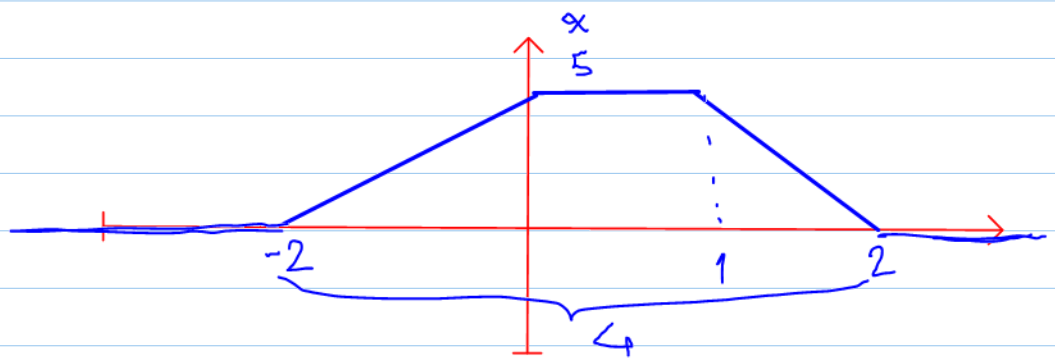
مشتق

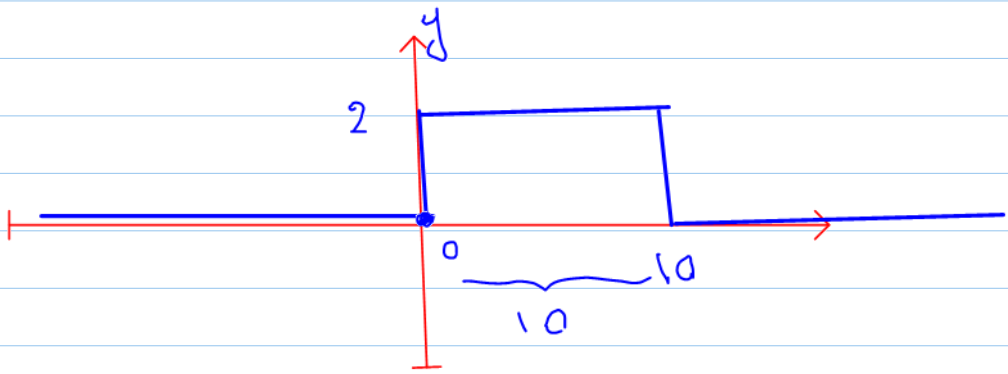
④ طول سیگنال حاصل از کانولوشن:

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

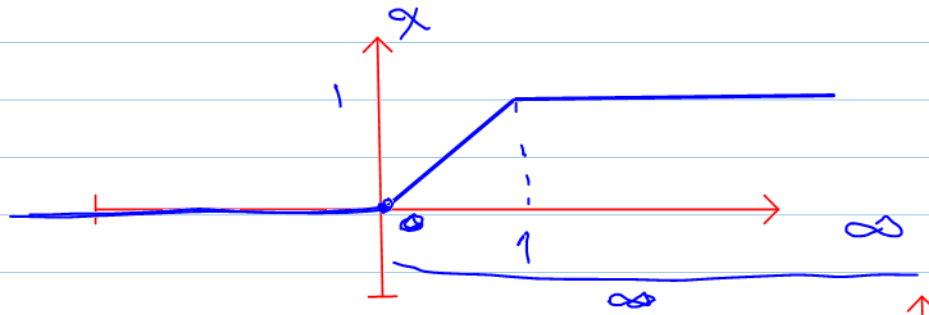
طول z = طول x + طول y - 1

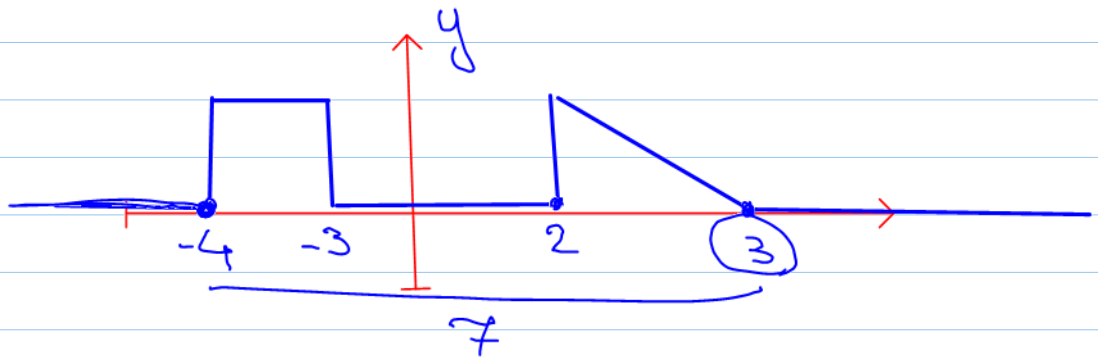
$z(f*g) = x(f*g) + y(f*g)$













جلسه ۱۱ سیگنال

کانولوشن

ادامه خواص کانولوشن:

* خاصیت مقیاس دهی زمانی:

$$x(t) * y(t) = z(t)$$

$$x(\alpha t) * y(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} z(\alpha t)$$

* قرینگی زمانی

$$x(-t) * y(-t) = z(-t)$$

* انتقال زمانی (سه تا)

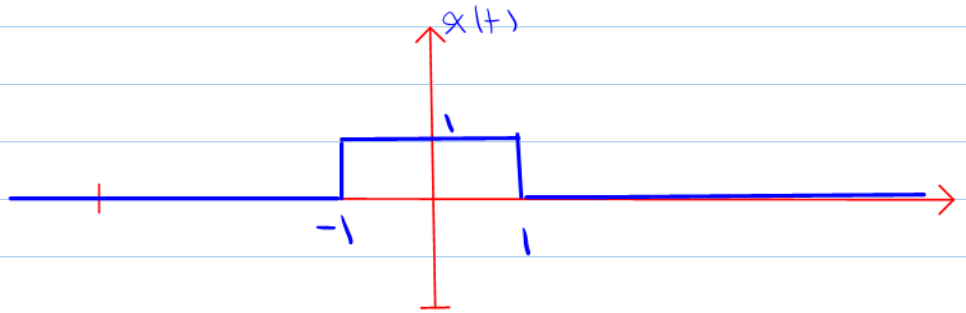
$$x(t-a) * y(t) = z(t-a)$$

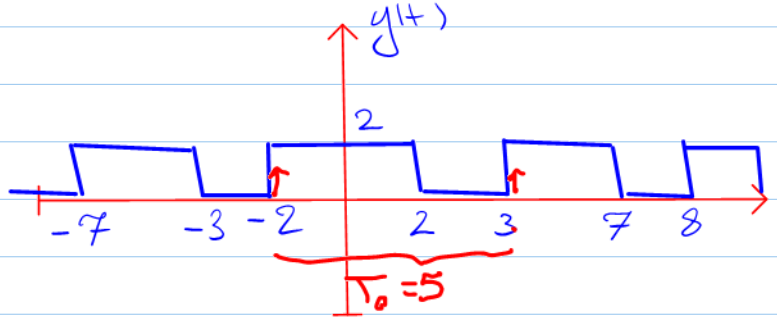
$$x(t) * y(t-a) = z(t-a)$$

$$x(t-a) * y(t-b) = z(t-(a+b))$$

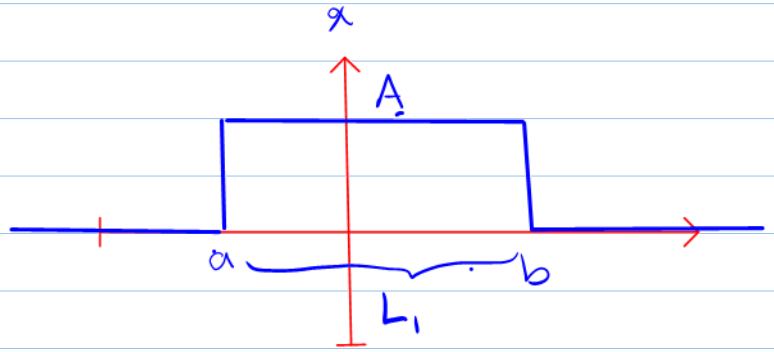
* کانولوشن متناوب: اگر یکی از سیگنال‌های کانولوشن متناوب باشد (مثلاً x)، یک دوره تناوب x را با y کانولوشن کرده و حاصل را با دوره تناوب x تکرار می‌کنیم.

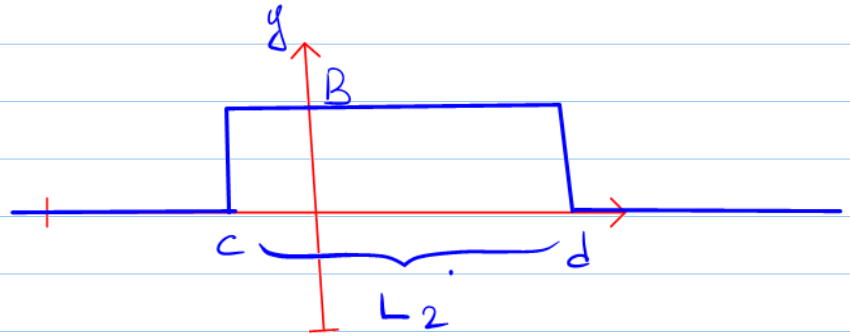
مثال: حاصل $x(t) * y(t)$ را رسم کنید.

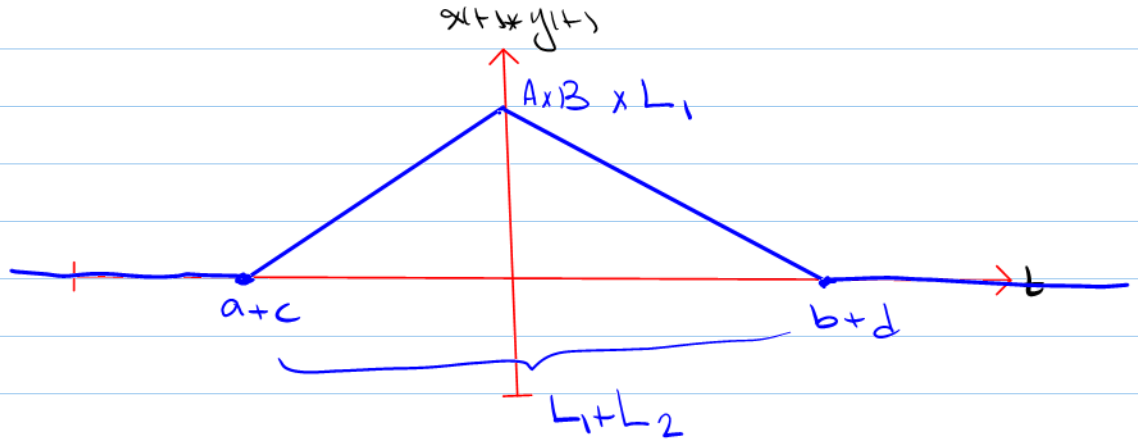




نکته: حاصل کانولوشن دو پالس مستطیلی به صورت زیر خواهد شد. (مثلی شکل)

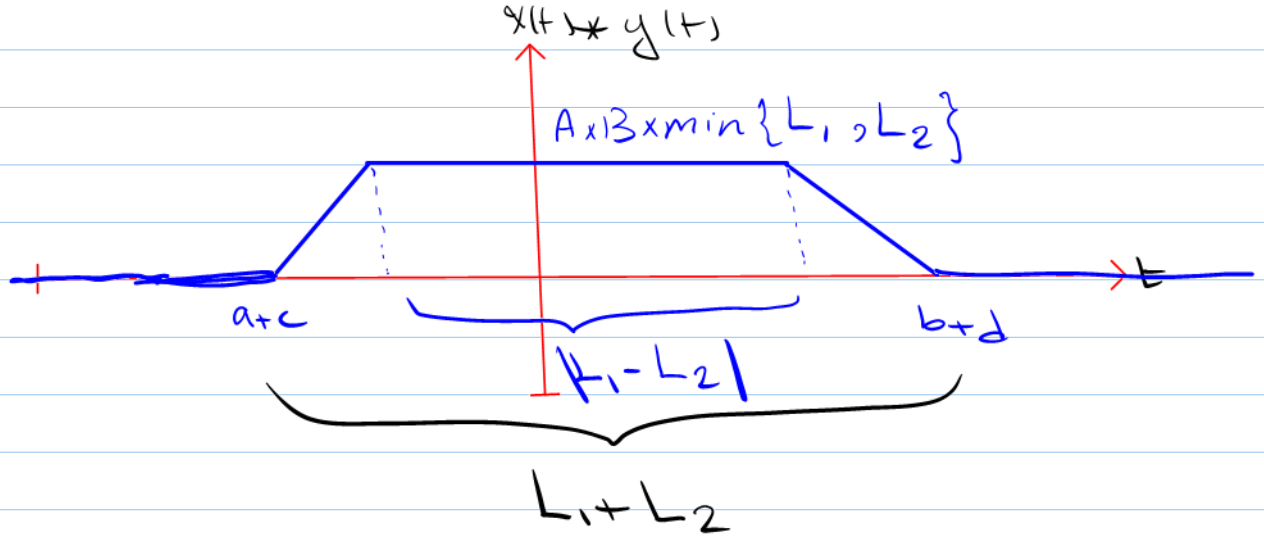




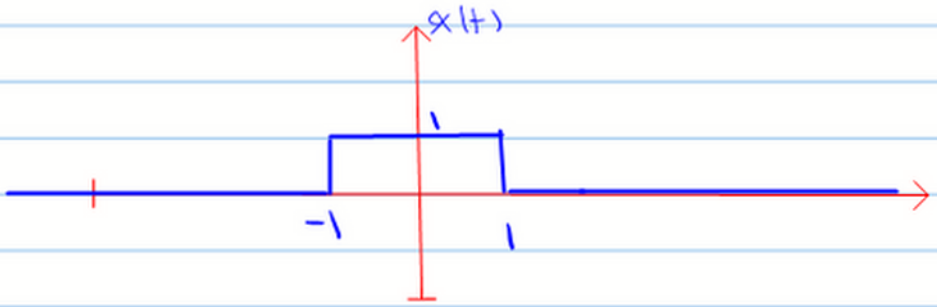


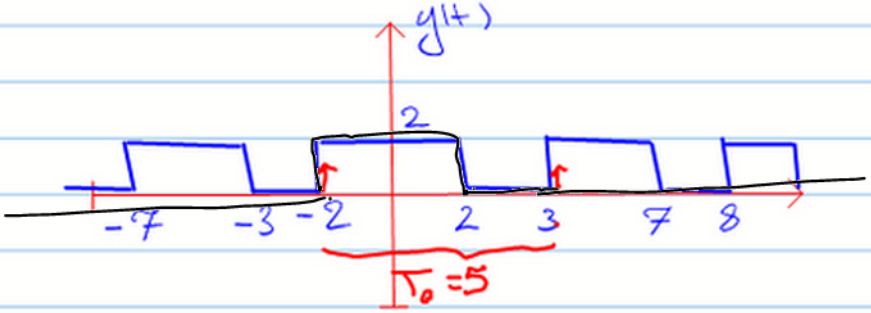
اگر $L_1 = L_2$ باشد:

اگر $L_1 \neq L_2$ باشد

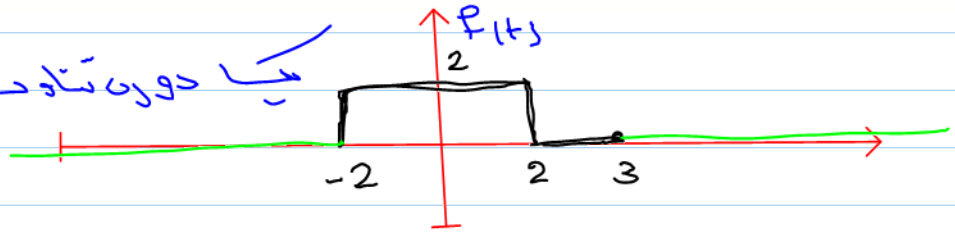


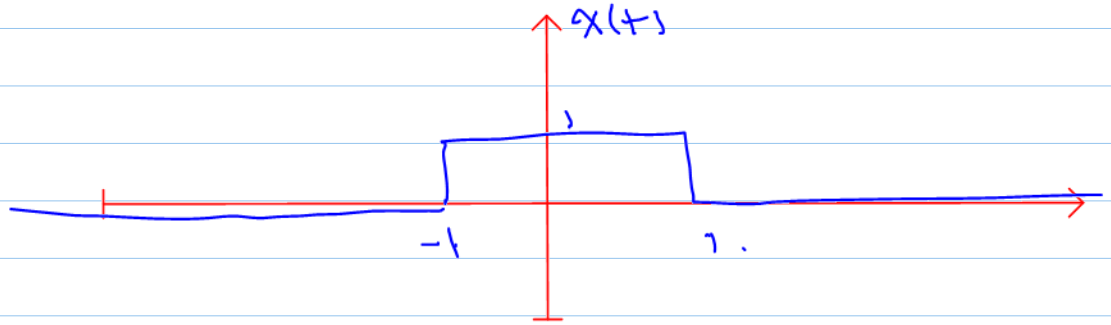
حل مثال:



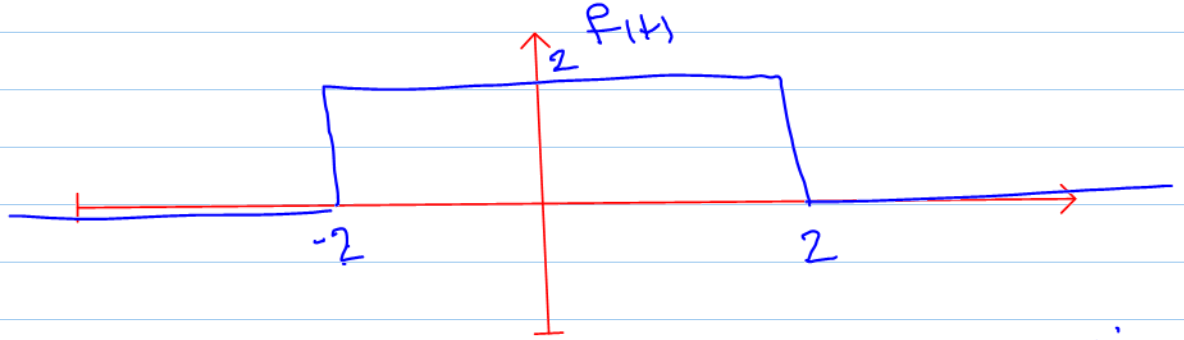


سپس دوری تناوب از $f(t) = y(t)$



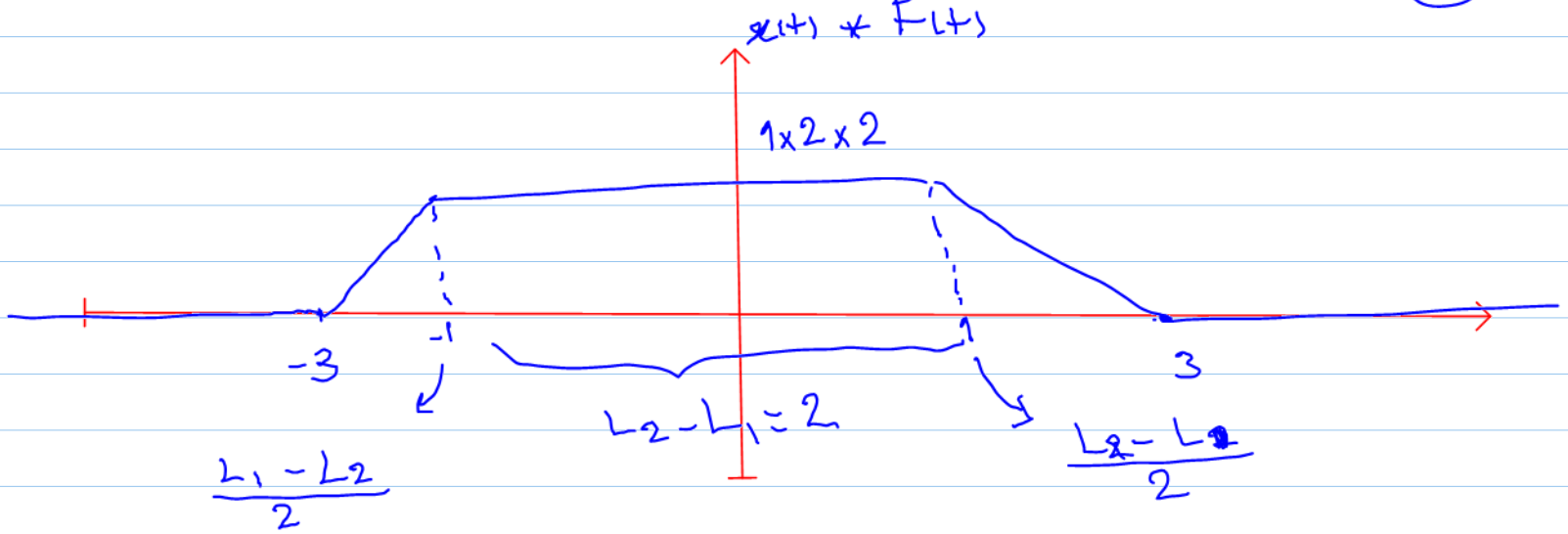


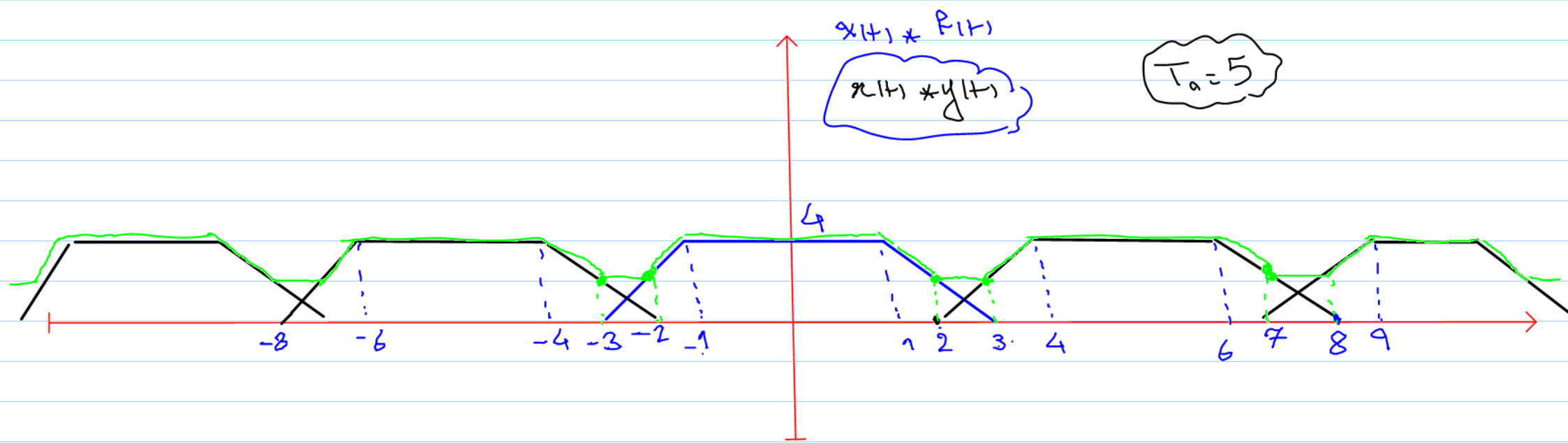
$L_1 = 2$

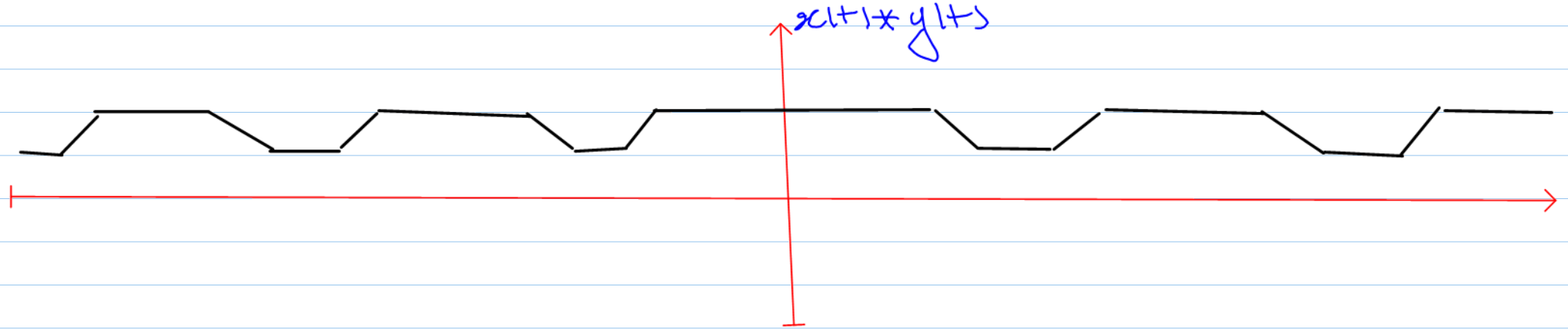


$L_2 = 4$

$L_1 \neq L_2$ حاصل کانولوشن ذوزنقه




x(t) * p(t)
x(t) * y(t)
$T_0 = 5$
4
-8
-6
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
6
7
8
9

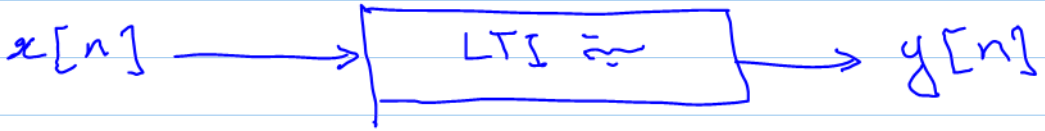

x(t) * y(t)

سیستم های LTI : خطی و تغییرناپذیر با زمان

ادعا : با داشتن پاسخ به ورودی مزبه در سیستم های LTI ، می‌توان پاسخ هر ورودی را حساب کرد.

اثبات :





✓ $x[n] = x[n] * \delta[n]$ منظور $\delta[n]$ ضربه

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[-\infty]\,\delta[n+\infty] + \cdots + x[-2]\,\delta[n+2] + x[-1]\,\delta[n+1]$$
$$+ x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + x[2]\,\delta[n-2] + \cdots$$

$x[0]$ یا $x[1]$ یا $x[\text{عدد}]$ ← یک عدد مقدار سیگنال در آن زمان را می‌دهد.

$x[0]\ \delta[n] \longrightarrow h[n]\ x[0]$

$+\ x[1]\ \delta[n-1] \longrightarrow h[n-1]\ x[1]$ $+$ خاصیت TI

$+\ x[2]\ \delta[n-2] \longrightarrow h[n-2]\ x[2]$ $+$ خطی

$+\ x[-1]\ \delta[n+1] \longrightarrow h[n+1]\ x[-1]$ $+$

$+\ x[-2]\ \delta[n+2] \longrightarrow h[n+2]\ x[-2]$ $+$

$\vdots$

$$x[n] = x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + x[2]\,\delta[n-2] + \cdots + x[\infty]\,\delta[n-\infty]$$

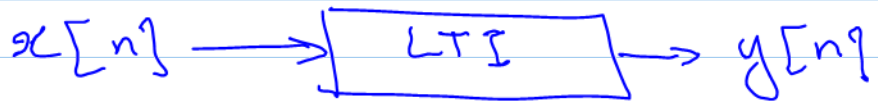
$$+ x[-1]\,\delta[n+1] + x[-2]\,\delta[n+2] + \cdots + x[-\infty]\,\delta[n+\infty] \longrightarrow$$

$$\text{خروجی} = x[0]\,h[n] + x[1]\,h[n-1] + x[2]\,h[n-2] + \cdots + x[\infty]\,h[n-\infty]$$

$$+ x[-1]\,h[n+1] + x[-2]\,h[n+2] + \cdots + x[-\infty]\,h[n+\infty]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

پس با داشتن پاسخ ضربه LTI به ورودی مزبور می‌توان پاسخ این سیستم به هر ورودی دلخواه را محاسبه کرد.



برای LTI:

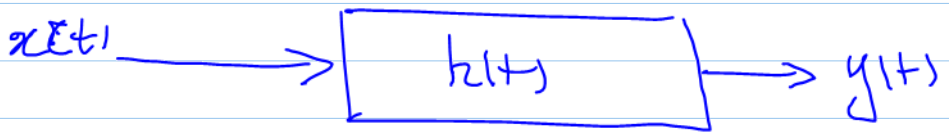
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

نکته: برای توصیف سیستم LTI، داشتن پاسخ به ورودی ضربه (h) کافی است.

* پاسخ ضربه سیستم = یعنی سیستم LTI است.
* پاسخ به ورودی ضربه ← " " سیستم.

در حوزه زمان بلوک یعنی کانولوشن



$$\Rightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

برق ۸۱ .

۱۰- اگر $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ و $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + \delta[n+2]$ باشد، حاصل عبارت $x[n] * h[n]$ کدام است؟

۱) $2\{\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]\} + 2\delta[n-4]$

۲) $\delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n] + \delta[n-2] - 2\delta[n-3]$

۳) $2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n] + 2\delta[n+1] - \delta[n-4]$

۴) $2\delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$

$$x[n] * h[n] = (\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]) * h[n]$$

$$= \delta[n] * h[n] + 2\delta[n-1] * h[n] - \delta[n-3] * h[n]$$

$$= h[n] + 2h[n-1] - h[n-3]$$

$$= 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 2(2\delta[n] + 2\delta[n-2]) - (2\delta[n-2] + 2\delta[n-4])$$

$$= 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$$

$h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$

$h[n-1] = 2\delta[n-1+1] + 2\delta[n-1-1]$

$h[n-3] = 2\delta[n-3+1] + 2\delta[n-3-1]$

برق ۸۲

۵- اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسسته به صورت $h(n) = (n + ۱)u(n + ۱)$ باشد، در اینصورت پاسخ سیستم به ورودی $x(n) = u(n) - u(n - ۲)$ کدام است؟

۱) $۲n\ u(n)$ ✗

۲) $nu(n)$ ✗

۳) $(۲n + ۱۰)\ u(n)$ ✓

۴) $(n + ۱)\ u(n)$ ✗

$y[n] = x[n] * h[n]$ پاسخ ضربه LTI

$h[n] = (n+1)\,u[n+1]$

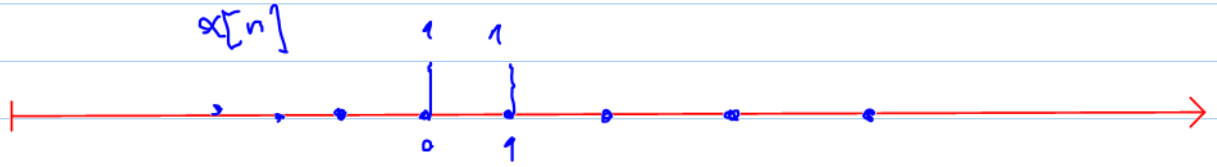
$x[n] = u[n] - u[n-2]$

هرجا توانستید یکی از سیگنال‌ها را به فرم ضربه بنویسید، حتماً این کار را انجام دهید.

اگر سیگنال گسسته داخل طول محدود باشد و خارج آن را به فرم ضربه نوشت.

$u[n-a] - u[n-b]$ ← بین a و $b-1$ برابر 1 و بقیه جاها صفر است.

$x[n] = u[n] - u[n-2]$ ← بین 0 و 1 برابر 1 بقیه جاها صفر



$x[n] = 1\delta[n-0] + 1\delta[n-1] = \delta[n] + \delta[n-1]$

$$y[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) * h[n] = \delta[n] * h[n] + \delta[n-1] * h[n]$$

$$= h[n] + h[n-1]$$

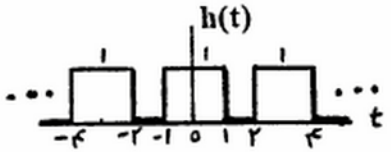
$$= (n+1)u[n+1] + (n-1+1)u[n-1+1]$$

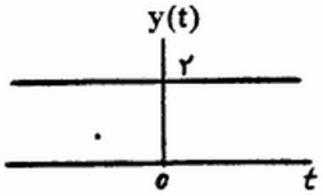
$$y[n] = (n+1)u[n+1] + nu[n]$$

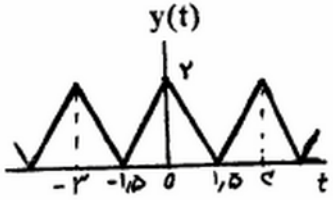
$n=2$ $\quad y[2] = 3\cancel{u[3]}^{1} + 2\cancel{u[2]}^{1} = 3 + 2 = 5$

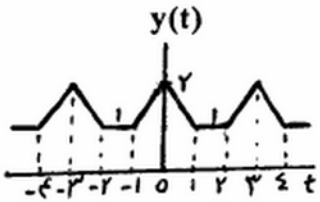
برق ۸۵

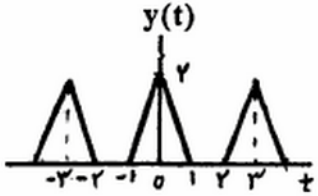
۲۲- فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال پریودیک با پریود $T_0 = ۳$ به صورت زیر باشد. اگر سیگنال ورودی به سیستم برابر $x(t) = u(t+۱) - u(t-۱)$ باشد، خروجی سیستم کدام‌یک از موارد زیر است؟

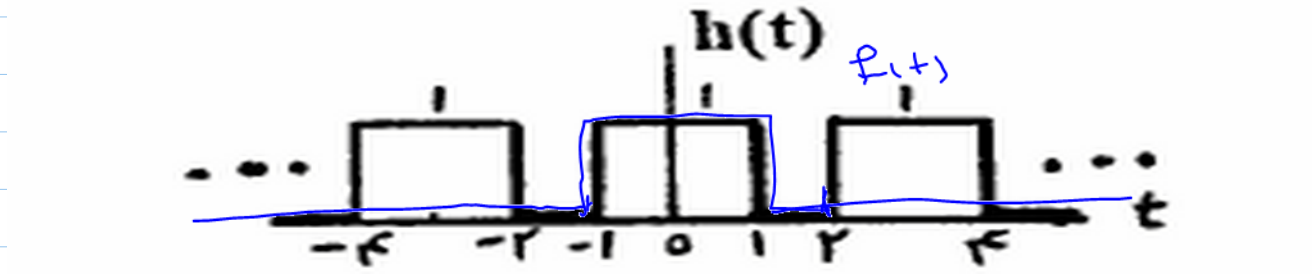


۱)


۲)


۳)


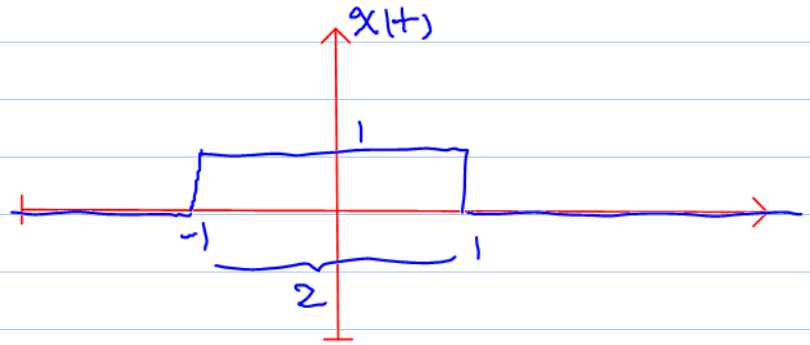
۴)


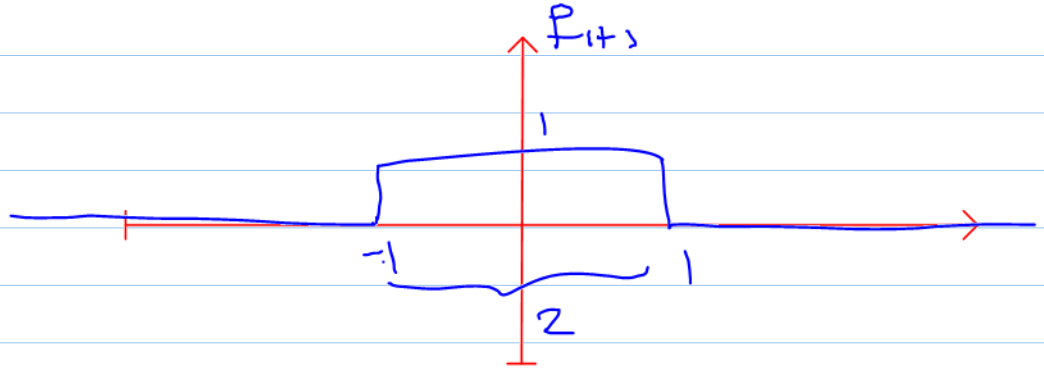


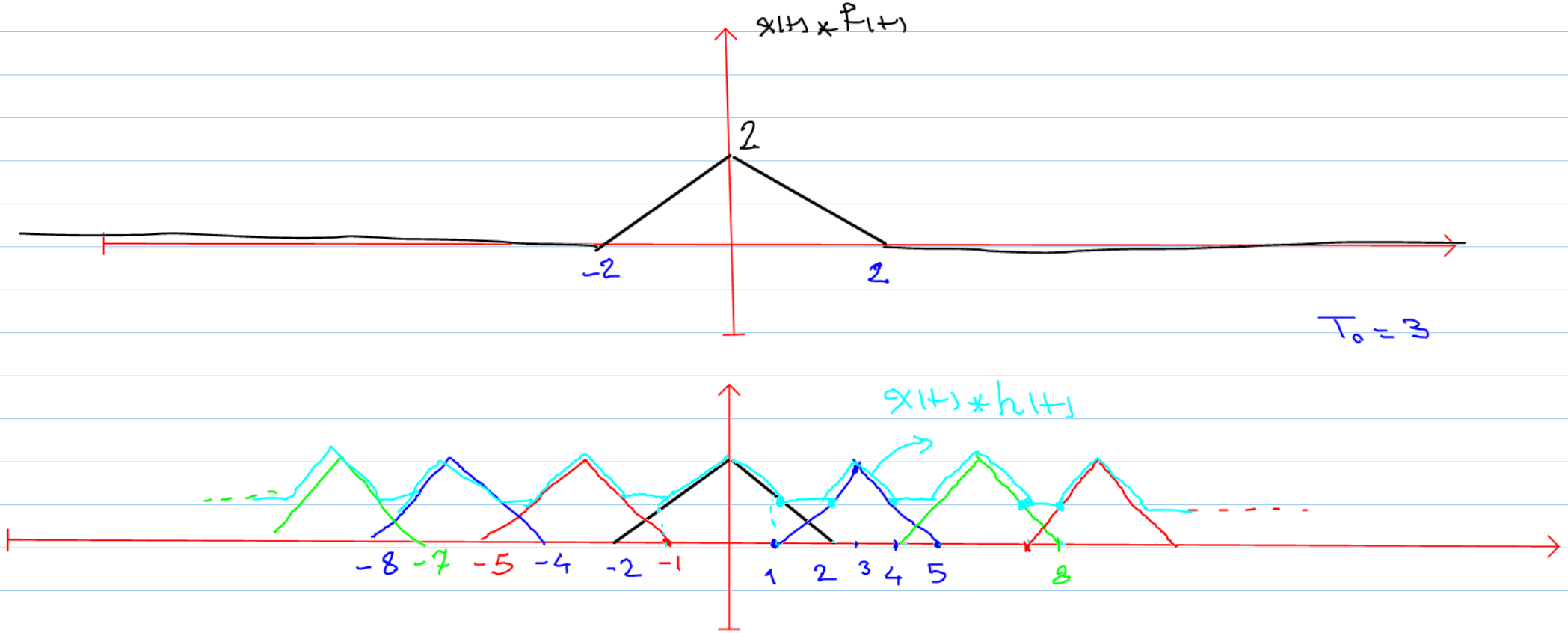
$y(t) = x(t) * h(t)$

$x(t) = u(t+1) - u(t-1)$

باس بی ۱- و ۱






x(t) * p(t)
2
-2
2
T₀ = 3
x(t) * h(t)
-8 -7 -5 -4 -2 -1
1 2 3 4 5
8

برق ۸۵

۲۳- اگر به یک سیستم LTI زمان- گسسته با پاسخ ضربهٔ $h[n]$، ورودی $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[-2n+1] - (\frac{1}{2})^n u[-n-3]$ اعمال شود، پاسخ این سیستم، $y[n]$، عبارت خواهد بود از:

۱) $y[n] = h[n] + \frac{1}{2}h[n+1] + \frac{1}{4}h[n+2]$

۲) $y[n] = h[n] + 2h[n+1] + 4h[n+2]$

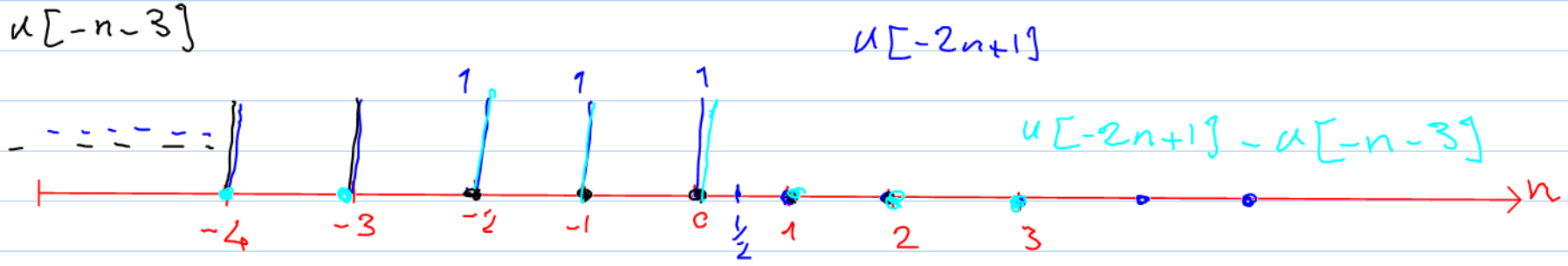
۳) $y[n] = h[n] + \frac{1}{2}h[n-1] + \frac{1}{4}h[n-2]$

۴) $y[n] = h[n] + 2h[n-1] + 4h[n-2]$

$y[n] = x[n] * h[n] =$ Lah بزن

بزن Sabet

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-2n+1] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-3] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u[-2n+1] - u[-n-3] \right]$$



$$u[-2n+1] = \begin{cases} 1 & -2n+1 \geq 0 \rightarrow n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow n = 0, -1, -2, -3, \dots \\ 0 & \text{else} \quad n > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u[-n-3] = \begin{cases} 1 & -n-3 \geq 0 \rightarrow n \leq -3 \\ 0 & n > -3 \end{cases}$$

$$u[-2n+1] - u[-n-3] = 1\,\delta[n-(-2)] + 1\,\delta[n-(-1)] + 1\,\delta[n-0]$$

$$= \delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\delta[n+2] + 1\,\delta[n+1] + \delta[n]\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n+2] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n+1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta[n]$$

($n=-2$ for the first term, $n=-1$ for the second, $n=0$ for the third)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \delta[n+2] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \delta[n+1] + \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \delta[n]$$

$$x[n] = 4\,\delta[n+2] + 2\,\delta[n+1] + \delta[n]$$

$$x[n] * h[n] = y[n]$$

$$y[n] = \left(4\,\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n]\right) * h[n]$$

$$= 4\,\delta[n+2] * h[n] + 2\,\delta[n+1] * h[n] + \delta[n] * h[n]$$

$$= 4\,h[n+2] + 2\,h[n+1] + h[n]$$

جلسه ۱۹ سیگنال

ادامه حل مسئله

برگ ۸۷

۱۶ ـ اگر $y(t) \triangleq x(2t) * \delta(4-2t)$ در آن صورت $y(t)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}x(2t-4)$

۲) $\frac{1}{2}x(4-4t)$

۳) $\frac{1}{2}x(2t-8)$

۴) $\frac{1}{2}x(8-2t)$

$y(t) = x(2t) * \delta(4-2t) = ? * \hookrightarrow ?$

$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$

$\delta(4-2t) \overset{?}{=} ? \delta(t-a)$ $\qquad \delta(bf(t)) = \frac{1}{|b|}\delta(f(t))$

$\delta(\underbrace{-2}_{b}(\underbrace{t-2}_{f})) = \frac{1}{|-2|}\delta(t-2) = \frac{1}{2}\delta(t-2)$

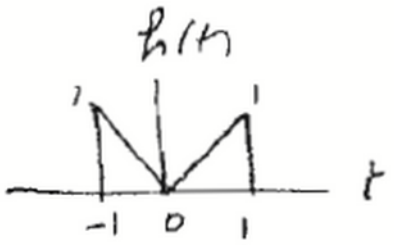
$\delta(4-2t) = \frac{1}{2}\delta(t-2)$

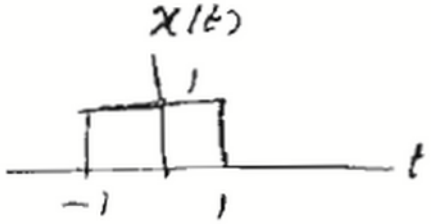
$y(t) = x(2t) * \frac{1}{2}\delta(t-2) = \frac{1}{2}x(2t) * \delta(t-2) = \frac{1}{2}x(2(t-2))$

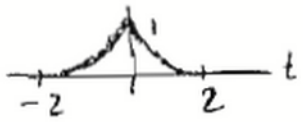
$y(t) = \frac{1}{2}x(2t-4)$

برق ۸۹

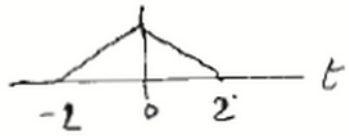
۱۶- اگر پاسخ ضربه سیستم LTI به صورت $h(t)$ باشد پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ به صورت کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

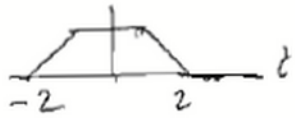




۱) 

۲) 

۳) 

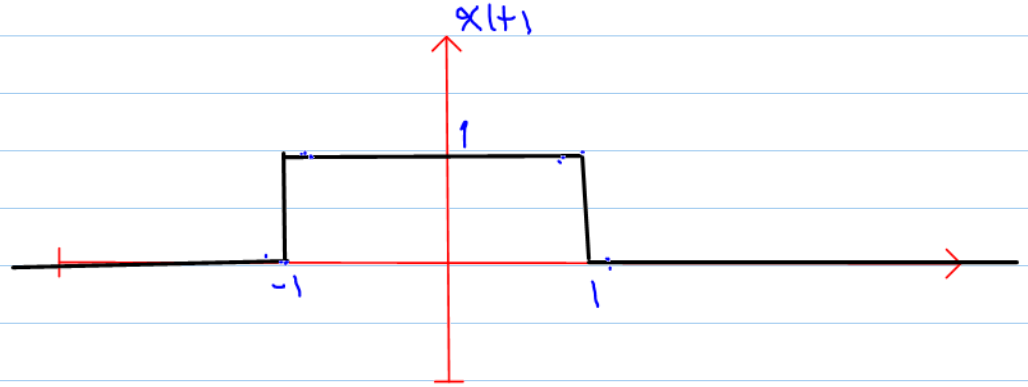
۴) 

باتوجه به شکل ما با سیستم LTI سر و کار داریم $y(t) = x(t) * h(t)$

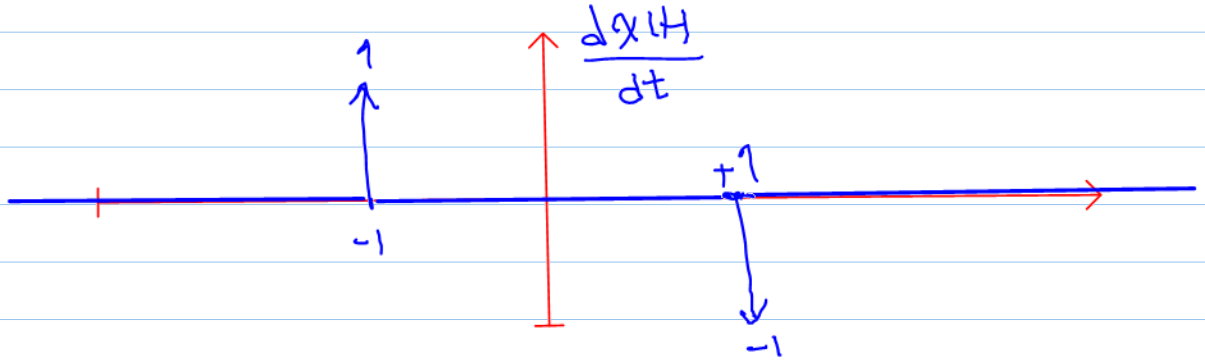
سعی می‌کنیم یکی از سیگنال‌ها را تبدیل به مشتق کنیم.

یکی از خاصیت‌های جابه‌جایی مشتق گیری

مشتق (تغییرات ناگهانی) = $\frac{d}{dt}$



هرجا مشتق = مقدار قبل - مقدار بعدی



$\frac{dx}{dt} = ?$

$$\frac{dx}{dt} = 1\delta(t+1) - 1\delta(t-1) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

② $h(t)$ را با $\frac{dx}{dt}$ کانولوشن می‌کنیم.

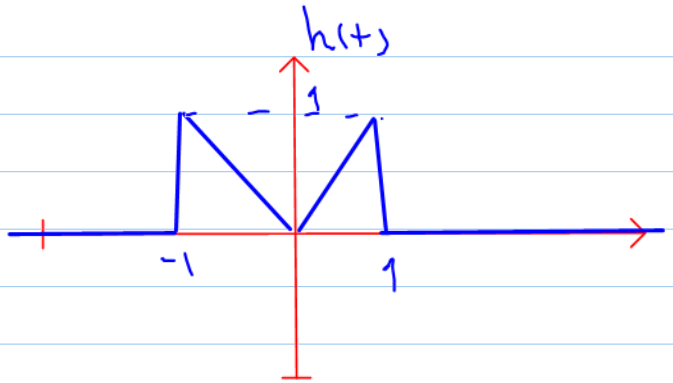
$$? = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

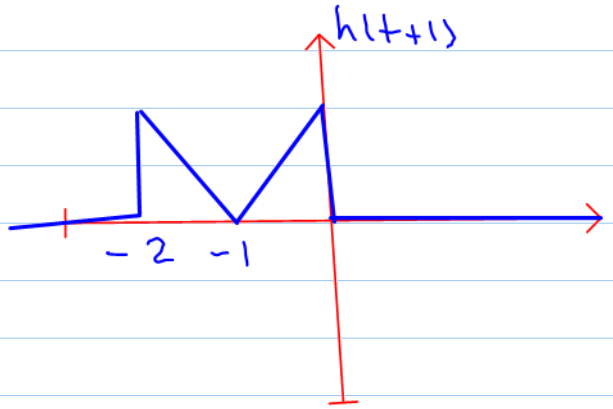
$$y = x * h \longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} * h(t)$$

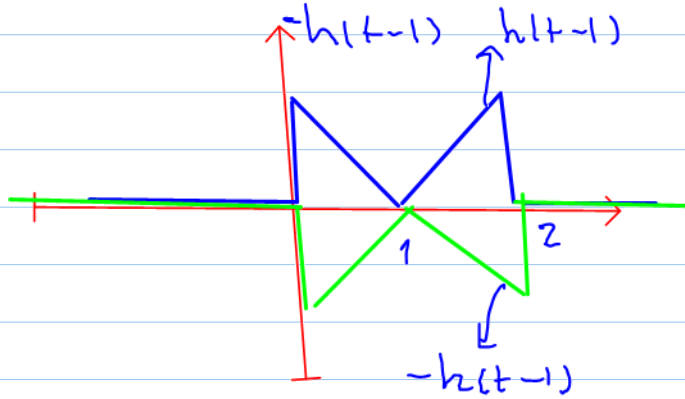
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} * h(t) = \big(\delta(t+1) - \delta(t-1)\big) * h(t)$$

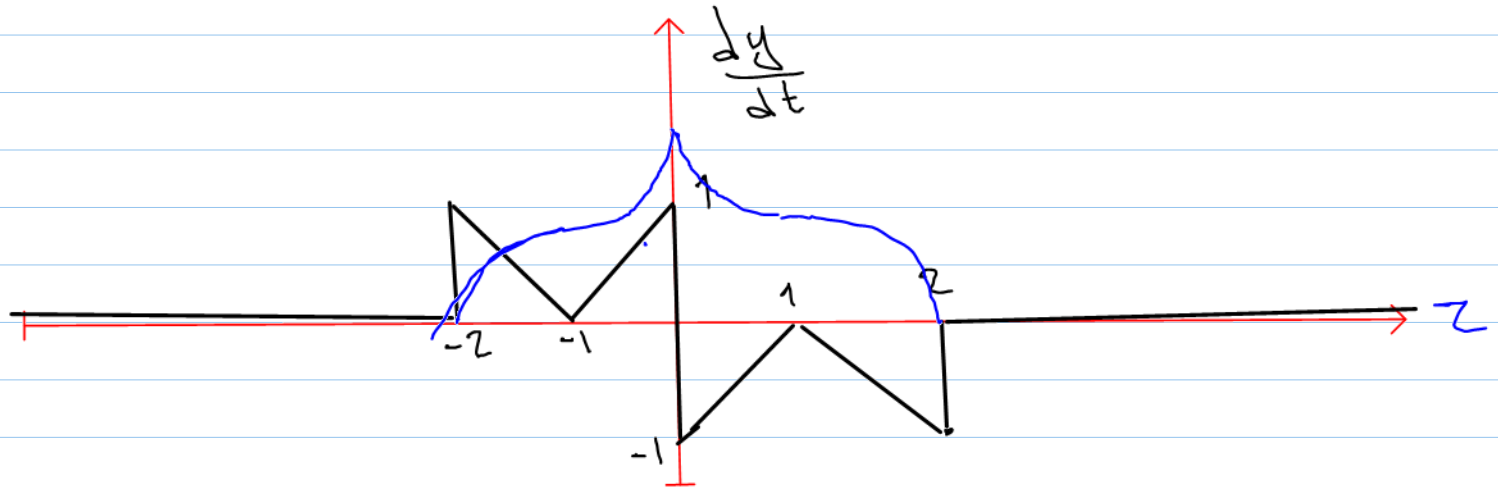
$$= \delta(t+1) * h(t) - \delta(t-1) * h(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = h(t+1) - h(t-1) = h(t+1) + \big(-h(t-1)\big)$$









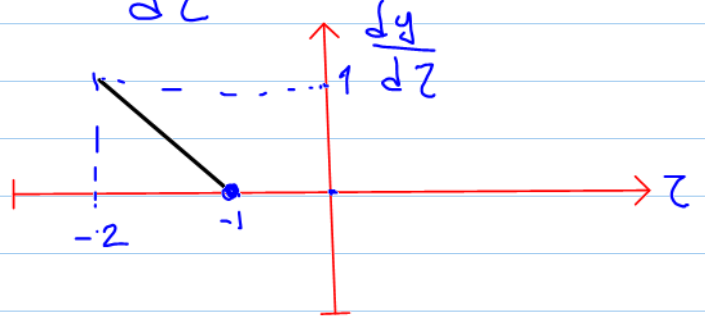
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{dy(z)}{dz}\, dz$$

$$\frac{dy(z)}{dz} = ?$$

① $z \leq -2 \rightarrow \frac{dy}{dz} = 0$

② $-2 \leq z \leq -1$

$$\frac{dy}{dz} = -z - 1$$

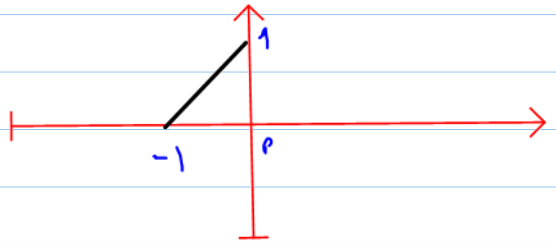


$$\frac{dy}{dz} - 0 = \left(\frac{0-1}{-1-(-2)}\right)(z-(-1))$$

$$\frac{dy}{dz} = -z - 1$$

③ $-1 \leq z \leq 0 \rightarrow$

$$\frac{dy}{dz} = z + 1$$



④ $0 \leq z \leq 1 \rightarrow \frac{dy}{dz} = z - 1$

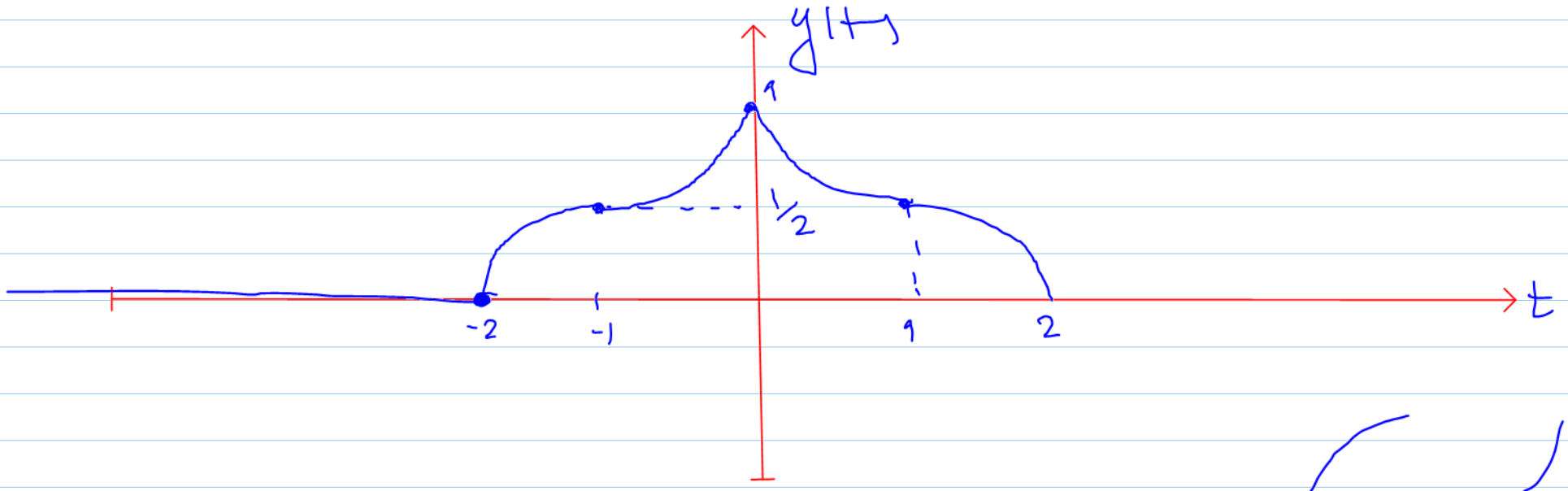
⑤ $1 \leq z \leq 2 \rightarrow \frac{dy}{dz} = -z + 1$

⑥ $z > 2 \rightarrow \frac{dy}{dz} = 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{dy}{dz}\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} 0\, dz + \int_{-2}^{t} (-z-1)\, dz + \int_{-1}^{t} z+1\, dz + \int_{0}^{t} z-1\, dz$$

$$+ \int_{1}^{t} -z+1\, dz \;*$$



$-2 \le t \le -1$ $\quad y = \int_{-\infty}^{t} \frac{dy}{dz} = \int_{-\infty}^{-2} 0 + \int_{-2}^{t} -z-1\, dz = -\frac{t^2}{2} - t$

$t=-2 \longrightarrow y=0$

$t=-1 \longrightarrow y=1/2$

محاسبه حاصل کانولوشن در یک لحظه خاص و $t=a$ یا $n=a$

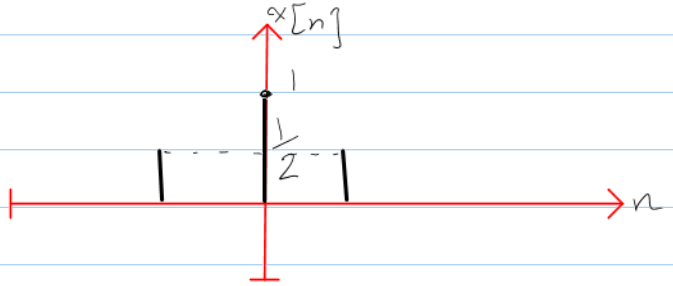
محاسبه خروجی سیستم LTI در حالت پیوسته یا $t=a$:

$$x(t)*h(t)\Big|_{t=a} = ? \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(\cancel{t}^{a}-\tau)\, d\tau$$

$$x[n]*y[n]\Big|_{n=a} = ? \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[\cancel{n}^{a}-k]$$

در این موقع ابتدا در حاصل کانولوشن به جای t یا n عدد a را گذاشته و بعد از آن حاصل انتگرال (سیگما) را حساب می‌کنیم.

برای دنباله گسسته $x[n]$ مطابق شکل زیر حاصل $z[n] = x[2-3n]u[n] * x[n]$ در $n=0$ کدام است؟

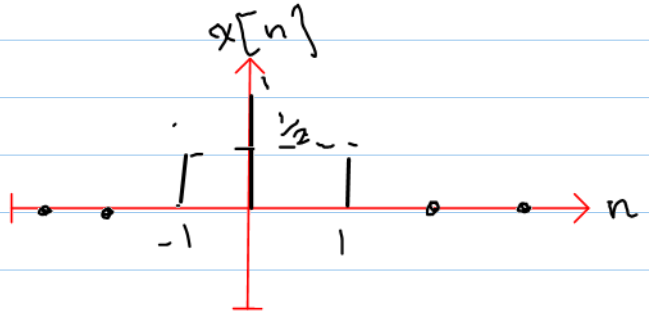


۰ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

$$(x[2-3n]u[n]) * x[n]\Big|_{n=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[2-3k]u[k]\,x[0-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[2-3k]\,\underbrace{u[k]}_{k\geq 0}\,x[-k]$$

$$= \underbrace{x[2]}_{0}\,\underbrace{x[0]}_{1} + \underbrace{x[-1]}_{1/2}\,\underbrace{x[-1]}_{1/2} + \underbrace{x[-4]}_{0}\,x[-2] + \underbrace{x[-7]}_{0}\,x[-3] + \ldots$$



$$= \frac{1}{4}$$

برق ۸۵.

مقدار $y(t)$ به ازای $t=1$ در ابعاد $y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$ تقریباً کدام است؟

$\frac{1}{e}$ $\frac{-1}{e}$ $\frac{2}{e}$ $\frac{-2}{e}$

ادامه حل تستها:

تست ۵۰: متقارن $y(t)$ به ازای $t=1$ در رابطه $y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$ تقریباً کدام است؟

$\frac{1}{e}$ $\quad$ $\frac{-1}{e}$ $\quad$ $\frac{2}{e}$ $\quad$ $\frac{-2}{e}$

$$y(t) = \underbrace{e^{-t}u(t)}_{x(t)} * \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)}_{f(t)} \qquad y(1) = ?$$

$$y(1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, f(1-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(1-\tau-3k)\, d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)\,\delta(1-\tau-3k)\, d\tau \qquad \tau = 1-3k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(1-3k)}u(1-3k) \int_{-\infty}^{\infty}\delta(1-\tau-3k)\, d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(1-3k)}u(1-3k) \int_{-\infty}^{\infty}\delta(1-\tau-3k)\, d\tau \qquad \int = 1$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(1-3k)}u(1-3k)$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)$$

* کانولوشن دوی آرگومان زمان عملیات را می‌کند.

پس * دو عبارت قوق روی t عمل کرده و هر عبارت بدون t مثل یک عدد هست.

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{e^{-t}u(t)}_{x(t)} * \delta(t-3k) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3k)} u(t-3k)$$

$$g(1) = \sum_{k=-\infty}^{1/3} e^{-(1-3k)} \underbrace{u(1-3k)}_{1} = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-(1-3k)} = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-1+3k}$$

$1-3k \geq 0 \rightarrow k \leq 1/3$

چون k عدد صحیح است $k \leq 1/3$ یعنی $k \leq 0$ است.

$$g(1) = \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-1} \times e^{3k} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{3k}$$

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \infty & |q| \geq 1 \\ \dfrac{q^{n_0}}{1-q} & |q| < 1 \end{cases}$$

یادآوری

$$\sum_{k=-\infty}^{0} (e^3)^k = ?$$

$k' = -k \rightarrow k = -k'$

$k : -\infty \longrightarrow 0$

$k' : +\infty \longrightarrow 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{0} (e^3)^k = \sum_{k'=\infty}^{0} (e^3)^{-k'} = \sum_{k'=0}^{\infty} (e^3)^{-1\cdot k'}$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} \underbrace{\left(e^{-3}\right)}_{q}^{k'} = \frac{(e^{-3})^0}{1 - e^{-3}} = \frac{1}{1 - e^{-3}}$$

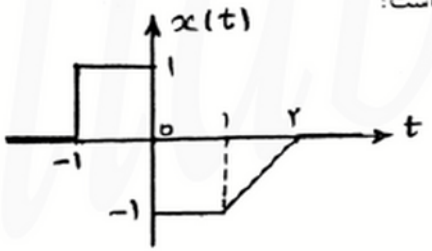
$$q = e^{-3} = \frac{1}{e^3} = \frac{1}{(2.7)^3} < 1$$

$$y(1) = e^{-1} \sum_{k=-\infty}^{0} e^{3k} = e^{-1} \frac{1}{1 - \cancel{e^{-3}}^{\,0}} \simeq e^{-1}$$

برق ۸۱

۴۳۲

۸- یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}\delta(t) + u(t-1)$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ که در زیر نمایش داده شده است در نقاط $t = \frac{3}{2}$, $t = +\infty$ به ترتیب با کدام گزینه برابر است؟



۱) 1 , -1

۲) 1 , 0

۳) 0 , $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

$x(t) \rightarrow$ شکل

$h(t) = e^{-t}\delta(t) + u(t-1) = \delta(t) + u(t-1)$

($t=0$)

$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * (\delta(t) + u(t-1)) = x(t) * \delta(t) + x(t) * u(t-1)$

$y(t) = x(t) + x(t) * u(t-1)$ $\qquad y(\frac{3}{2}) = ?$

$y(\frac{3}{2}) = x(\frac{3}{2}) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(\frac{3}{2} - \tau - 1)\, d\tau$

$y(\frac{3}{2}) = x(\frac{3}{2}) + \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} x(\tau)\, u(\frac{1}{2} - \tau)\, d\tau$

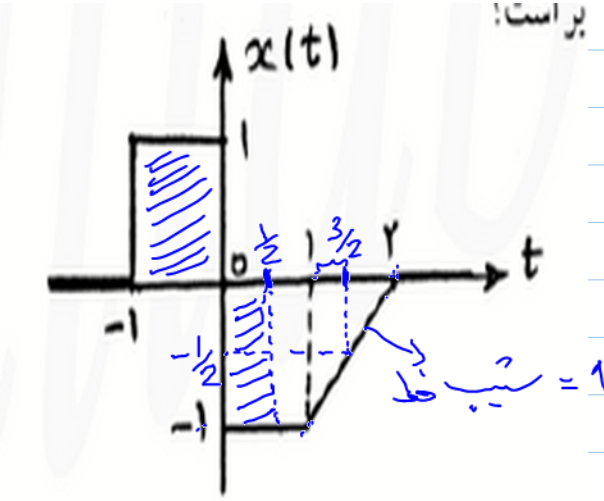
$\frac{1}{2} \geq \tau$

$y(\frac{3}{2}) = x(\frac{3}{2}) + \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} x(\tau)\, d\tau$

$y(\frac{3}{2}) = x(\frac{3}{2}) + (1 + -\frac{1}{2})$

$= -\frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2}) = 0$

$y(\infty) =$ ؟



۹- پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر ورودی سیستم برابر با:

$$x(t) = u_{-2}(t+1) - u_{-2}(t) - u_{-1}(t-3)$$



باشد در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظهٔ $t = 2$ کدام است؟

($u_{-1}(t)$ معرف تابع پله واحد و $u_{-2}(t)$ معرف تابع شیب واحد می‌باشد.)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

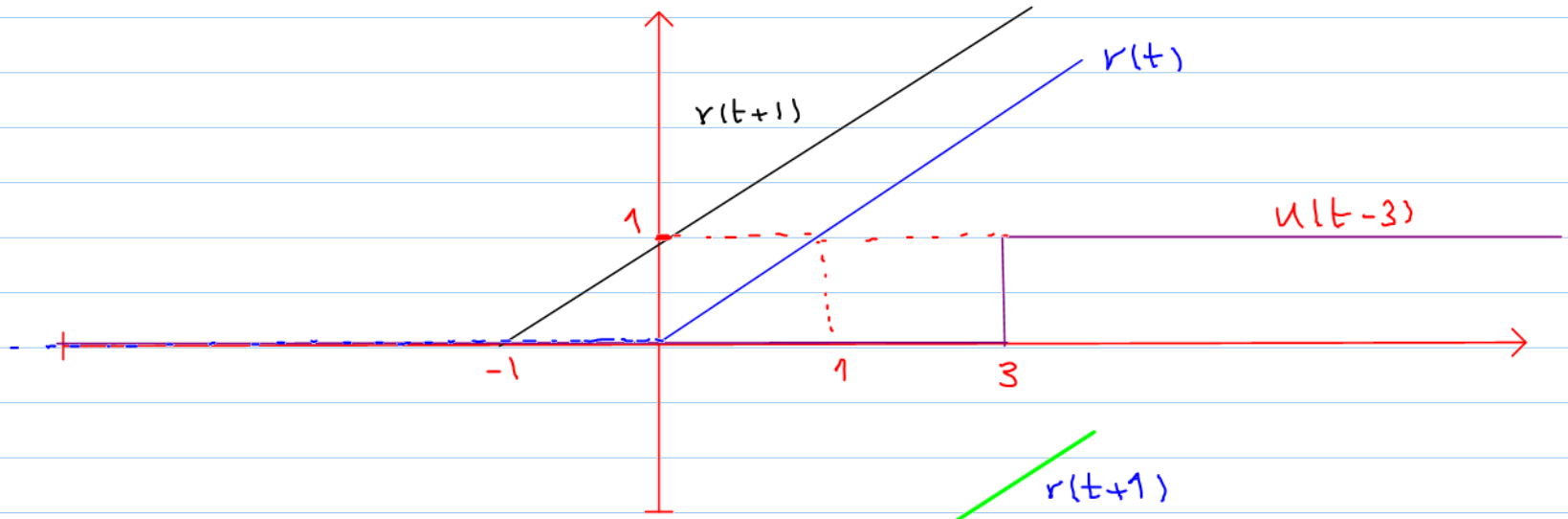
۴) ۱/۵

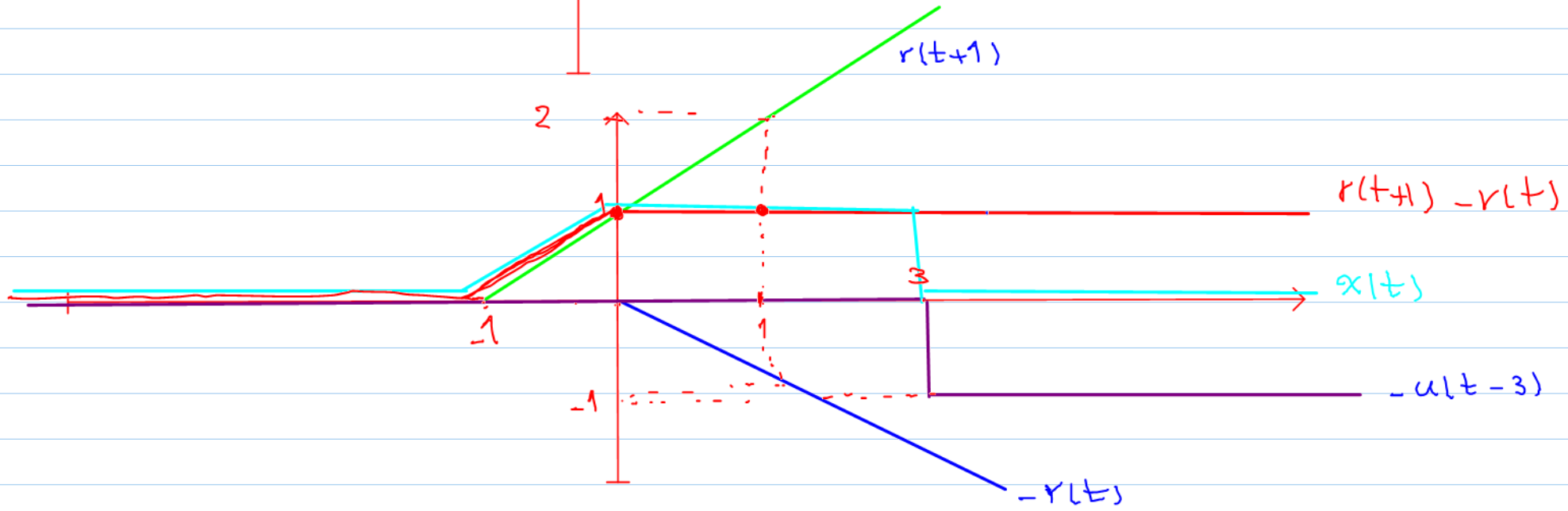
$x(t) = u_{-2}(t+1) + (-u_{-2}(t) + u_{-1}(t-3))$

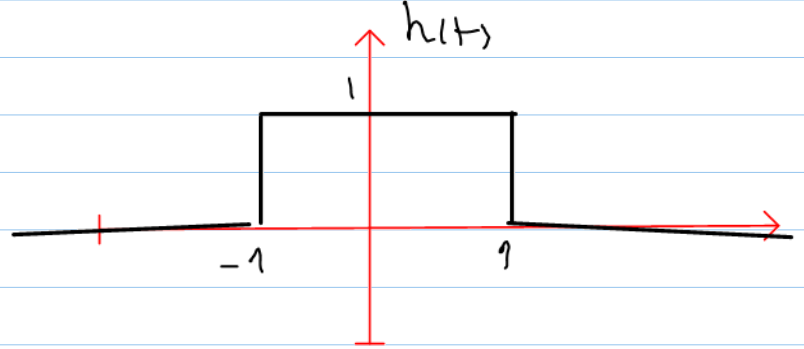
$u_{-2} = r$

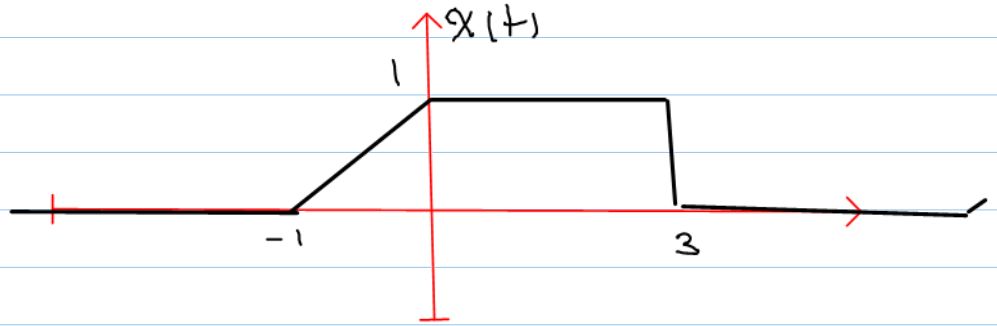
$r(t) = t\,u(t)$ تابع منحنی

$r(t+1) = (t+1)\,u(t+1)$





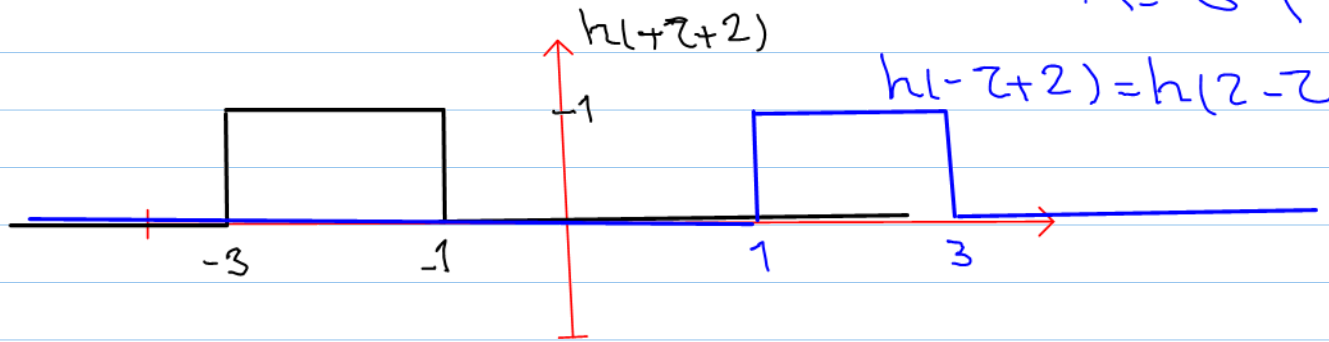




$y(t) = x(t) * h(t)$ $\qquad$ $y(t=2) = y(2) = ?$

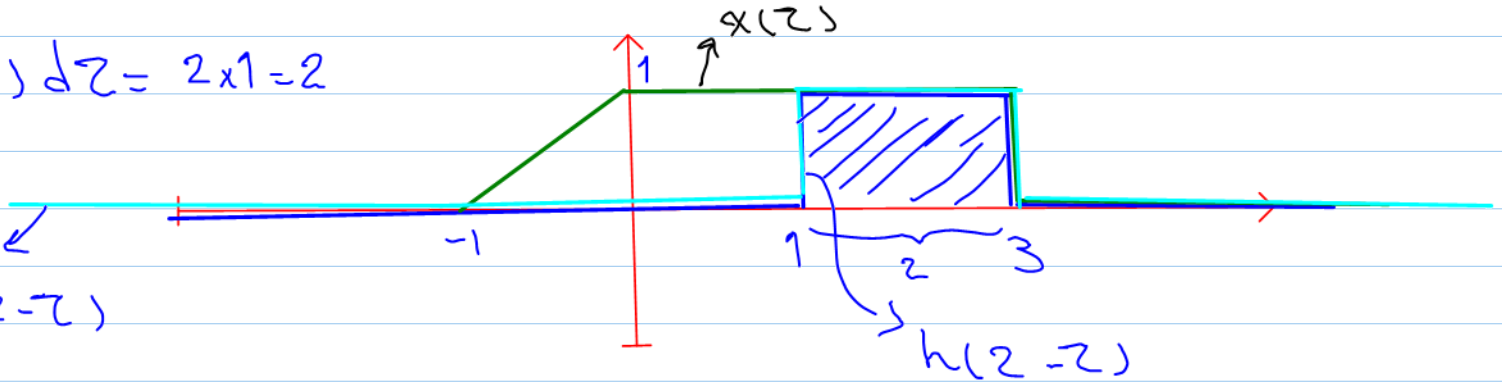
$$y(\cancel{t}^{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(\cancel{t}^{2} - \tau)\, d\tau$$

$h(-\tau+2) \rightarrow$



$h(2-\tau)$ ساده‌تر است، پس

$$y(2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(2-\tau)\, d\tau = 2 \times 1 = 2$$



برق ۸۴

۱۷- اگر $y(t) \triangleq x(t) * h(t)$ باشد که در آن $h(t) = s(T_0 - t)$ است. در آن صورت مقدار $y(nT_0) = x(t) * h(t)\Big|_{t=nT_0}$ برابر است با:

۱) $x(t) * s(t)\Big|_{t=nT_0}$ ۲) $x(t) * s(t)\Big|_{t=(n-1)T_0}$ ۳) $x(t) * s(-t)\Big|_{t=(n-1)T_0}$ ۴) $x(t) * s(-t)\Big|_{t=nT_0}$

$y(t) = x(t) * s(T_0 - t)$ $\qquad$ $y(nT_0) = ?$

$$y(nT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(T_0 - (nT_0 - \tau))\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(\tau - (n-1)T_0)\, d\tau$$

$\tau - nT_0 + T_0 \rightarrow \tau - (nT_0 - T_0)$

$$y(nT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(t - \tau - (n-1)T_0)\, d\tau = \begin{cases} x(t) * s(t)\big|_{(n-1)T_0 = t} \\ x(t) * s(t)\big|_{nT_0} \quad ? \\ x(t) * s(-t)\big|_{nT_0} \\ x(t) * s(-t)\big|_{(n-1)T_0 = t} \end{cases}$$

$$x(t) * s(t)\Big|_{(n-1)T_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(t - \tau)\, d\tau$$

$$x(t) * s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(-(t-\tau))\, d\tau$$

$$x(t) * s(t)\Big|_{t=(n-1)T_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(\tau - (n-1)T_0)\, d\tau$$

$$y(nT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, s(\tau - (n-1)T_0)\, d\tau = x(t) * s(t)\Big|_{t=(n-1)T_0}$$

برق ۹۵

۷۴- ورودی یک سیستم LTI، $x(t)=\cos(100\pi t)[u(t)-u(t-5)]$ و پاسخ ضربهٔ آن $h(t)=x(5-t)$ می‌باشد. مقدار خروجی در لحظهٔ $t=6$ ، $(y(6))$ برابر کدام است؟

۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۴/۵

۴) ۵

$$x(t) = \cos(100\pi t)\,(u(t) - u(t-5))$$

$$h(t) = x(5-t) = \cos(100\pi(5-t))\,(u(5-t) - u(5-t-5))$$

$$h(t) = \cos(-100\pi t + 500\pi)\,(u(5-t) - u(-t))$$ (مضرب 2π)

$$h(t) = \cos(100\pi t)\,(u(5-t) - u(-t))$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(100\pi\tau)\,(u(\tau) - u(\tau-5))\,\cos(100\pi(t-\tau))\,(u(5-(t-\tau)) - u(-(t-\tau)))\,d\tau$$

$$y(6) = \int_{-\infty}^{5} \cos(100\pi\tau)\,(u(\tau) - u(\tau-5))\,\cos(100\pi\tau)\,(u(\tau-1) - u(\tau-9))\,d\tau$$

$0 \le \tau \le 5$, $1 \le \tau \le 9$

$$= \int_{1}^{5} \cos^2(100\pi\tau)\,d\tau = \int_{1}^{5} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(200\pi\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{1}^{5} \frac{1}{2}\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{1}^{5} \cos(200\pi\tau)\,d\tau$$

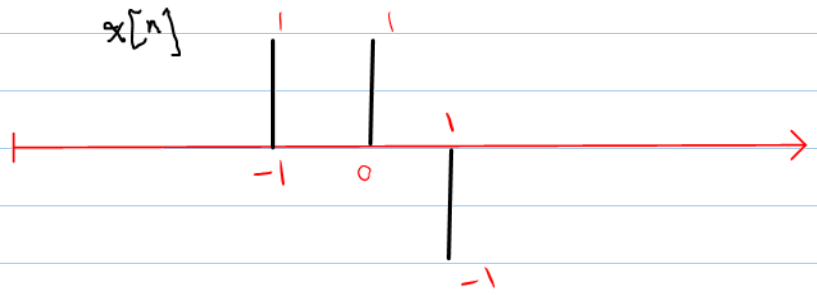
$$= \frac{1}{2} z \Big|_1^5 + \frac{1}{2} \frac{\sin(200\pi z)}{200\pi} \Big|_1^5$$

$$= \frac{1}{2}(5-1) + \frac{1}{2}\frac{1}{200\pi}\left(\sin(1000\pi) - \sin(200\pi)\right)$$

$$y(6) = 2$$

برق ۹۴ ـ حاصل کانولوشن $x[1-2n] * x[n] = y[n]$ در $n=1$ کدام است؟

1 0 -1 2



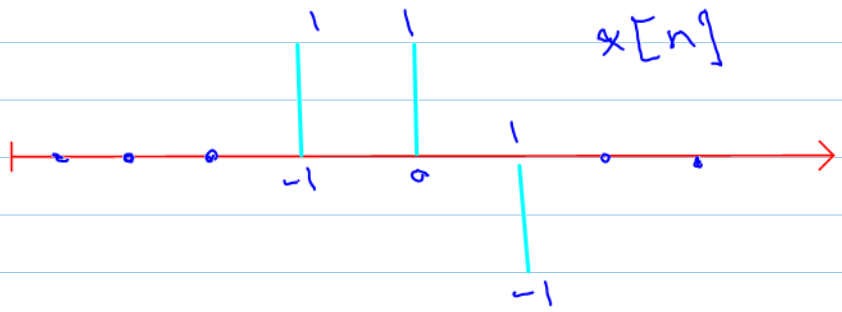
$y[n] = x[1-2n] * x[n]$ $\quad\quad$ $y[1] = ?$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[1-2k]\, x[1-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[1-2k]\, x[1-k]$$

$k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3 \quad \cdots \quad k=\infty$

$$= x[1]\,x[1] + x[-1]\,x[0] + x[-3]\,x[-1] + x[-5]\,x[-2] + \cdots$$

$$+ x[3]\,x[2] + x[5]\,x[3] + \cdots$$



$$y[1] = (-1)(-1) + 1 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \cdots\cdots 0$$

$$+ 0 \times 0 + 0 \times 0 + \cdots\cdots 0 \quad = \quad 1 + 1 = 2 \checkmark$$

«جلسه 21 سیگنال»

* هرگاه x و y را برای یک سیستم LTI بدهند و پاسخ ضربه را بخواهند:

باید موارد زیر را به ترتیب بررسی کرد.

1) نقطه شروع h را بدست آورید. نقطه شروع x − نقطه شروع y = نقطه شروع h

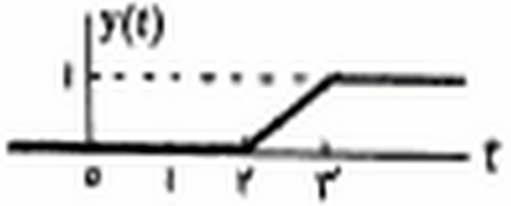
2) ~ انتهای ~ ~ ~ ~ . نقطه انتهای x − ~ انتهای y = ~ انتهای h

3) طول h را بدست آورید. طول x − طول y = طول h

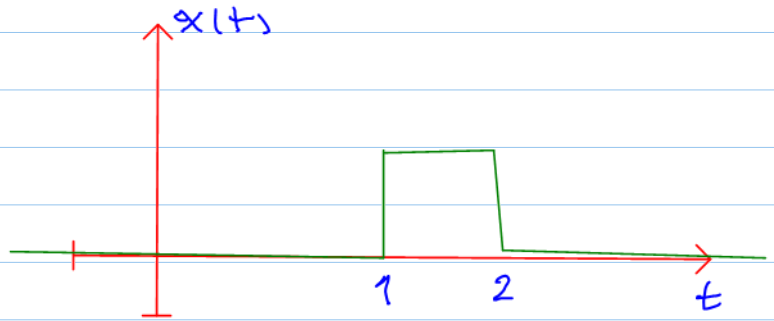
اگر با بررسی موارد فوق به جواب نرسیدید از تعریف کانولوشن استفاده کنید.

۲۱- ورودی x(t) و خروجی y(t) یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است؟ پاسخ ضربه سیستم چیست؟





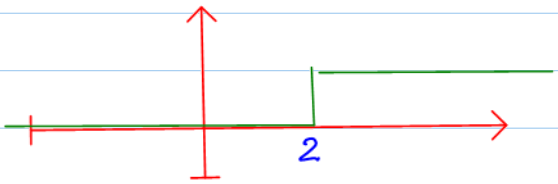
۱) $u(t-1)$ ۲) $u(t-2)$ ۳) $u(t-1)-u(t-2)$ ۴) $\delta(t-1)-\delta(t-2)$





h نوع ثقل = 2 − 1 = 1

h استقرار = ∞ − 2 = ∞



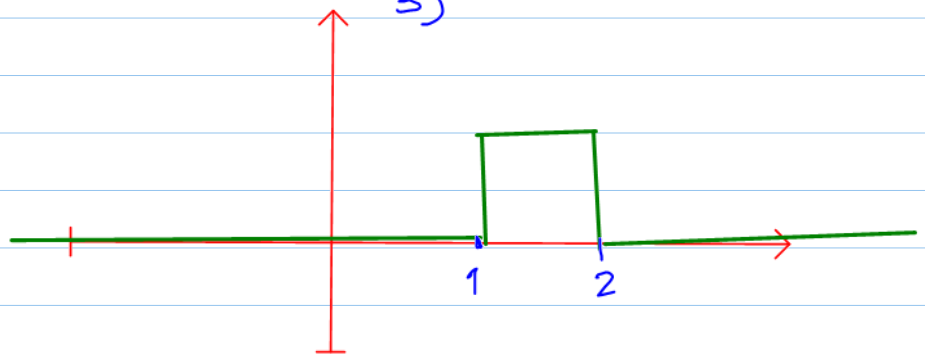
u(t-1) ✓(1

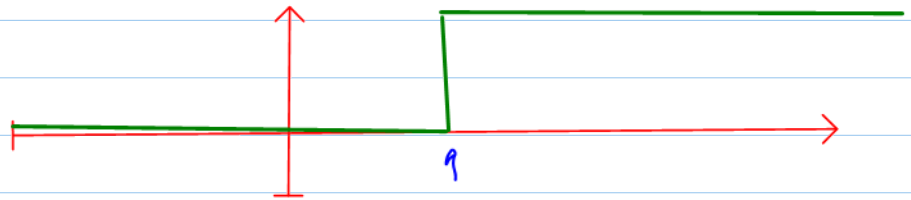
u(t-2) ✗(2

u(t-1) − u(t-2) ✗(3

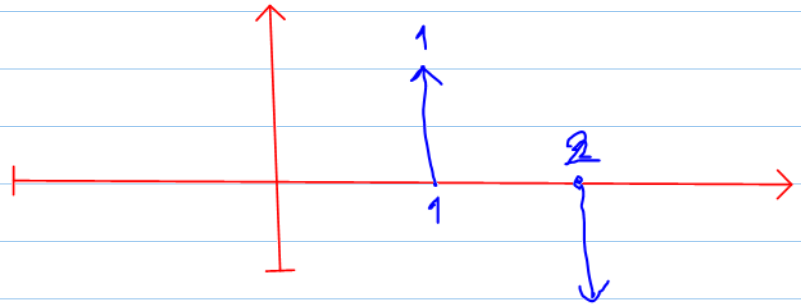
1δ(t-1) − δ(t-2) ✗(4

3)





4)



۲۲ ـ در یک سیستم LTI ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$y(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 0/5\\ 2(t-0/5) & 0/5<t\le 1/5\\ 2 & 1/5<t<\infty\end{cases} \qquad \text{و} \qquad x(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 0\\ 1 & 0<t\le 1\\ 0 & 1<t<\infty\end{cases}$$

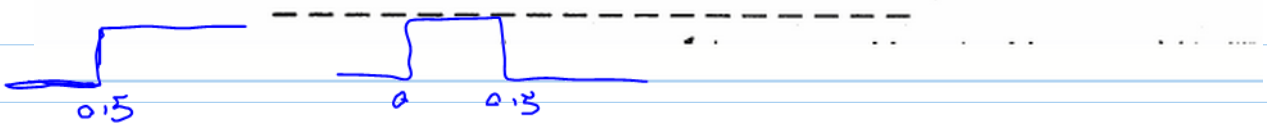
پاسخ ضربه این سیستم عبارتست از:

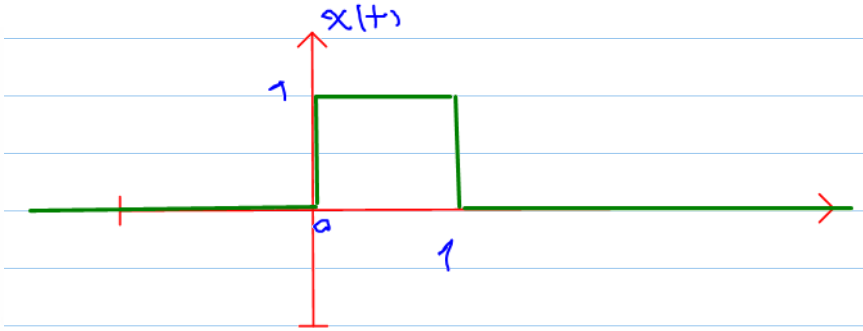
۱) $h(t)=u(t-1/5)$ ۲) $h(t)=2u(t-1/5)$ ۳) $h(t)=u(t)-u(t-0/5)$ ۴) $h(t)=2u(t-0/5)$

$$x(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 0\\ 1 & 0<t\le 1\\ 0 & 1<t<\infty\end{cases} \quad و \quad y(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 0/5\\ 2(t-0/5) & 0/5<t\le 1/5\\ 2 & 1/5<t<\infty\end{cases}$$

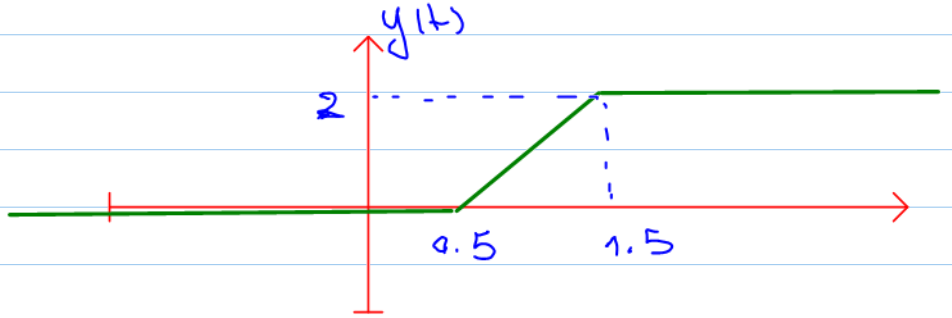
پاسخ ضربه این سیستم عبارتست از:

۱) $h(t)=u(t-1/5)$ ~~×~~ ۲) $h(t)=2u(t-1/5)$ ~~×~~ ۳) $h(t)=u(t)-u(t-0/5)$ ~~×~~ ۴) $h(t)=2u(t-0/5)$ ✓

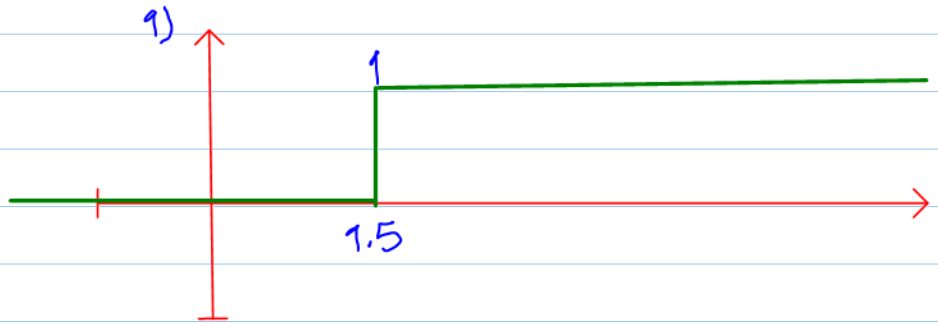




نقطه شروع $= 0.5 - 0 = 0.5$



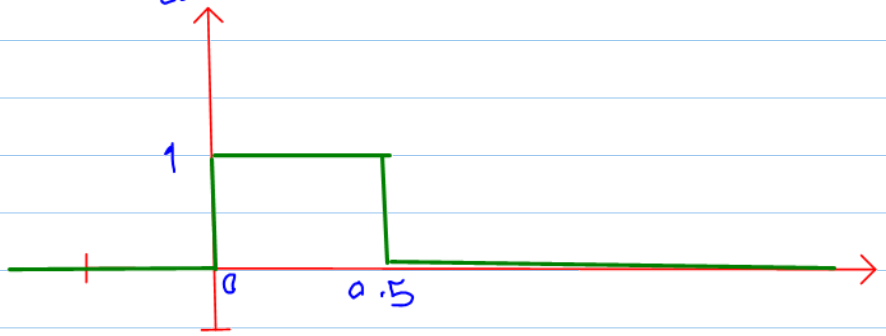
1)



2)

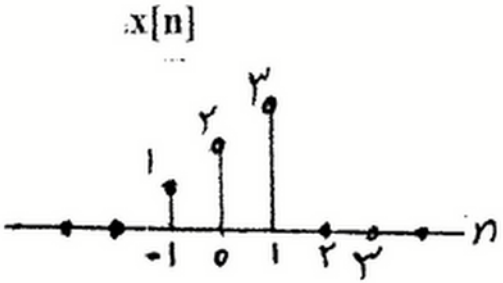


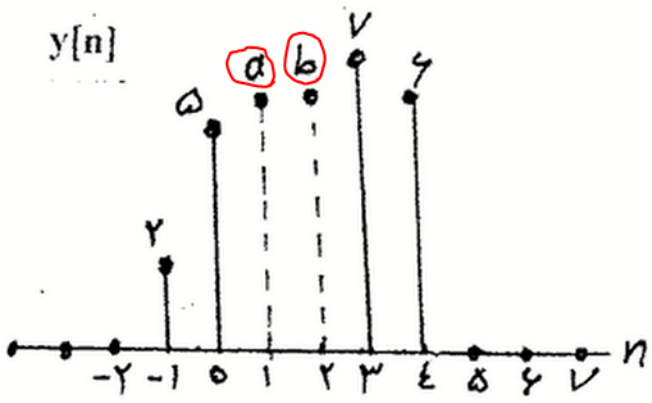
3)



برق ۸۷

یک سیستم زمان گسسته‌ی LTI دارای پاسخ ضربه به طول ۴، به ازای ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ را ایجاد کرده است (شکل‌های زیر). مقادیر مجهول $y[1] = a$ و $y[2] = b$ در دنباله‌ی خروجی برابرند با:



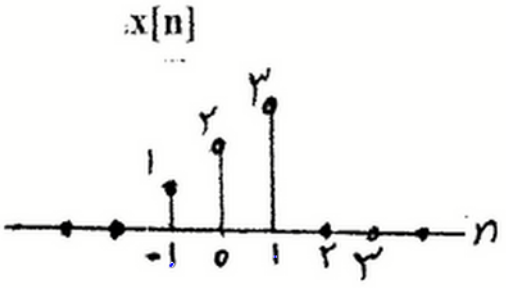


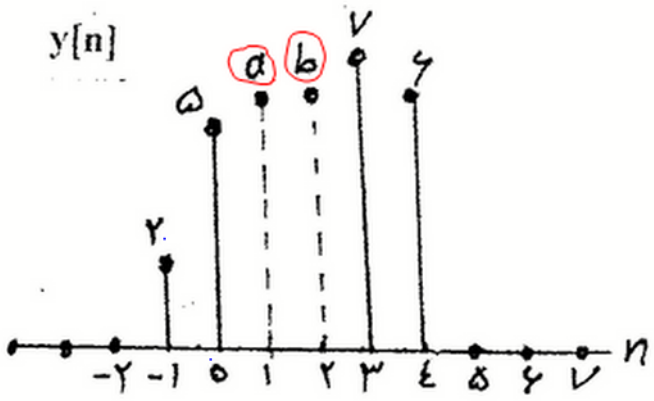
۱) $\begin{cases} a = ۸ \\ b = ۷ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a = ۹ \\ b = ۸ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a = ۸ \\ b = ۸ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a = ۹ \\ b = ۷ \end{cases}$



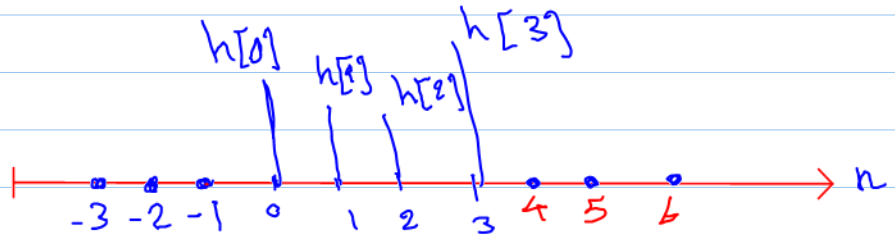


$y[n] = x[n] * h[n]$ $\quad y[1] = ?$ $\quad y[2] = ?$

برای محاسبه $y[1]$ و $y[2]$ نیازمند دانستن $h[n]$ داریم.

h نقطه شروع $= -1 - (-1) = 0$ $\quad$ نقطه انتها $= 4 - 1 = 3$

طول $h = 4$ (در صورت سوال)



$y[-1] = 2$ $\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$

$y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]\, h[-1-k]$

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k>1 \text{ او } k<-1 \\ \text{فالشاهد} & -1 \le k \le 1 \end{cases}$$

$$y[-1] = \cancel{x[-\infty]}^{0} h[-1-(-\infty)] + \cancel{\dots}^{0} + \cancel{x[-2]}^{0} h[-1-(-2)] + x[-1]h[0] + x[0]h[-1]$$
$$+ x[1]h[0] + \cancel{x[2]}^{0} h[-3] + \cancel{\dots}^{0}$$

$$y[n] = \sum_{k=\cancel{-\infty}^{-1}}^{\cancel{\infty}^{1}} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]h[n-k]$$

$$y[-1] = x[-1]h[0] + x[0]h[-1] + x[1]h[-2]$$

$$= 1 \times h[0] + 2 \times 0 + 3 \times 0 = h[0]$$

$$y[-1] = \boxed{h[0] = 2} \checkmark$$

$n=0$ $\quad y[0] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]h[0-k]$

$$= \cancel{x[-1]}_{1} h[1] + \cancel{x[0]}_{2} \cancel{h[0]}_{2} + \cancel{x[1]}_{3} \cancel{h[-1]}_{0}$$

$$y[0] = h[1] + 4 = 5 \rightarrow \boxed{h[1] = 1}$$

$n = 3$

$$y[3] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\,h[3-k]$$

$$7 = \underset{1}{\cancel{x[-1]}}\,\underset{a}{\cancel{h[4]}} + \underset{2}{\cancel{x[0]}}\,h[3] + \underset{3}{\cancel{x[1]}}\,h[2]$$

$$\boxed{7 = 2h[3] + 3h[2]}$$

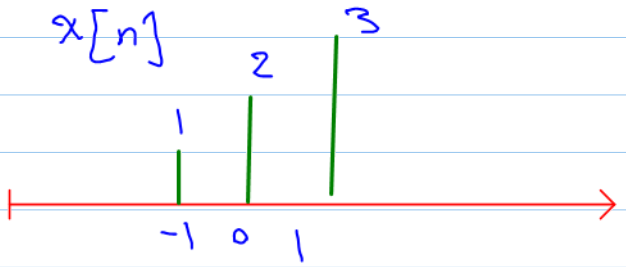
$n = 4$

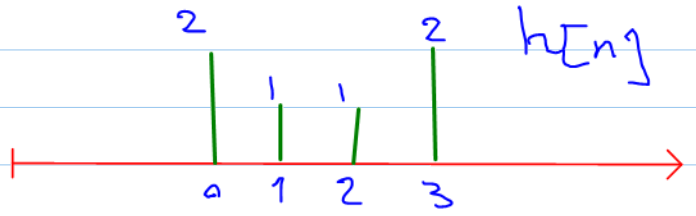
$$y[4] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\,h[4-k]$$

$$6 = \underset{1}{\cancel{x[-1]}}\,\underset{0}{\cancel{h[5]}} + \underset{2}{\cancel{x[0]}}\,\underset{0}{\cancel{h[4]}} + \underset{3}{\cancel{x[1]}}\,h[3]$$

$$3h[3] = 6 \rightarrow \boxed{h[3] = 2}$$

$$7 = 4 + 3h[2] \rightarrow \boxed{h[2] = 1}$$





$$y[n] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\, h[n-k]$$

$y[1] = ?$

$$y[1] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\, h[1-k] = x[-1]\,h[2] + x[0]\,h[1] + x[1]\,h[0]$$

$$a = 1\times 1 + 2\times 1 + 3\times 2 = 9$$

$$y[2] = \sum_{k=-1}^{1} x[k]\, h[2-k] = x[-1]\,h[3] + x[0]\,h[2] + x[1]\,h[1]$$

$$b = 1\times 2 + 2\times 1 + 3\times 1 = 7$$

در حل تبدیل Z راه حل دو حالت حل خواهیم کرد.

تیپ سوال:

مقدار حاصل کانولوشن در چه زمانی ماکزیمم یا مینیمم میشود و حاصل آن چقدر است؟

$y(t) = x(t) * h(t)$

راه حل این سوالات به ترتیب زیر است:

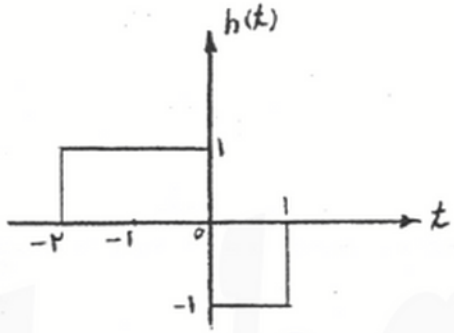
1) یکی از سیگنال‌ها (x یا h) را قرینه زمانی کنید.

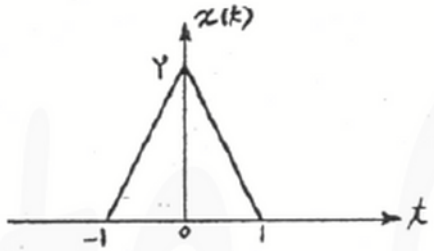
2) پیدا کنید که اگر سیگنال قرینه‌شده را چقدر شیفت بدهیم با سیگنال $x(t)$ یا $h(t)$ بیشترین همپوشانی دارد و دامنه آن‌ها (حاصلضرب) ماکزیمم میشود. این زمان، زمان ماکزیمم است و انتگرال یا $\sum$ سیگنال حاصلضرب برابر مقدار ماکزیمم است.

3) اگر مینیمم خواست زمانی را پیدا کند که در آن‌جا به جای بیشترین، کمترین همپوشانی را داشته باشد و حاصلضرب آن‌ها مینیمم شود.

بدون ۸۴ .

۱۶- ورودی $(x(t))$ و پاسخ ضربه $(h(t))$ یک سیستم LTI به شکل زیر است:





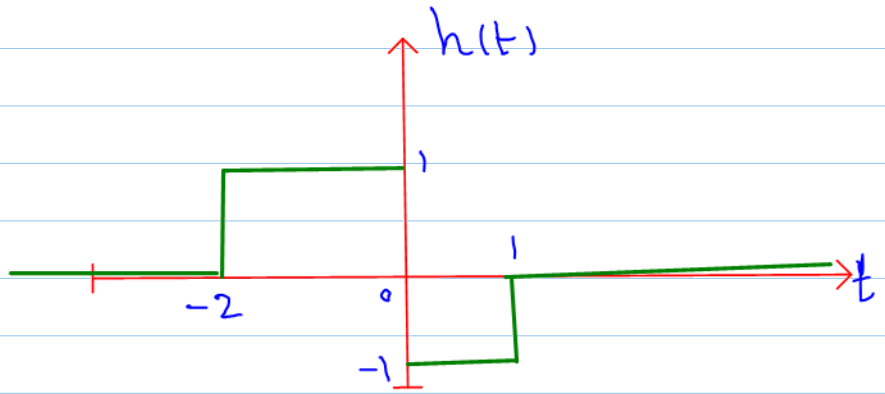
به ازای چه مقداری از t خروجی سیستم ماکزیمم مقدار را داراست و مقدار خروجی در لحظه $t = ۱$ چیست؟

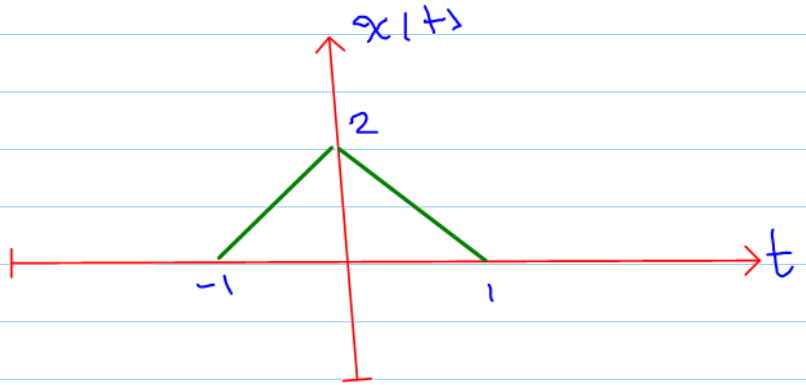
۱) به ازای $t = ۱$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = ۱$ مقدار خروجی برابر است با ۲ .

۲) به ازای $t = -۱$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = ۱$ مقدار خروجی برابر است با -۱ .

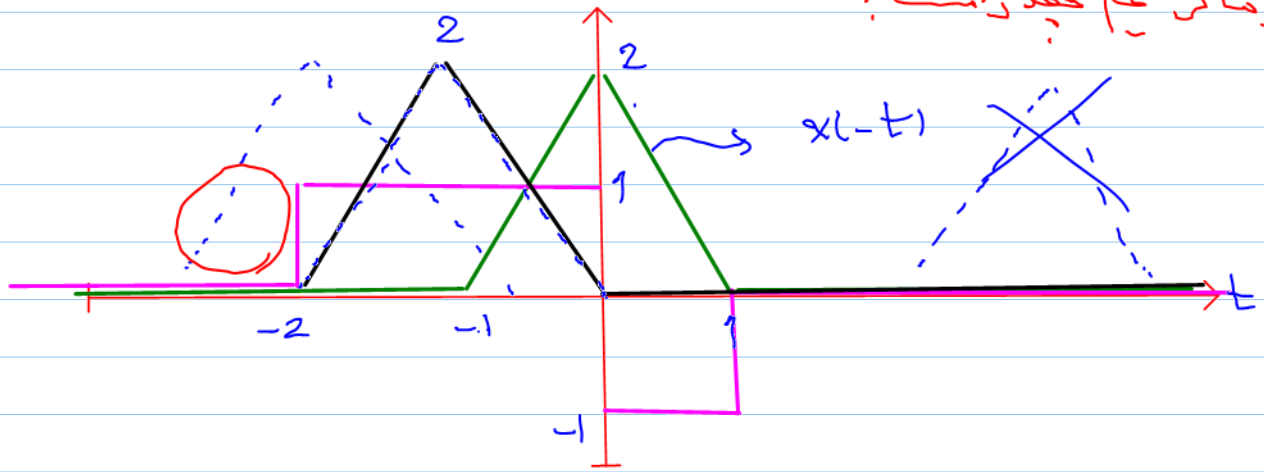
۳) به ازای $t = ۱$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = ۱$ مقدار خروجی برابر است با ۱ .

۴) به ازای $t = -۱$ خروجی ماکزیمم مقدار را دارد و به ازای $t = ۱$ مقدار خروجی برابر است با $-\frac{۱}{۲}$.





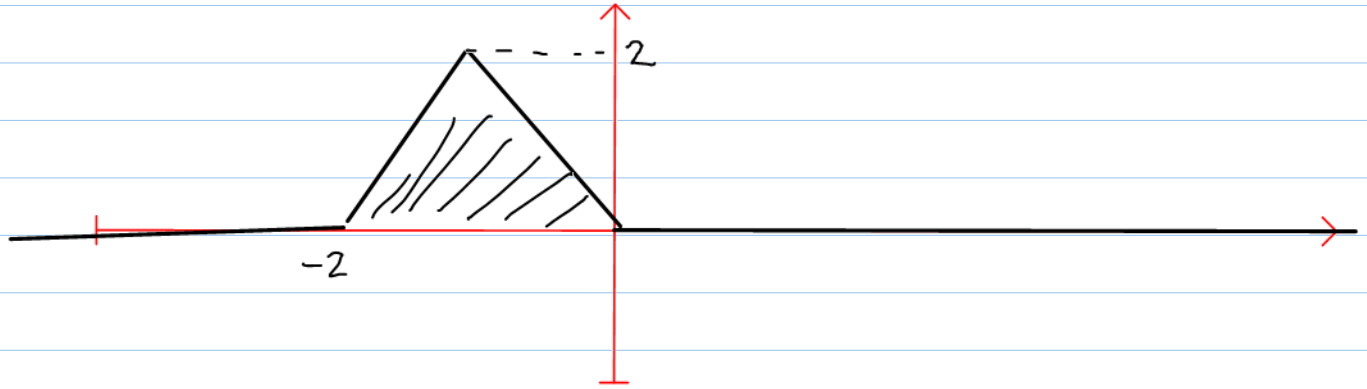
خروجی سیستم کانولوشن برابر است با مقدار کانولوشن در چه زمانی؟



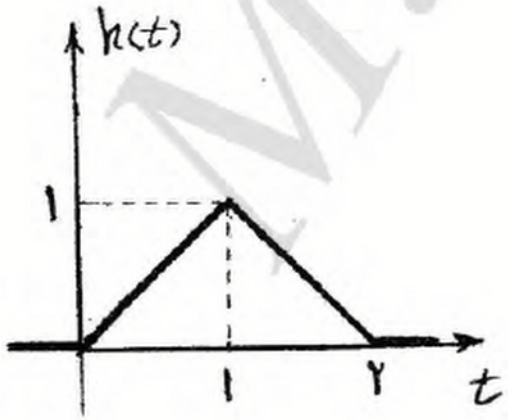
$t=-1$ ← خروجی کانولوشن در =

$$2 - \frac{2\times 2}{2}$$

به عنوان مثال $y(1)=?$



۷۸- در صورتی‌که $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت مقابل باشد و ورودی این سیستم بصورت $x(t) = h(t+۲)$ تعریف گردد. در چه زمانی خروجی ماکزیمم و مقدار ماکزیمم خروجی در این زمان چقدر خواهد بود.



۱) $y_{max} = ۲$, $t = ۱$

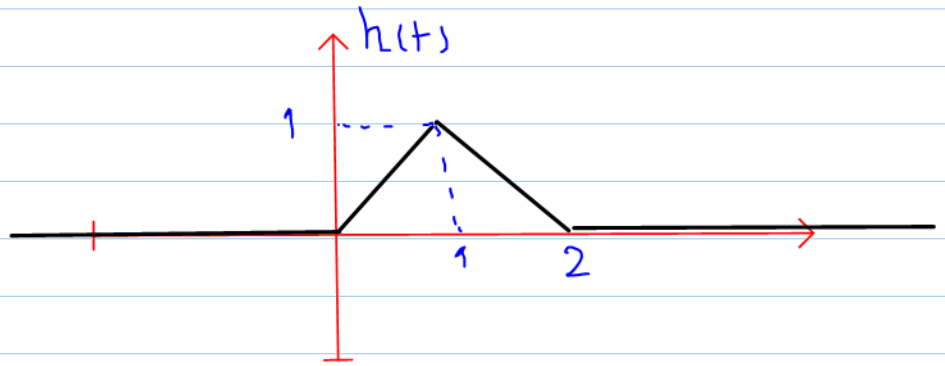
۲) $y_{max} = \frac{۲}{۳}$, $t = ۱$

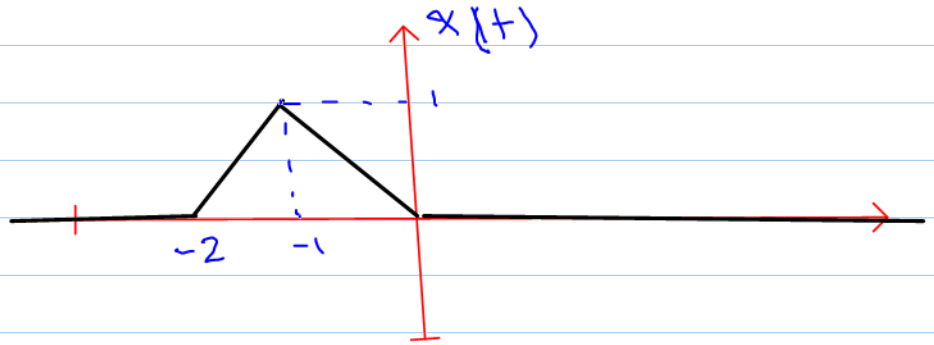
۳) $y_{max} = ۲$, $t = ۰$

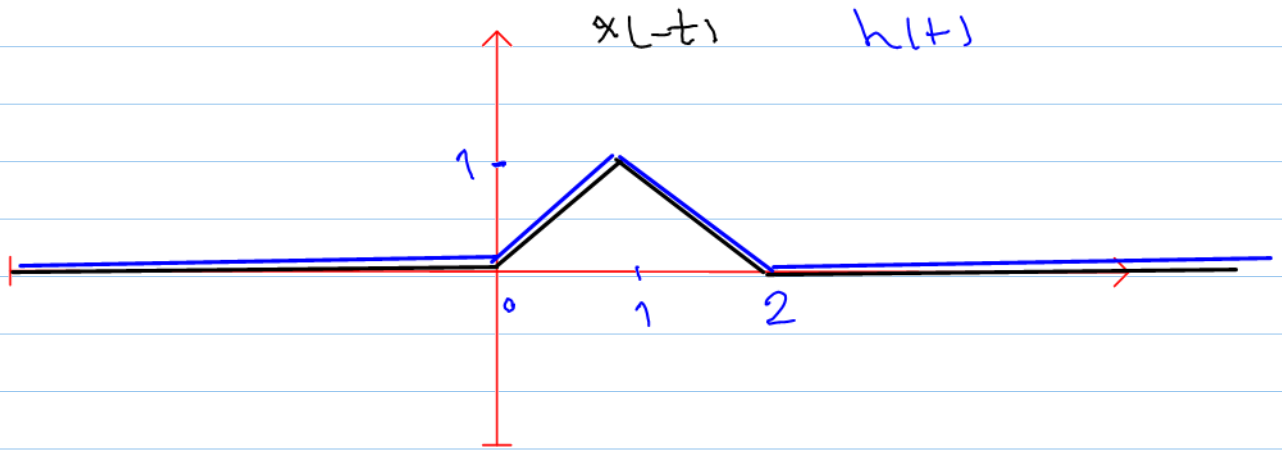
۴) $y_{max} = \frac{۲}{۳}$, $t = ۰$ ✓

$g(t) = x(t) * h(t)$

$x(t) = h(t+2)$

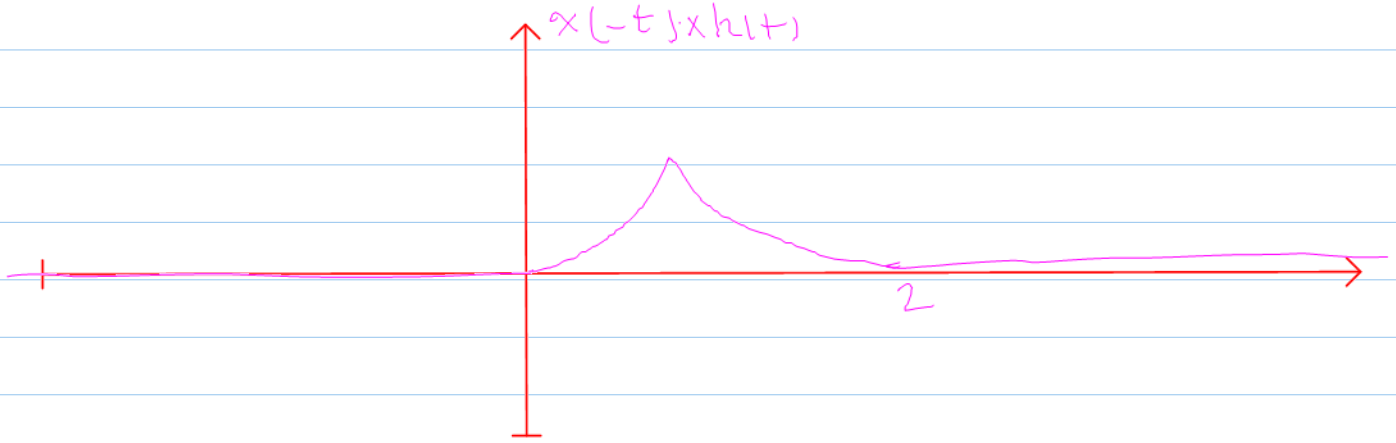


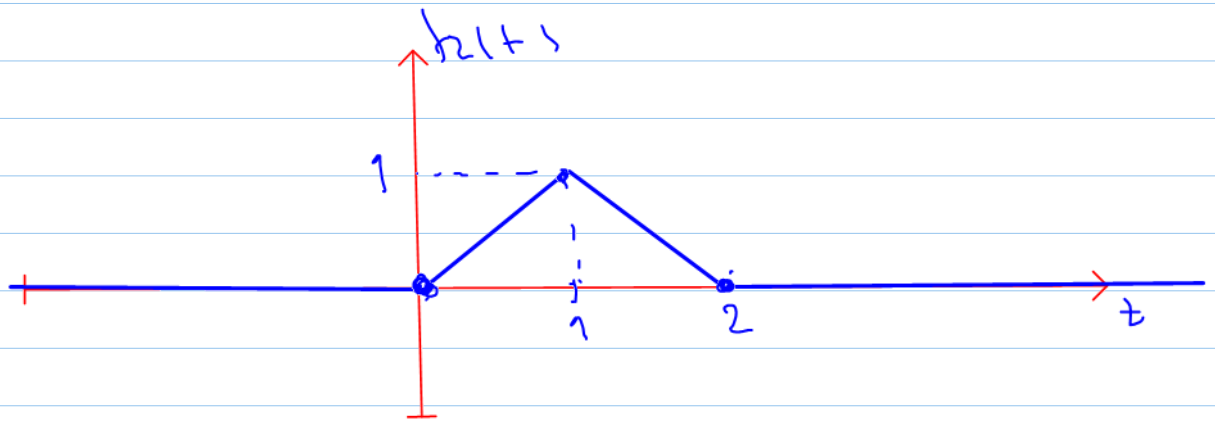




$t=0$ ← در دو حالت ماکزیمم است.

متقارن ماکزیمم؟





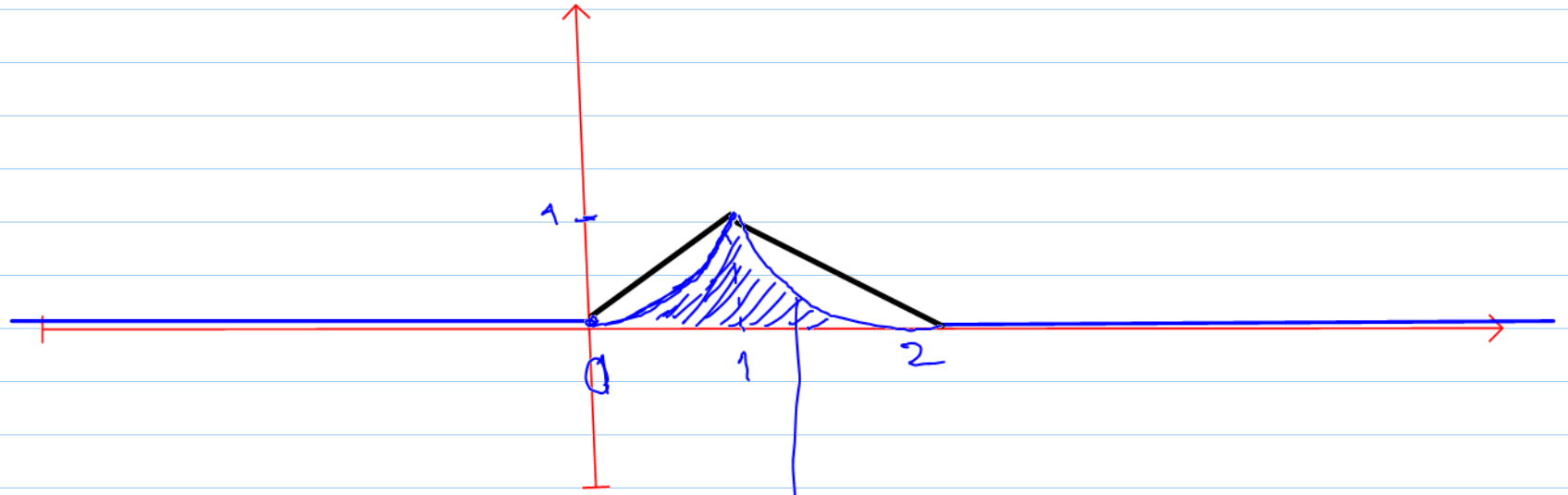
$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ -t+2 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

$x(-t) = h(t)$

$$h - 0 = \left(\frac{1-0}{1-0}\right)(t-0) \rightarrow h = t$$

$$h - 0 = \left(\frac{0-1}{2-1}\right)(t-2) \rightarrow h = -t+2$$

$$h(t) \times x(-t) = h(t) \times h(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t \times t = t^2 & 0 \le t \le 1 \\ (-t+2)(-t+2) & 1 < t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$



مساحة المثلث $= \frac{1 \times 2}{2} = 1$

مساحة شبه منحرف $= 1$ مساحة المثلث

< 1 مقدار جزئي ماكثر من

۶۸- اگر $h[n]=\delta[n-۲]+\delta[n-۳]+\delta[n-۴]$ پاسخ ضربهٔ سیستم و ورودی آن به شرح زیر بوده و

$$x[n]=\begin{cases}\frac{n}{۵} & ۰\le n\le ۵\\ ۲-\frac{n}{۵} & ۶\le n\le ۱۰\\ ۰ & \text{بقیهٔ جاها}\end{cases}$$

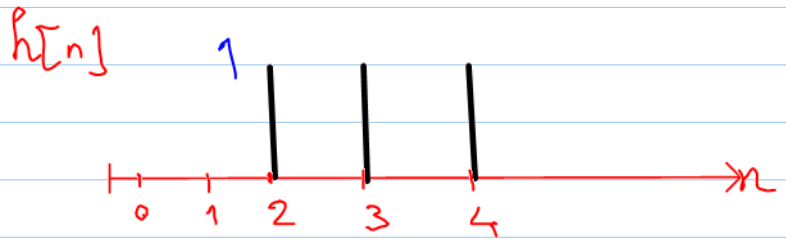
خروجی را با $y(n)$ نشان دهیم، مقدار ماکزیمم $y[n]$، کدام است؟

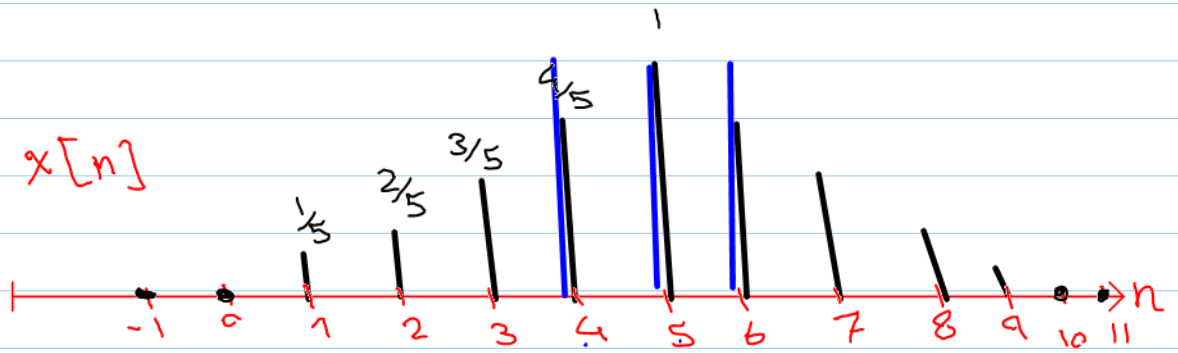
۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۸}{۵}$

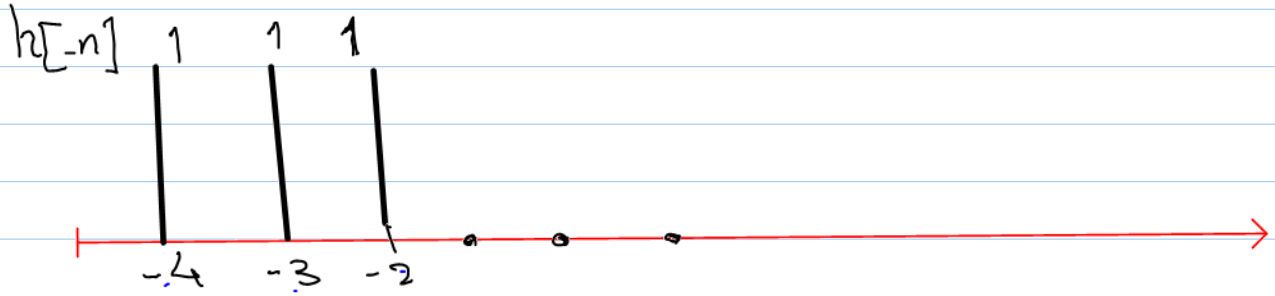
۳) $\frac{۱۳}{۵}$

۴) ۴

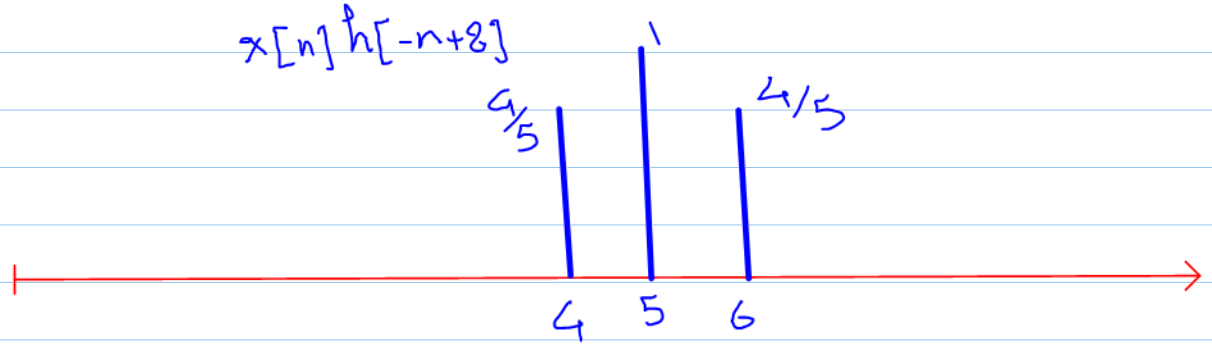




$$y[n] = x[n] * h[n]$$



$$y_{max} = \frac{4}{5} + 1 + \frac{4}{5} = \frac{13}{5}$$



$$y_{max}[8]$$

جلسه 22 سیگنال

* وقتی که یک سری خاصیت سیستم را وابعد و یک ورودی مشخص و خروجی مشخص را می دهد ولی پاسخ ضربه یا مشابه سیستم را نمی دهد، و در نهایت پاسخ سیستم به ورودی جدیدی را می خواهد.

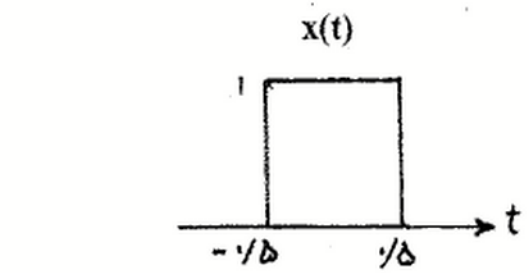
باید با استفاده از خواص سیستم عملیات مجاز را مشخص کنیم و با عملیات مجاز، ورودی دوم و اول را به هم ربط دهید، یعنی از ورودی اول به ورودی دوم یا برعکس برسید و همین عملیات را روی خروجی هم اعمال کنید.

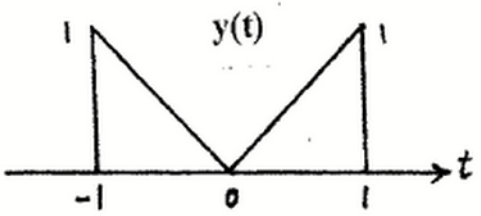
خطی ← ضرب عدد
جمع دو سیگنال

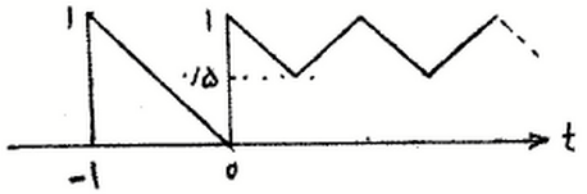
T ← شیفت زمانی

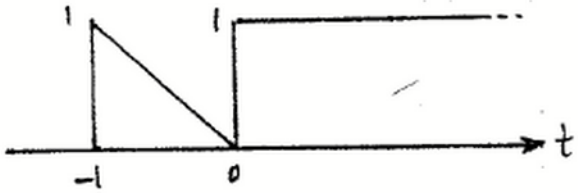
بدون حافظه ← عملیات ندارد و مفهوم حافظه باید استفاده شود.

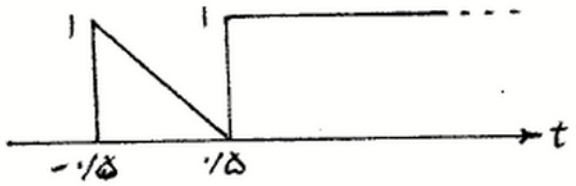
۲۰- $y(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ است (به شکل توجه کنید). کدام گزینه پاسخ پله این سیستم را به دست می‌دهد؟ برق ۸۸

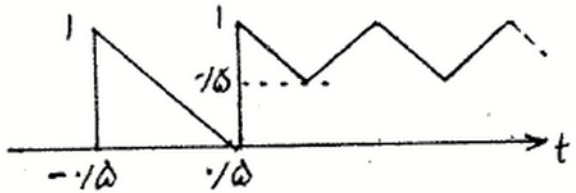




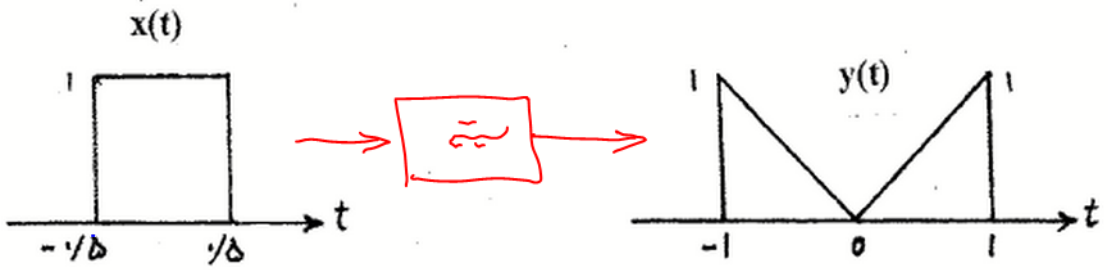
۱)


۲)


۳)


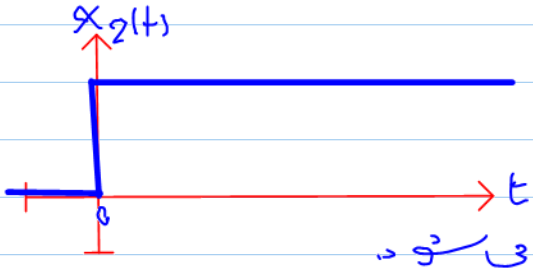
۴)


خواص سیستم LTI



خطی ←

LTI



سیستم → $y_2(t) = ?$

خطی ← ① اگر ورودی در عددی ضرب شود خروجی هم در آن عدد ضرب می‌شود.

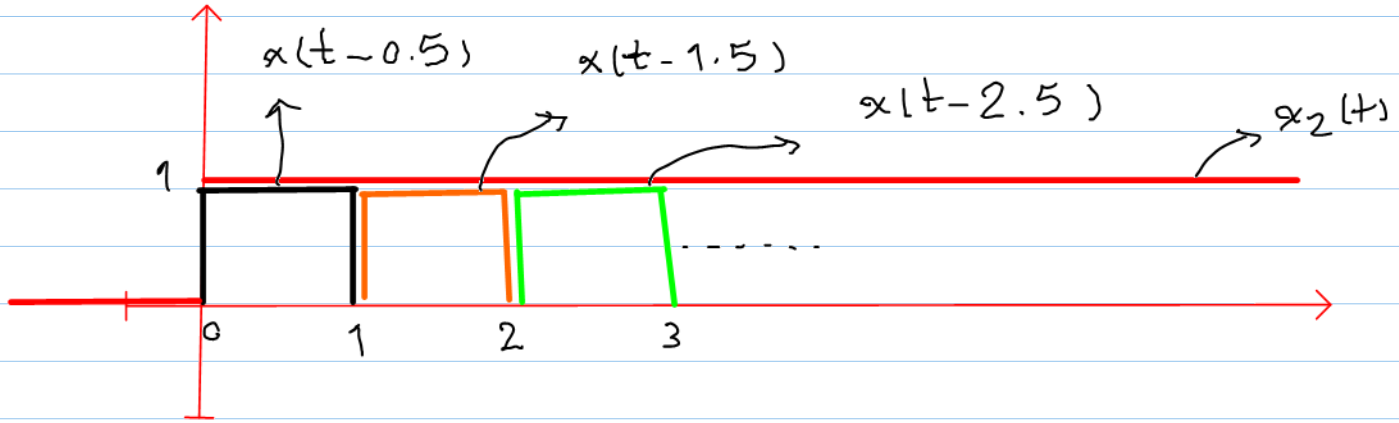
$ax(t) \longrightarrow ay(t)$

② اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند، خروجی آن‌ها با هم جمع می‌شوند.

LTI ← اگر ورودی را شیفت دهیم خروجی هم همان اندازه شیفت خواهد یافت.

$x(t) \longrightarrow y(t)$

$x(t-b) \longrightarrow y(t-b)$

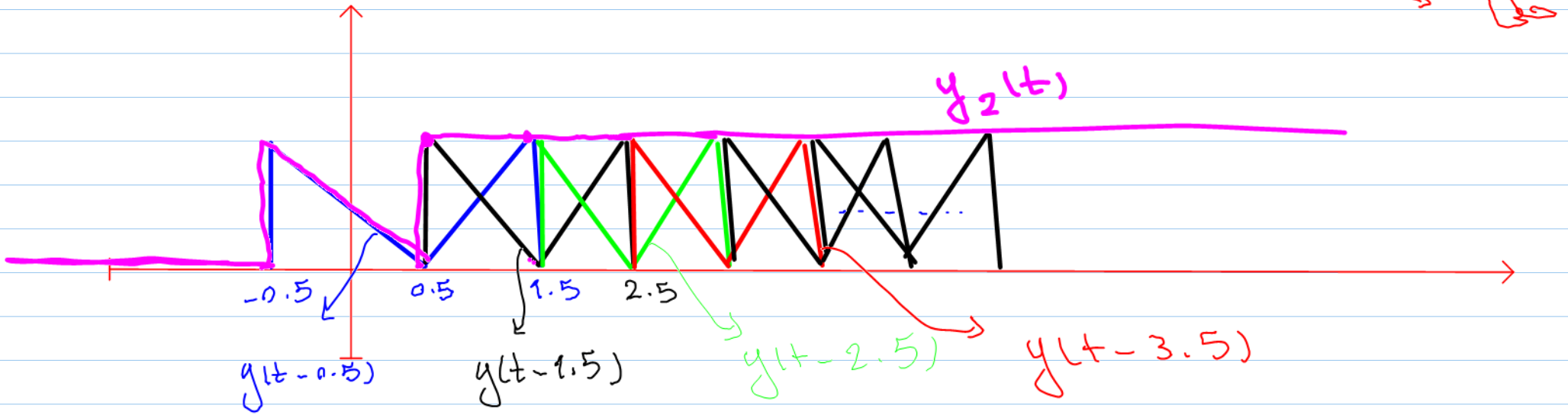


$$x_2(t) = x(t-0.5) + x(t-1.5) + x(t-2.5) + x(t-3.5) + \dots$$

خاصیت TI

$$y_2(t) = y(t-0.5) + y(t-1.5) + y(t-2.5) + y(t-3.5) + \dots$$

خطا



۲۴ ـ پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی بدون حافظه به ورودی $x_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$ برابر است با $y_1[n] = 2\delta[n-1]$. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $y_2[n] = -\delta[n-1]$ ۲) $y_2[n] = \delta[n-1]$ ۳) $y_2[n] = 2\delta[n-2]$ ۴) $y_2[n] = -2\delta[n-2]$

$x_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] \longrightarrow y_1[n] = 2\delta[n-1]$ حقا و بدون حافظه

$x_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2] \longrightarrow y_2[n] = ?$

$a x_1[n] \longrightarrow a y_1[n]$ ① خطی ←

② اگر دو تا ورودی را با هم جمع کنیم خروجی‌هایشان با هم جمع می‌شوند.

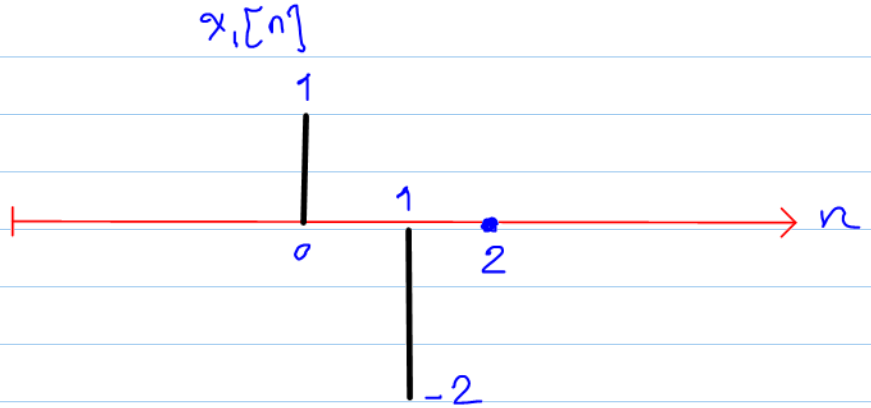
بدون حافظه.

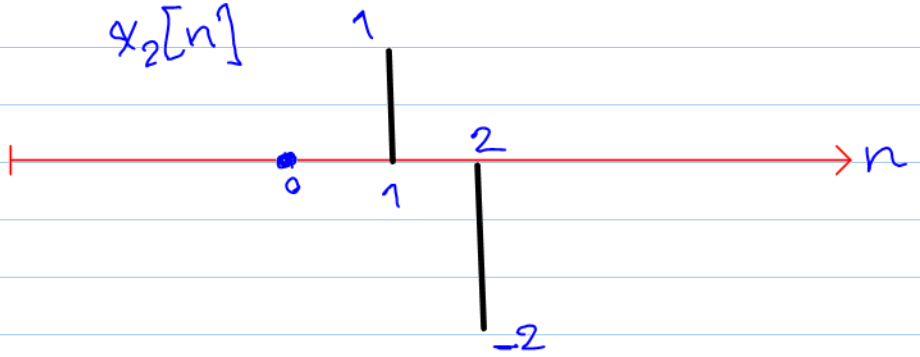
$x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ ✓

نکته TI ✗

اشتباه رایج ← ✗

$y_2[n] = y_1[n-1] = 2\delta[n-2]$



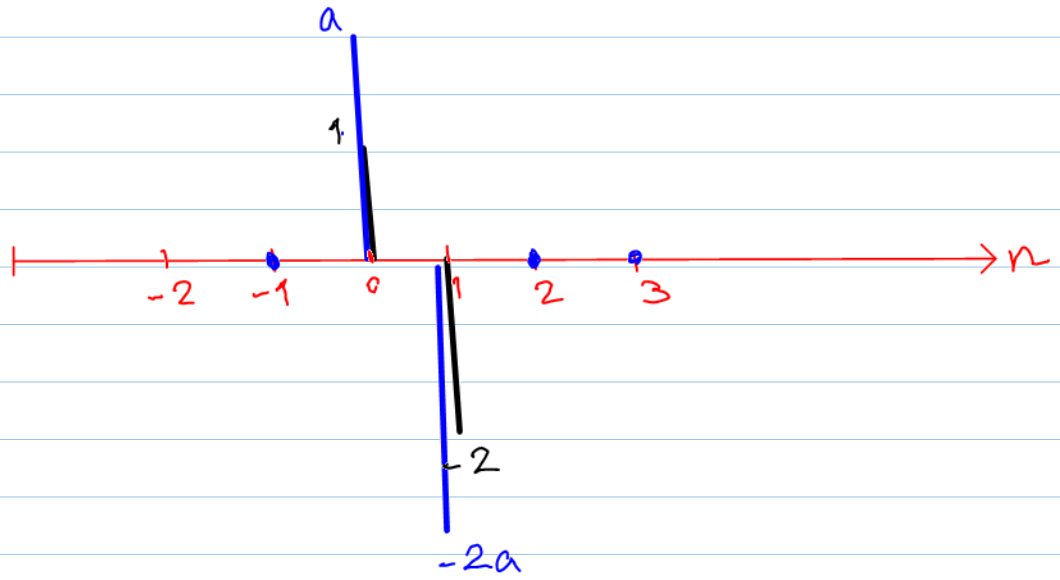


عملیات خطی ← خطا

حتا ورودی که خروجی آن خطا مستقل است را باهم جمع کنیم تا ورودی x_2 ساخته شود

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$$

$$a x_1[n] \longrightarrow a y_1[n]$$



بدون حافظه ← سیستم در هر لحظه $n=b$ فقط به مقدار ورودی در آن لحظه نگاه می‌کند.

اگر در لحظه $n=0$ ، عدد $1a$ را ببیند

سیستم

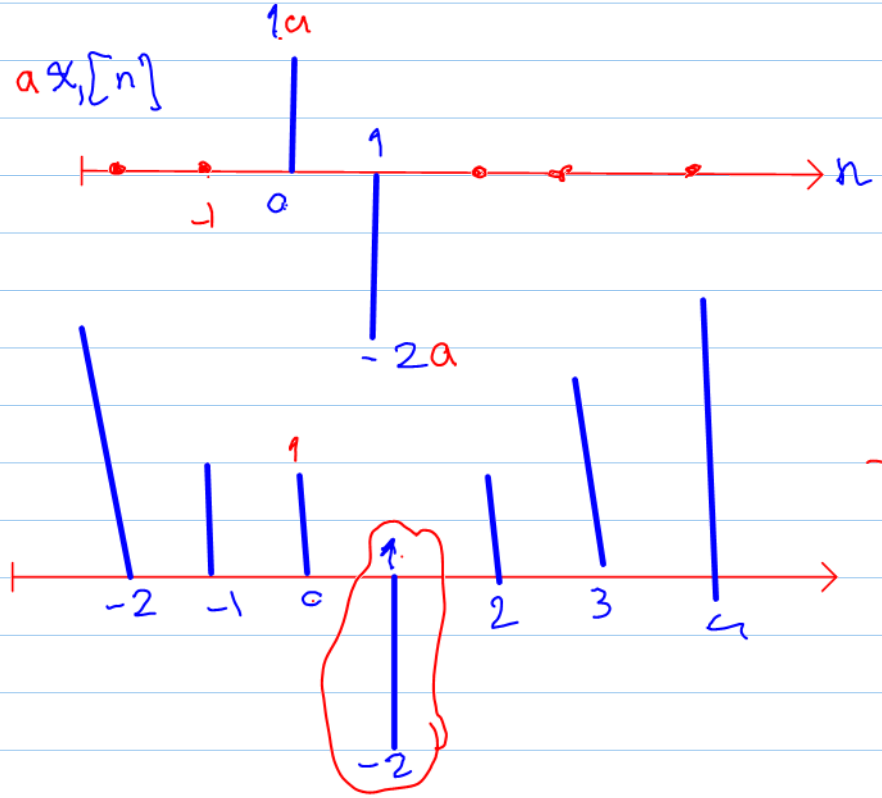
خروجی در $n=0$ برابر a است

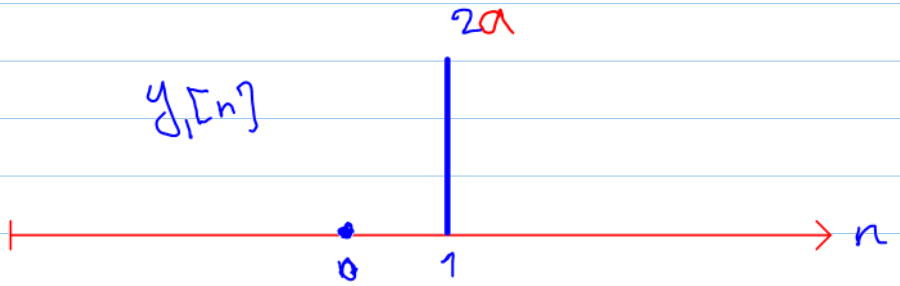
۱

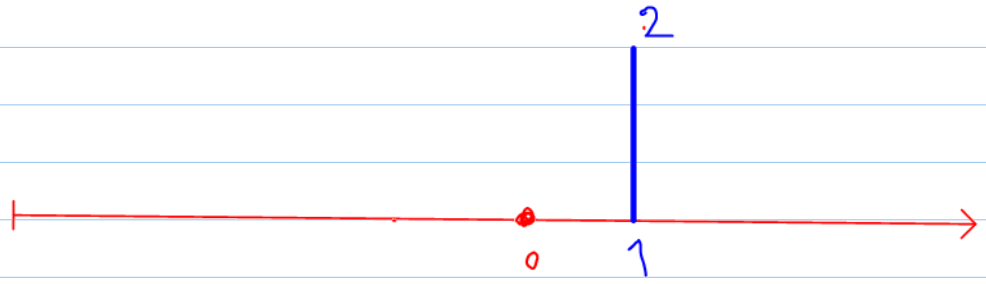
$-2a$ عدد $n=1$ را ببیند

سیستم

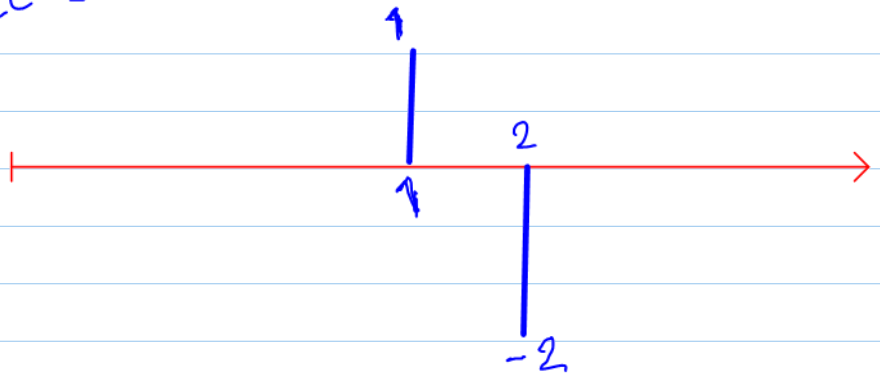
خروجی در $n=1$ برابر $2a+$ است.

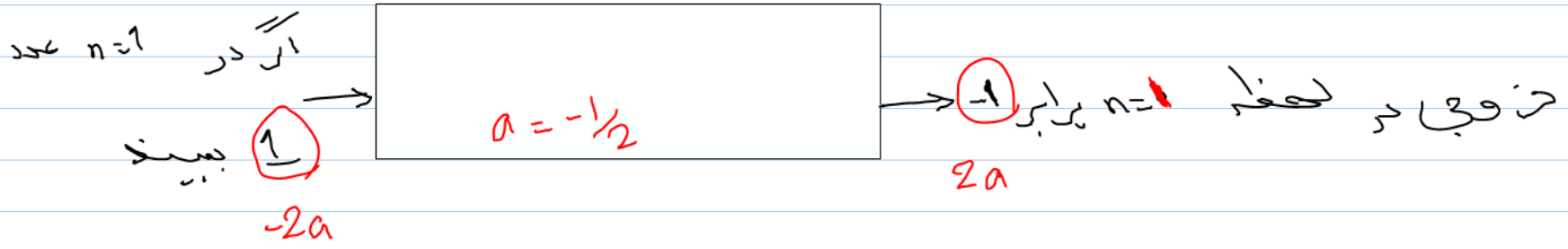






$x_2[n]$





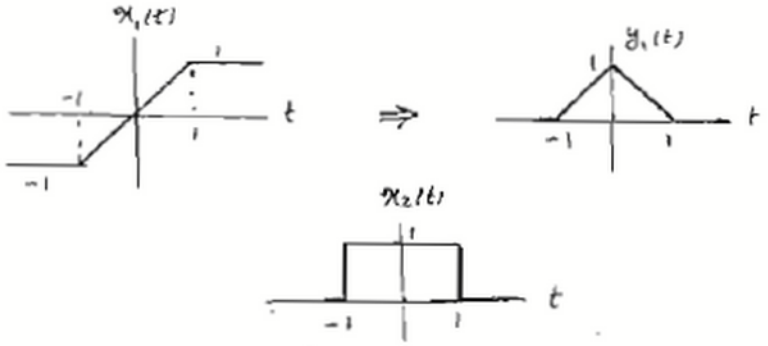
اگر در $n=1$ عدد 1 بیندازیم

در لحظه $n=1$ برابر -1 خواهد بود

پس متوجه میشویم که y_2 در لحظه $n=1$ برابر -1 است.

y_2 در لحظه $n=2$ ؟ ← همین طور که توانستید حدس بزنید

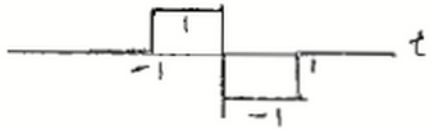
۱۹- پاسخ یک سیستم بدون حافظه تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ چیست؟



۱) 

۲) 

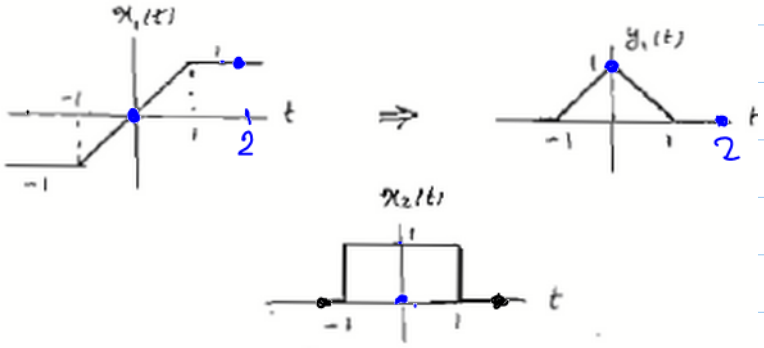
۳) 

۴) 

خواص سیستم:

TI ← سیستم

بدون حافظه ← معکوس



خروجی در لحظه $t=a$ برابر است با ← سیستم ← اگر در لحظه $t=0+a$ عدد ۵ بیندازیم

(فرعدی) (فرعدی)

خروجی در لحظه $t=2+b$ برابر است با ← سیستم ← ۵ را در لحظه $t=2+b$ عدد بیندازیم

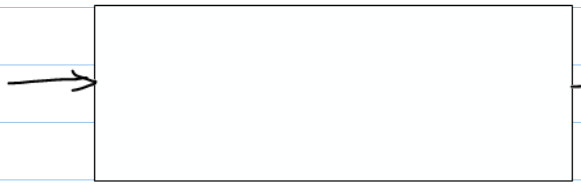
معکوس سیستم ← یعنی هر زمان را می‌توان با هر عددی جمع کرد (هم در ورودی هم در خروجی)

ط هر عددی می‌توانیم بیندازیم $2+b$ هر عددی می‌توانیم.

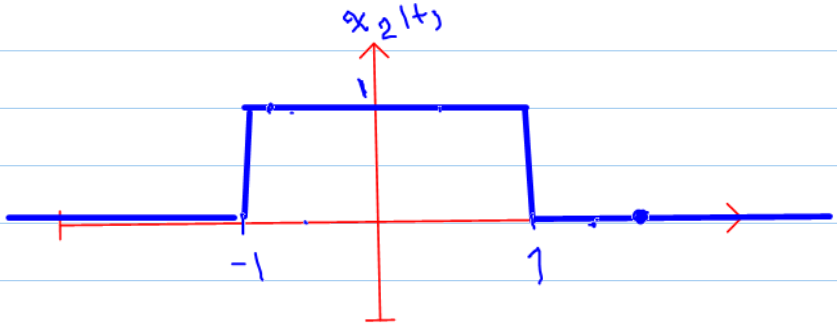
هر عددی

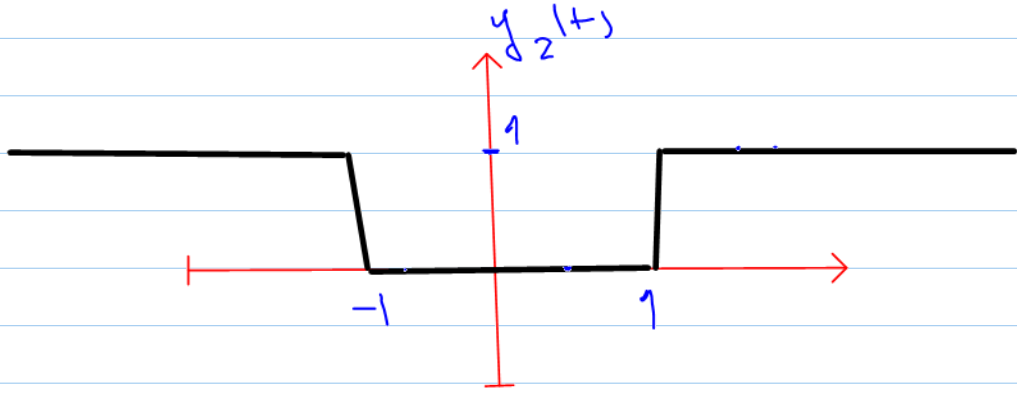
اگر در لحظه t هر عدی

عدد ۱ بیشتر



خروجی در آن لحظه برابر ۱ است.





$t = a+b$ در عدی ← b در عدی

ارتباط خواص سیستم با پاسخ ضربه:

داشتن پاسخ ضربه یعنی LTI پاسخ به ورودی ضربه یعنی LTI سیست.

علی بودن:

یک سیستم با پاسخ ضربه $h(t)$ را علی گوییم اگر و تنها اگر $h(t)=0 \quad \forall t<0$

$h(t)=0 \quad \forall t<0 \iff$ علی ✓

$h(t)=0 \quad \forall t\geq 0 \iff$ غیر علی

حافظه‌دار بودن:

$h(t)=$ ضربی از $\delta(t)$ $\iff$ بدون حافظه

یا $k\delta[n]$

$h(t)=0 \quad \forall t\neq 0 \iff$ بدون حافظه

پایداری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$\Longleftrightarrow$ پایدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

برق ۸۱

۲- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI به صورت $h(t) = e^{t}u(-1-t)$ داده شده است که در آن $u(t)$ تابع پله واحد می‌باشد. در این صورت سیستم چگونه است؟

۱) پایدار و علّی ۲) ناپایدار و علّی ۳) ناپایدار و غیر علّی ۴) پایدار و غیرعلّی

$h(t) = e^t u(-1-t)$ علی و یا علی؟

$$h(t) = e^t \times \begin{cases} 1 & t \le -1 \\ e & t > -1 \end{cases} = \begin{cases} e^t & t \le -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$$

$h(-2) = e^{-2} \neq 0 \rightarrow$ غیرعلی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{-1} |e^t|\,dt + \cancel{\int_{-1}^{\infty} 0 \times dt}$$

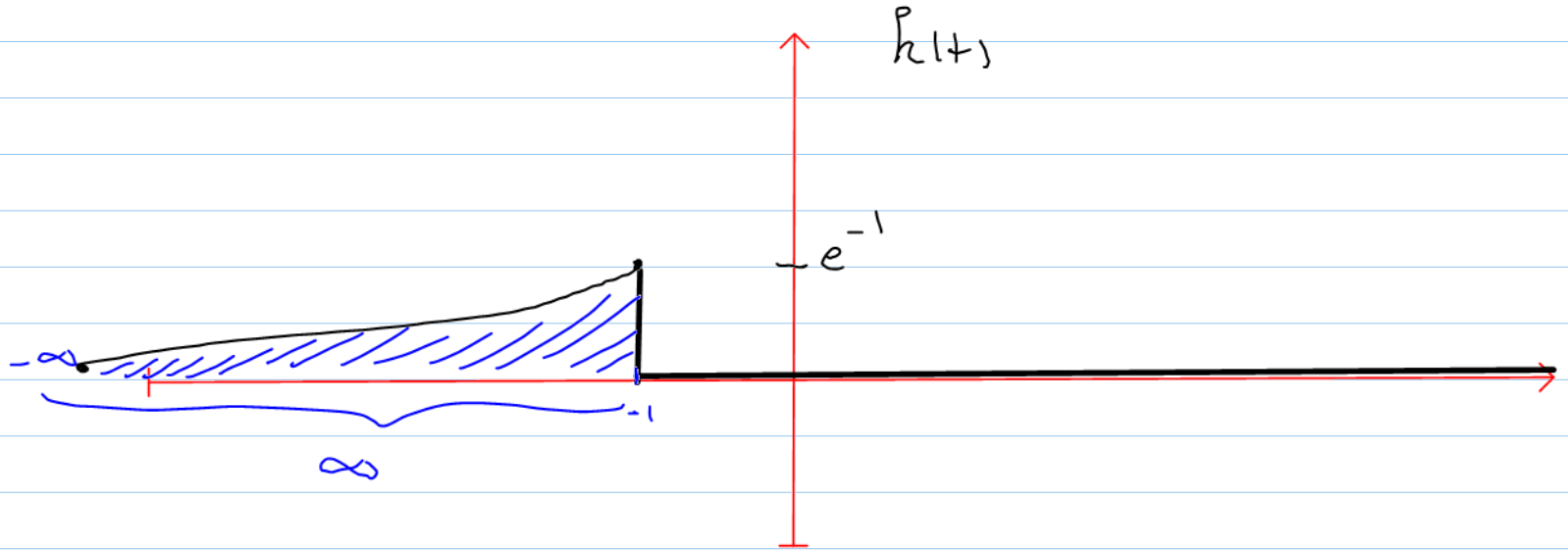
$|e^t| = e^t$

2.73^t

عددستابه هر توانی برسد (حتی سقا) باز هم مثبت است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{-1} e^t\,dt = e^t\Big|_{-\infty}^{-1} = e^{-1} - e^{-\infty} = e^{-1} - 0 = e^{-1} < \infty$$

پایدار



$h(t) = \begin{cases} e^t & t \leq -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$

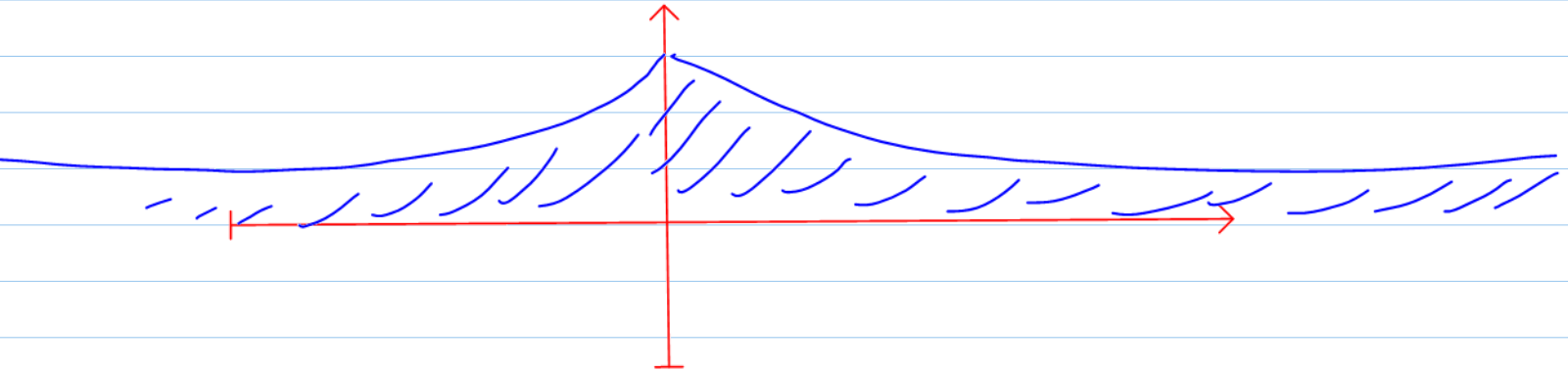
$|h(t)|$ را رسم کنید.

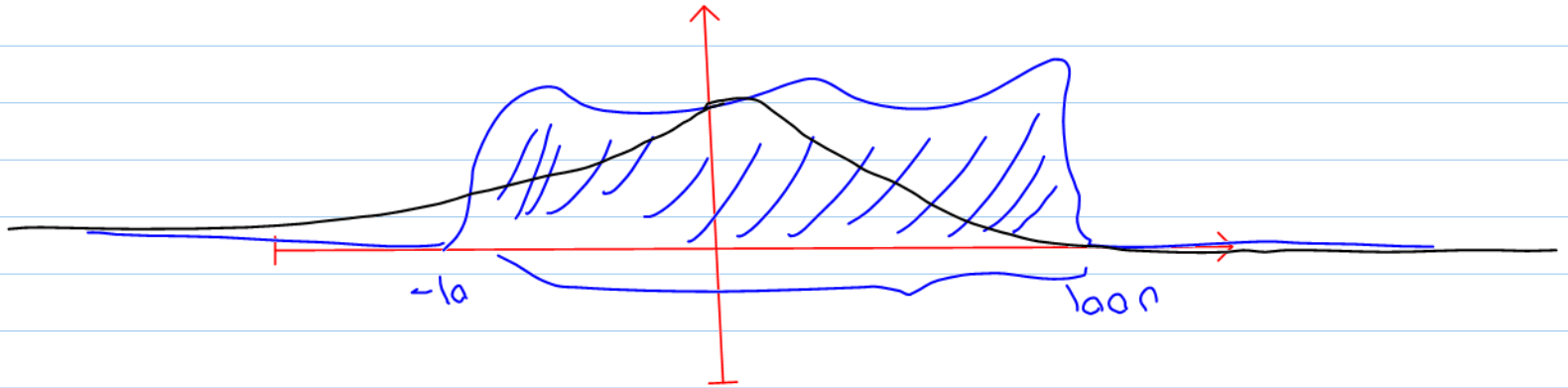
دامنه در حال کاهش به سمت ∞ است پس ناپایدار است.

نکته: $|h(t)|$ را رسم کنید ← ① دامنه در حال افزایش و طول سیگنال ∞ ← ناپایدار

② ← ثابت یا در حال کاهش به سمت عددی متناهی با طول ∞ ← ناپایدار

③ ← در حال کاهش به سمت عدد ۰ با طول سیگنال محدود ← پایدار




-10
100

برق ۸۳

۹. پاسخ یک سیستم LTI گسسته به ضربه شیفت یافته $x[n] = \delta[n - ۱]$ به صورت مقابل است:
در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟



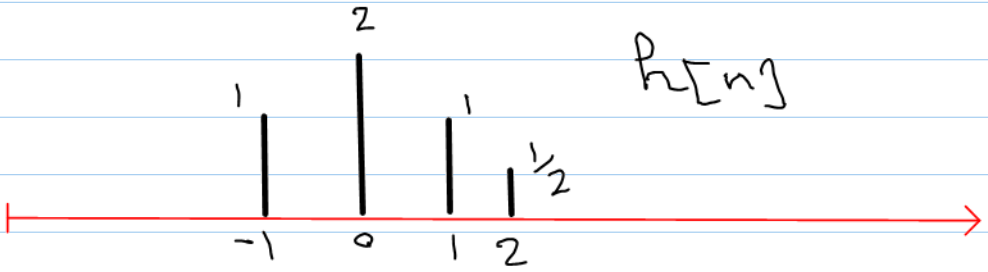
۱) علی، حافظه‌دار و ناپایدار
۲) علی، بدون حافظه و پایدار
۳) غیرعلی، حافظه‌دار و پایدار
۴) غیرعلی، بدون حافظه و ناپایدار

LTI

$x[n] = \delta[n-1] \longrightarrow y[n]$

TI

$x[n+1] = \delta[n] \longrightarrow h[n] = y[n+1]$



حافظه دار؟ ← $h[n]$ در لحظات غیر از صفر مقدار دارد ← حافظه دار

پایداری؟ ←

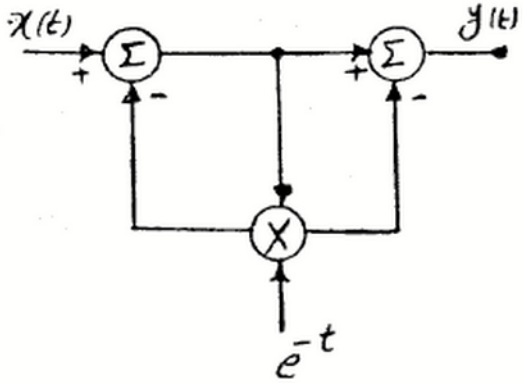
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1+2+1+\frac{1}{2} = 4.5 < \infty$ پایدار

علی؟

$h[-1] = 1 \longrightarrow h[n=-1] \neq 0$ غیر علی

برق ۹۵

۲۸- سیستم نشان داده شده در شکل روبه‌رو ..... است.

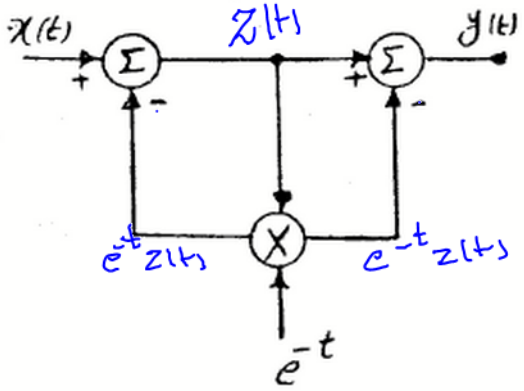


۱) غیرخطی و ناپایدار

۲) خطی و ناپایدار

۳) غیرخطی و پایدار

۴) خطی و پایدار



$$y(t) = z(t) - e^{-t} z(t)$$

$$z(t) = x(t) - e^{-t} z(t) \longrightarrow z(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} x(t)$$

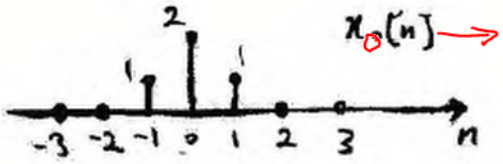
$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} x(t)$$

تمرین صفحه اول.

خطا و بایدار ← لطفا "حل شد".

۹۱ برق

۷۵- اگر $y_0[n]$ پاسخ یک سیستم LTI پایدار به ورودی $x_0[n]$ بوده و $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_0[n] = -1$ است. $y_1[n]$ پاسخ همان سیستم به ورودی $x_1[n]$ است، کدام گزینه زیر صحیح است؟





۱) $\sum_n y_1[-n] = -۴$

۲) $\sum_n y_1[-n] = ۰$

۳) $\sum_n y_1[-n] = ۴$

۴) $\sum_n y_1[-n] = ۲$

حال

TI

با بدل

$x_1[n] =$ تابع x_0 با توجه به تعریف

جای خالی را [آیا می‌توانید] بنویسید.

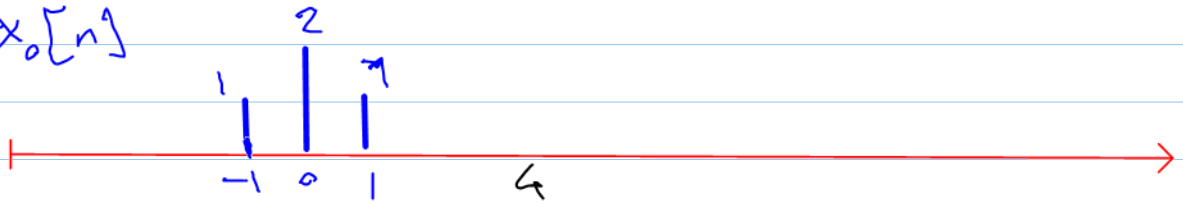
$x_1[n]$

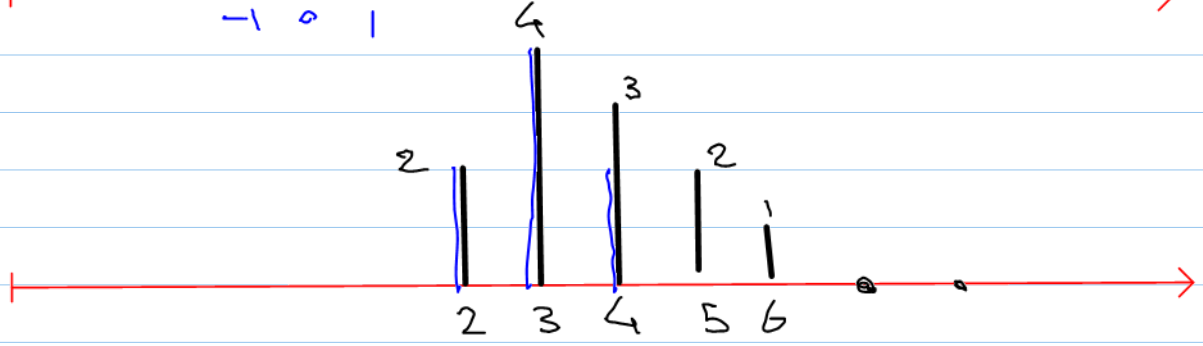


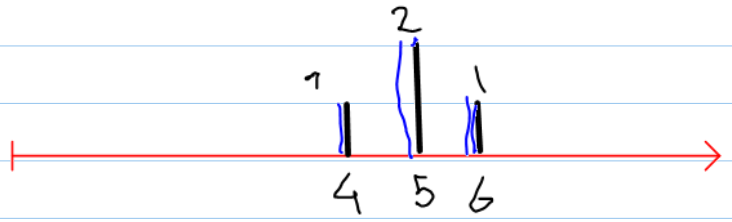
$x_1[n] = x_0[n-1] + 2x_0[n-3]$

$+ x_0[n-5]$

$x_0[n]$







$$x_1[n] = x_0[n-1] + 2x_0[n-3] + x_0[n-5]$$

$$y_1[n] = y_0[n-1] + 2y_0[n-3] + y_0[n-5]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[-n] = ? \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[-n]$$

$-n = k \rightarrow$ $\quad n: -\infty \rightarrow \infty$

$\quad k: \infty \rightarrow -\infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[n] = \sum y_0[n-1] + 2\sum y_0[n-3] + \sum y_0[n-5]$$

$-1 \qquad -1 \qquad -1$

$$= -1 - 2 - 1 = -4 \checkmark$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_0[n] = -1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_0[n-5] = -1$$ ادعا

باشد ساخت زیر عوامل گذاشته شود.

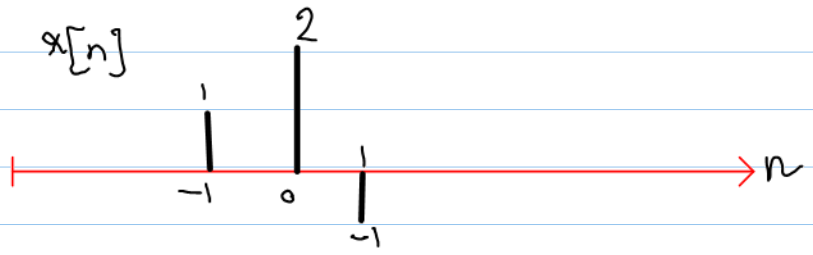
جلسه 23

سیستم های LTV

سیستم خطی متغیر با زمان : LTV

* در این سیستم ها از خواص سیستم های LTI نمی توان استفاده کرد.

مثال : پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $\delta[n-k]$ برابر $\delta[n-2k]$ است که به ازای تمام k های صحیح برقرار است. پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]$ را بدست آورید.



$\delta[n-k] \rightarrow$ [ ] $\rightarrow \delta[n+2k] = h[n,k]$ ثابت عدد صحیح : k

بررسی LTI یا TV بودن ؟

$k=0 \quad x[n] = \delta[n] \longrightarrow y[n] = \delta[n]$

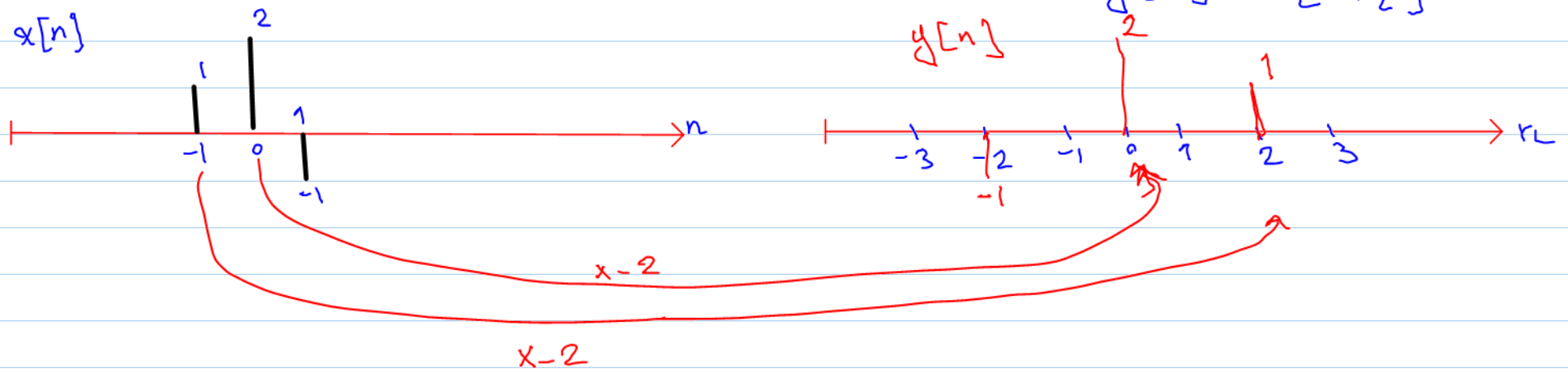
$k=1 \quad \delta[n-1] \longrightarrow \delta[n+2]$

TI نوع $\quad x[n-1] \longrightarrow y[n-1] = \cancel{\delta[n-1]}$ LTV ✓

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n+2k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-\tfrac{n}{2}]\,\delta[n+2k] = x[-\tfrac{n}{2}] \cancel{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+2k]}^{\,1}$$

($k = -n/2$)

$y[n] = x[-n/2]$



نکته: هر سیستم LTV با پاسخ به ورودی مزبه شیفت یافته قابل توصیف است.

یعنی اگر بگوییم پاسخ سیستم خطی به ورودی $\delta[n-k]$ به ازای تمام kها برابر تابعی از n و k است آن پاسخ را با $h[n,k]$ (یا $h(t,\tau)$) نشان می‌دهیم و پاسخ به ورودی مزبه شیفت یافته کوتاه.

$$\delta[n-0] \rightarrow h[n,k] \qquad u[n] \not\rightarrow h[n,k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n,k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t,\tau)\,d\tau$$

مثال. پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $\delta[n-1]$ برابر $\delta[n+1]$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=2^n u[n+1]$ را حساب کنید.

$h[n,k] = \delta[n+k]$ $\qquad$ $x[n] = 2^n u[n+1]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u[k+1]\,\delta[n+k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-n} u[-n+1]\,\delta[n+k]$$

$k = -n$

$$y[n] = 2^{-n} u[-n+1] \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \cdot \delta[n+k]$$

$$y[n] = 2^{-n} u[-n+1] \quad \checkmark$$

مثال. پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $x(t)=\delta(t-2)$ برابر $y(t)=\frac{t\,\delta(t-2)}{h(t,2)}$ می‌باشد.
رابطه بین ورودی و خروجی سیستم را بدست آورید.

ورودی دلخواه: $x(t)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(2)\,h(t,2)\,d2=\int_{-\infty}^{\infty} x(2)\,t\,\delta(t-2)\,d2$$

$$=t\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-2)\,d2$$

$$y(t)=t\,x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)\,d2=1 \quad (2=t)$$

$$\rightarrow \boxed{y(t)=t\,x(t)}$$

نکته: پاسخ سیستم خطی و LTV به ورودی پله شیفت یافته $u[n-k]$ ($u(t-\tau)$) را با $S[n,k]$ ($S(t,\tau)$) نشان داده و پاسخ به ورودی پله شیفت یافته گوییم.

ارتباط بین پاسخ پله و پاسخ ضربه شیفت یافته:

$$S(t,\tau) = \int_{\tau}^{\infty} h(t,\alpha)\, d\alpha$$

$$S[n,k] = \sum_{m=k}^{\infty} h[n,m]$$

$$h(t,\alpha) = -\frac{\partial S(t,\tau)}{\partial \tau}$$

$$h[n,k] = -(S[n,k] - S[n,k-1])$$

تست ۸۹

۶. اگر پاسخ یک سیستم خطی (که می‌تواند تغییرپذیر با زمان هم باشد) به تابع پله $u(t-\alpha)$ را با $g(t,\alpha)$ نمایش دهیم، پاسخ آن سیستم به تابع ضربه $\delta(t-\alpha)$ چه خواهد بود؟

۱) $-\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t,\alpha)$ ۲) $\frac{\partial}{\partial t} g(t,\alpha)$ ۳) $\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t,\alpha)$ ۴) $-\frac{\partial}{\partial t} g(t,\alpha)$

$S(t,\alpha)$ — LTV — $h(t,\alpha)$

$$S(t,\alpha) = g(t,\alpha)$$

$$h(t,\alpha) = -\frac{\partial g(t,\alpha)}{\partial \alpha}$$

مثال: در یک سیستم خطی با ورودی $u(t-2)$ خروجی برابر $(t^2-2^2)u(t-2)$ است، رابطه بین ورودی و خروجی را بدست آورید.

$$s(t,\tau) = (t^2 - \tau^2)\, u(t-\tau) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t,\tau)\, d\tau$$

$$h(t,\tau) = -\frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left((t^2-\tau^2)\, u(t-\tau)\right)$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(t^2-\tau^2)\right) u(t-\tau) + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} u(t-\tau)\right)(t^2-\tau^2)\right]$$

$$= -\left[-2\tau\, u(t-\tau) + -1\, \delta(t-\tau)\,(t^2-\tau^2)\right]$$

($\tau = t$; $t^2 - \tau^2 = 0$)

$$h(t,\tau) = -\left(-2\tau\, u(t-\tau)\right) = 2\tau\, u(t-\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(f(g(\alpha))\right) = \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial g} \qquad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(u(t-\tau)\right) = \frac{\partial (t-\tau)}{\partial \tau} \times \frac{\partial u(t-\tau)}{\partial (t-\tau)}$$

(α)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \times 2\tau \times \underbrace{1}_{\tau \le t}\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} 2\tau\, x(\tau)\, d\tau \quad \checkmark$$

۲۸- پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی (که لزوماً LTI نیست) به ورودی $x_1[n] = u[n-m]$ برابر با $y_1[n] = (-1)^{nm}$ می‌باشد و این خاصیت به ازای جمیع مقادیر صحیح $m \in Z$ و جود دارد. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$ چه خواهد بود؟

۱) $y_2[n] = 0$ ۲) $y_2[n] = 4$ ۳) $y_2[n] = (-1)^n - 1$ ۴) $y_2[n] = (-1)^n + 1$

$$S[n,m] = (-1)^{nm} \qquad x_2[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$$

$$y_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]\, h[n,m]$$

$$h[n,m] = -\left(S[n,m] - S[n,m-1] \right) = -\left((-1)^{nm} - (-1)^{nm}(-1)^{-n} \right)$$

$$= -\left((-1)^{nm} \left[1 - (-1)^{-n} \right] \right) =$$

$$(-1)^{-n} = (-1)^{n}$$

$$h[n,m] = -(-1)^{nm}\left(1 - (-1)^{n}\right)$$

$$y_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\delta[m+1] + 2\delta[m] + \delta[m-1] \right) (-1)^{nm} \left((-1)^{n} - 1 \right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big[\underbrace{\delta[m+1]}_{m=-1} (-1)^{-nm} \left((-1)^{n} - 1 \right) + 2 \underbrace{\delta[m]}_{m=0} (-1)^{0} \left((-1)^{n} - 1 \right) +$$

$$\underbrace{\delta[m-1]}_{m=1} (-1)^{nm} \left((-1)^{n} - 1 \right) \Big] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m+1]\,(-1)^{-n}\left((-1)^n - 1\right) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2\,\delta[m]\left((-1)^n - 1\right)$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m-1]\,(-1)^n\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \left(1 - (-1)^{-n}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m+1] + 2\left((-1)^n - 1\right) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[m]$$

$$+ \left((-1)^{2n} - (-1)^n\right) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[m-1]$$

$$y[n] = 1 - (-1)^n + 2(-1)^n - 2 + 1 - (-1)^n = 0$$

ویژگی خواص سیستم های LTV از روی پاسخ ضربه بررسی میشود:

1- حافظه دار بودن:

سیستم LTV بدون حافظه است اگر و تنها اگر $h(t,\tau)$ فقط در لحظه τ مقدار داشته باشد.

بدون حافظه $\iff$ $h(t,\tau) = \delta(t-\tau)$ ضربی از

2- علی بودن:

علی $\iff$ $h(t,\tau) = 0 \quad \forall t < \tau$

$h[n,k] = 0 \quad \forall n < k$ مقدار ثبت

3- پایداری:

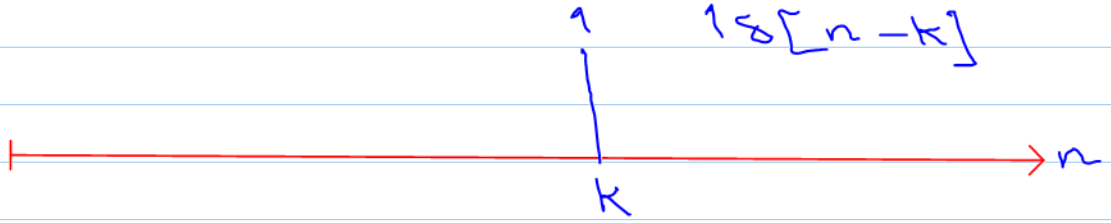
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n,k]| < \infty$$

پایدار $\iff$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| \, d\tau < \infty$$

مثال: یک سیستم خطی در پاسخ به ورودی اعمال شده در لحظه k ام دارای پاسخی به فرم

$nu[n-k] + (n-k)\delta[n-k]$ است. برای این سیستم خواص حافظه، علّی بودن، پایداری و معکوس پذیری را بررسی کنید.



$$h[n,k] = n\,u[n-k] + \underbrace{(n-k)\,\delta[n-k]}_{0} = n\,u[n-k]$$

$n=k$

① چون $h[n,k]$ به ازای $\delta[n-k]$ ها صفر می‌شود

② $$h[n,k] = n\begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases} = \begin{cases} n & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases}$$ ← k ثابت

③ $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |n\,u[n-k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |n|\,|\underbrace{u[n-k]}_{1}| = |n| \sum_{k=-\infty}^{n} |1|$$

$k \leq n$

$$= |n| \times (n - (-\infty) + 1) = |n|\,(n + \infty + 1) = \infty$$

ناپایدار

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n,k]$$ معادله سیستم

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\, n\, \cancel{u[n-k]}^{1} = n \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$k \leq n$

$$y[n] = n \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$ قرار دادن

اکنون معادل دوم

آزمون فصل دوم سیگنال

سوال ۱. وزارت بهداشت ۸۹

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=2^n u[-n-1]$ و ورودی $x[n]=u[n]-u[n-10]$

در بازه $-12 < n < -2$ کدام است؟

۱) $2^{n+1}-2^{n+9}$

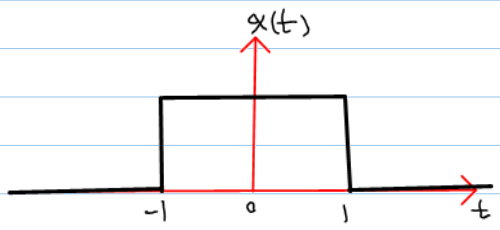
۲) ۰

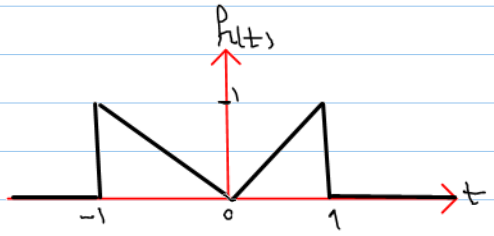
۳) 2^n-2^{n-10}

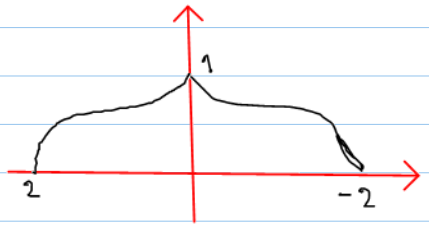
۴) $1-2^{n-9}$

سوال 2.

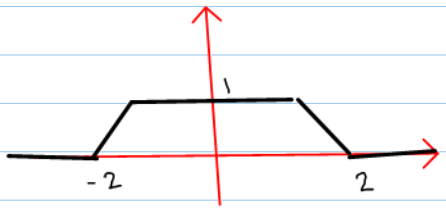
اگر پاسخ صفر به یک سیستم LTI به صورت شکل زیر باشد، پاسخ به ورودی $x(t)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

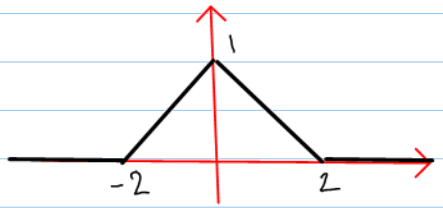












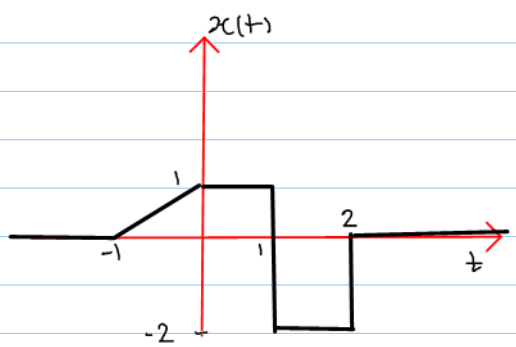
سوال ۱:

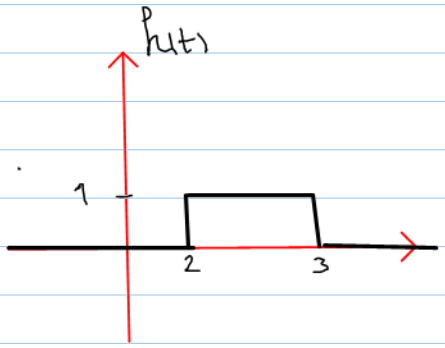
اگر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{t+1} e^{-4|t-\tau|} x(\tau-2)\,d\tau$ باشد، این سیستم:

۱) علّی و پایدار است.
۲) علّی و ناپایدار است
۳) غیرعلّی و ناپایدار است
۴) غیرعلّی و پایدار است.

سوال ۲:

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی $x(t)$ مفروض است. حداقل مقدار خروجی و زمان وقوع آن کدام است؟





۱) $y_{min}=0$ ، $t=5$

۲) به ازای $t<1, t>5$ ، $y_{min}=0$

۳) $y_{min}=-2$ ، $t=4$

۴) $y_{min}=-1$ ، $t_{min}=5$

سوال ۵.

مفهوم کانولوشن در عمل چیست؟ (برداشت خود را بنویسید).

سؤال ۲.

اگر $z[n] \triangleq x[n] * y[n]$ باشد، حاصل $x[2n] * y[2n]$ کدام است؟

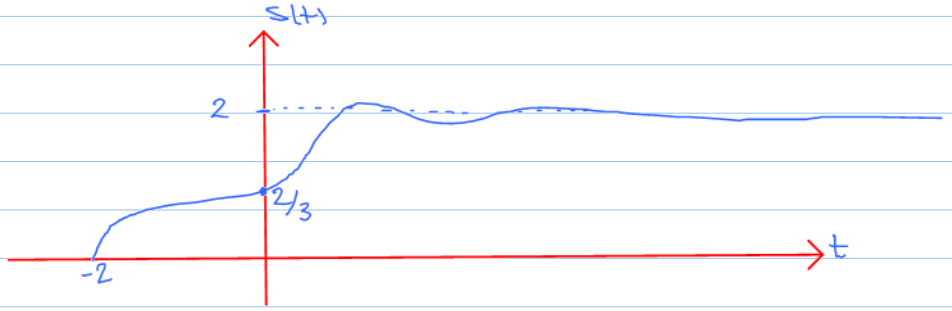
۱) $z[2n]$ ۲) $z[\frac{1}{2}n]$ ۳) $z[2n]$ تنها در حالتی که $x[n]$ یا $y[n]$ فقط در لحظات زوج برابر صفر باشد.

۴) $z[2n]$، اگر $x[n]$ یا $y[n]$ در لحظات فرد صفر باشد.

سوال ۷.

اگر پاسخ پله یک سیستم LTI به صورت شکل زیر باشد و $h(t)$ پاسخ ضربه باشد حاصل $I = \int_{1}^{\infty} h(t)dt$ کدام است؟

۱ $\frac{4}{3}$ ۲ $\frac{5}{3}$



سوال ۸.

سیستم زمان پیوسته با رابطه $y(t)=\int_{t-4}^{t+4} \sin(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$ دارای کدام خواص است؟

۱) پایدار و علی ۲) ناپایدار و علی ۳) پایدار و غیر علی ۴) ناپایدار و غیر علی

سوال ۹.

پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $\delta(t-2)$ برابر است با $h(t,z) = \begin{cases} \delta(t-z) & z<0 \\ u(t-z) & z>0 \end{cases}$

این سیستم دارای کدام دسته خواص است؟

۱) خطی، پایدار، ۳۱ ۲) خطی، ناپایدار، ۳۱ ۳) غیرخطی، پایدار، ۳۷

۴) خطی، ناپایدار، ۳۷

سوال ۱۰.

فرض کنید شما طراح سوال کنکور هستید و برای کنکور امسال، یک سوال نکته‌دار از این مبحث طراحی کنید.

جلسه 24 سیگنال

فصل سوم

مقدمه: چرا باید تبدیل های مختلف را یاد بگیریم؟

تبدیل چیست؟

پاسخ فرکانسی چیست؟

کجا به دردمان می خورد؟

فصل اول ← تجزیه و تحلیل سیگنال و سیستم ها

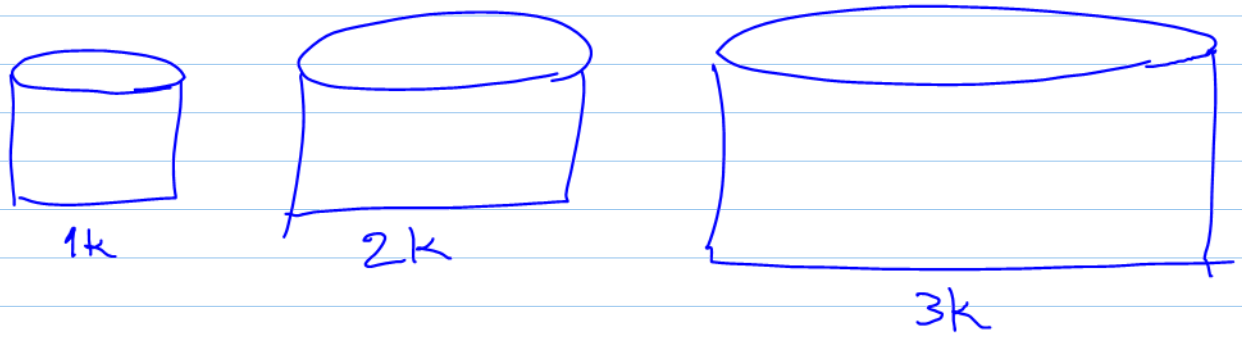
فصل دوم ← معرفی سیستم های LTI در حوزه زمان

فصل سوم به بعد ← تبدیل های حوزه زمان به فرکانس.

سیستم LTI:

$$g(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

مثال: فرض کنید یک مغازه ترازو ندارید ولی قابمای مشخص دارید که میدانید اگر هر قاب با شکر پر شود وزن آن چقدر خواهد شد، حالا اگر یک فرشته ۱۵ کیلو شکر بخواهد چه خواهید کرد؟



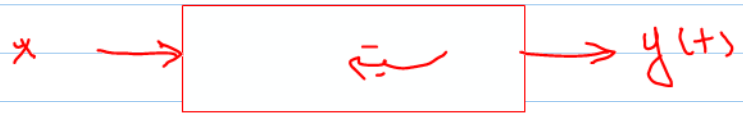
ساده‌ترین راه حل؟

① ۱۵ تا ظرف ۱kg

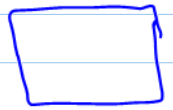
② 5 تا ظرف 2kg

③ 3 تا ظرف 3k ✓ + ۱ ظرف ۱kg

مثال:

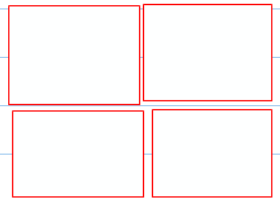


$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ به شکل مربع باشد.} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ به شکل دایره باشد.} \end{cases}$$





$x(t) \Rightarrow$



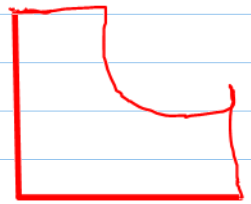
$\longrightarrow \quad y(t) = ?$ ↳

$x(t) \longrightarrow$

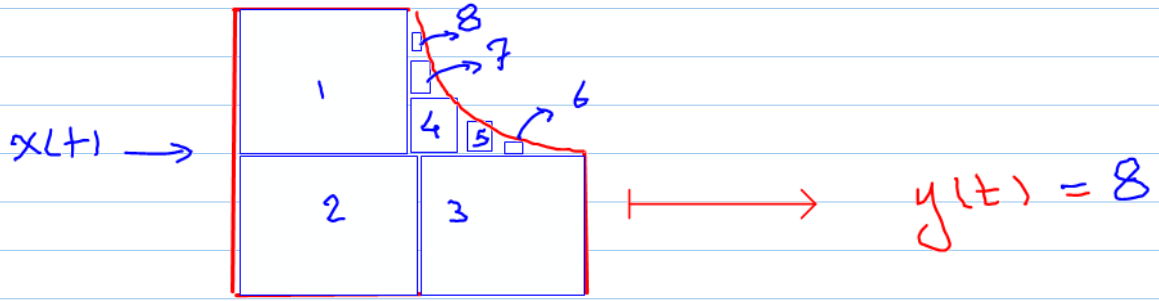


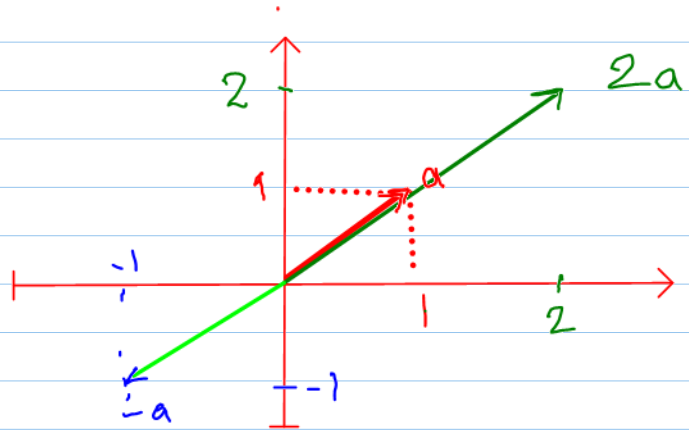
$\longmapsto \quad y(t) = ?$ 1 + 0

$x(t)$ —



$\longrightarrow \quad y(t) = ?$





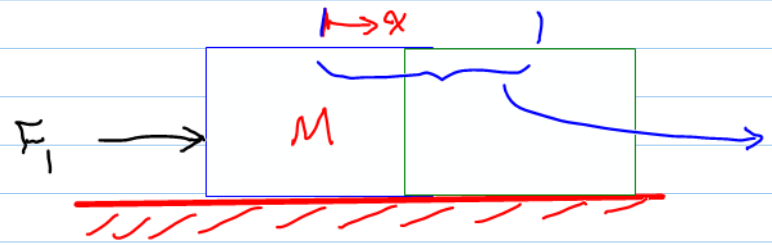
مقدار ویژه و بردار ویژه

2a ?

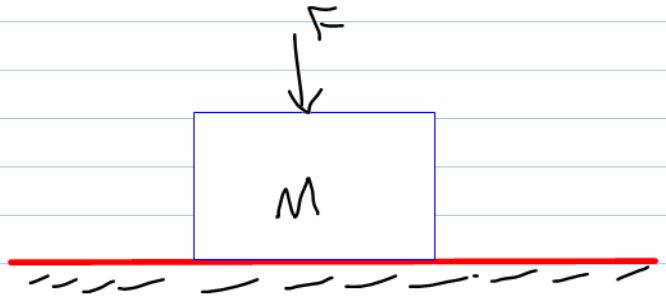
-1a ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times a \; ?$$

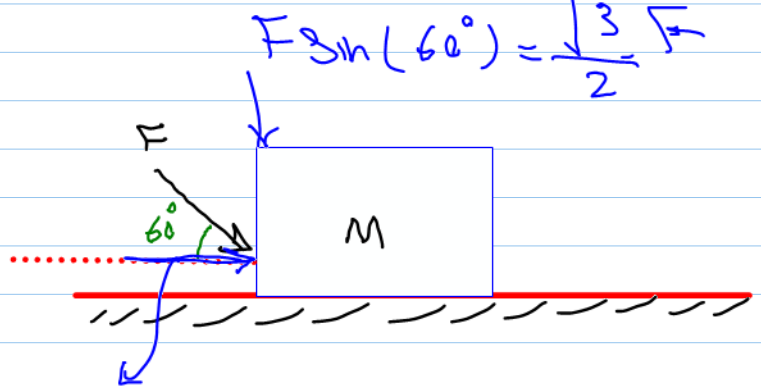
مثال: فرض کنید یک جسم داریم که به شکل زیر نیروی F وارد می‌شود، حرکت آن را توصیف کنید.



تأثیر نیروی F



تأثیر ندارد.



تأثیر نیروی F

V_1

جهت عمودی ← $h_1 = 0$

جهت افقی ← $h_2 = \frac{1}{2}$

V_2

تعریف بردار ویژه و مقدار ویژه یک ماتریس.

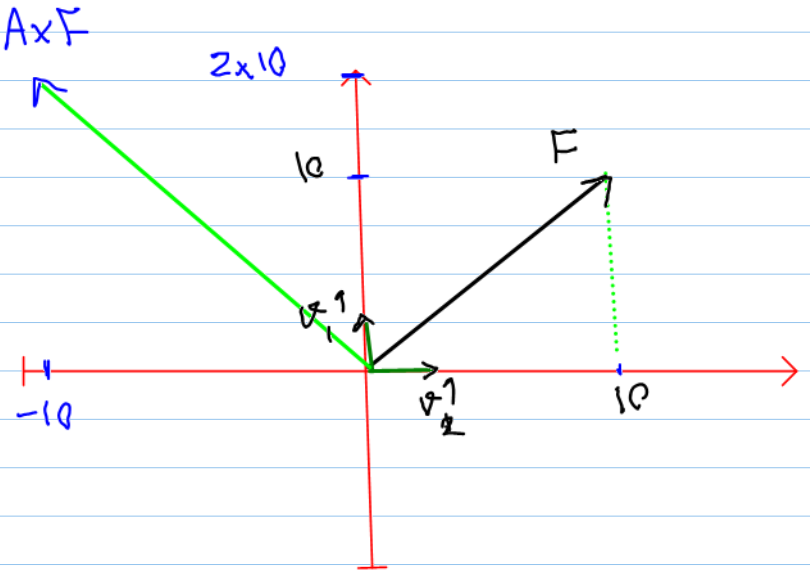
یعنی اگر ماتریس A در یک عدد ضرب شود، تأثیر آن در عمل چیست؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad AF = ?$$



یعنی ماتریس A بردار F را در راستای $\vec{v}_1$ با ضریب λ_1 و در راستای $\vec{v}_2$ با ضریب λ_2 تقویت می‌کند.

پس در واقع ماتریس A با قابلیت v_1 و v_2 سنجیده می‌شود.

به v_iها بردار ویژه و λ_iها مقدار ویژه گفته می‌شود.

حالا می‌خواهیم این مفهوم را به سیستم‌ها تعمیم دهیم.

ادعا: پاسخ سیستم‌های LTI برای برخی سیگنال‌ها، مضربی از خود ورودی است.

$$x(t) = e^{jat}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ja(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau$$

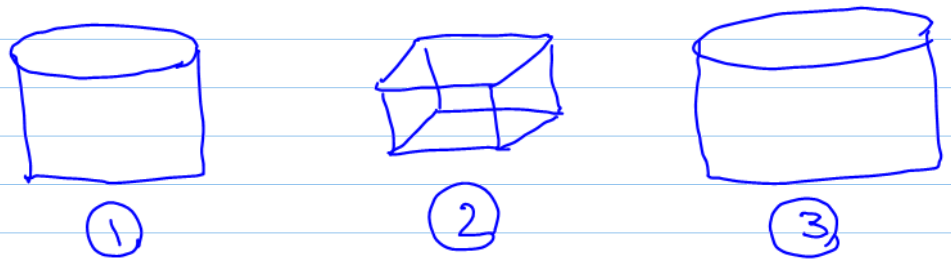
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jat} e^{-ja\tau} h(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = e^{jat} \longrightarrow y(t) = \underbrace{e^{jat}}_{x(t)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-ja\tau} d\tau$$

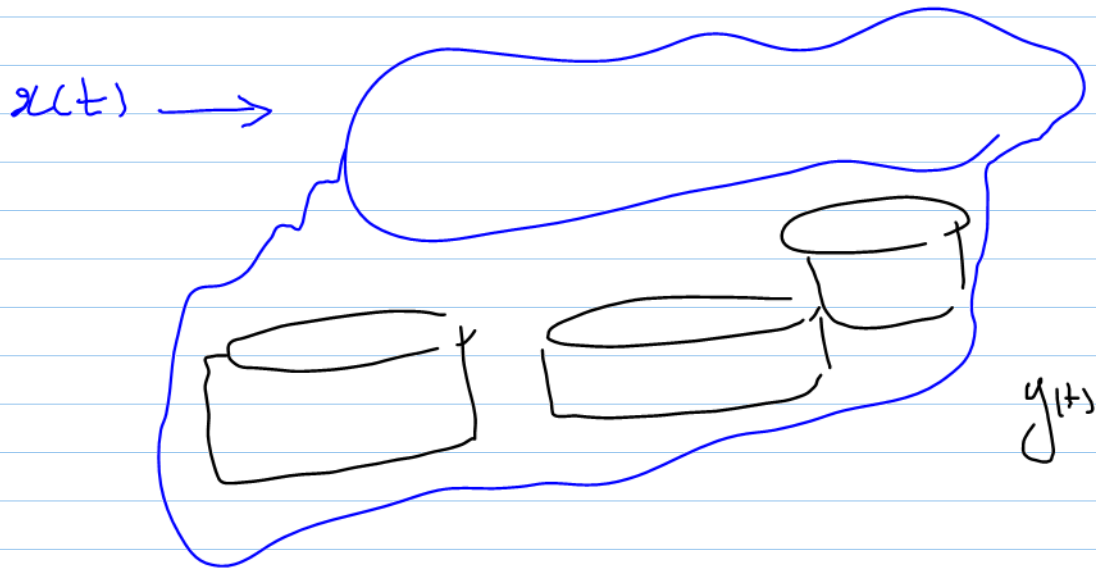
یعنی فاصبه پاسخ سیستم LTI به این سیگنالها بسیار ساده است.

حال اگر بتوانیم هر ورودی را در قالبهای e^{jat} بیان کنیم کار بسیار ساده است.

$$x(t) = -1e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} + 3e^{j3t}$$



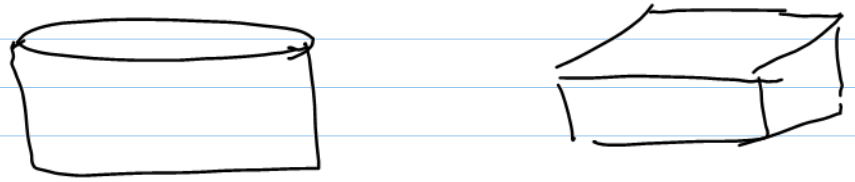
پاسخ سیتم LTI به ورودی‌های ① ، ② و ③ را داریم .



= ① تا 2 + ② تا 3 + ③ تا 4

$y(t) = 2 \times a + 3 \times b + 4\,c$

حالا باید برای سیتم های LTI قابلها را استفاده کنیم .



حالا باید خروجی سگنال با شکل موج سیتم به آن را داریم .

برای هر سیستم LTI ، شکل متناسبار ای توان در آورد.

$e^{jat} \longrightarrow y(t) = e^{jat} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-ja\tau}\, d\tau$

$e^{jbt} \longrightarrow y(t) = e^{jbt} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-jb\tau}\, d\tau$

پاسخ فرکانسی



فرض

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-jw\tau}\, d\tau$$

$e^{jat} \longrightarrow y(t) = e^{jat} H(ja)$

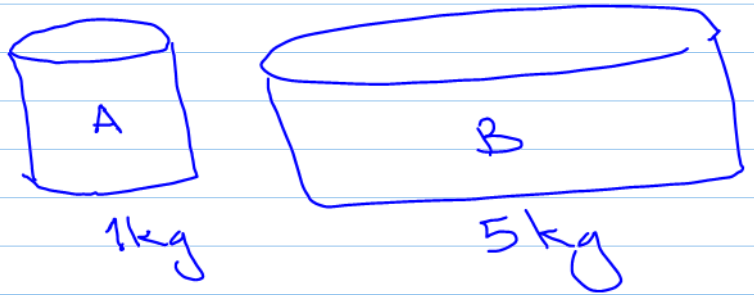
$e^{jbt} \longrightarrow y(t) = e^{jbt} H(jb)$

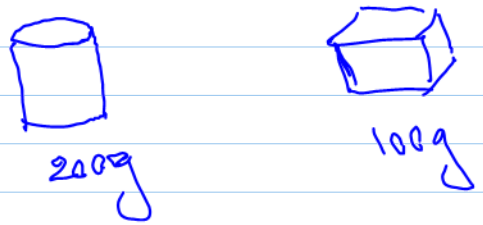
خاصیت پاسخ سیستم LTI به ورودی های e^{jat} بسیار ساده است.

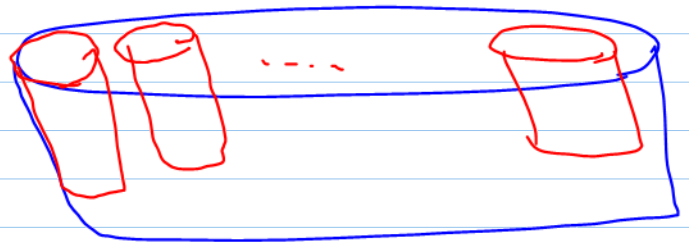
$$H(jw) = \frac{1}{w^2+1}$$

$$e^{j2t} \longrightarrow e^{j2t} \times \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5} e^{j2t}$$

خاصیتی سیستم LTI به ورودی e^{jat} آنها $H(jw)$ را خاصیت را پیدا کردیم.







⟶ وزن = ?

وزن = 200g × 10 + 100g × 2 ← 2 تا شربتی + 10 تا کاپیون

وزن کل کیک = 2.2 kg

خاصیت سیستم‌های خطی:

e^{jwt}

$x(t) \longrightarrow$ خروجی سیستم $\times$ را در e^{jwt} ضرب می‌کنیم.

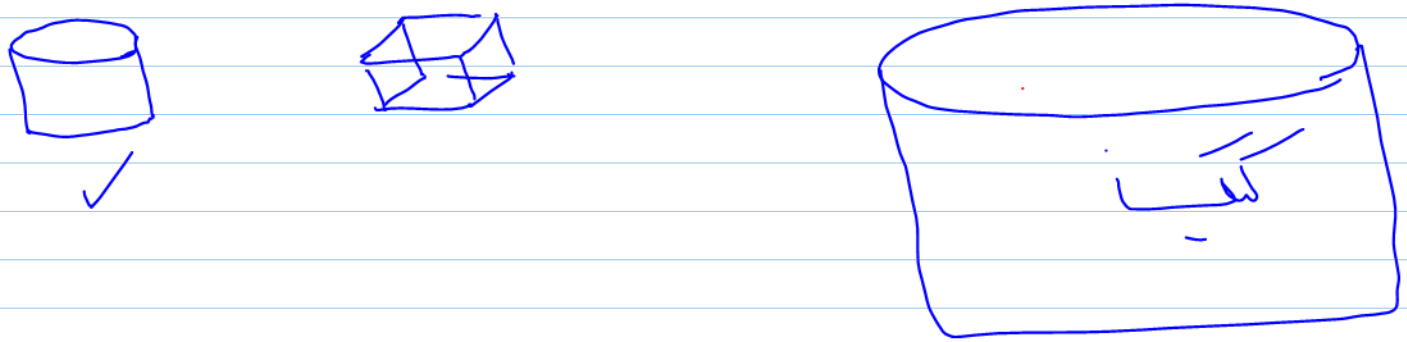
$$x(t) = 2e^{j2t} + 3e^{j4t} + 1e^{jt}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\tan(t) + e^{j3t}\cos(t)$$

$$2e^{jwt} \longrightarrow 2e^{jwt}H(jw)$$

$$y(t) = 2e^{j2t}H(j2) + 3e^{j4t}H(j4) + 1e^{jt}H(j1)$$

هدف تبدیل: $x(t)$ را باید خطی و با تعداد محدود سینوسی بیان کنیم.



چیز تا قالب ؟

تبدیل ← انتخاب شکل قالب و اینکه چیز قالب ؟

شباهت

نوع میزان شباهت ؟

$x(t) = \sin(2t)$

- e^{jt}
- e^{j2t}
- e^{j3t}
- ⋮

سنجش میزان شباهت دو سیگنال ؟ ضرب داخلی

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt$$

$$\langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$e^{j\omega t}$ ← هاتبعا ← LTI بلی سبب

$$\langle \sin(2t), e^{jlt} \rangle = 0$$

$$\langle \sin(2t), e^{j2t} \rangle = \frac{1}{2j}$$

$$\langle \sin(2t), e^{-j2t} \rangle = -\frac{1}{2j}$$

$$\langle \sin(3t), e^{j4t} \rangle = 0$$

$e^{jwt} \longrightarrow e^{jwt} H(jw)$

$x(t) \simeq$ ها e^{jwt} با x تقریب $\Rightarrow$

$\langle x(t), e^{jwt} \rangle$

$h(t) = u(t)$

$\sin(2t) \longrightarrow \boxed{H(jw) = \frac{1}{jw}} \longrightarrow ?$ $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$

$$\sin(2t) = \frac{1}{2j} e^{j2t} - \frac{1}{2j} e^{-j2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2j} e^{j2t} \frac{1}{j2} - \frac{1}{2j} e^{-j2t} \frac{1}{j(-2)}$$

تبدیل = میزان شباهت x با $e^{j\omega t}$ = $\langle x(t), e^{j\omega t} \rangle$

جلسه 25 سیگنال

سری فوریه

هدف: ساده‌سازی تعیین پاسخ سیستم های LTI ← آنژ سیستم‌ها واقعی را می‌توان با LTI تقریب زد.



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

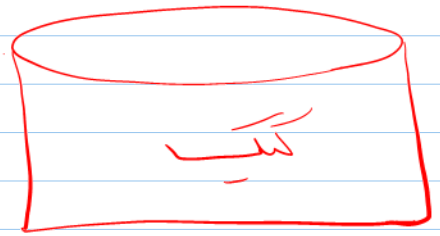
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

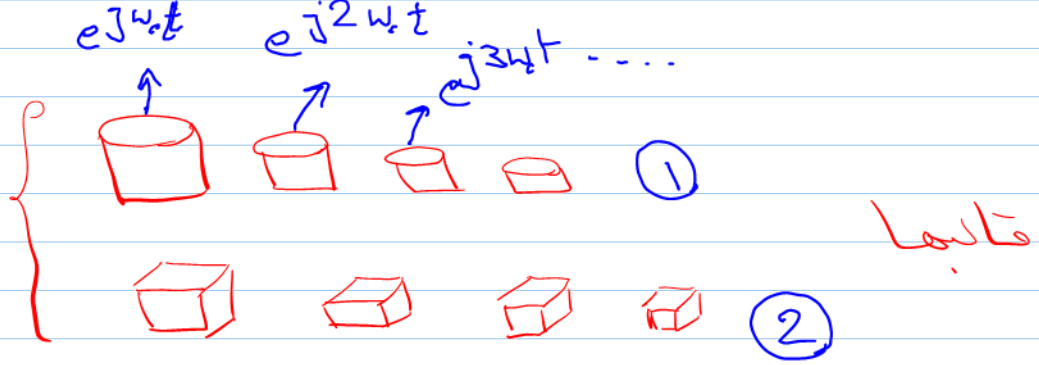
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$ پاسخ فرکانسی

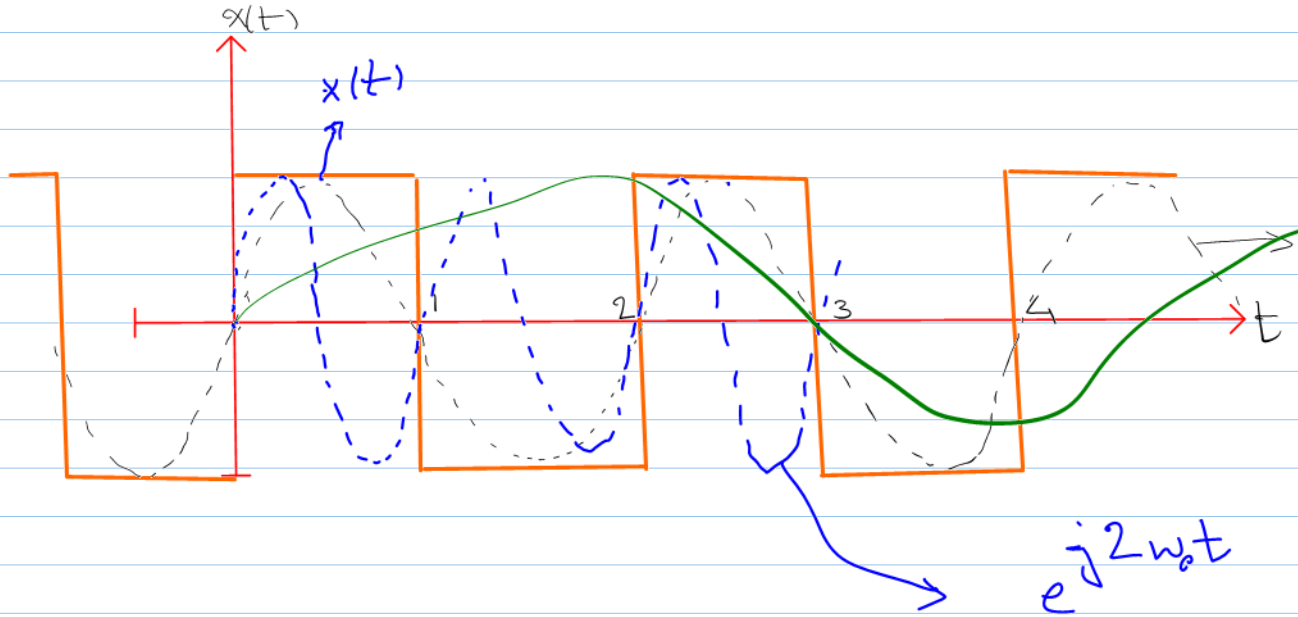
e^{jat} → $y(t) = e^{jat} H(ja)$

$x(t)$ → $e^{j\omega t}$ سیناریا از

$x(t)$ → e^{j2t}, $e^{j\pi t}$, ?, ⋮

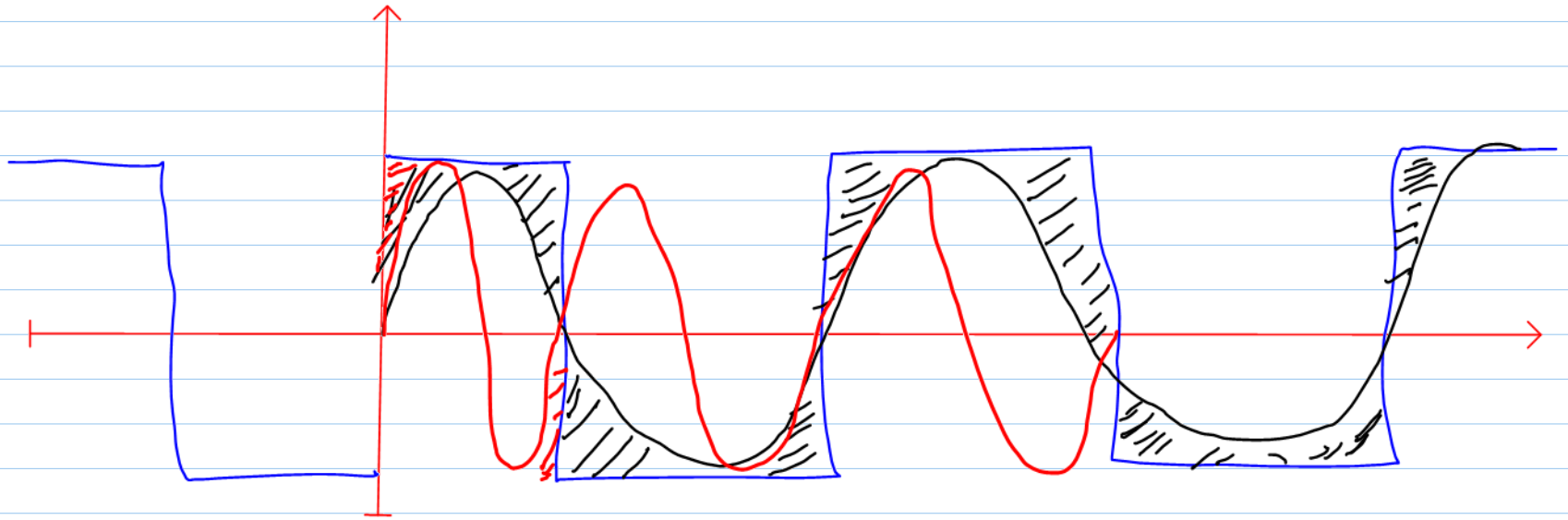


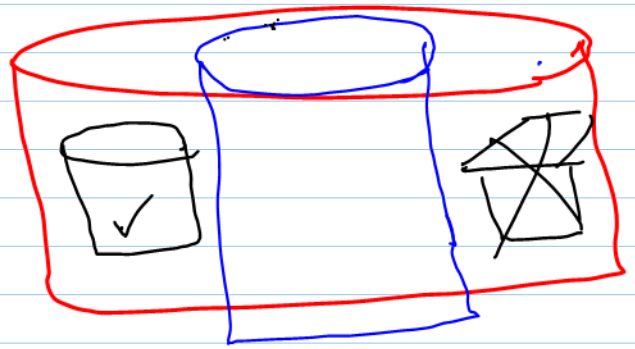




$w_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$x(t) =$ e^{jwt} مضاربی از





اگر $x(t)$ متناوب باشد شبیه ترین قالب آن $e^{j\omega_0 t}$ است که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

T_0 = دوره تناوب $x(t)$

$x(t), T_0 \longrightarrow \square e^{j\omega_0 t} + \square e^{j2\omega_0 t} + \square e^{j3\omega_0 t} + \cdots$

$x(t) = \textcircled{2} e^{j\omega_0 t} + \textcircled{3} e^{j2\omega_0 t} + \textcircled{4} e^{j5\omega_0 t}$

منزایب سری فوریه

$$\langle x(t), e^{j\omega_0 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \text{منزایب } e^{j\omega_0 t}$$

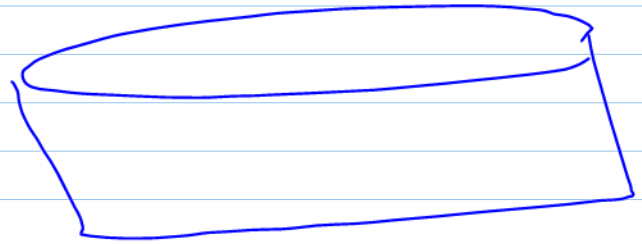
$$\langle x(t), e^{j3\omega_0 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j3\omega_0 t} dt = e^{j3\omega_0 t} \text{ منزایب}$$

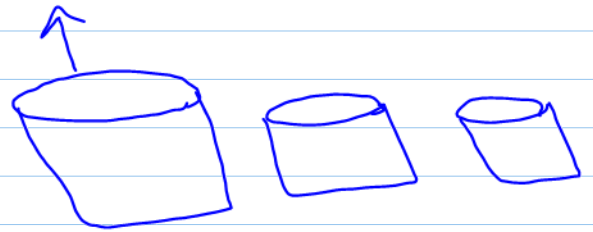
$$\vdots$$

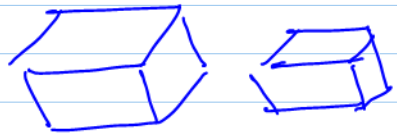
$$\langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$k = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}$ $e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$







تعریف سری فوریه: یعنی $x(t)$ (یا $x[n]$) را به صورت جمعی از $e^{jk\omega_0 t}$ یا $e^{jk\omega_0 n}$ ها تقریب بزنیم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightsquigarrow \text{دوره تناوب } x(t)$$

a_k : وزن فرکانس $k\omega_0$ در $x(t)$ = ضریب k ام سری فوریه

ضریب $e^{jk\omega_0 t}$ ، وزن هارمونیک k ام

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, dt = \text{میانگین } x(t)$$

مقدار dc سیگنال $x(t)$

$x(t)$, $T_0 = 2$ $\longrightarrow$ $a_k = \frac{2k}{k+1}$

وزن هارمونیک $\underline{3}$ ام (k) $x(t)$ ؟ $= a_3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

فرکانس اصلی $x(t)$ ؟ $= \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

وزن فرکانس $\omega = 2$ در $x(t)$ ؟ $= 0$

وزن فرکانس $10\omega_0$ در $x(t)$ چقدر است؟ $a_{10} = ?$

اگر $x(t)$ متناوب باشد تنها شامل مضارب صحیح از ω_0 می‌شود.

نحوه محاسبه سری فوریه:

حالت اول: $x(t)$ به صورت ترکیبی از $\sin$ ، $\cos$ ، e^{jat} باشد.

$$x(t) = \underbrace{\sin(4t)}_{\frac{2\pi}{4}} + \underbrace{\sin(2t)}_{\frac{2\pi}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$\omega_0 = ?$

$$T_{0x} = \text{ک.م.م}\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\} = \pi \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkx2t} \qquad 4 = 2 \times \omega_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j4t} - \frac{1}{2j} e^{-j4t} + \frac{1}{2j} e^{j2t} - \frac{1}{2j} e^{-j2t}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2j} e^{j2\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{j(-2\omega_0)t} + \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{j(-1\omega_0)t} \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\times 2\, t} \end{cases}$$

روال تعیین a_k ها وقتی $x(t)$ سینوسی است:

① دوره تناوب $x(t)$ را حساب کنید. T_0

② فرکانس اصلی $x(t)$ را حساب کنید. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

③ عامل $\sin$ ، $\cos$ ، $e^{j\omega t}$ ها را طوری تغییر دهید که ضریب t در آنها برحسب مضرب صحیح از ω_0 نوشته شود.

④ عامل عبارتهای $x(t)$ را تبدیل به مجموعی از ضرایب $e^{jk\omega_0 t}$ بکنید.

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

⑤ در عبارت به دست آمده، ضریب a_k ها را تعیین کنید.

$$x(t) = \sin(2t) + \cos(3t)$$

① $T_0 =$ ک.م.م $\left\{ \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\} = 2\pi$

② $\omega_c = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \longrightarrow \omega_0 = 1$

③ $2 = 2 \times 1 = 2\omega_0 \qquad 3 = 3 \times 1 = 3\omega_0$

$$x(t) = \sin(2\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)$$

④ $$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j2\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{-j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j3\omega_0 t}$$

(5) $x(t) = \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_2} e^{j2\omega_0 t} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2j}\right)}_{a_{-2}} e^{j(-2\omega_0 t)} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_3} e^{j3\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-3}} e^{j(-3\omega_0 t)}$

$a_2 = \frac{1}{2j}$ $\quad a_{-2} = -\frac{1}{2j}$ $\quad a_3 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{-3} = \frac{1}{2}$

$a_0 , a_1 , a_{-1} , a_4 , a_{-4} \cdots = ?_0 = 0$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 2 \\ \frac{-1}{2j} & k = -2 \\ \frac{1}{2} & k = 3, -3 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$x(t) = 1 + \sin(2t)\cos(2t)$$

$$\sin(2t)\cos(2t) = \frac{1}{2}\sin(4t)$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(4t)$$

① $T_0 =$ ك.م.م $\left\{ 1 \rightarrow$ [illegible], $\frac{2\pi}{4} \right\} = \frac{\pi}{2}$

② $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4$

③ $x(t) = 1 + \frac{1}{4}\sin(1\omega_0 t)$ $\qquad 4 = 1 \times 4 = 1 \times \omega_0$

④ $x(t) = e^{0} + \frac{1}{4}\sin(1\omega_0 t) \Rightarrow e^{jk\omega_0 t}$

$$x(t) = 1e^{j0\times\omega_0 t} + \frac{1}{8j}e^{j1\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{8j}\right)e^{j(-1\omega_0 t)}$$

(5) $a_0 = 1$ $\quad a_1 = \frac{1}{8j}$ $\quad a_{-1} = -\frac{1}{8j}$

$$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{1}{8j} & k = 1 \\ -\frac{1}{8j} & k = -1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x(t) = 2 + \sin\left(1t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

(1) $T_0 = \text{l.c.m}\left\{2, \frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}\right\} = 2\pi$

(2) $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1 \longrightarrow w_c = 1$

③ $1 = 1 \times \underbrace{1}_{\omega_1} = 1 \times \omega_0 = 1\omega_0$ $\qquad 2 = 2 \times \underbrace{1}_{\omega_2} = 2\omega_0$

$$x(t) = 2 + \sin(1\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + \cos(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$$

④ $x(t) \longrightarrow e^{jk\omega_0 t}$ $\qquad e^{jk\omega_0 t}$

$$x(t) = 2e^{j0\times\omega_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j(1\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} - \frac{1}{2j}e^{j(-1\omega_0 t - \frac{\pi}{4})}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{j(2\omega_0 t - \pi/4)} + \frac{1}{2}e^{j(-2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})}$$

باید $x(t)$ به صورت مجموعی از $e^{jk\omega_0 t}$ نوشته شود.

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{j(1\omega_0 t + \pi/4)} = e^{j1\omega_0 t} e^{j\pi/4}$$

عدد

$$x(t) = 2e^{j0\times w_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j1w_0t} + \left(-\frac{1}{2j}\right)e^{-j\pi/4}e^{j(-1w_0t)}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{j(2w_0t)} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j(-2w_0t)}$$

(5) $a_0 = 2$ $\quad a_1 = \frac{1}{2j}e^{j\pi/4}$ $\quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4}$

$a_2 = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$ $\quad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$

$$a_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ \frac{1}{2j}e^{j\pi/4} & k=1 \\ -\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4} & k=-1 \\ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} & k=2 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4} & k=-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

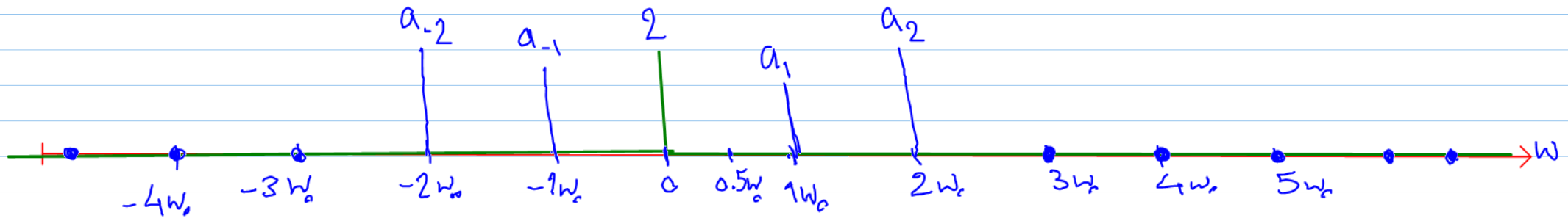
مقدار dc سیگنال $x(t)$ $= a_0 = 2$

وزن هارمونیک 3ام $= a_3 = 0$

وزن هارمونیک اصلی $= a_1 \Leftarrow 1w_0$ $= \frac{1}{2j} e^{j\pi/4}$

وزن کسینوسی $= 2w_0$ $= a_2 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$

وزن کسینوسی مثلث در $x(t)$



جلسه آینده ← حل مثال و حالت کسته

جلسه ۲۶ سیگنال

«سری فوریه»

برای انتقال سیگنالهای متناوب به حوزه فرکانس ← سری فوریه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ فرکانس اصلی $x(t)$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$\langle T_0 \rangle \Rightarrow \begin{cases} -\frac{T_0}{2} \to \frac{T_0}{2} \\ 0 \to T_0 \\ \vdots \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt$$

a_k : وزن فرکانس $k\omega_0$ در سیگنال $x(t)$ ، وزن هارمونیک kام

a_0 : مقدار dc سیگنال

حالت اول: $x(t)$ فقط شامل سینوس، کسینوس، sin، cos، $e^{j\omega t}$ باشد.

① T_0 ② $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ③ مضایب t در $x(t)$ را برحسب ω_0 بنویسیم

④ تبدیل به فرم نمایی ⑤ تعیین a_k ها

$$x(t) = 2\sin(3t) + \cos(3t) + \cos(4t)$$

$$T_0 = \text{م.م.ک}\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}\right\} = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \qquad 3 = 3\times 1 = 3\times\omega_0$$

$$x(t) = 2\sin(3\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t) + \cos(4\omega_0 t)$$

$$x(t) = 2\left(\frac{1}{2j}e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\omega_0 t}\right) + \frac{1}{2}e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j4\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j4\omega_0 t}$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{j} e^{j3w_0 t} + \frac{1}{2} e^{j3w_0 t}\right) + \left(\frac{-1}{j} e^{-j3w_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j3w_0 t}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{j4w_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j4w_0 t}$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\right) e^{j3w_0 t} + \left(\frac{-1}{j} + \frac{1}{2}\right) e^{-j3w_0 t} + \frac{1}{2} e^{j4w_0 t}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-j4w_0 t}$$

$$a_3 = \frac{1}{j} + \frac{1}{2} \quad , \quad a_{-3} = \frac{-1}{j} + \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_{-4} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{j} + \frac{1}{2} & k = 3 \\ -\frac{1}{j} + \frac{1}{2} & k = -3 \\ \frac{1}{2} & k = 4, -4 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

سری فوریه زمان گسسته:

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk w_0 n} \\ a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk w_0 n} \end{cases}$$

N_0 = دوره تناوب $x[n]$

نکته خیلی مهم: ضرایب سری فوریه سیگنال زمان گسسته متناوب با دوره تناوب $x[n]$ ، N_0 است.

$$a_k = a_{k+mN_0}$$

m = عدد صحیح

حالت اول زمانی گسسته: $x[n]$ شامل عدد، sin، cos و $e^{}$ باشد.

$$x[n] = 2 + e^{j3\pi n}$$

① $N_0 =$ ک.م.م $\{1, \frac{2\pi}{3\pi}\} = 2$

$$e^{j3\pi n} \rightarrow N = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{N = 2}$$

② $w_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

③ $x[n] = 2 + e^{j3w_0 n}$

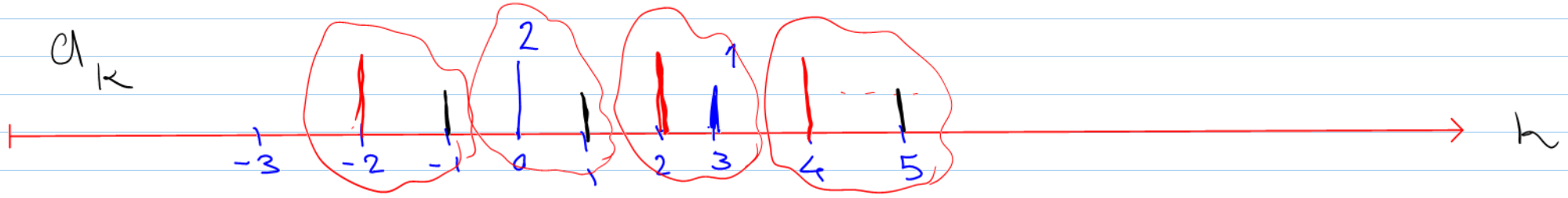
④ $x[n] = 2e^{j\omega_0 n} + 1e^{j3\omega_0 n}$

$a_0 = 2 \qquad a_3 = 1$

$$a_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ 1 & k=3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

در گسسته از قاعده زیر استفاده می‌کنیم

a_k با ضابطه $a_k = a_{k+mN_0}$ متناوب با 2



$a_0 = a_{0+m\times 2}$ $\quad m =$ [illegible]

$2 = a_0 = a_{0+1\times 2} = a_2$ $\qquad 1 = a_3 = a_{3+1\times 2} = a_5$

$a_0 = a_{0+2\times 2} = a_4$ $\qquad a_3 = a_3 + -1\times 2 = a_1$

$a_0 = a_{0+(-1)\times 2} = a_{-2}$ $\qquad a_3 = a_{3+\ -2\times 2} = a_{-1}$

$a_0 = a_{0+\ -2\times 2} = a_{-4}$

$\vdots$

$$a_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ 1 & k=1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \underbrace{a_k = a_{k+m\times 2}}$$

قاعده یافتن a_k ها در حالت اول گسسته:

① N_0 را تعیین کنید.

② $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

③ در $x[n]$، ضریب nها را برحسب ω_0 بنویسید (مضربی از ω_0)

④ $x[n]$ را به صورت تابعی بنویسید.

⑤ a_kهای موجود در $x[n]$ را بیابید.

⑥ سعی کنید در یک دوره تناوب a_kها را با استفاده از سایر موجود بیابید کنید.

$$x[n] = \sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

① $N_0 = ?$

$\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3} \rightarrow 4$ $\qquad$ $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ ✓

$N_0 = \text{ک.م.م}\{4, 4\} = 4$

② $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

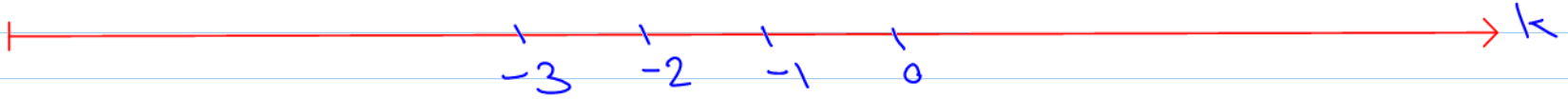
③ $x[n] = \sin(3\omega_0 n) + \cos(\omega_0 n)$

④ $x[n] = \frac{1}{2j} e^{j3\omega_0 n} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{j-3\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j-\omega_0 n}$

⑤ $a_3 = \frac{1}{2j}$ $\quad a_{-3} = -\frac{1}{2j}$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{-1} = \frac{1}{2}$

⑥ کوچکترین k ها جود این a_k ها بیشتر کنید ← -3

بیایید به طول $N_0 = 4$ از $k=-3$ بیشتر کنید.



a_k ها را به ازای اعداد داخل بازه با استفاده از a_k های موجود بیشتر کنید.

$$\begin{cases} a_{-3} = -\frac{1}{2j} \\ a_{-2} = ? \\ a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_0 = ? \end{cases}$$

$$a_k = a_{k+m\times 4}$$

$$a_{-2} = a_{\bigcirc + \bigcirc \times 4}$$

$3, -3, 1, -1$

باید از بین a_kهای موجود باشد.

باید عدد صحیح باشد.

$$a_{-2} = \begin{cases} a_{3+\bigcirc\times 4} \\ a_{-3+\bigcirc\times 4} \\ a_{-1+\bigcirc\times 4} \\ a_{1+\bigcirc\times 4} \end{cases}$$

$3 + m\times 4 = -2 \rightarrow m = \frac{-5}{4}$ ✗

$-3 + m\times 4 = -2 \rightarrow m = \frac{1}{4}$

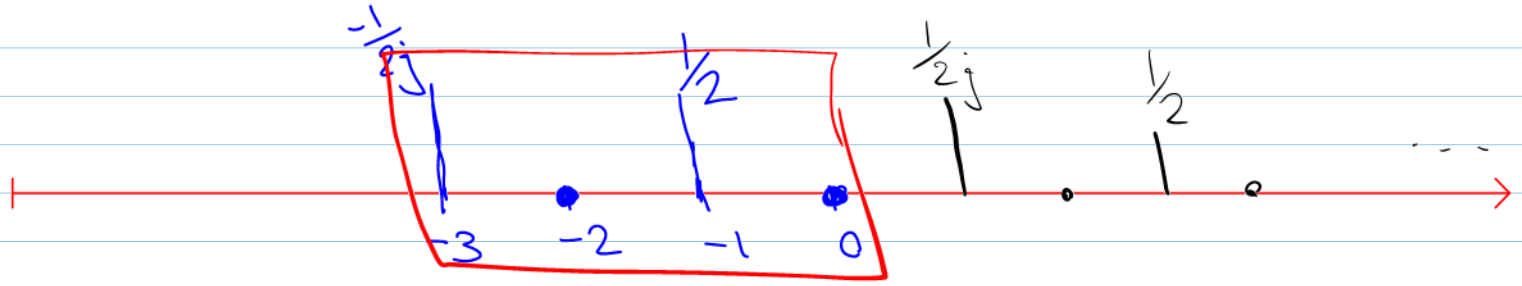
$-1 + m\times 4 = -2 \rightarrow m = -\frac{1}{4}$

$1 + m\times 4 = -2 \rightarrow m = -\frac{3}{4}$

چون در هیچ حالتی m عدد صحیح بدست نیامد پس $a_{-2}=0$ است.

$$a_0 = a_{1+m\times 4} \rightarrow a_0 = \begin{cases} a_{3+m\times 4} & m=-3/4 \\ a_{-3+m\times 4} & m=3/4 \\ a_{1+m\times 4} & m=-1/4 \\ a_{-1+m\times 4} & m=+1/4 \end{cases}$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$



$$a_k = \begin{cases} \frac{-1}{2j} & k=-3 \\ 0 & k=-2 \\ \frac{1}{2} & k=-1 \\ 0 & k=0 \end{cases}$$

$$a_k = a_{k+m\times 4}$$

$x[n] = (-1)^n \rightarrow$ a_0, a_1 ؟

$x[n] = e^{j\pi n}$

① $N_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

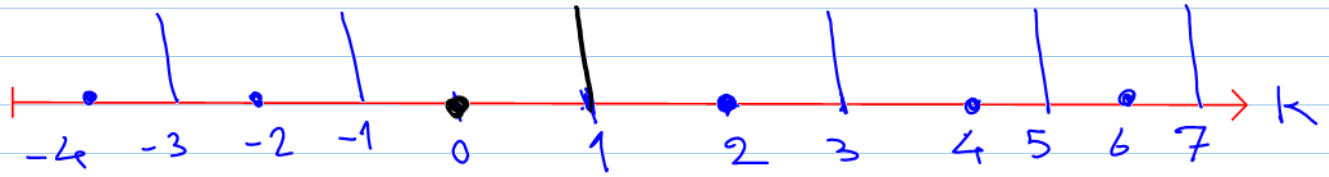
② $w_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

③ $x[n] = 1e^{jw_0 n}$

④ ✓

⑤ $a_1 = 1$

⑥ $a_k = ?$



$a_1 = 1$

$a_0 = a_{1+m\times 2} \longrightarrow a = 1 + m\times 2 \longrightarrow m = -1/2$

$a_0 = 0$

برق ۸۱

۷- کدام گزینه بیان کننده ضرائب سری فوریه برای سیگنال گسسته $x[n] = \sin\left(\frac{۲\pi n}{۳}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{۲}\right)$ می‌باشد؟

۱) $a_۱ = -\frac{۱}{۴j}, a_۵ = +\frac{۱}{۴j}, a_۷ = \frac{۱}{۲j}, a_{۱۱} = -\frac{۱}{۲j}$

۲) $a_۱ = \frac{۱}{۲j}, a_۵ = -\frac{۱}{۲j}, a_۷ = \frac{۱}{۲j}, a_{۱۱} = -\frac{۱}{۲j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۳) $a_۱ = \frac{۱}{۲j}, a_۵ = -\frac{۱}{۲j}, a_۷ = \frac{۱}{۲j}, a_{۱۱} = -\frac{۱}{۲j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

۴) $a_۱ = -\frac{۱}{۴j}, a_۵ = \frac{۱}{۴j}, a_۷ = -\frac{۱}{۴j}, a_{۱۱} = \frac{۱}{۲j}$ و بقیه ضرایب در یک پریود صفر می‌باشند.

تکنیو سوال.

$x[n] = \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{۲}n\right) \longrightarrow a_k$

$y(t) = \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{۲}t\right) \longrightarrow b_k$

؟ $a_{۱۱}$ ، $a_۷$ ، $a_۵$ ، $a_۱$

؟ $b_{۱۱}$ ، $b_۷$ ، $b_۵$ ، $b_۱$

$$y(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad b_1, b_5, b_7, b_{11} = ?$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{6}t\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

① $T_0 = ?$ $\qquad \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{6}} = \frac{12}{7} \qquad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ ✓

$$T_0 = \text{p.p.c} \left\{\frac{12}{7}, 12\right\} = 12$$

② $$\omega_0 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

③ $$y(t) = \frac{1}{2}\sin(7\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t)$$

④ $$y(t) = \frac{1}{4j}e^{j7\omega_0 t} - \frac{1}{4j}e^{j-7\omega_0 t} + \frac{1}{4j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4j}e^{j-\omega_0 t}$$

(5) $a_7 = \frac{1}{4j}$ $a_{-7} = -\frac{1}{4j}$ $a_1 = \frac{1}{4j}$ $a_{-1} = -\frac{1}{4j}$

$$b_k = a_k = \begin{cases} \frac{1}{4j} & k = 7 \\ -\frac{1}{4j} & k = -7 \\ \frac{1}{4j} & k = 1 \\ -\frac{1}{4j} & k = -1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$\leftarrow b_{11}, b_5, b_7, b_1$

$b_1 = \frac{1}{4j}$ $b_7 = \frac{1}{4j}$ $b_5 = 0$ $b_{11} = 0$

$$x[n] = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{6}n\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)$$

$$\frac{2\pi}{\frac{7\pi}{6}} = \frac{12}{7} \rightarrow (12) \qquad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \checkmark$$

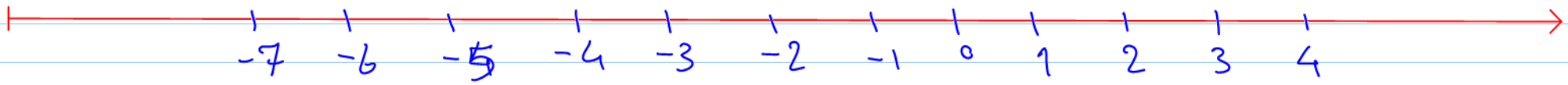
① $N_0 = \text{gcd}\{12, 12\} = 12$

② $\omega_0 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

③ $x[n] = \frac{1}{2}\sin(7\omega_0 n) + \frac{1}{2}\sin(\omega_0 n)$

④ $x[n] = \frac{1}{4j}e^{j7\omega_0 n} - \frac{1}{4j}e^{j-7\omega_0 n} + \frac{1}{4j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{4j}e^{j-\omega_0 n}$

$$a_7 = \frac{1}{4j} \qquad a_{-7} = -\frac{1}{4j} \qquad a_1 = \frac{1}{4j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{4j}$$



$$a_{-7} = \frac{1}{4j}$$

$$a_{-6} = \begin{cases} a_{-7+m\times 12} \rightarrow m = -\frac{13}{12} \text{ X} \\ a_{1+m\times 12} \rightarrow m = -\frac{7}{12} \text{ X} \\ a_{-1+m\times 12} \rightarrow m = -\frac{5}{12} \text{ X} \\ a_{-7+m\times 12} \rightarrow m = \frac{1}{12} \text{ X} \end{cases}$$

$$a_{-6} = 0$$

$$a_{-5} = \begin{cases} a_{7+m\times 12} \longrightarrow m=-1 \checkmark \end{cases}$$

$$a_{-5} = a_7 = -\frac{1}{4j}$$

$$a_{-4} = \begin{cases} a_{7+m\times 12} \longrightarrow m = -\frac{11}{12} \times \\ a_{1+m\times 12} \longrightarrow m = -\frac{5}{12} \times \\ a_{-1+m\times 12} \longrightarrow m = -\frac{3}{12} \times \\ a_{-7+m\times 12} \longrightarrow m = +\frac{3}{12} \times \end{cases}$$

$$a_{-4} = 0$$

a_k ها در طول دوره تناوب تولید شدند.

$$a_k = \begin{cases} \frac{-1}{4j} & k = -7 \\ \frac{1}{4j} & k = -5 \\ -\frac{1}{4j} & k = -1 \\ \frac{1}{4j} & k = 1 \\ 0 & \text{else} \rightarrow k = -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4 \end{cases}$$

در یک دوره تناوب،

$-7 \leq k \leq 4$

$$a_k = a_{k+12\times m}$$

راه حل سخت: دوگسسته‌ها پس از یافتن a_kهای موجود، هر a_kای را خواسته است را سعی می‌کنیم از رابطه $a_k = a_{k+m\times N_0}$ بدست آوریم.

اگر از همگرام بدست‌آمده حاصل a_k خواسته شده مزات

$$x[n] = \frac{1}{4j} e^{j7w_0 n} - \frac{1}{4j} e^{j-7w_0 n} + \frac{1}{4j} e^{jw_0 n} - \frac{1}{4j} e^{-jw_0 n}$$

$$a_7 = \frac{1}{4j} \qquad a_{-7} = -\frac{1}{4j} \qquad a_1 = \frac{1}{4j} \qquad a_{-1} = -\frac{1}{4j}$$

P: a_{11} , a_7 , a_5 , a_1

$$a_1 = \frac{1}{4j}$$

$$a_5 = \begin{cases} a_{7+m\times 12} \rightarrow & 5 = 7 + m\times 12 \rightarrow m = -1/6 \times \\ a_{-7+m\times 12} \rightarrow & m = \frac{12}{12} = 1 \checkmark \rightarrow a_5 = a_{-7} = -\frac{1}{4j} \end{cases}$$

$$a_7 = \frac{1}{4j}$$

$$a_{11} = \begin{cases} a_{7+m\times 12} \rightarrow m = -\frac{4}{12} \times \\ a_{-7+m\times 12} \rightarrow m = \frac{18}{12} \times \\ a_{1+m\times 12} \rightarrow m = \frac{10}{12} \times \end{cases}$$

$$a_{-1+m\times 12} \rightarrow m = \frac{12}{12} = 1 \checkmark \rightarrow a_{11} = a_{-1} = -\frac{1}{4j}$$

$$a_1 = \frac{1}{4j} \qquad a_7 = \frac{1}{4j} \qquad a_{11} = \frac{-1}{4j} \qquad a_5 = -\frac{1}{4j}$$

خلاصه:

در حالت $x(t)$ ← پس از یافتن ضرایب موجود ، بقیه ضرایب صفر هستند.

$$b_7 = \frac{1}{4j} \quad b_{-7} = -\frac{1}{4j} \quad b_1 = \frac{1}{4j} \quad b_{-1} = -\frac{1}{4j}$$

$$b_5 = b_{11} = 0$$

بقیه b_k ها صفر هستند.

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{4j} & k = 7, 1 \\ \frac{-1}{4j} & k = -7, -1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

در حالت $x[n]$ ، پس از یافتن a_kهای موجود ، a_k های خواسته شده را

سعی می‌کنیم از رابطه $a_{\text{خواسته شده}} = a_{\text{موجود}} \times N_0$ بدست آوریم . در هرکدام از a_kهای

m عدد صحیح بدست آمد $\Rightarrow$ a موجود $=$ a خواسته است.

اگر بازای هیچ کدام از a_k های موجود، m عدد صحیح بدست نیاید

$0 =$ خواسته a است.

مثال: اگر $x[n] = \cos(\frac{\pi}{3}n)$ باشد و a_k ها ضرایب سری فوریه آن،

و $y(t) = \cos(\frac{\pi}{3}t)$ و b_k ضرایب سری فوریه آن،

؟ a_{59} ، a_{101} ، a_0

؟ b_{59} ، b_{101} ، b_0

$y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ $\quad b_0, b_{101}, b_{59} = ?$

① $T_0 = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$ ② $\omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

③ $y(t) = \cos(\omega_0 t)$ ④ $y(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j-\omega_0 t}$

⑤ $b_1 = \frac{1}{2}$ $\quad b_{-1} = \frac{1}{2}$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 1, -1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$b_0 = b_{59} = b_{101} = 0$

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ ① $N_0 = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$

② $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$ ③ $x[n] = \cos(\omega_0 n)$

④ $x[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j-\omega_0 n}$

⑤ $a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{-1} = \frac{1}{2}$

$$a_0 = \begin{cases} a_{1+m\times 6} \rightarrow m = -\frac{1}{6} \times \\ \qquad\qquad \rightarrow a_0 = 0 \\ a_{-1+m\times 6} \rightarrow m = \frac{1}{6} \times \end{cases}$$

$$a_{101} = \begin{cases} a_{1+m\times 6} \rightarrow m = \frac{100}{6} \times \\ a_{-1+m\times 6} \rightarrow m = \frac{102}{6} = \frac{51}{3} = 17 \checkmark \end{cases}$$

$$a_{101} = a_{-1} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$a_{59} = \begin{cases} a_{1+m\times 6} \rightarrow m = \frac{58}{6} \times \\ a_{-1+m\times 6} \rightarrow m = 10 \checkmark \rightarrow a_{59} = a_{-1} = 1/2 \end{cases}$$

جلسه ۲۷ سیگنال

سری فوریه.

سال ۹۵ برق ۸۷.

اگر a_k ضرایب سری فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n] = \cos(\frac{n-2}{3}\pi) + (-1)^n$ باشد، a_{11} کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ ۴) $\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$

$$x[n] = \cos\left(\frac{n-2}{3}\pi\right) + (-1)^n \qquad a_{11} = ?$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{n-2}{3}\pi\right) + e^{j\pi n}$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{2\pi}{3}\right) + e^{j\pi n}$$

مثال اول است.

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ ✓ $\qquad \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ✓

① $N_0 = ?$

$$N_0 = \text{ک.م.م}\{6, 2\} = 6$$

② $$w_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

می‌توان به جای گام ① و ② مستقیماً w_0 را حساب کرد.

$$w_0 = \text{ب.م.م}\{\text{مزایب } n \text{ ها}\} = \text{ب.م.م}\left\{\frac{\pi}{3}, \pi\right\} = \frac{\pi}{3}$$

③ $$x[n] = \cos\left(w_0 n - \frac{2\pi}{3}\right) + e^{j3w_0 n}$$

④ $x[n] = \frac{1}{2} e^{j(w_0 n - \frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{2} e^{-j(w_0 n - \frac{2\pi}{3})} + e^{j3w_0 n}$

$x[n]$ را به صورت مجموع توابع $e^{jkw_0 n}$ بنویسیم.

$$e^{j(w_0 n - \frac{2\pi}{3})} = e^{jw_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$e^{-j(w_0 n - \frac{2\pi}{3})} = e^{-jw_0 n} e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{jw_0 n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{j(-w_0 n)} + 1\, e^{j3w_0 n}$$

⑤ $a_1 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ $\quad a_{-1} = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}$ $\quad a_3 = 1$

$a_{11} = a_{\text{باقیمانده } 11 \div 6}$ $\rightarrow$ $m =$ خارج قسمت $\rightarrow$ $a_{11} = a_{\text{باقیمانده}}$

$a_{11} = a_{1+m\times 6} \longrightarrow 11 = 1 + m\times 6 \longrightarrow m = \frac{10}{6}$ ✗

$a_{11} = a_{-1+m\times 6} \longrightarrow 11 = -1 + m\times 6 \longrightarrow m = 2$ ✓ $\rightarrow a_{11} = a_{-1} = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}$

حالت دوم محاسبه سری فوریه: اگر حالت اول نباشد.

در حالت دوم a_k ها از رابطه تعریف سری فوریه محاسبه می‌شود.

در پیوسته: $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}$

در گسسته: $a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$

مثال ۱:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty} \delta(t - mT_1)$$

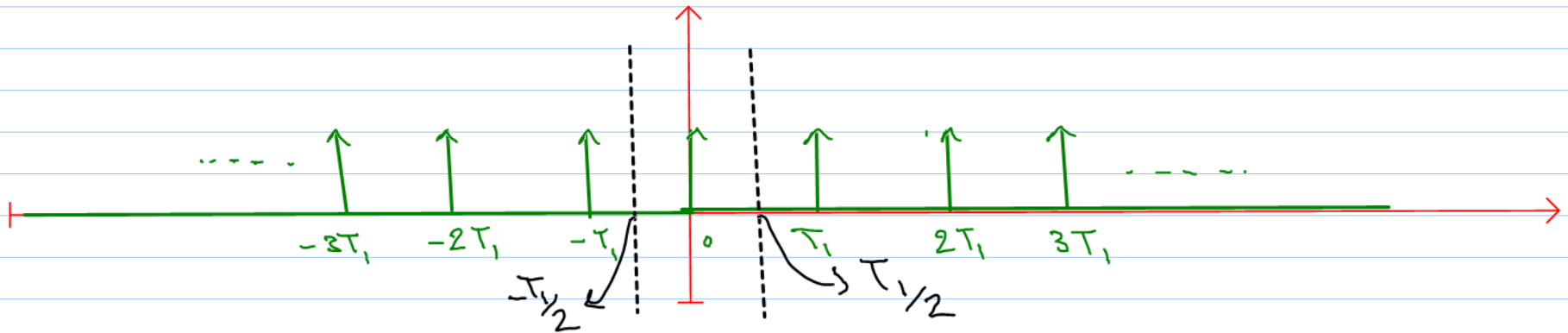
① $x(t)$ دوره تناوبی $T_0 = T_1$ ② $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$

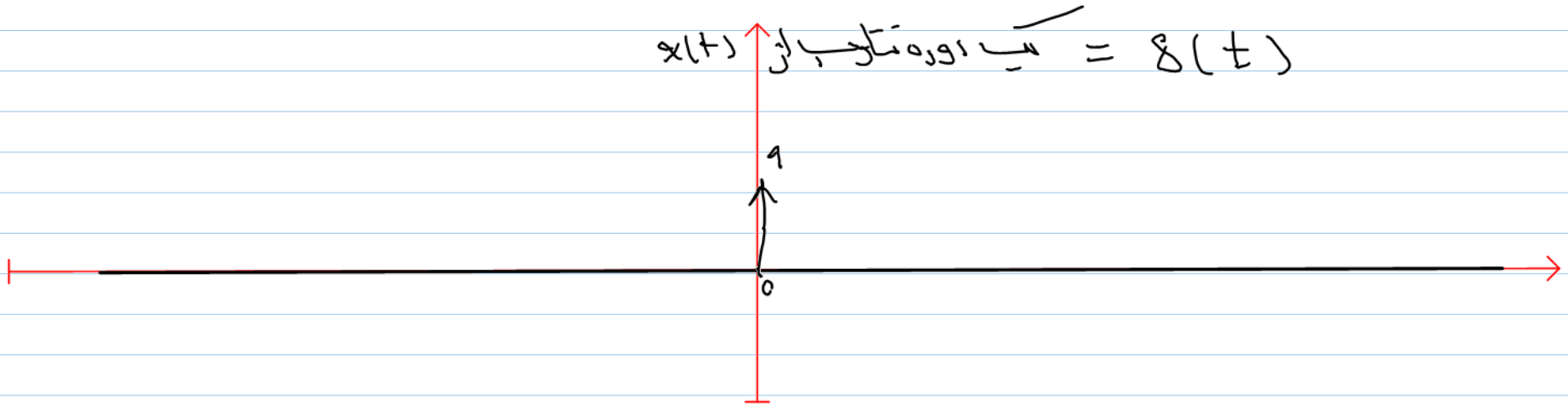
③ $$a_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$x(t)$ در یک دوره تناوب از $-\frac{T_1}{2} \to \frac{T_1}{2}$

$$x(t) = \delta(t) + \delta(t - T_1) + \delta(t - 2T_1) + \cdots$$

$$+ \delta(t + T_1) + \delta(t + 2T_1) + \cdots$$





یک دوره متناوب از $\delta(t)$ =

$$a_k = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad \overset{t=0}{\longrightarrow} \quad = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 \times 0}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T_1} \times 1 = \frac{1}{T_1}$$

یعنی وزن تمام توابع نمایی مختلط با $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ برابر با $\frac{1}{T_1}$ است.

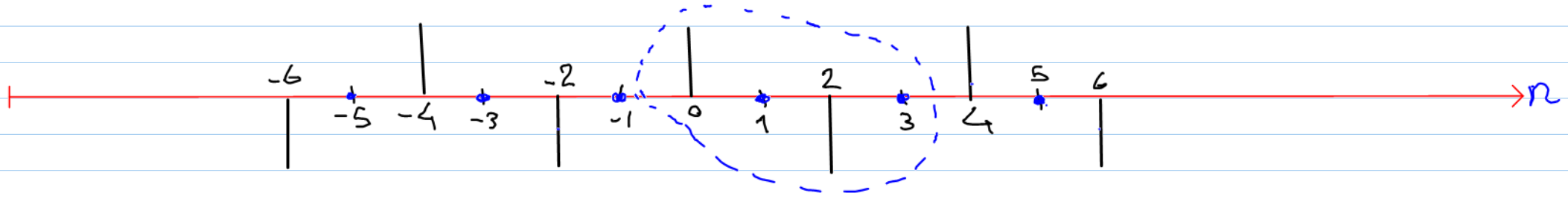
$$* \; x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_1) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T_1} \quad *$$

$$* \; x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN_1] \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{N} \quad *$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta[n - m\times 2]$$

① $$x[n] = \delta[n] + (-1)\delta[n-2] + \delta[n-4] + (-1)\delta[n-6] + \cdots$$

$$+ (-1)\delta[n+2] + \delta[n+4] + (-1)\delta[n+6] + \cdots$$



$$N_0 = 4$$

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta[n-2m] \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, z[n - m \times N_0]$$

$f(m)$ ← m_0 , N_0 ← $z[n - m \times N_0]$

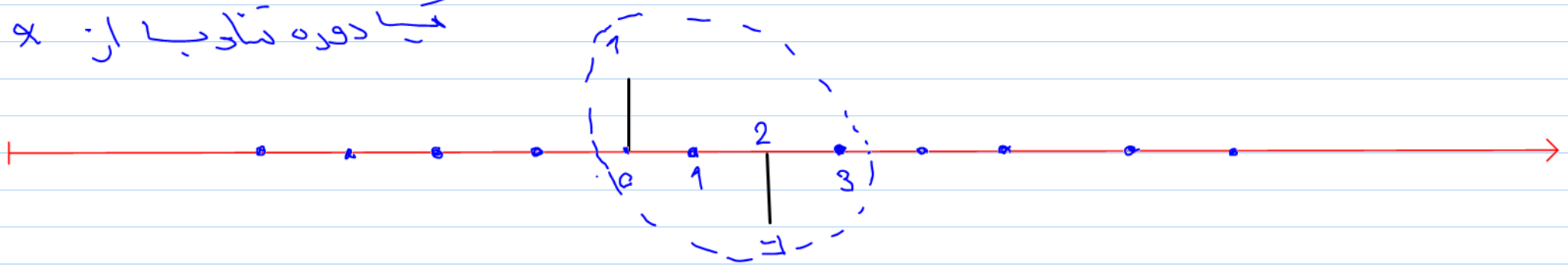
$$N_0 = 2 \times 2 = 4$$

② $$\omega_c = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

③ $$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=\langle 4 \rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

$x[n]$ را با یک دوره تناوب x جایگزین می‌کنیم.

یک دوره تناوب از x



$$x[n] = 1\,\delta[n-0] + -1\,\delta[n-2] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

$$a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} (\delta[n] - \delta[n-2]) e^{-jk w_0 n}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \delta[n] e^{-jk w_0 n} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \delta[n-2] e^{-jk w_0 n}$$

$n=0$ $\qquad$ $n=2$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \delta[n] - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} \delta[n-2] e^{-jk w_0 \times 2}$$

$$a_k = \frac{1}{4} \times 1 - \frac{1}{4} e^{-jk w_0 \times 2} \times 1$$

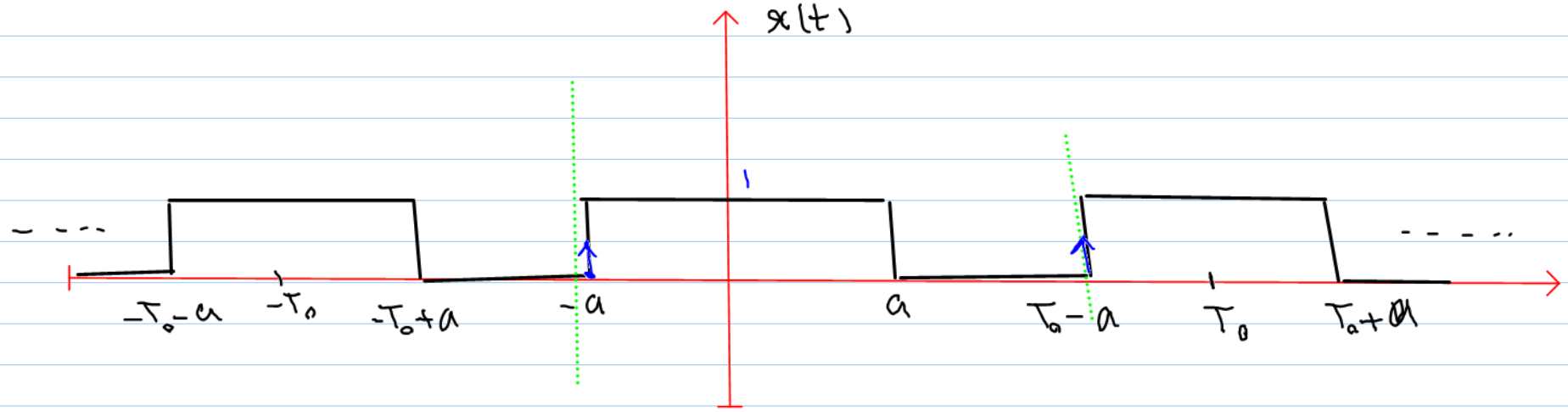
$$a_k = \frac{1}{4} \left(1 - e^{-jk \pi \times 2} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^k \right)$$

$\pi = w_0 \times 2$

$* x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta[n - m \times b] \longrightarrow a_k = \frac{1}{2b} \left(1 - (-1)^k \right) *$

* $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(t - mxb) \rightarrow a_k = \frac{1}{2b}(1-(-1)^k)$ * تمرین

مثال. ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ رسم شده در شکل زیر را بدست آورید.



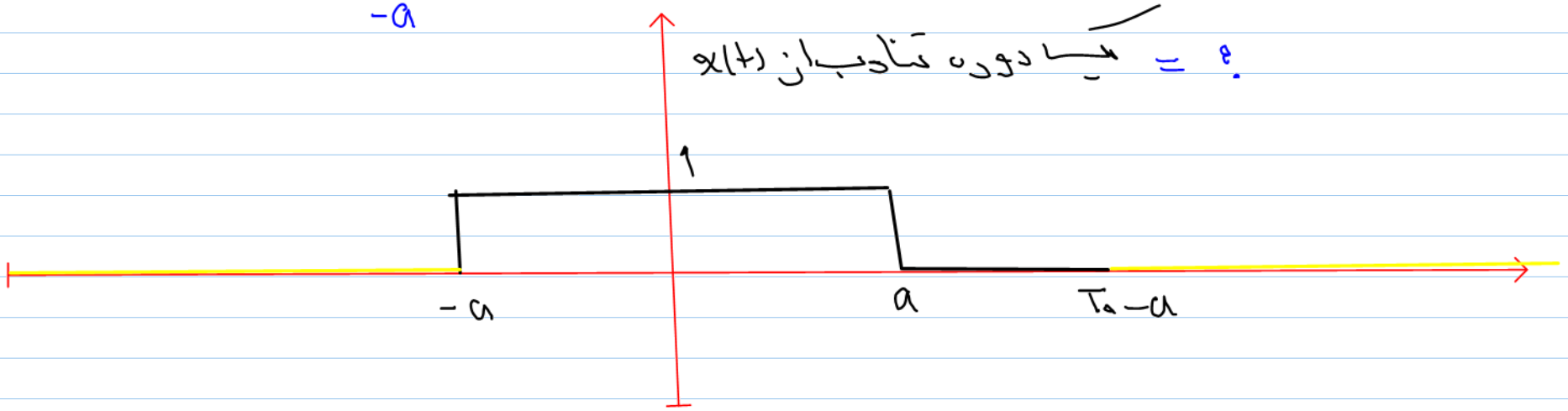
① $T_{0x} = ? = T_0 - a - (-a) = T_0$

② $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

③ $a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{T_0 - a} x(t)\, e^{-jk w_0 t}\, dt$$

$\tilde{x}(t)$ دوره تناوبی از $x(t)$ = ؟



$\tilde{x}$ دوره تناوبی از $= \Pi\left(\frac{t}{2a}\right)$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{a} \Pi\left(\frac{t}{2a}\right) e^{-jk w_0 t}\, dt$$

$-a \le t \le a$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{a} e^{-jk w_0 t}\, dt$$

$$\int_a^b e^{mt}\,dt = \frac{1}{m}\left(e^{bm} - e^{am}\right)$$ یادآوری

$$a_k = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0 a} - e^{jk\omega_0 a}\right)\right)$$

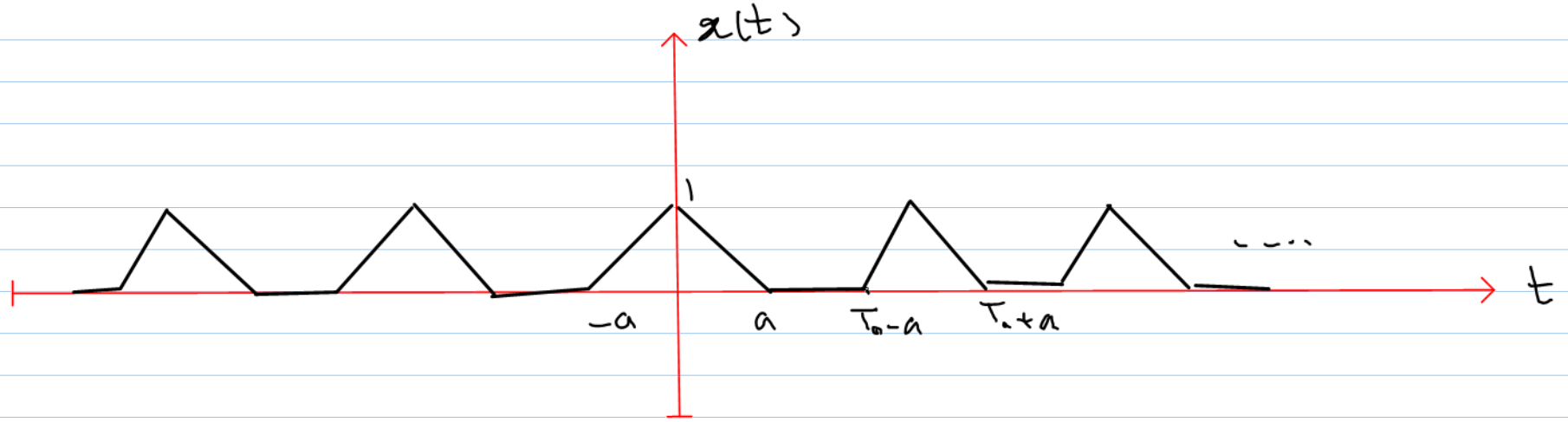
$$= \frac{1}{T_0}\,\frac{1}{k\omega_0}\,2x\left(\frac{e^{jk\omega_0 a} - e^{-jk\omega_0 a}}{2xj}\right) = \frac{2}{k\omega_0 T_0}\sin(k\omega_0 a)$$

$$= \frac{2}{k\times\frac{2\pi}{T_0}\times T_0}\sin\left(k\times\frac{2\pi}{T_0}a\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi ka}{T_0}\right)}{k\pi}$$

* $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2a}\right)$ ، T_0 بزرگ شود $\longrightarrow$ $a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 a)}{k\omega_0 T_0}$ *

تمرین : اثبات برای حالت گسسته

مثال: $x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{a}\right)$; دوره تناوب T_0



* $x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{a}\right)$, $T_0 \longrightarrow a_k = \left(\frac{2\sin\left(k w_0 \frac{a}{2}\right)}{k w_0 T_0}\right)^2$ * تمرین

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m \times T_1)$	$a_k = \frac{1}{T_1}$
$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - m \times T_1]$	$a_k = \frac{1}{T_1}$
$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(t - m \times T_1)$	$a_k = \frac{1}{2T_1}(1 - (-1)^k)$
$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta[n - m \times T_1]$	$a_k = \frac{1}{2T_1}(1 - (-1)^k)$
$x(t) = \Pi(\frac{t}{2a})$, T_0 بستگی دارد	$a_k = \frac{2 \sin(k w_0 a)}{k w_0 T_0}$
$x(t) = \Lambda(\frac{t}{a})$, T_0 بستگی دارد	$a_k = \left(\frac{2 \sin(k w_0 a/2)}{k w_0 T_0}\right)^2$

سوال: حدس؟

"جلسه ۲۸ سیگنال"

"سری فوریه"

برق ۸۹

۲۱ ـ $x[n]$ یک سیگنال گسسته زمان با دوره تناوب اساسی $N = 4$ و ضرائب سری فوریه a_k است. اگر یک دوره تناوب $x[n]$ به صورت زیر باشد کدام یک از گزینه‌ها صحیح خواهد بود؟

$$x[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ -1 & n=2\\ 0 & n=1,3\end{cases}$$

۱) $a_{-101}=0, a_{100}=0, a_{98}=\frac{1}{2}$

۲) $a_{-101}=0, a_{100}=\frac{1}{2}, a_{98}=0$

۳) $a_{-101}=0, a_{100}=\frac{1}{2}, a_{98}=\frac{1}{2}$

۴) $a_{-101}=0, a_{100}=0, a_{98}=\frac{1}{2}$

تعریف سری فوریه:

$$x[n] = \sum_{k=<N_0>} a_k e^{jk w_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n] e^{-jk w_0 n}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 2 \\ 0 & n = 1, 3 \end{cases} \qquad N_0 = 4 \qquad a_{100}, a_{98}, a_{-101} = ?$$

هرگاه یک a_k سخت را بخواهد ← در رابطه آن k را جایگذاری می‌کنیم.

بیش از یک ← ← ← ← ← a_k را در حالت کلی حساب می‌کنیم.

$a_{98} = ?$ $\qquad a_{98} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j98 w_0 n}$

$$a_{98} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j98 w_0 n}$$

$a_{98}, a_{100}, a_{-101} = ?$ $\qquad a_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk w_0 n}$

$$a_k = \frac{1}{4}\left(\cancel{x[0]}^{1} e^{0} + \cancel{x[1]}^{0} e^{-jk w_0 \times 1} + \cancel{x[2]}^{-1} e^{-jk w_0 \times 2} + \cancel{x[3]}^{0} e^{-jk w_0 3} \right)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left(1 + (-1) e^{-jk \frac{\pi}{2} \times 2} \right) = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-jk\pi} \right)$$

$$e^{-jk\pi} = (-1)^k$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left(1 - (-1)^k \right) \rightarrow \quad a_{100} = 0 \qquad a_{98} = 0$$

$$a_{-101} = \frac{1}{4}\left(1 - \cancel{(-1)^{-101}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \checkmark$$

برق ۹۱

۷۳- ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره‌ی تناوب ۶ را با α_k نشان می‌دهیم. از روی سیگنال $x[n]$ سیگنال $s(t)$ را به صورت $s(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta(t-2k)$ می‌سازیم. ضرایب سری فوریه‌ی $s(t)$، کدام است؟

۱) $6\alpha_k$

۲) $\frac{1}{6}\alpha_k$

۳) $\frac{1}{2}\alpha_k$

۴) $2\alpha_k$

$x[n]$ سیگنال ، $N_0 = 6 \longrightarrow a_k$

سیگنال $x[n]$ را روی ضربه‌ها بسط می‌دهیم: $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-2k)$

$s(t) \longrightarrow b_k = ?\ a_k$

$x[n]$, $N_0 = 6 \longrightarrow a_k$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=\langle 6 \rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}xn}$$

$$*a_k = \frac{1}{6}\left(x[0] + x[1]e^{-jk\frac{\pi}{3}} + x[2]e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + x[3]e^{-jk\pi} + x[4]e^{-jk\frac{4\pi}{3}} + x[5]e^{-jk\frac{5\pi}{3}} \right) * \text{ابهام ①}$$

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,\delta(t-2m) \longrightarrow b_k = ?$$

$T_0 = ?$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\,\delta(t - m \times T_1) \longrightarrow M_0 \times T_1$$

$f(m) \rightarrow M_0$

$M_0 =$ تعداد نمونه‌های x در یک پریود $= 6$ $\qquad T_1 = 2$

$$T_0 = 6 \times 2 = 12 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{6}$$

مرحله دوم:

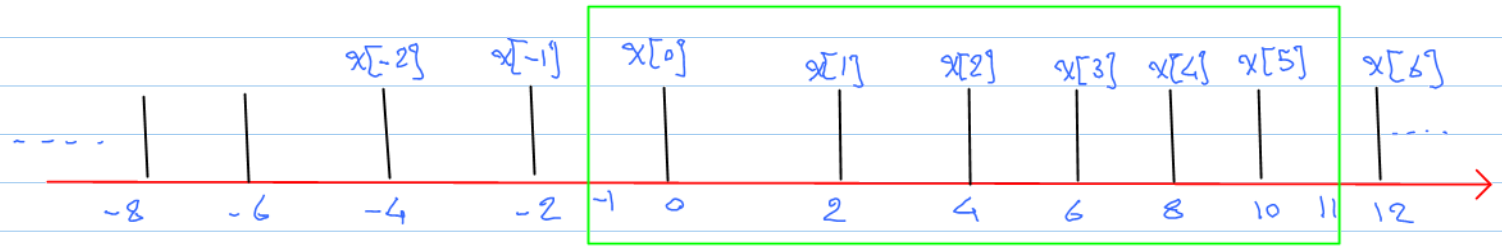
$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} s(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}t}\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{12} \int_{-1}^{11} s(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}t}\, dt$$

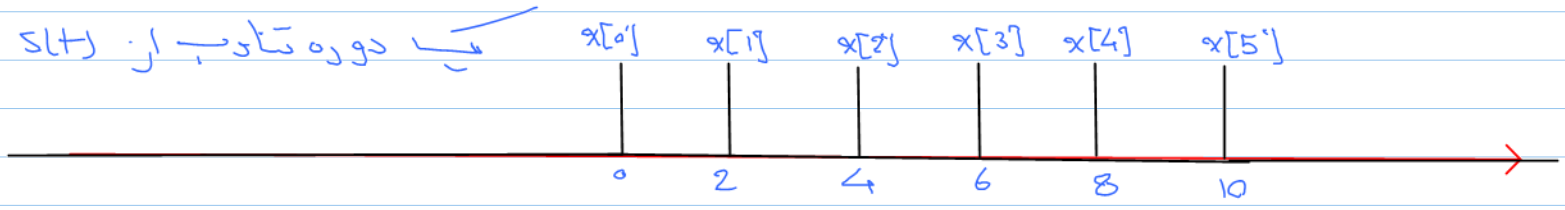
$s(t)$ در بازه انتگرال برای ←

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, \delta(t-2m)$$

$$= x[0]\,\delta(t) + x[1]\,\delta(t-2) + \dots$$



$s(t)$ دو تبدیل می‌شود به ←



$$\bar{s}(t) = x[0]\,\delta(t) + x[1]\,\delta(t-2) + x[2]\,\delta(t-4) + x[3]\,\delta(t-6) + x[4]\,\delta(t-8) + x[5]\,\delta(t-10)$$

$$b_k = \frac{1}{12} \int_{-1}^{11} \left(x[0]\,\delta(t) + x[1]\,\delta(t-2) + \dots + x[5]\,\delta(t-10)\right) e^{-jk\frac{\pi}{6}t}\, dt$$

$$= \frac{1}{12}\left(\int_{-1}^{11} x[0]\,\delta(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}t} + x[1]\,\delta(t-2)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}t} + \dots + x[5]\,\delta(t-10)\, e^{-jk\frac{5\pi}{6}t}\, dt \right.$$

$t=0$ ، 2 ، 10

$$= \frac{1}{12}\left(\int_{-1}^{11} x[0]\,\delta(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}\times 0} + x[1]\,\delta(t-2)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}\times 2} + \right.$$

$$\left. \cdots + x[5]\,\delta(t-10)\, e^{-jk\frac{\pi}{6}\times 10} \right) dt$$

$$= \frac{1}{12}\left(\int_{-1}^{11} x[0]\,\delta(t)\, dt + \int_{-1}^{11} x[1]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}}\,\delta(t-2)\, dt \right.$$

$$\left. + \cdots + \int_{-1}^{11} x[5]\, e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\,\delta(t-10)\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(x[0] \int_{-1}^{11} \delta(t)\, dt + x[1]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}} \int_{-1}^{11} \delta(t-2)\, dt \right.$$

$$\left. + \cdots + x[5]\, e^{-jk\frac{5\pi}{3}} \int_{-1}^{11} \delta(t-10)\, dt \right)$$

$$b_k = \frac{1}{12}\left(x[0] + x[1]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}} + \cdots + x[5]\, e^{-jk\frac{5\pi}{3}} \right)$$

$$b_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\left(x[0] + x[1]\, e^{-jk\frac{\pi}{3}} + \cdots + x[5]\, e^{-jk\frac{5\pi}{3}} \right) \right)$$

$$a_k$$

تابع پاسخ سیستم LTI: هرگاه در صورت سوال عبارت پاسخ سیستم LTI و $H(jw)$ را دیدید اگر $x(t)$ یا $x[n]$ متناوب بود از روش زیر استفاده کنید.

$$x(t) = e^{jat} \longrightarrow y(t) = e^{jat} H(ja)$$

$$x[n] = e^{jan} \longrightarrow y[n] = e^{jan} H(ja)$$

$$e^{j(kw_0)t} \longrightarrow y(t) = e^{jkw_0 t} H(jkw_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \longrightarrow ?$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} H(jkw_0)$$

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jkw_0)}_{b_k} e^{jkw_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jkw_0 t}$$

* اگر در یک سیستم LTI، پاسخ فرکانسی $H(jw)$ را بدانیم آنگاه داریم:

ضرایب سری فوریه ورودی $= a_k$

ضرایب سری فوریه خروجی $= a_k H(jkw_0) = b_k$

اگر ورودی یک سیستم LTI متناوب با T_0 (N_0) باشد خروجی هم متناوب با T_0 (N_0) است.

قاعده مهم: اگر $H(j\omega)$ را بدانیم و ورودی متناوب باشد، خروجی سیستم LTI را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

1. ω_0 در $x(t)$ یا $x[n]$
2. باند کمک‌های غیر صفر $H(jk\omega_0)$ را حساب می‌کنیم.
3. kهایی که به ازای آن‌ها $H(jk\omega_0) \neq 0$ را پیدا کنید و a_kها را به ازای آن‌ها حساب کنید.
4. b_kها را از رابطه $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ حساب می‌کنیم.
5. $$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

۶۹- پاسخ سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega}) = \cos^{۵}(\omega)$ به ورودی $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - ۲k]$، چیست؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $x[n]$

۳) $\frac{۱}{۲} + x[n]$

۴) $x[n-۱]$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - 2k) \quad , \quad H(j\omega) = \cos^5(\omega)$$

① $N_0 = 2 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

② $H(jk\pi) = \cos^5(k\pi) = \left(\cos(k\pi)\right)^5 = \left((-1)^k\right)^5 = (-1)^k$

$H(jk\pi)$ بازای همه‌ی k ها مخالف صفر است. یعنی بازای k ای $H(jk\omega_0) \neq 0$ است.
پس a_k بازای k ای صفر نیست که حساب کنیم.

③ $a_k = \frac{1}{2}$

④ $b_k = a_k H(jk\pi) = \frac{1}{2}(-1)^k$

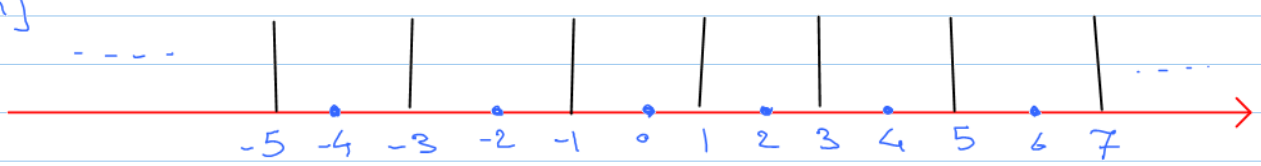
⑤ $y[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} b_k e^{jk\pi n} = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2}(-1)^k e^{jk\pi n}$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times -1 \times e^{j\pi n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{j\pi n}$$

$$y[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$$

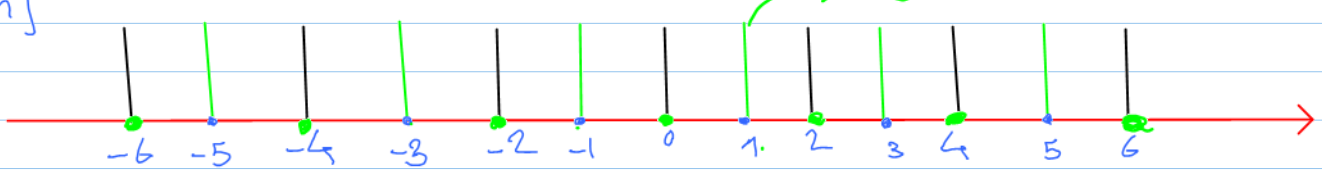
$$y[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n = \begin{cases} 0 & n = \text{زوج} \\ 1 & n = \text{فرد} \end{cases}$$

$y[n]$



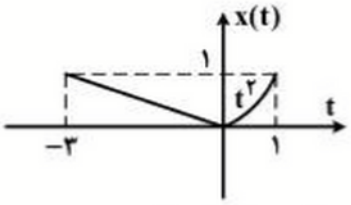
$x[n]$

$y[n] = x[n-1]$



بروی ۲۵

۷۷- یک سیستم CT-LTI دارای پاسخ‌فرکانسی $H(j\omega)=\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ است. خروجی این سیستم به‌ازای ورودی متناوب نشان‌داده شده در شکل زیر، کدام است؟



یک دورهٔ تناوب از ورودی

۱) $\frac{11}{3}$

۲) $\frac{11}{6}$

۳) $\frac{11}{12}$

۴) $\frac{11}{24}$



$H(jw) = \frac{\sin(2w)}{w}$ $\quad g(t) = ?$

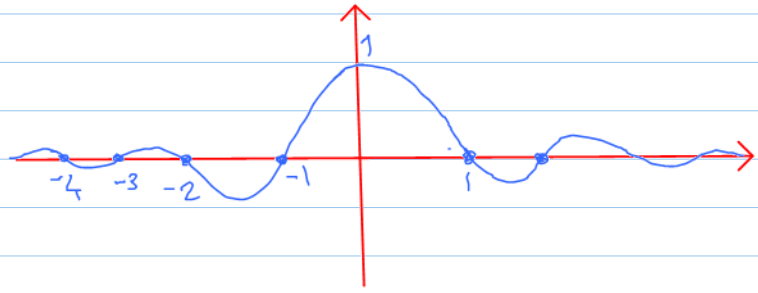
① $T_0 = 4$ ② $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

③ $H(jk\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(2k\pi/2)}{k\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}\right)$

$= 2\ \mathrm{sinc}(k)$

$\mathrm{sinc}(\frac{\ }{\ })$ بازای اعداد صحیح صورت غیر از ۰.

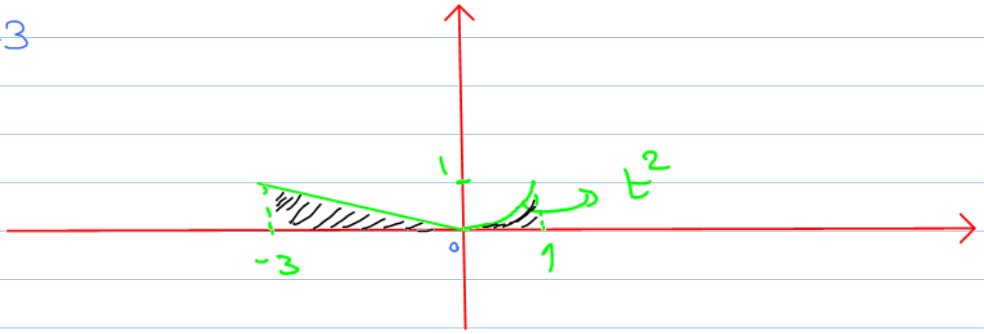
$$2\,\mathrm{sinc}(k) = \begin{cases} 0 \times 2 & k \neq 0 \\ 1 \times 2 & k = 0 \end{cases}$$



$$H(jk\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$$

④ $H(jk\frac{\pi}{2})$ فقط بازای $k=0$ ، برابر ۲ است و بقیه جاها ۰ است.

⑤ $a_0 = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} x(t)\,dt = ?$



$$a_0 = \frac{1}{4}\left(\int_{-3}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{1} x(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 \times 3}{2} + \int_{0}^{1} t^2\,dt \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{11}{24}$$

(5) $$b_k = a_k H\left(jk\frac{\pi}{2}\right) = a_k \times \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 2 & k = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 2 \times a_0 & k = 0 \end{cases}$$

$k = 0$

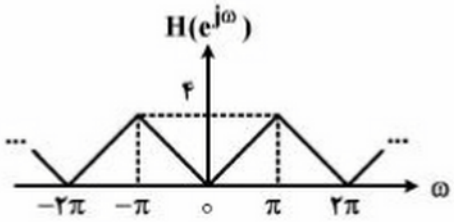
$$b_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 2a_0 = \frac{11}{12} & k = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} = \frac{11}{12} e^{j0\times\frac{\pi}{2}t} + 0 \times e^{j1\times\frac{\pi}{2}t} + 0 \times e^{j\cdots} + 0 + 0 + \cdots$$

$$\boxed{y(t) = \frac{11}{12}}$$

۹۶ برق

۱۱۰- یک سیستم LTI زمان ـ گسسته با پاسخ فرکانسی داده شده در شکل زیر مفروض است. خروجی این فیلتر به ازای ورودی $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta[n-2k]$ برابر کدام است؟



۱) $2(-1)^n+2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

۲) $(-1)^n+\cos(\frac{\pi}{2}n)$

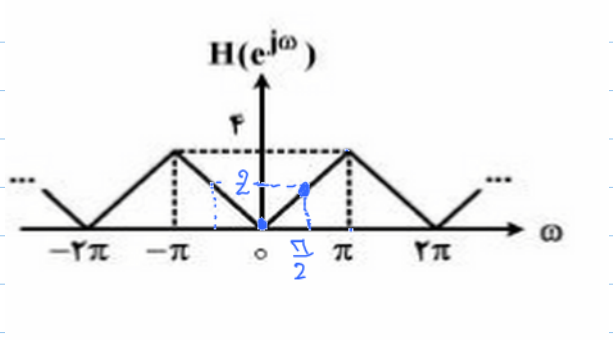
۳) $\cos(\frac{\pi}{2}n)$

۴) $2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-2k] \quad , \quad H(jw)$$

① $N_0 = 2 \times 2 = 4 \qquad w_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

② $H(jk\frac{\pi}{2}) = ?$



$$H(jk\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ 2 & k=1 \\ 2 & k=-1 \\ 4 & k=2 \\ 4 & k=-2 \\ \vdots \end{cases}$$

$k=0$ یا بیشتر k های زوج $H(jk\frac{\pi}{2}) \neq 0$

③ $a_k = \frac{1}{4}\left(1-(-1)^k\right)$

④ $b_k = a_k H(jk\frac{\pi}{2})$

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{2} b_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$= b_{-1} e^{-j\frac{\pi}{2}n} + b_0 + b_1 e^{j\frac{\pi}{2}n} + b_2 e^{j\pi n}$$

$$b_k = a_k H(jk\tfrac{\pi}{2})$$

$$b_{-1} = a_{-1} H(-j\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$b_0 = a_0 H(j0\tfrac{\pi}{2}) = a_0 \times 0 = 0$$

$$b_1 = a_1 H(j1\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$b_2 = a_2 H(j2\tfrac{\pi}{2}) = 0 \times 4 = 0$$

$$y[n] = 1\, e^{-j\frac{\pi}{2}n} + 0 + 1\, e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0\, e^{j\pi n}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\frac{\pi}{2}n} = 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2} n\right)$$

---

① خاصیت سری فوریه ② خاصیت ضرب بین LTI با سری فوریه

③ ویژگی‌های سری فوریه ← از جدول ۱ بیرون.

«جلسه ۲۹ سیگنال»

«خواص سری فوریه»

هدف: پیدا کردن معادل عملیات ریاضی در حوزه زمان و فرکانس

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{\text{ضرایب سری فوریه}} \; \underbrace{e^{jkx}}_{\text{فرکانس پایه } x} \; \underbrace{t}_{\times}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \, e^{-jkw_0 t} \, dt$$

$$x[n] = \sum_{k=<N_0>} \underbrace{x}_{\text{ضرایب سری}} \; \underbrace{e^{jkx}}_{\text{فرکانس پایه } x} \; \underbrace{n}_{\times}$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n] \, e^{-jkw_0 n}$$

* مقیاس دهی زمانی:

$$\begin{cases} x(t) \,,\, w_0 \longrightarrow a_k \\ x(\alpha t) \,,\, \alpha w_0 \longrightarrow a_k \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \qquad x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk(w_0 \alpha)t}$$

(a_k: ضرایب سری فوریه؛ $jk(w_0\alpha)t$: فرکانس پایه)

با زمین $\alpha > 0$ ، ضرایب سری فوریه در $x(\alpha t)$ عوض نمی شود، فقط فرکانس پایه عوض می شود.

$x(t)$ ، $w_0 = 10$ ،

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & k \neq -1 \\ 1 & k = -1 \end{cases}$$

در سیگنال $x(t)$ وزن فرکانسی $10k$ برابر a_k است.

$a_1 = \frac{1}{2}$ ⟵ وزن فرکانسی 1×10 در $x(t)$

$a_5 = \frac{1}{6}$ ⟵ ~ ~ 50 ~ ~

$x(2t)$ ، فرکانس پایه = 20 ⟵

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & k \neq -1 \\ 1 & k = -1 \end{cases}$$

$a_1 = \frac{1}{2}$ ⟵ وزن فرکانسی 1×20 در $x(2t)$

در طیف دهی مقدار و شماره a_k عوض نمی شود ولی با تغییر فرکانس پایه، معنی آن عوض می شود.

* طیف دهی زمانی:

$x(t)$ ، w_0 ⟶ a_k

$\alpha > 0$ $x(\alpha t)$ ، αw_0 ⟶ a_k

$\alpha < 0$ $x(\alpha t)$ ، αw_0 ⟶ a_{-k}

$x[n]$ ، w_0 ⟶ a_k

* $x_{(m)}[n]$ ، $m w_0$ ⟶ $\frac{1}{m} a_k$ *

$$x[mn] \longrightarrow b_k = \sum_{i=0}^{m-1} a_{\left(\frac{M}{N_0}\right)[k-\frac{M}{m}i)}$$

$$M = \text{l.c.m}\{m, N_0\}$$

مثال. اگر سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T_0=4$ دارای ضرایب سری فوریه به شکل زیر باشد، ضرایب سری فوریه $x(2t)$ و b_k و $x(-3t)$ را c_k ی ناسیم. عبارتها زیر را حساب کنید.

$$x(t) \longrightarrow a_k = (-1)^k\left(1-\frac{1}{2}(-1)^k\right)$$

الف) b_4 و b_2 ب) ضریب فرکانس π و 2π در $x(2t)$

ج) وزن هارمونیک سوم در $x(-3t)$ د) وزن فرکانس $\frac{9\pi}{2}$ در $x(-3t)$

هـ) مقدار dc در $x(t)$ ، $x(2t)$ و $x(-3t)$

$$x(t),\ T_0=4 \xrightarrow{\omega_c=\frac{\pi}{2}} a_k = (-1)^k\left(1-\frac{1}{2}(-1)^k\right)$$

$$x(2t),\ 2\omega_0 \longrightarrow b_k = a_k$$

الف) $b_2 = ?$ $b_4 = ?$

$$\begin{cases} b_2 = a_2 = \frac{1}{2} \\ b_4 = a_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ب) $x(2t)$ ، $\pi \longrightarrow b_k = (-1)^k\left(1-\frac{1}{2}(-1)^k\right)$

وزن فرکانس π = $1\times$ (فرکانس پایه π) $\longrightarrow b_1 = a_1$

2π ~ ~ = $2\times$ ~ ~ $\longrightarrow b_2 = a_2$

وزن فرکانس π در $x(t)$ = $2\times\left(\frac{\omega_0}{\frac{\pi}{2}}\right) \longrightarrow a_2$

2π ~ ~ = $4\left(\omega_0 = \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow a_4$

ج) $x(t)$ ، $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow a_k$

$x(-3t)$ ، $\omega_0 = 3\frac{\pi}{2} \longrightarrow a_{-k} = c_k$

وزن هارمونیک سوم در $x(-3t)$ $= c_3 \longrightarrow c_3 = a_{-3} = -\frac{3}{2}$

د) $x(-3t)$ در $\frac{9\pi}{2}$ وزن هارمونیک $= 3\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{9\pi}{2} \longrightarrow c_3$

ه) dc یعنی $= \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\,dt = a_0 = \frac{1}{2}$

$x(2t)$ ~ ~ $= b_0 = a_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad b_k = a_k$

$x(-3t)$ ~ ~ $= c_0 = a_{-0} = \frac{1}{2}$ $\qquad c_k = a_{-k}$

$x(t)$ ، $\omega_0 \longrightarrow a_k$

$\alpha x(t)$ ، $\omega_0 \longrightarrow \alpha a_k$

* خطی بودن :

$x(t) \longrightarrow a_k$

$y(t) \longrightarrow b_k$

$x(t) + y(t) \longrightarrow ?$

i) $x(t) = e^{j2t}$ $\qquad y(t) = e^{j4t}$

$x(t) \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$x(t) = 1e^{j1\omega_0 t} \longrightarrow a_k = ?$

$a_1 = 1$

$$a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y(t) = e^{j4t} \rightarrow T_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow w_0 = 4 \rightarrow y(t) = 1\, e^{j1w_0t}$$

$$b_1 = 1 \rightarrow b_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$z(t) = x(t) + y(t) = e^{j2t} + e^{j4t} \rightarrow C_k$$

$$T_0 = \text{p.p.c.} \left\{ \pi, \frac{\pi}{2} \right\} = \pi \rightarrow w_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$z(t) = e^{j1w_0t} + e^{j2w_0t}$$

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \rightarrow C_k = \begin{cases} 1 & k=1,2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x(t),\ w_0 = \pi \rightarrow a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y(t),\ w_0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow b_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x(t) + y(t),\ w_0 = \pi \rightarrow C_k = \begin{cases} 1 & k=1,2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$a_k + b_k = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \neq C_k$$

اگر $x(t)$ و $y(t)$ دارای فرکانس پایه یکسان باشند می توان گفت

$$x(t) + y(t) \longrightarrow a_k + b_k$$

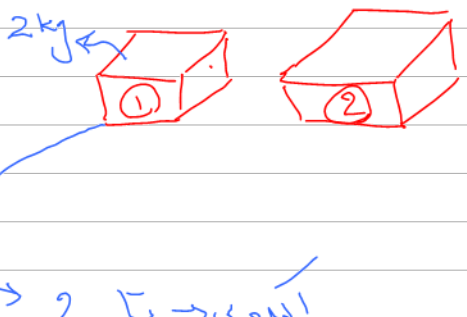
مثال ساده:



2 تا ظرف از گاوه 1 شکری برمی دارم $\Rightarrow 2kg$

$\sim \sim \sim \sim \sim \sim \Rightarrow 4kg$

$4kg \Rightarrow$ 4 تا ظرف گاوه 1 خریدم $\Rightarrow 6kg$ ✓



اگر بدانیم:

$x(t)$, $w_x \longrightarrow a_k$

$y(t)$, $w_y \longrightarrow b_k$

اگر بخواهیم ضرایب سری فوریه $x(t)+y(t)$ را حساب کنیم:

(I) $w_x = w_y \Rightarrow x(t) + y(t) \longrightarrow a_k + b_k$

(II) $w_x \neq w_y \Rightarrow$ برای سیگنال $x(t)+y(t)$ دوره تناوب را حساب می کنیم و فرکانس پایه کل را حساب می کنیم و ... آنگاه ضرایب سری فوریه $x(t)$ و $y(t)$ را با فرکانس پایه w_0 حساب می کنیم و ضرایب جدید را با هم جمع می کنیم.

$x(t)$, $w_x \longrightarrow a_k$

$x(t)$, $\frac{w_x}{m} \longrightarrow a_{(m)}[k] = \begin{cases} a_{\frac{k}{m}} & k \text{ مضرب } m \text{ باشد} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ *

$x(t)$, $w_x = 2 \longrightarrow a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$

$y(t)$, $w_y = 4 \longrightarrow b_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$

$x(t) + y(t) \longrightarrow c_k = ?$

$w_x \neq w_y \longrightarrow w_0 = g.c.m\{w_x, w_y\} = 2$

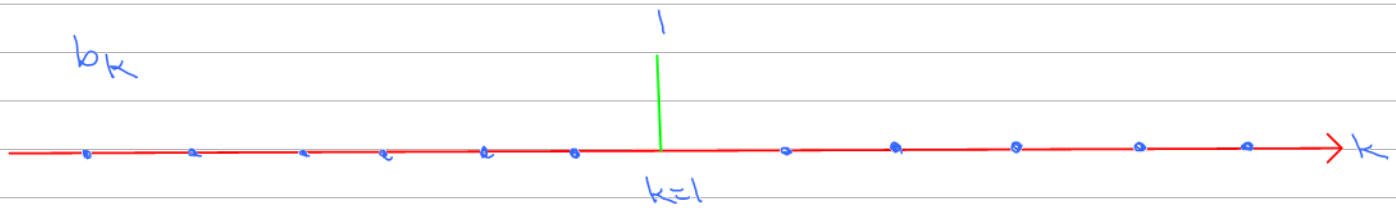
$x(t)$, $w_0 = 2 \longrightarrow a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & else \end{cases}$

$y(t)$, $w_0 = 2 = \frac{w_y}{2} \longrightarrow b_{(2)}[k] = \begin{cases} b[\frac{k}{2}] & k \text{ مضرب } 2 \\ 0 & \text{نباشد} \end{cases}$

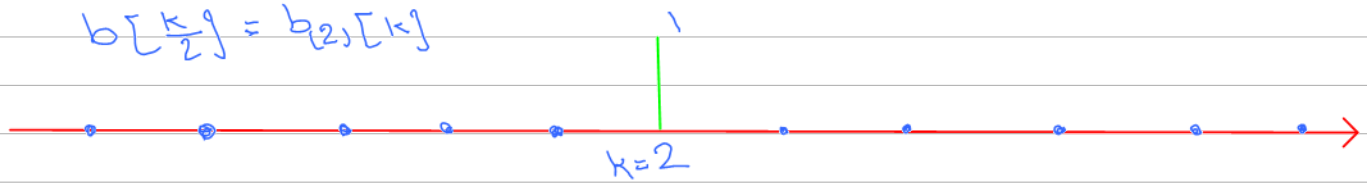
$$b_{(2)}[k] = \begin{cases} b_{\frac{2}{2}} = b_1 = 1 & k=2 \\ 0 & k = else \end{cases}$$

$b_{(2)}[k] = b_{\frac{k}{2}}$

$b[\frac{k}{2}]$



$b[\frac{k}{2}] = b_{(2)}[k]$



$x(t)$, $w_0 = 2 \longrightarrow a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & else \end{cases}$

$y(t)$, $w_0 = 2 \longrightarrow b_{(2)}[k] = \begin{cases} 1 & k=2 \\ 0 & else \end{cases}$

$x(t) + y(t) \longrightarrow c_k = a_k + b_{(2)}[k] = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 1 & k=2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

جلسه ۲۹ سیگنال

خواص سری فوریه:

هدف: پیدا کردن تعادل عبارت ریاضی روی سیگنال در حوزه زمان و فرکانس

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(\alpha t) \longrightarrow ?$

$x(t)\, e^{jw_0 t} \longrightarrow ?$

$\vdots$

$? \longrightarrow a_k e^{jkw_0}$

$? \longrightarrow a_{-k}$

خروجی پرتوبینی سری فوریه:

$x(t) \longrightarrow a_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$x(t)$: فرکانس پایه k شمارنده

$x e^{jk}$: ضرایب سری فوریه

$$x(t) = \sum_{\text{شمارنده}=-\infty}^{\infty} \text{ضرایب سری فوریه} \times e^{jk \times \text{فرکانس پایه} \times t}$$

$$a_k = \frac{1}{\text{دوره تناوب}} \int_{<T_0>} \text{سیگنال} \times e^{-jk \times \text{شمارنده} \times t}\, dt$$

* مقیاس دهی زمانی:

$x(t)\ ,\ T_0 \longrightarrow a_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t} \quad ; \quad \text{فرکانس پایه} = \frac{2\pi}{T_0} = w_0$$

$\alpha > 0$, $x(\alpha t) \rightarrow ?$

وزن‌ها بایه

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(w_0 \alpha t)}$$

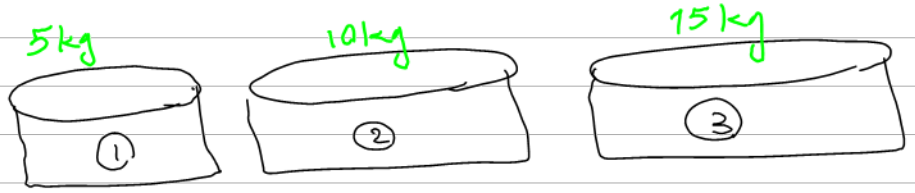
ضرایب سری

$$\begin{cases} x(t) \text{ , } w_0 \longrightarrow a_k \\ \alpha > 0 \quad x(\alpha t) \text{ , } \alpha w_0 \longrightarrow a_k \end{cases}$$

در سیگنالی دمی زمانی ، سطاره ضرایب سری فوریه عوض نمی شود ، بلکه فرکانس پایه عوض می شود.



2 تا ظرف سطاره ای شکر ریختیم = 4kg



2 تا ظرف مخلوط شکر ریختیم

10kg

مثال:

$x(t)$, $w_0 = 2 \longrightarrow a_k = \frac{1}{k+1}$

در مورد سیگنال $x(t)$ و $x(3t)$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف- وزن فرکانس 2 در $x(t)$ ← $a_1 = \frac{1}{2}$

ب- " " 6 " $x(3t)$ ← $a_1 = \frac{1}{2}$

ج- وزن فرکانس 6 در $x(t)$ ← $a_3 = \frac{1}{4}$

د- وزن هارمونیک k ام در $x(t)$ و $x(3t)$

$$a_5 = \frac{1}{6}$$

$a_k \longrightarrow$ وزن هارمونیک k ام

" فرکانس فرکانس پایه $\times k$

$x(t) \longrightarrow$ وتکانی پایه $= 2$

$x(3t) \longrightarrow$ ~ ~ $= 6$

$2 = k \times 2 \longrightarrow k=1 \longrightarrow a_1$

$x(3t) \longrightarrow a_k = \frac{1}{k+1}$ $\qquad 6 = k \times 6 \rightarrow k=1$

$6 = k \times 2 \rightarrow k=3 \rightarrow a_3$

$a_5 \rightarrow$ 10 وزن وتکانی $x(t)$ و

$a_5 \longrightarrow$ 30 ~ ~ $x(3t)$ ~

$x(t)$, $w_0 \longrightarrow a_k$

$\alpha>0$ $\quad x(\alpha t)$, $\alpha w_0 \longrightarrow a_k$

$\alpha<0$ $\quad x(\alpha t)$, $|\alpha w_0| \longrightarrow a_{-k}$

$m>0$

$x[n]$, $w_0 \longrightarrow a_k$

$x_{(m)}[n]$, $\frac{w_0}{m} \longrightarrow \frac{1}{m} a_k$

$x[mn]$, $mw_0 \longrightarrow C_k = \sum_{i=0}^{m-1} a_{\left(\frac{N}{N_0}\right)}\left[k - \frac{N}{m} i\right]$

$N = l.c.m\{m, N_0\}$

$m<0$ $\quad x_{(m)}[n]$, $\frac{w_0}{|m|} \longrightarrow \frac{1}{|m|} a_{-k}$

$x[mn]$, $|mw_0| \longrightarrow C_k = \sum_{i=0}^{m-1} a_{\left(\frac{N}{N_0}\right)}\left[-k - \frac{N}{m} i\right]$

مثال. اگر $x[n]$ دارای ضرایب سری فوریه a_k باشد و $x[4n]$ دارای ضرایب سری فوریه b_k و $x_{(4)}[n]$ دارای ضرایب سری فوریه c_k باشد، c_1 و b_1 کدام است؟

$N_0 = 2$

$x[n]$, $N_0=2 \longrightarrow a_k$

$x[4n] \longrightarrow b_k$

$x_{(4)}[n] \longrightarrow c_k = \frac{1}{4} a_k \longrightarrow c_1 = \frac{1}{4} a_1$

$$x[4n] \longrightarrow b_k = \sum_{i=1}^{3} a_{(\frac{4}{2})}[k - \frac{4}{4} i]$$

$N = l.c.m\{4,2\} = 4$

$$b_1 = \sum_{i=0}^{3} a_{(2)}[1-2i]$$

$$= \overset{0}{\cancel{a_{(2)}[1]}} + \overset{0}{\cancel{a_{(2)}[-1]}} + \overset{0}{\cancel{a_{(2)}[-3]}} + \overset{0}{\cancel{a_{(2)}[-5]}} = 0$$

$$a_{(2)}[k] = \begin{cases} a_{\frac{k}{2}} & k \text{ بر } 2 \text{ بخش‌پذیر} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

---

* حقایق بودن:

$x(t)$, $w_0 \longrightarrow a_k$

$$10\,x(t) = 10 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk w_0 t}$$

$$10x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 10\,a_k e^{jk w_0 t}$$

$$= \sum_{\text{تعاریف}=-\infty}^{\infty}$$

ضرایب $\times e^{jx}$

$t \times$ فرکانس زاویه‌ای $\times$ تعاریف

$10\,x(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow 10\,a_k$

① $x(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow a_k$

$\alpha x(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow \alpha a_k$

یعنی اگر سیگنال ضرب شود در ضرایب سری فوریه هم ضرب خواهد شد و با اعکس.

مقدمه قضیه دوم:

$x(t) \longrightarrow a_k$

$y(t) \longrightarrow b_k$

$x(t)+y(t) \longrightarrow ?$ ~~Xa_k+b_kX~~

مثال:

$x(t) = 2\,e^{j3t}$

$y(t) = 4\,e^{j3t}$

$x(t) \longrightarrow w_0 = 3 \longrightarrow x(t) = 2\,e^{jw_0t} \longrightarrow a_1 = 2$

$* \quad x(t) \longrightarrow a_k = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases} \quad *$

$y(t) \longrightarrow w_0 = 3 \longrightarrow y(t) = 4e^{jw_0t} \longrightarrow b_1 = 4$

$* \quad y(t) \longrightarrow b_k = \begin{cases} 4 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases} \quad *$

$x(t)+y(t) = 6\,e^{j3t} \longrightarrow c_k = \begin{cases} 6 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$c_k = a_k + b_k$

$$c_1 = 2 + 4 = 6 \checkmark$$

$$c_{k\neq 1} = a_{k\neq 1} + b_{k\neq 1} = 0 + 0 = 0 \checkmark$$

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow a_k & w_0 = 3 \\ y(t) \longrightarrow b_k & w_0 = 3 \\ x(t) + y(t) \longrightarrow a_k + b_k = c_k \end{cases}$$

$$x(t) = 2\, e^{j3t}$$

$$y(t) = 4\, e^{j9t}$$

$$* \; x(t),\ w_0 = 3 \longrightarrow a_k = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases} \; *$$

$$y(t) \longrightarrow w_0 = 9 \longrightarrow y(t) = 4\, e^{j1w_0 t} \longrightarrow b_1 = 4$$

$$* \; y(t),\ w_0 = 9 \longrightarrow b_k = \begin{cases} 4 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases} \; *$$

$$x(t) + y(t) = 2\, e^{j3t} + 4\, e^{j9t}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{3} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{9}$$

$$T_0 = \text{l.c.m}\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{9}\right\} = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow w_0 = 3$$

$$x(t) + y(t) = 2\, e^{j1w_0 t} + 4\, e^{j3w_0 t}$$

$$c_1 = 2 \qquad c_3 = 4$$

$$x(t) + y(t),\ w_0 = 3 \longrightarrow c_k = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 4 & k=3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$x(t)$, $\underline{\omega_0 = 3}$ $\longrightarrow$ $a_k = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$y(t)$, $\underline{\omega_0 = 9}$ $\longrightarrow$ $b_k = \begin{cases} 4 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$$a_k + b_k = \begin{cases} 6 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$$

$$\underline{a_k + b_k \neq c_k}$$

قاعده بسیار مهم:

اگر $x(t)$ یا $x[n]$ با فرکانس پایه ω_{0x} دارای ضرایب سری فوریه a_k و $y(t)$ یا $y[n]$ با فرکانس پایه ω_{0y} دارای ضرایب سری فوریه b_k باشند آنگاه ضرایب سری فوریه $x(t)+y(t)$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

حالت اول: $\omega_{0x} = \omega_{0y} \Leftarrow$

$$x(t) + y(t) \longrightarrow c_k = a_k + b_k$$

حالت دوم: $\omega_{0x} \neq \omega_{0y} \Leftarrow$

در این حالت $\omega_0 = g.c.m\{\omega_{0x}, \omega_{0y}\}$ را فاصله می‌گیریم و ضرایب سری فوریه $x(t)$ و $y(t)$ را با فرکانس پایه ω_0 فاصله گرفته و آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \text{ , } \omega_0 \longrightarrow a_{k\,new} \\ y(t) \text{ , } \omega_0 \longrightarrow b_{k\,new} \end{array}\right\} \Rightarrow c_k = a_{k\,new} + b_{k\,new}$$

نکته: اگر سیگنال $x(t)$ با فرکانس پایه ω_{0x} دارای ضرایب سری فوریه a_k باشد، آنگاه $x(t)$ با فرکانس پایه $\frac{\omega_{0x}}{m}$ دارای ضرایب سری فوریه $a_{(m)}[k]$ خواهد بود:

$$a_{(m)}[k] = \begin{cases} \frac{a_k}{m} & k \text{ ضریب } m \text{ باشد و} \\ 0 & \text{else و} \end{cases}$$

① $x(t) = 2e^{j3t} \longrightarrow a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$y(t) = 4e^{j3t} \longrightarrow b_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$x(t)$, $w_{0x} = 3 \longrightarrow a_k$

$y(t)$, $w_{0y} = 3 \longrightarrow b_k$

✓ $x(t) + y(t) \longrightarrow a_k + b_k = c_k$

② $x(t) = 2e^{j3t}$, $w_{0x} = 3 \longrightarrow a_k = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

$y(t) = 4e^{j9t}$, $w_{0y} = 9 \longrightarrow b_k = \begin{cases} 4 & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

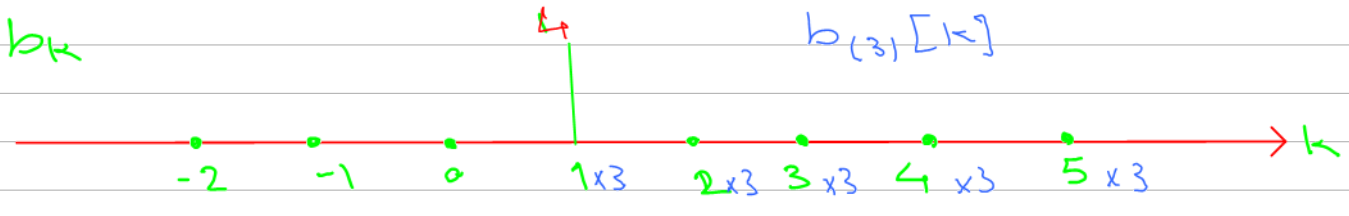
$x(t) + y(t) \longrightarrow c_k = ?$

$w_{0x} \neq w_{0y} \longrightarrow w_0 = g.c.m\{3, 9\} = 3$

$x(t)$, $w_0 = 3 \longrightarrow a_{knew} = a_k$

$y(t)$ ⇛ $w_0 = 3 = \frac{w_{0y}}{3}$ ($3 = m$) $\longrightarrow b_{knew} = b_{(3)}[k] = \begin{cases} b_{\frac{k}{3}} & 3 \text{ divides } k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$x(t) + y(t) \longrightarrow c_k = a_k + b_{(3)}[k]$



$$b_{(3)}[k] = \begin{cases} 4 & k = 3 \\ 0 & k \neq 3 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 2 & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} + \begin{cases} 4 & k = 3 \\ 0 & k \neq 3 \end{cases} = \begin{cases} 2 & k = 1 \\ 4 & k = 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

مثال:

$x[n]$, $N_0 = 4 \longrightarrow a_k$

$x[n]$, $N_1 = 12 \longrightarrow b_k$

ضرایب b_k ، a_k چه رابطه‌ای با هم دارند؟

$x[n]$, $w_0 = \frac{2\pi}{4} \longrightarrow a_k$

$x[n]$, $w_1 = \frac{2\pi}{12} \longrightarrow b_k = ?$

$x[n]$, $w_0 = \frac{2\pi}{4} \longrightarrow a_k$

$x[n]$, $w_1 = \frac{w_0}{\underset{m}{3}} \longrightarrow a_{(3)}[k] = b_k$

$x(t)$, $w_0 \longrightarrow a_k$

$x(2t)$, $w_0 \longrightarrow ?$

$x(2t)$, $2w_0 \longrightarrow a_k$ مشابه هم

$x(2t)$, $w_0 \longrightarrow ?$ $a_{(2)}[k]$

$x(2t)$, $w_1 \longrightarrow a_k$

$x(2t)$, $\frac{w_1}{2} \longrightarrow a_{(2)}[k]$

مثال. اگر $x(t)$ دارای ضرایب سری فوریه a_k باشد g $y(t) = x(t) + x(3t)$ دارای ضرایب سری فوریه b_k باشد ضرایب b_1 و b_3 را برحسب a_k بیان کنید.

$x(t)$, $w_0 \longrightarrow a_k$

$x(t) + x(3t) \longrightarrow b_k$ $\qquad b_1 , b_3 = ?$

$$\begin{cases} x(t) , w_1 = w_0 \longrightarrow a_k \\ x(3t) , w_2 = 3w_0 \longrightarrow a_k \end{cases}$$

$w_1 \neq w_2 \Rightarrow \qquad w_3 = g.c.m\{w_1, w_2\} = w_0$

$x(t)$, $w_3 = w_0 \longrightarrow a_k$

$x(3t)$, $w_3 = \frac{w_2}{3} \longrightarrow a_{(3)}[k]$

$x(t) + x(3t) \longrightarrow a_k + a_{(3)}[k] = b_k$

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + \cancel{a_{(3)}[1]}^{0} = a_1 \\ b_3 = a_3 + \cancel{a_{(3)}[3]}^{a_{3/3}} = a_3 + a_1 \end{cases}$$

برق ۹۵. دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)$ برابر T_0 و ضرایب سری فوریه آن a_k است. اگر ضرایب سری فوریه $g(t)=x(t)+x(\frac{3}{2}t)$ را b_k بنامیم، b_2 کدام است؟

۱) a_1 ۲) a_2 ۳) $2a_1$ ۴) a_1+a_2

$x(t)$, $\omega_{0x} = \frac{2\pi}{T_0} \longrightarrow a_k$

$y(t) = x(t) + x\left(\frac{3}{2}t\right) \longrightarrow b_k$ $\qquad b_2 = ?$

$x(t)$, $\omega_{0x} \longrightarrow a_k$

$x\left(\frac{3}{2}t\right)$, $\frac{3}{2}\omega_{0x} \longrightarrow a_k$

$\omega_{0x} \neq \frac{3}{2}\omega_{0x} \longrightarrow \omega_0 = g.c.m\left\{\omega_{0x}, \frac{3}{2}\omega_{0x}\right\} = \frac{\omega_{0x}}{2}$

$x(t)$, $\frac{\omega_{0x}}{2} \longrightarrow a_{(2)}[k]$

$x\left(\frac{3}{2}t\right)$, $\frac{\omega_{0x}}{2} \longrightarrow a_{(3)}[k]$

$x(t) + x\left(\frac{3}{2}t\right) \longrightarrow a_{(2)}[k] + a_{(3)}[k] = b_k$

$b_2 = \cancel{a_{(2)}[2]} + \cancel{a_{(3)}[2]} = a_1$ ✓

$a_{2/2}$ $\qquad 0$

«جلسه ۳۰ مستقل»

«حوامی سری فوریه»

جزوه ۹۶

۱۰۶- $x_1(t)$ متناوب با پریود اصلی T_1 و ضرایب فوریهٔ a_n و $x_2(t)$ متناوب با پریود اصلی $T_2=3T_1$ و ضرایب سری فوریهٔ b_n است. ضرایب سری فوریهٔ $y(t)=x_1(t)+x_2(t)$ با پریود اصلی $T_2=3T_1$، کدام است؟

۱) $\begin{cases} \frac{a_n}{3}+b_n & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ b_n & \text{سایر} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \frac{a_n}{3}+b_n & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ a_n & \text{سایر} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a_n+\frac{b_n}{3} & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ b_n & \text{سایر} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a_n+\frac{b_n}{3} & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ a_n & \text{سایر} \end{cases}$

$x_1(t)$, $\omega_{0x_1} = \frac{2\pi}{T_1} \longrightarrow a_k$

$x_2(t)$, $\omega_{0x_2} = \frac{2\pi}{3T_1} \longrightarrow b_k$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $\omega_{0y} = \frac{2\pi}{3T_1} \longrightarrow C_k = ?$

$\omega_{0x_1} \neq \omega_{0x_2} \longrightarrow$ [illegible]

$\omega_0 = g.c.e\{\omega_{0x_1}, \omega_{0x_2}\} = g.c.m\{\frac{2\pi}{T_1}, \frac{2\pi}{3T_1}\} = \frac{2\pi_1}{3T_1}$

$\omega_0 = \frac{2\pi_1}{3T_1} = \frac{\omega_{0x_1}}{3}$

$x_1(t)$, $\omega_{0x_1} = \frac{2\pi}{T_1} \longrightarrow a_k$

$x_1(t)$, $\frac{\omega_{0x_1}}{3}$ (m) $\longrightarrow a_{(3)}[k]$

$x_2(t)$, $\omega_{0x_2} = \frac{2\pi}{3T_1} \longrightarrow b_k$

$x_1(t)$, $\omega_0 \longrightarrow a_{(3)}[k]$

$x_2(t)$, $\omega_0 \longrightarrow b_k$

$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow a_{(3)}[k] + b_k = C_k$

$$C_k = b_k + \begin{cases} a_{\frac{k}{3}} & \text{[illegible]} \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} b_k + a_{\frac{k}{3}} & k = 3\text{ضرب} \\ b_k & \text{else} \end{cases}$$

* وارونگی زمانی:

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow a_k \\ x(-t) \longrightarrow a_{-k} \\ x[-n] \longrightarrow a_{-k} \end{cases}$$

یعنی اگر در حوزه زمان، t با $-t$ (n با $-n$) تبدیل کنیم در حوزه فرکانس k با $-k$ تبدیل می‌شود.

نتیجه وارونگی زمانی:

اگر سیگنال x زوج باشد $\Longleftrightarrow$ a_k هم زوج است

" " فرد " $\Longleftrightarrow$ " " فرد است.

اثبات:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & = & x(-t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_k & = & a_{-k} \end{array}$$

مثال: اگر سیگنال x به صورت زیر تعریف شود، ضرایب سری فوریه آن کدام است؟

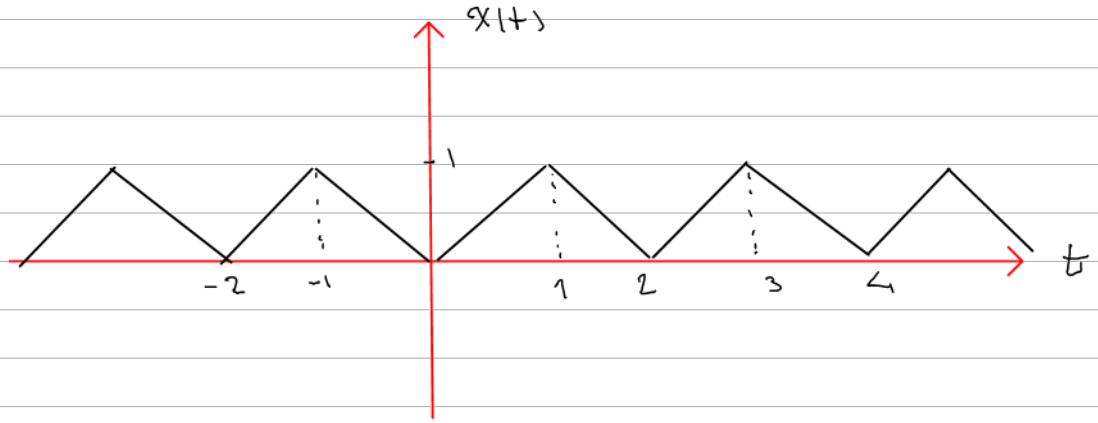
$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 < t \le 2 \end{cases} \qquad T_0 = 2$$

1) $\dfrac{-4k}{\pi^2(2k-1)^2}$

2) $\dfrac{-4}{\pi^2(2k-1)}$

3) $\dfrac{-4k}{(2k-1)^2}$

4) فرد k $\begin{cases} \dfrac{-4}{\pi^2 k^2} \\ 0 \quad k=0 \end{cases}$



$x(t)$ = çift $\longrightarrow$ a_k çift

$a_k = a_{-k}$ 4 nisan

برق ۹۵

سیگنال $x(t)$ متناوب بودهو متوالب سری فوریه آن به شکل زیر است. کدام گزینه در مورد این سیگنال صحیح است؟ ۱) حقیقی ۲) فرد ۳) مثبت × زوج ۴) مثبت × فرد

$$C_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -j\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} & k\neq 0 \end{cases}$$

x زوج $\longleftrightarrow$ a_k زوج

x فرد $\longleftrightarrow$ a_k فرد

$$C_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ j\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} & k\neq 0 \end{cases}$$

$$C_{-k} = \begin{cases} 1 & -k=0 \\ j\left(\frac{1}{3}\right)^{|-k|} & -k\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ j\left(\frac{1}{3}\right)^{|k|} & k\neq 0 \end{cases} = C_k$$

$C_k = C_{-k} \rightarrow$ زوج $\rightarrow$ زوج $x \rightarrow$ متقارن x فرد

* سیگنال زمانی و فرکانسی:

* سیگنال در یک حوزه به صورت مرتب غالبا در حوزه مقابل ظاهر می‌شود.

$x(t)$, $w_0 \rightarrow a_k$

$x(t-t_0)$, $w_0 \rightarrow$?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{ضرایب} \times e^{j\times k\times w_0 \times t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$$

$$x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0(t-t_0)}$$

$$= \sum_{k=-\infty} a_k e^{-jkw_0 t_0} e^{jkw_0 t}$$

$$\begin{cases} x(t),\ w_0 \longrightarrow a_k \\ x(t-t_0),\ w_0 \longleftrightarrow a_k\, e^{-jkw_0t_0} \end{cases}$$

$$x[n-n_0],\ w_0 \longleftrightarrow a_k\, e^{-jkw_0n_0}$$

هر کجا عبارت نمایی دیدیم سوال تبدیل شیفت است.

$$x(t),\ w_0 \longrightarrow a_k$$

$$?,\ w_0 \longrightarrow a_{k-k_0}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) \times e^{-jkw_0t}\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} \text{سیگنال} \times e^{-j\text{ضابطه}\times w_0 x t}\,dt$$

$$a_{k-k_0} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, e^{-j(k-k_0)w_0t}\,dt$$

$$a_{k-k_0} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, e^{jk_0w_0t}\, e^{-jkw_0t}\,dt$$

$$\begin{cases} x(t),\ w_0 \longrightarrow a_k \\ x(t)\, e^{jk_0w_0t},\ w_0 \longrightarrow a_{k-k_0} \end{cases}$$

به اندازه k_0 شیفت

مثال. اگر سیگنال $x[n]$ متناوب با $N_0 = 2$ و ضرایب سری فوریه a_k باشد،
و ضرایب سری فوریه $y[n] = (-1)^n x[n]$ را b_k بنامیم آنگاه b_2 کدام است؟

1) a_0 2) a_3 3) a_2 4) a_1

$x[n]$, $w_0 = \pi \longrightarrow a_k$

$(-1)^n x[n] \longrightarrow b_k = ?$

$(-1)^n = e^{j\pi n}$

$e^{j\pi n} x[n] \longrightarrow ?$

$x[n], w_0 \longrightarrow a_k$

$e^{jk_0 w_0 n} x[n] \longrightarrow a_{k-k_0}$

$x[n]$, $w_0 = \pi \longrightarrow a_k$

$e^{j\pi n} = e^{j1 w_0 n}$

$e^{j1 w_0 n} x[n] \longrightarrow a_{k-1} = b_k$ ($k_0 = 1$)

$b_2 = a_{2-1} = a_1$

بود ۸۳

۱. سیگنال زمان گسسته $x[n]$ پریودیک با پریود $N_0 = 4$ است. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از $c_0 = -1$ و $c_1 = -j$ و $c_2 = 1$ و $c_3 = j$

اگر $y[n] = x[-n+1]$ باشد و ضرایب سری فوریه آن را با d_0 و d_1 و d_2 و d_3 نشان دهیم d_2 چه خواهد بود؟

۱) -1 ۲) $-j$ ۳) 1 ۴) j

$x[n]$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ c_k ✓

$x[-n+1]$ $\longrightarrow$ $d_k = ?$

هرگاه ترکیبی از خواص را داشته باشیم به صورت ترتیبی عمل کنیم.

$x[n]$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ c_k

$n \to n - n_0$ ($n_0 = -1$) ↓ ↓ $\times e^{-jk\omega_0 n_0}$ ($n_0 = -1$)

$x[n+1]$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$? $c_k e^{jk\omega_0}$

$n \to -n$ ↓ ↓ $k \to -k$

$y[n] = x[-n+1]$ $\longrightarrow$ $d_k = c_{-k} e^{-jk\omega_0}$

$$d_2 = c_{-2} e^{-j2\frac{\pi}{2}} = c_{-2} \times e^{-j\pi} = -c_{-2}$$

$e^{-j\pi}$ (-1)

$c_0 = -1 \quad c_1 = -j \quad c_2 = 1 \quad c_3 = j$

$c_{\text{معمولی}} = c_{\text{عدد صحیح} + m \times N_0}$

$c_{-2} = c_{\text{عدد صحیح} + m \times 4}$

$c_{-2} = c_{0 + m \times 4}$ $\quad m = -2/4$ ✗

$c_{-2} = c_{1 + m \times 4}$ $\quad m = -3/4$ ✗

$c_{-2} = c_{2 + m \times 4} = c_2$ $\quad m = -4/4 = -1$ ✓

$c_{-2} = 1 \longrightarrow d_2 = -c_2 = -1$

۱۹- ضرائب سری فوریه دنباله متناوب $x[n]$ ، دارای دوره تناوب N (زوج) را با $X[k]$ نمایش می‌دهیم. در آن صورت ضرائب سری فوریه دنباله $(-1)^n x[n]$ برابرند با:

۱) $X[-k]$ ۲) $-X[k]$ ۳) $X\left[k-\frac{N}{2}\right]$ ۴) $-X\left[k+\frac{N}{2}\right]$

$x[n]$, $N_0 = 8$ s. $\longrightarrow$ a_k

$(-1)^n x[n]$ $\longrightarrow$?

$(-1)^n = e^{j\pi n}$ $\longrightarrow$

$e^{j k_0 w_0 n}$

$e^{j\pi n} x[n]$ $\longrightarrow$?

$w_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

$\pi = k_0 w_0 \rightarrow \pi = k_0 \times \frac{2\pi}{N_0}$

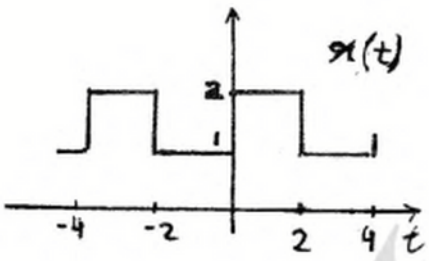
$\boxed{k_0 = \frac{N_0}{2}}$

$x[n] \longrightarrow a_k$

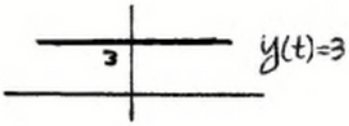
$e^{j \frac{N_0}{2} w_0 n} x[n] \longrightarrow a_{k - \frac{N_0}{2}}$

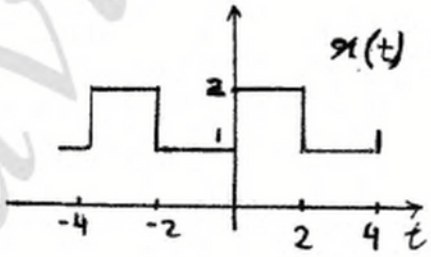
برق ۹۱

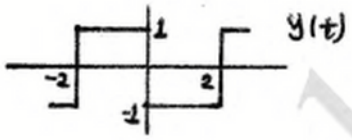
۷۶- سیگنال پریودیک $x(t)$ با دوره تناوب ۴ و ضرایب سری فوریه a_k در شکل زیر نشان داده شده است. سیگنال $y(t)$ دارای سری فوریه $b_k = (-1)^k a_k + (-1)^k a_{-k}$ می‌باشد. در کدام گزینه زیر نمودار صحیح می‌باشد؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

Shahavi Kani

$x(t)$, $N_0 = 4 \longrightarrow a_k$

$y(t) = ?$ $\longrightarrow (-1)^k a_k + (-1)^k a_{-k}$

$x(t)$, $w_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow a_k$

$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-jkw_0t_0} a_k \longrightarrow \pi = -w_0 t_0$

$\pi = -\frac{\pi}{2} t_0 \rightarrow t_0 = 2$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(t+2) \longrightarrow (-1)^k a_k$

$? \longrightarrow (-1)^k a_{-k}$

$x(t+2) \longrightarrow (-1)^k a_k$

$t \rightarrow -t$, $k \rightarrow -k$

$x(-t+2) \longrightarrow (-1)^{-k} a_{-k}$ $\qquad (-1)^{-k} = (-1)^k$

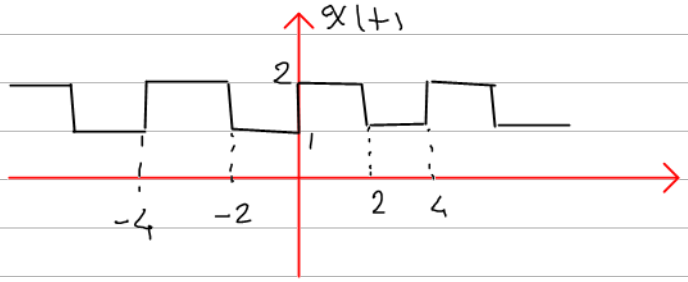
$x(-t+2) \longrightarrow (-1)^k a_{-k}$

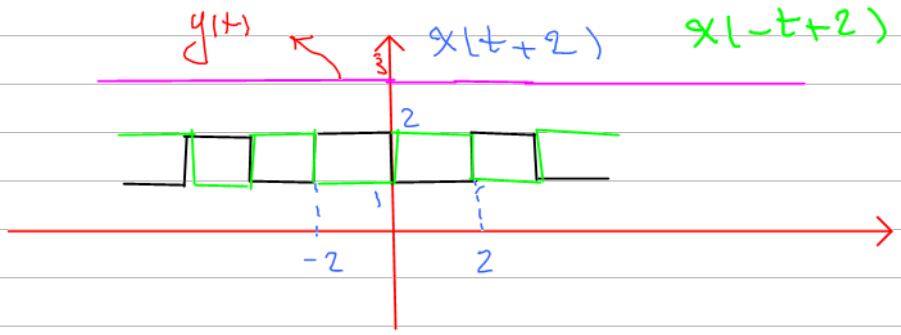
$x(t)$, $w_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow a_k$

$x(t+2)$, $w_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow (-1)^k a_k$

$x(-t+2)$, $w_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow (-1)^k a_{-k}$

$y(t) = x(t+2) + x(-t+2) \longrightarrow (-1)^k a_k + (-1)^k a_{-k}$


x(t)
2
1
-4
-2
2
4


y(t)
x(t+2)
x(-t+2)
3
2
1
-2
2

مثال: سیگنال $y[n]$ طبق رابطه زیر از روی سیگنال $x[n]$ متناوب با N و ضرایب سری فوریه a_k داده شده است، ضرایب سری فوریه $y[n]$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2} a_k \left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{3N}k\right)\right) e^{-jk\frac{2\pi}{3N}}$

2) $3a_k \left(1+2\cos\left(\frac{6\pi}{N}k\right)\right) e^{-jk\frac{6\pi}{N}}$

3) $\frac{1}{3} a_k$

4) $a_k \left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right) e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{3}\right] & n = 3m \\ x\left[\frac{n+1}{3}\right] & n = 3m+1 \\ x\left[\frac{n-2}{3}\right] & n = 3m+2 \end{cases}$$

$x[n]$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \longrightarrow a_k$

$y[n] \longrightarrow ?$

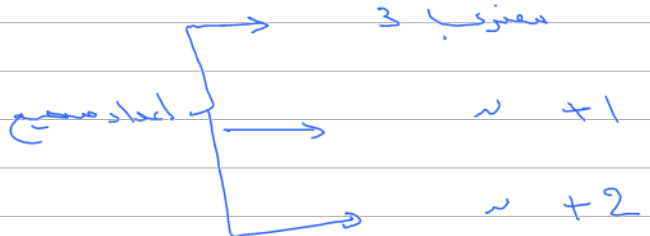
$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{3}\right] & n = 3m \\ x\left[\frac{n+1}{3}\right] & n = 3m+1 \\ x\left[\frac{n-2}{3}\right] & n = 3m+2 \end{cases}$$

$$x_{(3)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{3}\right] & n = 3m \\ 0 & n \neq 3m \end{cases}$$

$$x_{(3)}[n-1] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{3}\right] & \cancel{n-1 = 3m} \quad n = 3m+1 \\ 0 & \cancel{n-1 \neq 3m} \quad n \neq 3m+1 \quad n = 3m \end{cases}$$

$$x_{(3)}[n-2] = \begin{cases} x\left[\frac{n-2}{3}\right] & \cancel{n-2 = 3m} \quad n = 3m+2 \\ 0 & \cancel{n-2 \neq 3m} \quad n \neq 3m+2 \end{cases}$$

$$y[n] = x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{3}\right] & n = 3m \\ x\left[\frac{n-1}{3}\right] & n = 3m+1 \\ x\left[\frac{n-2}{3}\right] & n = 3m+2 \end{cases}$$



$n = 3m \rightarrow \quad x\left[\frac{n}{3}\right] + 0 + 0 = x\left[\frac{n}{3}\right]$

$y[n] = x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2]$

$x[n], \ \frac{2\pi}{N} \longrightarrow a_k$

$x_{(3)}[n], \ \frac{2\pi}{3N} \longrightarrow \frac{1}{3} a_k$

$\times e^{-jkw_0 1}$

$n-3n-1$

$x_{(3)}[n-1], \ w_0 = \frac{2\pi}{3N} \longrightarrow \frac{1}{3} a_k e^{-jk \frac{2\pi}{3N} \times 1}$

$n-2$

$x_{(3)}[n-2], \ w_0 = \frac{2\pi}{3N} \longrightarrow \frac{1}{3} a_k e^{-jk \frac{2\pi}{3N} \times 2}$

$x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2] \longrightarrow \frac{1}{3} a_k + \frac{1}{3} a_k e^{-jk \frac{2\pi}{3N}} + \frac{1}{3} a_k e^{-jk \frac{4\pi}{3N}}$

تمرین . آزمایشی

مثال. اگر $x(t)$ با دوره تناوب $T_0=6$ دارای ضرایب سری فوریه a_k باشد، و $g(t)=e^{j\frac{\pi}{6}t}x(t)$ ضرایب سری فوریه b_k را بیابید، b_3، b_4 به ترتیب کدام است؟

1) $a_0, 0$ 2) $a_1, 0$ 3) $0, a_1$ 4) a_3, a_4

$x(t)$, $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ $\longrightarrow$ a_k

$e^{j\frac{\pi}{3}t}\,x(t)$ $\longrightarrow$ ؟

$x(t)$, ω_0 $\longrightarrow$ a_k

$e^{jk_0\omega_0 t}\,x(t)$ $\longrightarrow$ a_{k-k_0} $\qquad$ k_0 = عدد صحیح

$k_0 \times \omega_0 = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $k_0 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \rightarrow k_0 = \frac{1}{2}$ ✗

نکته. هرگاه مزایب سری فوریه $x(t)$ را در e^{jct} ضرب کنیم باید $k_0\omega_0 = c$ قرار دهیم و k_0 را بدست آوریم.

1) اگر k_0 عدد صحیح بدست آمد ←

2) ~ ~ ~ ~ ~ نباشد !

$x(t)$ سیگنال ω_0 را فوری تشبیه بر m و k_0 عدد صحیح بدست آید

m = آزاد عدد صحیح $\qquad$ $c = k_0 \frac{\omega_0}{m}$

پس مزایب سری فوریه $x(t)$ را با وکتور $\frac{\omega_0}{m}$ بدست آورده و داریم:

$e^{jct}\,x(t)$ $\longrightarrow$ $a_{(m)}\,[k-k_0]$

$x(t)$, $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$ $\longrightarrow$ a_k

$e^{j\frac{\pi}{6}t}\,x(t)$ $\longrightarrow$ ؟

$\frac{\pi}{2\cancel{6}} = k_0 \times \frac{\pi}{\cancel{3}} \times \frac{1}{m}$ $\qquad k_0 = \frac{m}{2} \rightarrow m=2 \; , \; k_0 = 1$

$e^{j\frac{\pi}{6}t} \; x(t) \longrightarrow a_{(2)}[k-1] = b_k$

$$b_k = \begin{cases} a\left[\frac{k-1}{2}\right] & k-1 = 2 \text{ مضرب} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$b_3 = a\left[\frac{3-1}{2}\right] = a_1$

$b_4 = 0$

جلسه ۳۱ سیگنال

خواص سری فوریه

* تقارن هرمیتی:

$(a+bj)^* = a-bj$

$(a)^* = a$

$(bj)^* = -bj$

$(e^{j\theta})^* = e^{-j\theta}$

$x(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow a_k$

$x^*(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow ?$

سیگنال = $\sum_{\text{نمایه}=-\infty}^{\infty}$ ضرایب سری فوریه × $e^{j \text{ نمایه } w_0 t}$ × نمونه‌برداری از t

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0t}$$

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jkw_0t}$$

$-k = k' \rightarrow k = -k'$

$$= \sum_{k'=\infty}^{-\infty} a_{-k'}^* e^{jk'w_0t}$$

$k: -\infty \longrightarrow \infty$

$k': \infty \longrightarrow -\infty$

$$x^*(t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} a_{-k'}^* e^{jk'w_0t}$$

($a_{-k'}^*$: ضرایب سری فوریه)

$x(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow a_k$

$x^*(t)\ ,\ w_0 \longrightarrow a_{-k}^*$

$x[n] \longrightarrow a_k$

$x^*[n] \longrightarrow a_{-k}^*$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x^*(-t) \longrightarrow a^*_k$

$\frac{x(t) + x^*(-t)}{2} \longrightarrow Re\{a_k\}$

$\frac{x(t) - x^*(-t)}{2j} \longrightarrow Im\{a_k\}$

$Re\{x(t)\} \longrightarrow \frac{a_k + a^*_{-k}}{2}$

$Im\{x(t)\} \longrightarrow \frac{a_k - a^*_{-k}}{2j}$

نتیجه تقارن موجی:

اگر x :

① موهومی محض باشد $\longleftrightarrow$ $a_k = -a^*_{-k}$

② حقیقی باشد $\longleftrightarrow$ $a_k = a^*_{-k}$

③ حقیقی و زوج $\longleftrightarrow$ a_k حقیقی و زوج

④ موهومی و فرد $\longleftrightarrow$ a_k موهومی و فرد

⑤ حقیقی و فرد $\longleftrightarrow$ a_k موهومی و فرد

⑥ موهومی و فرد $\longleftrightarrow$ a_k حقیقی و فرد

مثال. اگر $x(t)$ یک سیگنال متناوب و حقیقی باشد، کدام گزینه در مورد ضرایب a_k یعنی ضرایب سری فوریه $y(t) = x(t) - x(-t)$ صحیح نیست؟

1) $a_k = -a_{-k}$ 2) $a_k = a^*_{-k}$ 3) $Re\{a_k\} = 0$ 4) $Re\{a_k\} = Im\{a_k\}$

$x(t)$: حقیقی $x(-t)$: حقیقی

① $x(t) - x(-t)$: حقیقی $\rightarrow$ $y(t)$: حقیقی

② $y(t) = 2x_o(t)$: فرد $x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

و سیگنال حقیقی و فرد $\leftarrow$ a_k موهومی و فرد

a_k : موهومی $\rightarrow$ $Re\{a_k\} = 0$

a_k : فرد $\rightarrow$ $a_k = -a_{-k}$

$a_k^* = -a_k \rightarrow (a_k)^* = (-a_{-k})^* = -a^*_{-k}$

$-a^*_{-k} = -a_k \rightarrow a_k = a^*_{-k}$ ✓

مثال. اگر x یک سیگنال حقیقی و متناوب با ضرایب سری فوریه a_k باشد و b_k ضرایب سری فوریه $Re\{x(t)\}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

1) $b_k = b_{-k}$ 2) $b_k = -b_{-k}$ 3) $b_k = -b^*_{-k}$ 4) $b_k = b^*_{-k}$

$x(t) \rightarrow a_k$

$Re\{x(t)\} \rightarrow b_k = \frac{a_k + a^*_{-k}}{2}$

1) $b_k \overset{?}{=} b_{-k}$ $\frac{a_k + a^*_{-k}}{2} \overset{?}{=} \frac{a_{-k} + a^*_k}{2}$ ✗

b_k زوج $\rightarrow$ $Re\{x(t)\}$ زوج

2) b_k : مزدوج $\rightarrow$ $Re\{x(t)\}$ مزدوج ✗

3) $b_k = -b^*_{-k}$ ✓4) $b_k = b^*_{-k} \rightarrow ?$ ✓سیگنال $Re\{x(t)\}$ حقیقی

اگر سیگنال حقیقی $\leftarrow$ $a_k = a^*_{-k}$

جواب ۹۲.

برای سیگنال مختلط $\tilde{x}[n]$ با دورهٔ متناوب ۴، داریم:

$\tilde{x}[0] = 1-j$, $\tilde{x}[1] = 1+j$ و $\tilde{x}[2] = 1$, $\tilde{x}[3] = 1-j3$. اگر ضریب سری فوریهٔ این سینگنال را $\tilde{a}_k$ بنامیم، و $\tilde{y}[n]$ را به صورت سیگنالی تعریف کنیم، که ضرایب سری فوریهٔ آن برابر با $\tilde{b}_k = Re\{\tilde{a}_k\}$, $\forall_k \in Z$ است. در ایـن صـورت، $\tilde{y}[1]$ برابر کدام است:

۱) $1+j2$
۲) ۲
۳) ۱
۴) $1-j$

$x[n]$, $N_0 = 4 \longrightarrow a_k$

$y[n] = \frac{x[n] + x^*[-n]}{2} \longrightarrow Re\{a_k\}$ $\quad y[1] = ?$

$$y[1] = \frac{x[1] + x^*[-1]}{2}$$

$x[1] = 1+j$ $\quad x[-1] = x[-1+4] = x[3] = 1-j3$

$$y[1] = \frac{4j + 1 + j3}{2} = 1 + j2$$

مثال: اگر $x[n]$ یک سیگنال زوج و حقیقی با دوره تناوب $N_0=3$ باشد، کدام

$$y[n]=\begin{cases} x[n] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

مورد درباره مزایب سری فوریه b_k برای سیگنال

صحیح است؟ 1) $b_k=b_k^*$ 2) $b_k=b_{-k}$ 3) $b_k=b_{-k}^*$ 4) هیچ‌کدام

b_k حقیقی

b_k زوج

حقیقی و زوج

$x[n]$, $N_0 = 3 \longrightarrow a_k$ $x[n]$ حقیقی و زوج

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases} \longrightarrow b_k = ?$$

$$z[n] = \begin{cases} A & n \text{ زوج} \\ B & n \text{ فرد} \end{cases} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}(-1)^n$$

نکته

نکته . $z[n]$ حالی دوره تناوب 2 بوده و دوم سیگنالی متناب شود دوره تناوب کل را دو برابر می‌کند.

$$\underbrace{x[n]}_{N=3} \times z[n] \longrightarrow N_{کل} = 6$$

$$y[n] = x[n] \times \underbrace{\begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}}_{z[n]} = x[n] \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n\right)$$

$$N_{0y} = 2N_{0x} = 2 \times 3 = 6$$

$$y[n] = \underbrace{\frac{1}{2}x[n]}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\pi n}x[n]}_{} \quad , \quad N_{0y} = 6 \; , \; \omega_{0y} = \frac{\pi}{3}$$

$x[n] \longrightarrow a_k$, $N_{0x} = 3$

$\frac{1}{2}x[n] \longrightarrow \frac{1}{2}a_k$, $N_0 = 3$

$\frac{1}{2}e^{j\pi n}x[n] \longrightarrow ?$

$x[n]$, $W_0 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow a_k$

$\frac{1}{2}\, e^{j\pi n}\, x[n] \longrightarrow$ ؟

$k_0 W_0 = \pi$ $\qquad k_0 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi \longrightarrow k_0 = \frac{3}{2}$ ✗

$k_0 \frac{W_0}{m} = \pi \longrightarrow k_0 \times \frac{2\pi}{3m} = 2\pi \longrightarrow k_0 = \frac{3}{2} m \longrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k_0 = 3 \end{cases}$

$\frac{1}{2}\, e^{j\pi n}\, x[n] \longrightarrow \frac{1}{2}\, a_{(2)}[k-3]$

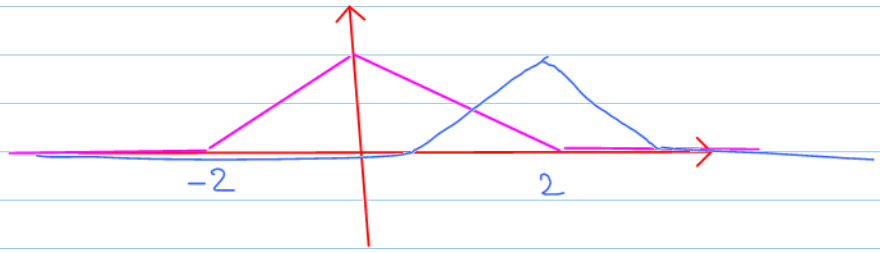
+ $\qquad$ +

$\frac{1}{2}\, x[n] \longrightarrow \frac{1}{2}\, a_k$

$g[n] = \frac{1}{2} x[n] + \frac{1}{2}\, e^{j\pi n}\, x[n] \longrightarrow \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2}\, a_{(2)}[k-3] = b_k$

* $b_k = \frac{1}{2} a_k + \frac{1}{2}\, a_{(2)}[k-3]$ *

x : حقيقي وزوجي ← a_k حقيقي وزوجي



$b_k \longrightarrow$ حقيقي ✓

$b_k \longrightarrow$ ما نقول كمتتابعة زوجية

ولا :

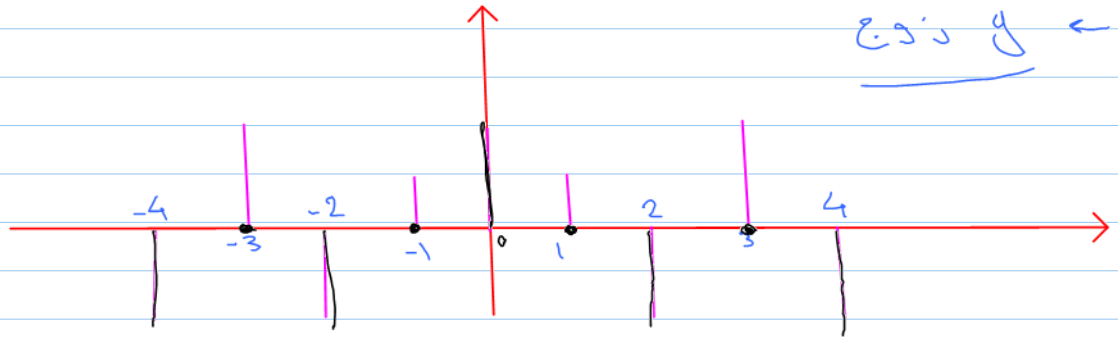
روش حل کوتاه:

۱) b_k حقیقی ← $y[n]$ حقیقی ✓

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases} \rightarrow \text{حقیقی}$$

$x[n]$ حقیقی و زوج

۲) b_k زوج ← y زوج



جلسه سی و سیگنال

خواص سری فوریه

* مشتق‌گیری و تفاضل :

$x(t) \;,\; w_0 \longrightarrow a_k$

$\frac{dx(t)}{dt} \;,\; w_0 \longrightarrow ?$

سیگنال = $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ ضرایب سری $\times e^{jkw_0t}$ (k: شمارنده) $\times$ $x(t)$ (زمان‌بایع $\times$ شمارنده)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0t}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{d}{dt}\left(e^{jkw_0t}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, jkw_0\, e^{jkw_0t}$$

($\frac{dx}{dt}$: سیگنال ، $a_k\, jkw_0$: ضرایب سری)

$x(t) \;,\; w_0 \longrightarrow a_k$

$\frac{dx(t)}{dt} \;,\; w_0 \longrightarrow jkw_0 a_k$

$\frac{d^m x}{dt} \;,\; w_0 \longrightarrow (jkw_0)^m a_k$

در حوزه زمان هر مشتق معادل با jkw_0 در حوزه فرکانس است.

تفاضل ⟵ معادل مشتق در پیوسته

$\frac{dx(t)}{dt}$ ⟶ $x[n] - x[n-1]$

$$x[n],\ w_0 \longrightarrow a_k$$

$$x[n]-x[n-1],\ w_0 \longrightarrow (1-e^{-jkw_0})\,a_k$$

* خاصیت انتگرال گیری:

$$x(t),\ w_0 \longrightarrow a_k$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow ?$$

نکته: اگر $a_0 \neq 0$ باشد یا مقدار میانگین $x(t)$ غیر صفر باشد، $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ دارای ضرایب سری فوریه خواهد بود.

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow \begin{cases} \text{سری فوریه ندارد} & a_0 \neq 0 \\ \dfrac{a_k}{jkw_0} & a_0 = 0 \end{cases}$$

پرسش ۴۰

اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد و $y(t) = x'(1-t)$ باشد، وزن هارمونیک سوم در سیگنال $y(t)$ کدام است؟

۱) $j\frac{\pi}{4}$ 2) $j\frac{3\pi}{4}$ 3) $j\frac{-3\pi}{4}$ 4) $j\frac{-\pi}{4}$

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{4}\times 3t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right)$$

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{4} \times 3t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4} t\right)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(+1-t) = x'(1-t)$$

$y(t) \longrightarrow b_k \qquad b_3 = ?$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$y(t) \longrightarrow ?$

$y(t)$ با اجزاء یک سری عملیات ریاضی روی x بدست آمده است.

عملیات ریاضی ← معادل آن در سری فوریه را می‌دانیم

$x(t)$

$\frac{d}{dt}$ ↓ مشتق گیری

$x'(t)$

$t \to t+1$ ↓ انتقال زمانی

$x'(t+1)$

$t \to -t$ ↓ قرینگی زمانی

$y(t) = x'(-t+1)$

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$\frac{d}{dt}$ ↓ $\times jk\omega_0$

$$x'(t) \longrightarrow jk\omega_0 a_k$$

$t \to t-t_0$ ↓ $\times e^{jk\omega_0 t_0}$

$$x'(t+1) \longrightarrow e^{jk\omega_0 x(-1)}\, jk\omega_0 a_k$$

$t \to -t$ ↓ $k \to -k$

$$y(t) = x'(-t+1) \longrightarrow e^{j(-k)\omega_0(-1)}\, j(-k)\omega_0 a_{-k} = b_k$$

$$b_k = e^{jk\omega_0}\,(-jk\omega_0)\, a_{-k}$$

$$b_3 = e^{j3w_0}\,(-j3w_0)\,a_{-3} \qquad a_{-3}=? \qquad w_0=?$$

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{4}\times 3t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right) \qquad (w_0)$$

$$w_0 = g.c.m\left\{3\times\frac{2\pi}{4}\,,\ \frac{2\pi}{4}\right\} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \sin(3w_0t) + \sin(w_0t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2j}e^{j3w_0t} - \frac{1}{2j}e^{-j3w_0t} + \frac{1}{2j}e^{jw_0t} - \frac{1}{2j}e^{-jw_0t}$$

$$a_{-3} = -\frac{1}{2j}$$

$$b_3 = e^{j3\frac{\pi}{2}}\,(-j3\times\frac{\pi}{2})\times\frac{-1}{2j} = -j\frac{3\pi}{4}$$

مثال. اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ را a_k بنامیم و ضرایب سری فوریه $y(t)$ برابر b_k باشد، b_2 را حساب کنید.

$$y(t) = \frac{1}{2}x^*(t-2) + \frac{1}{2}x^*(2t-2)$$

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$y(t) \longrightarrow b_k \qquad b_2 = a_k \text{ حساب}$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2}x^*(t-2)}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}x^*(2t-2)}_{}$$

$x(t) \longrightarrow$ مزدوج $\longrightarrow \times\frac{1}{2} \longrightarrow$ سپس $\longrightarrow$ متناوبی

$w_0 \; , \; \frac{1}{2}x(t) \longrightarrow \frac{1}{2}a_k = c_k \longrightarrow c^*_{-k} = (\frac{1}{2})^* a^*_k = \frac{1}{2}a^*_k$

$w_0 \; , \; (\frac{1}{2}x(t))^* \longrightarrow c^*_{-k} = \frac{1}{2}a^*_{-k}$

$w_0 \; , \; \frac{1}{2}x^*(t) \longrightarrow \frac{1}{2}a^*_{-k}$

$t \to t-2$ ↓ ، $\times e^{jkw_0 \times 2}$ ↓

$w_0 \; , \; \frac{1}{2}x^*(t-2) \longrightarrow \frac{1}{2}a^*_{-k} e^{jkw_0 \times 2}$

$t \to 2t$ ↓ ، ضرایب عوض نمی‌شود ↓

$2w_0 \; , \; \frac{1}{2}x^*(2t-2) \longrightarrow \frac{1}{2}a^*_{-k} e^{jkw_0 \times 2}$

$\frac{1}{2}x^*(t-2), w_0 \longrightarrow \frac{1}{2}a^*_{-k} e^{j2kw_0}$

$\frac{1}{2}x^*(2t-2), 2w_0 \longrightarrow \frac{1}{2}a^*_{-k} e^{j2kw_0}$

چون دو کاسینوسی با یک سیگنال جمع کرد.

$w_{0new} = g.c.m\{w_0, 2w_0\} = w_0$

$\frac{1}{2}x^*(t-2), \; w_{0new} \longrightarrow \frac{1}{2}a^*_{-k} e^{j2kw_0} = d_k$ +

$\frac{1}{2}x^*(2t-2), \; w_{0new} = \frac{2w_0}{m(2)} \longrightarrow d_{(2)}[k]$ +

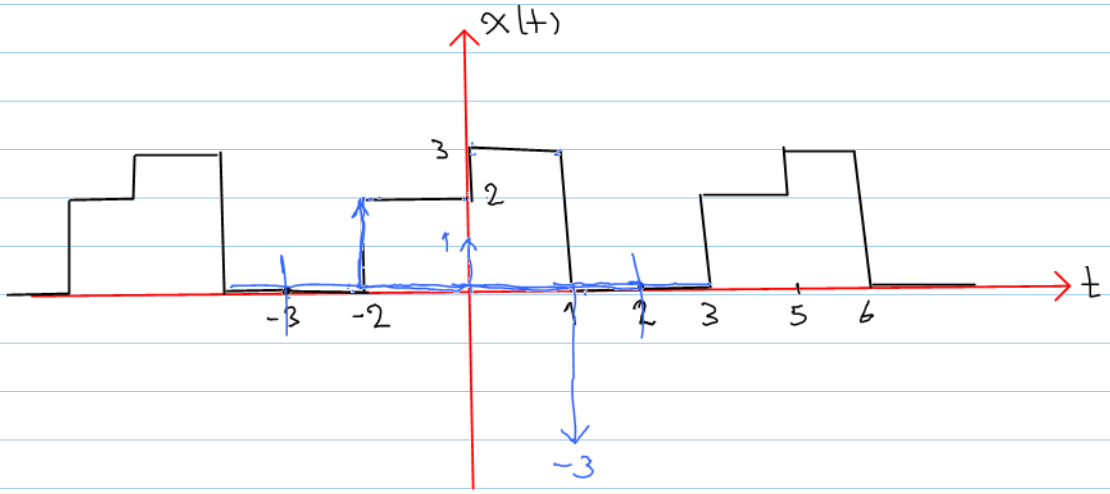
$$d_{(2)}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} a^*_{-\frac{k}{2}} e^{j2\frac{k}{2}w_0} & k \text{ مزدوج باشد} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y(t) \longrightarrow b_k = \frac{1}{2} a^*_{-k} e^{j2kw_0} + \begin{cases} \frac{1}{2} a^*_{-\frac{k}{2}} e^{j2\frac{k}{2}w_0} & k \text{ مزدوج} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$b_2 = \frac{1}{2} a^*_{-2} e^{j4w_0} + \frac{1}{2} a^*_{-1} e^{j2w_0}$$

استفاده از خاصیت مشتق گیری:

هر گاه بتوان با مشتق گیری یا انتگرال گیری سیگنال داده شده را ساده کرد این کار را انجام می دهیم.

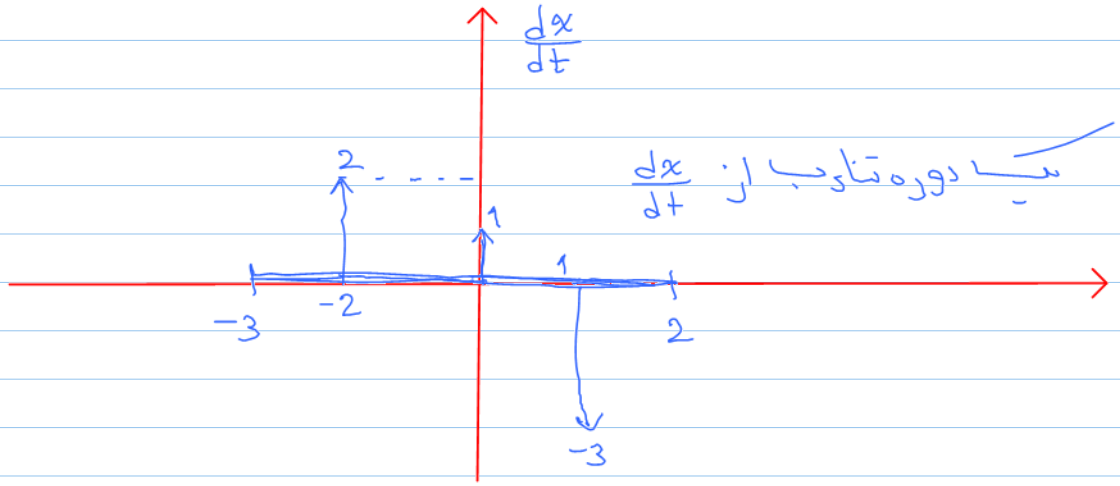


$$x(t) \longrightarrow a_k = ?$$

ضرایب سری فوریه $x(t)$ را بدست بیاوریم.

دو بار مشتق گیری از x به ضربه می رسید.

یعنی با مشتق یا انتگرال باید به نوعی از سیگنال که ضرایب سری آن را بلدیم، برسیم.



سیگنال دوره تناوب از $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = 2\delta(t+2) + \delta(t) - 3\delta(t-1) \quad ; \quad T_0 = 5 \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \frac{dx(t)}{dt} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{5} \int_{-3}^{2} \left(2\delta(t+2) + \delta(t) - 3\delta(t-1)\right) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{5} \left(\int_{-3}^{2} \left(2\delta(t+2) e^{-jk\omega_0 \times -2} + \delta(t) e^{-jk\omega_0 \times 0} - 3\delta(t-1) e^{-jk\omega_0 \times 1} \right) dt \right.$$

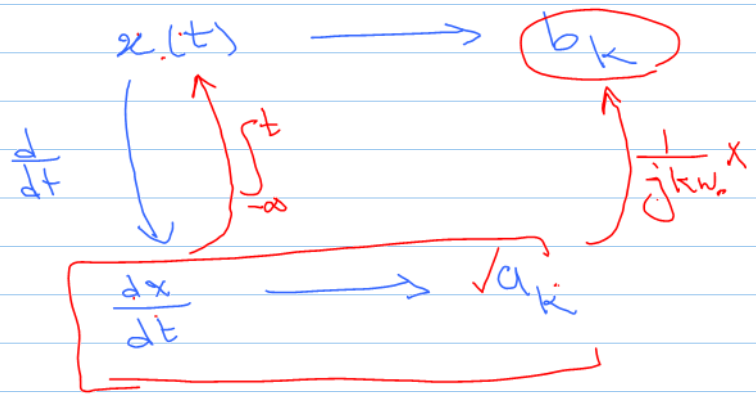
$$= \frac{1}{5} \left(\int_{-3}^{2} 2 e^{j4k\omega_0} \delta(t+2)\, dt + \int_{-3}^{2} \delta(t)\, dt + \int_{-3}^{2} -3 e^{-jk\omega_0} \delta(t-1)\, dt \right)$$

$$a_k = \frac{1}{5} \left(2 e^{j4k\omega_0} + 1 - 3 e^{-jk\omega_0} \right)$$

$$a_0 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} \longrightarrow a_k \qquad \text{(ضرب در } \frac{1}{jk\omega_0}\text{)}$$

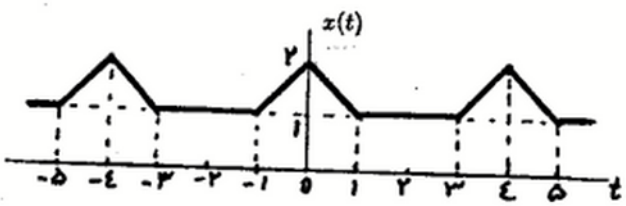
$$x(t) \longrightarrow ? \cdot \frac{a_k}{jk\omega_0} \qquad \text{(انتگرال از } -\infty \text{ تا } t\text{)}$$


x(t)
b_k
$\frac{d}{dt}$
$\int_{-\infty}^{t}$
$\frac{1}{jk\omega_0}X$
$\frac{dx}{dt}$
$\sqrt{a_k}$

"جلسه ۲۳ سیگنال"
حوالی سری فوریه

برق ۸۷

ضرایب a_0 و a_2 در سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ نشان داده شده در شکل زیر چقدر است؟



۱) $a_0 = \frac{5}{2}$ ، $a_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}$

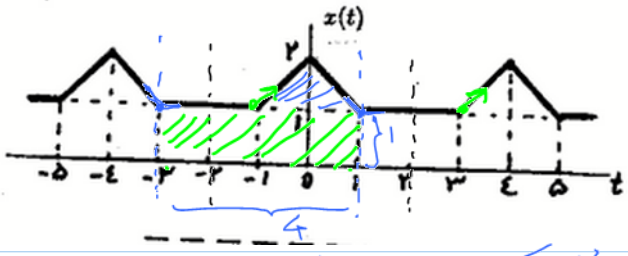
۲) $a_0 = \frac{5}{2}$ ، $a_2 = \frac{2}{(2\pi)^2}$

۳) $a_0 = \frac{5}{4}$ ، $a_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}$

۴) $a_0 = \frac{5}{4}$ ، $a_2 = \frac{2}{(2\pi)^2}$

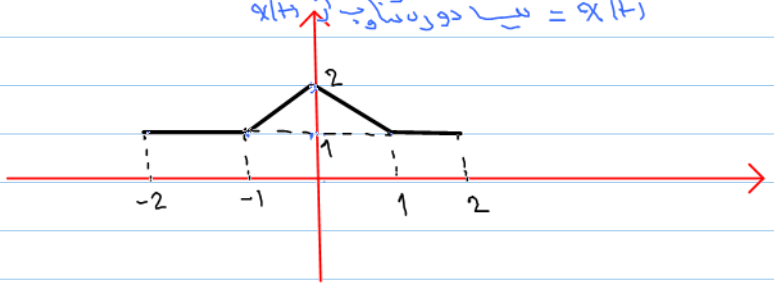
$x(t) \longrightarrow a_k$

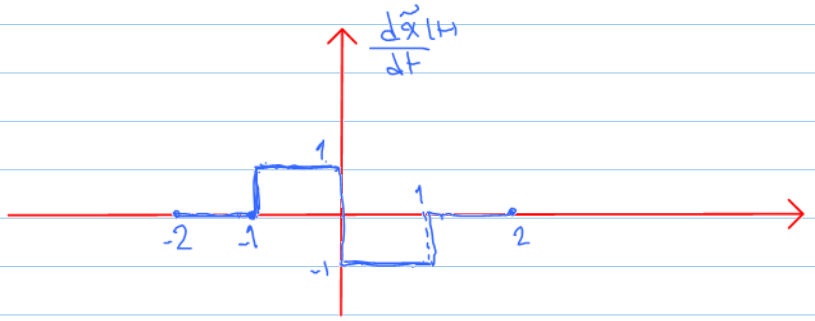
$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow (jk\omega_0)^n a_k$

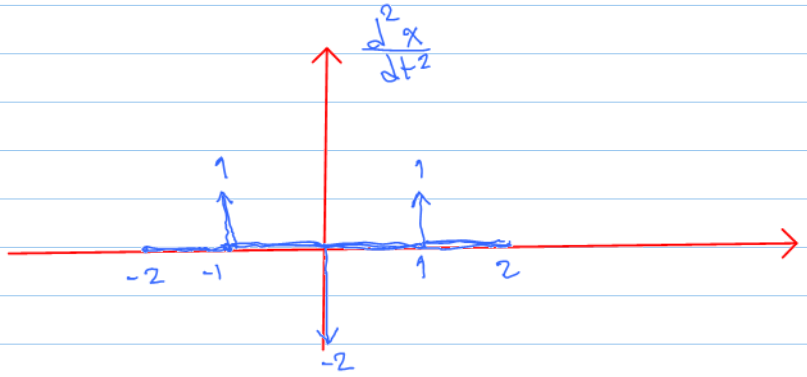


$T_0 = 1-(-3) = 4$

$\tilde{x}(t)$ = سیگنال دوره‌ای $x(t)$







$$\frac{d^2x}{dt^2} = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1) \longrightarrow C_k$$

$$C_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \frac{d^2x}{dt^2}\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \left(\delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t+1)\right) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$C_k = \frac{1}{4}\left(e^{jk\omega_0} - 2 + e^{-jk\omega_0} \right) = \frac{1}{4}\left(-2 + 2\cos(k\omega_0)\right)$$

$x(t) \longrightarrow a_k = ?$

$\frac{d^2}{dt^2}$ ↓ ×$(jk\omega_0)^2$

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longrightarrow c_k = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(k\omega_0) = a_k (jk\omega_0)^2$

$a_k = \frac{1}{(jk\omega_0)^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(k\omega_0)\right) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

a_0 و a_3 ؟

$a_0 = \frac{1}{(j0)^2}(0) = \frac{0}{0}$ مبهم ؟

نکته! هرگاه در رابطه a_k ، a_0 مبهم باشد ، a_0 را از روی مقدار dc x حساب کنیم.

$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-3}^{1} x(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(4\times 1 + \frac{1\times 2}{2}\right) = \frac{5}{4}$

$a_3 = \frac{1}{(j3\times\frac{\pi}{2})^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(3\pi)\right) = -\frac{2}{-9\pi^2} = -2/9\pi^2$

روشی غایب انتگرال یا $\sum$ روی x یا a_k ها!

$x(t)$ ، ✓ $\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = ? \qquad \int x(t)g(t)\,dt = ?$

$a_k \qquad \int x(t)\,e^{jk\omega_0 t}\,dt \qquad \int x$

هرگاه انتگرال ($\sum$) از $x(t)$ یعنی یک سیگنال را بخواهد ؟

انتگرال یک سیگنال یعنی مثلاً بگوید $x(t) \longrightarrow a_k$

و $\int x(t)\,dt$ یا $\int x(t)\times e^{jt}\,dt$ یا $\int x(t)\cos(\quad)\,dt$

یا $\int x(t)\sin(\quad)\,dt$ را بخواهد.

$x[n] \longrightarrow a_k$ یا $\sum x[n]e^{j0}$ یا $\sum x[n]$

$\sum x[n]\sin(\quad)$ یا $\sum x[n]\cos(\quad)$

هر وقت سیگنال x را دهد و از مزایب سری فوریه آن را بدهد، و انتگرالی (سیگما) از x را بخواهد آنگاه تقریبا مزایب سری فوریه را می‌نویسیم:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>} x[n]\, e^{-jkw_0 n}$$

پس k را طوری عدد می‌دهیم و انتگرال دوم برابر عبارت خواسته شده سوال می‌شود.

$x(t)\ ,\ T_0 = 4 \longrightarrow a_k = \frac{1}{2} + \frac{k}{|k|+1}$

$$\int_{-1}^{3} x(t)\times 1\, dt = ?$$

$$a_k = \frac{1}{4}\int_{<4>} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$ ($k=0$)

$$4a_0 = \frac{4\times 1}{4}\int_{-1}^{3} x(t)\times 1\, dt$$

$$\int_{-1}^{3} x(t)\, dt = 4a_0 = 4\times\frac{1}{2} = 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} x(t)\, e^{j\frac{3\pi}{2}t}\, dt = ?$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x(t)\, e^{-j(3)\frac{\pi}{2}t}\, dt \longrightarrow 4a_3 = \int_{-2}^{2} x(t)\, e^{j\frac{3\pi}{2}t}\, dt$$

$$a_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{3+1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \longrightarrow \boxed{A = 5}$$

$x[n]$, $N_0 = 4$ $\longrightarrow$ $a_k = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos(k\pi)}$ $\qquad \omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$A = \sum_{n=0}^{3} x[n](-1)^n = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{j\pi n}$$

$$4 \times a_{\cancel{k}}^{-2} = \frac{1 \times 4}{\cancel{4}} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\cancel{k}^{-2}\frac{\pi}{2}n}$$

$$4a_{-2} = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{j\pi n} = A$$

$$a_{-2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \qquad 4 \times \frac{2}{3} = A$$

در کلا ه x را بر حسب ضرایبی از $\sum a_k$ بیان کنید و در صورت امکان $\sum a_k \cos(\;)$ یا $\sum a_k \sin(\;)$ یا $\sum a_k e^{j(\;)}$ را بنویسید؟

تبدیل سری فوریه یعنی $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

و $x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ را با توجه به اینکه n را فقط برای عددهای صحیح تعریف کرده‌ایم

دوم برابر سوال بالاست.

$$x(t) = \begin{cases} 1+t & 0 \le t \le 1 \\ -t-2 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$T_0 = 2$

$\omega_0 = \pi$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \qquad , B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j3\pi k}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\pi t}$$

($e^{jk\pi t} \to 1$ for $t \to 0$)

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \times 1 = A \longrightarrow 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$$

$$B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{3\pi}{2}k} \Rightarrow x\left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{3\pi}{2}k}$$

$$B = x\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

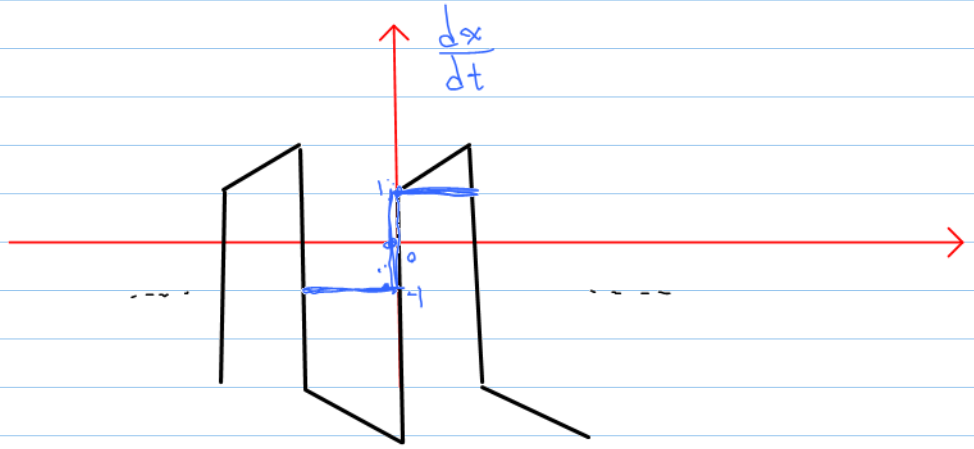
$$C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\, a_k \qquad \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\pi t}$$

نکته! اگر با عملیات ریاضی مربوط به خواص سری فوریه توانستید از تعریف سری فوریه مجهول را بیابید باید این عملیات را انجام دهید.

$$\frac{1}{\pi}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k jk\pi e^{jk\pi t}$$

($e^{jk\pi t} \to 1$ for $t \to 0$)

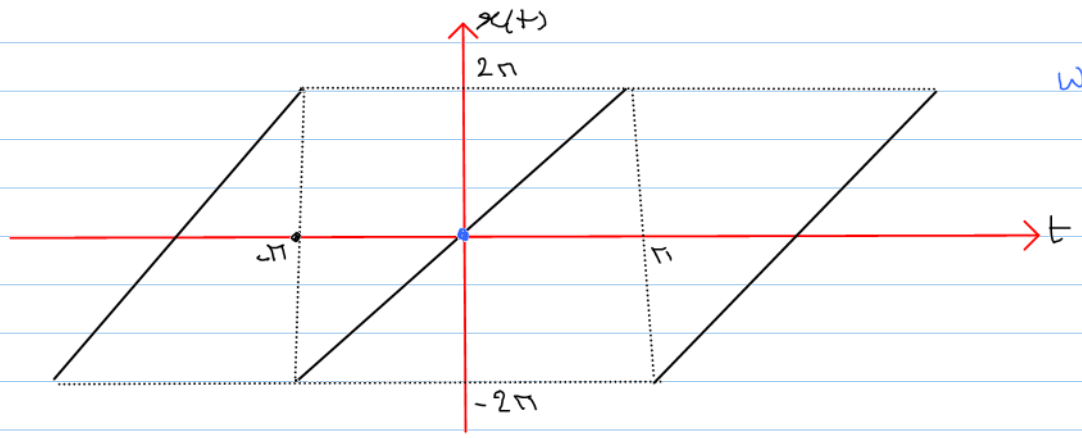
$$C = \frac{1}{\pi}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k jk = 0$$



$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \frac{(1 + -1)}{2} = 0$$

سؤال.

اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ با دوره تناوب $T_0=2\pi$ با a_k نشان دهیم، حاصل $C=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$ و $B=\sum a_{-k}(-1)^k$ و $A=\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k$ را حساب کنید.



$\omega_0 = 1$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ ($t=0$: $e^{jk\omega_0 t}\to 1$; $t\to 0$: $x(t)\to x(0)$)

$\underline{C = 0}$

$0 = x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k$

$B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{j\pi k}$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(-t) \longrightarrow a_{-k} \Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk\times 1\times t}$

$x(-\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{jk\times\pi} = B$

$x(-\pi) = \frac{-2\pi+2\pi}{2} = 0$

$\underline{0 = B}$

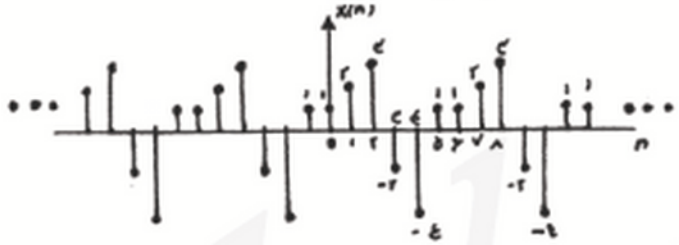
$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, a_k$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{j} \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\, a_k e^{jk\omega_0 t} \to 0$$

$$\frac{1}{j} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, a_k = A$$

برای سیگنال گسسته و متناوب $x(n)$ در شکل زیر با ضرایب سری فوریه a_k مقدار $\sum_{k=-3}^{3} a_k$ کدام است؟

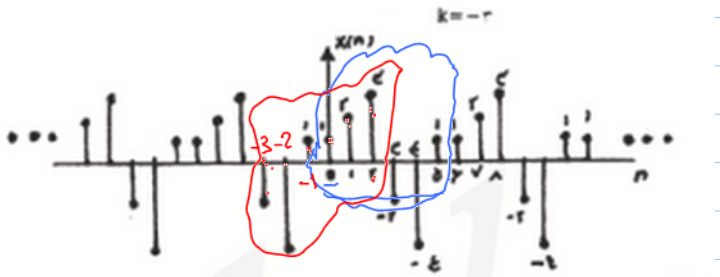


۱) $-\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $-\frac{5}{6}$

۴) $\frac{5}{6}$



$$A = \sum_{k=-3}^{3} a_k$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jk w_0 n}$$

$N_0 = 6 = 5 - 0 + 1$

$$x[n] = \sum_{k=\langle 6 \rangle}^{2} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

$w_0 = \frac{\pi}{3}$

$$A = \sum_{-3}^{3} a_k = a_{-3} + a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$A = \left(\sum_{k=-3}^{2} a_k \right) + a_3 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \checkmark$$

$\sum_{k=-3}^{2} a_k$: 1 — a_3 : $-\frac{1}{6}$

$$\sum_{k=-3}^{2} a_k = x[0] = 1$$

$$a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{3}n}$$

بعدی a_k بیا $\leftarrow a_3$

$$a_3 = \frac{1}{6}\left(1\, e^{-jk\frac{\pi}{3}\times 0} + 2\, e^{-jk\frac{\pi}{3}\times 1} + 3\, e^{-jk\frac{\pi}{3}\times 2} + \cdots + 1\, e^{-jk\pi/3\times 5} \right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + 2\, e^{-j\pi} + 3\, e^{-j2\pi} + \cdots + 1\, e^{-j5\pi} \right)$$

$$= -\frac{1}{6}$$

پایان سوال

جلسه ۳۴ سیگنال

"رابطه پارسوال"

انتگرالی از $x(t)$ یا مزایب سری فوریه یک سیگنال ← تعریف سری فوریه یا تعریف مزایب سری فوریه

انتگرال یا سیگمایی از حاصلضرب دو سیگنال یا توان دوم یک سیگنال ؟

برای مثال بگوید:

$$x(t) \longrightarrow a_k = \frac{k}{|k|+1} \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) \longrightarrow b_k = k \qquad y(t)$$

$$\int x(t)y(t)\,dt = ? \qquad \int x(t)y(-t)\,dt = ? \qquad \int x(t)^2\,dt$$

یا برای مثال بگوید:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) \longrightarrow a_k$$

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right),\ T_0 = 4 \longrightarrow b_k$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k = ? \qquad \sum a_k b_{-k} = ? \qquad \sum a_k b_k^* = ?$$

$$\sum a_k^2 = ?$$

حاصیت پارسوال:

دلیل استفاده از تبدیل های زمانی به فرکانس ؟ برای ساده سازی کانولوشن

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

کانولوشن با تغییر حوزه تبدیل به ضرب می شود و برعکس.

حوزه زمان ← فرکانس

$T_0, x(t) \longrightarrow a_k$

$T_0, y(t) \longrightarrow b_k$

$\Rightarrow$

$x(t) * y(t) \longrightarrow T_0 a_k \times b_k$

$x(t) \times y(t) \longrightarrow a_k * b_k$

مثال:

$$x(t) \longrightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} = A & k = \text{زوج} \\ \frac{1}{4} = B & k = \text{فرد} \end{cases} \quad , \quad T_0 x = 4$$

$$a_k = \frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)(-1)^k$$

$$y(t) \longrightarrow b_k = \frac{1}{2}(-1)^k \quad , \quad T_0 y = 4$$

ضرایب سری فوریه $x(t)y(t)$ و $x(t) * y(t)$ را حساب کنید.

$T_0 = 4$ $\quad x(t) * y(t) \longrightarrow T_0\, a_k \times b_k = 4 \times \underbrace{\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}(-1)^k\right)}_{a_k} \underbrace{\frac{1}{2}(-1)^k}_{b_k}$

$$x(t) \times y(t) \longrightarrow a_k * b_k$$

$$a_k * b_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m]\, b[m-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}(-1)^m\right) \frac{1}{2}(-1)^{m-k}$$

مثال. اگر $x(t) = \cos(2\pi t)$ و $y(t) = \sin(3\pi t) + \cos(4\pi t)$ باشند ضرایب سری فوریه $x(t)y(t)$ و $x(t) * y(t)$ را حساب کنید.

$$x(t),\ T_{0x} = 1 \longrightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y(t),\ T_{0y} = l.c.m\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\} = 2 \longrightarrow ?$$

$$\omega_{0y} = \frac{2\pi}{2} = \pi \longrightarrow y(t) = \sin(3\omega_{0y}t) + \cos(4\omega_{0y}t)$$

$$y(t),\ T_{0y} = 2 \longrightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 3 \\ -\frac{1}{2j} & k = -3 \\ \frac{1}{2} & k = \pm 4 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x(t),\ \omega_{0x} = 2\pi \longrightarrow a_k$$

$$y(t),\ \omega_{0y} = \pi \longrightarrow b_k$$

$$x(t) * y(t) \longrightarrow ?$$

* اگر فرکانس پایه x و y میان باشد داریم: $x(t)y(t) \longrightarrow a_k * b_k$

$$x(t) * y(t) \longrightarrow T_0\, a_k b_k$$

اما اگر x و y دارای فرکانس پایه میان نباشد.

① $\omega_0 = g.c.m\{\omega_{0x}, \omega_{0y}\}$ ② $m_1 = \frac{\omega_{0x}}{\omega_0}$ و $m_2 = \frac{\omega_{0y}}{\omega_0}$

③ اگر $m_1 \neq 1$ باشد به جای a_k از $a_{(m_1)}[k]$

و $m_2 \neq 1$ باشد به جای b_k از $b_{(m_2)}[k]$

$x(t)$, $\omega_{0x} = 2\pi \longrightarrow a_k$

$y(t)$, $\omega_{0y} = \pi \longrightarrow b_k$

$\omega_0 = g.c.m\{2\pi, \pi\} = \pi$

$m_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \neq 1 \longrightarrow$ $a_k \longrightarrow a_{(2)}[k] = \begin{cases} a[\frac{k}{2}] & 2 \mid k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$m_2 = \frac{\pi}{\pi} = 1$

$x(t) * y(t) \longrightarrow T_0\, a_{(2)}[k] \times b_k \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2$

$x(t)\, y(t) \longrightarrow a_{(2)}[k] * b_k$

$x(t) * x(t) \longrightarrow T_0 a_k^2$

$z(t) \longrightarrow c_k$

$T_0 \sum a_k^2 = ?$

$T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 a_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \quad *1$

$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \to 0$

$T_0 \sum a_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = z(0)$

$z(t) = x(t) * x(t) = \int_{<T_0>} x(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{<T_0>} x(\tau) x(-\tau)\, d\tau$

$\int_{<T_0>} x(\tau) x(-\tau)\, d\tau = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$

$\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) x(-t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$

انرژی سیگنال یا توان سیگنال؟

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 \, dt$$

$$x(t) \longrightarrow a_k = \frac{k}{|k|+1}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{|k|+1} e^{jk\omega_0 t}$$

← اصل برد

$x(t) \longrightarrow a_k$

اصل دوبار ←

$$\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 \, dt = ?$$

$$\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, x(-t) \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

$x(t) * x(t) \longrightarrow T_0 \, a_k \times a_k$

$|x(t)|^2 = x(t) \times x^*(t)$

$z(t) = x(t) \times x^*(t) \longrightarrow a_k * a^*_{-k} = c_k$

$$\int_{<T_0>} x(t) \times x^*(t) \, dt = ?$$

$z(t) \longrightarrow c_k$ $\qquad \int_{<T_0>} z(t) \, dt = ? \; T_0 c_0$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} z(t) \, dt$$

$$\int_{<T_0>} x(t) x^*(t) \, dt = T_0 c_0$$

$$c_k = a_k * a^*_{-k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m a^*_{-(k-m)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m a^*_m$$

$$\int x(t) x^*(t) \, dt = T_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m a^*_m$$

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2$$

خاصیت پارسوال:

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(t) * x(t) \longrightarrow T_0\, a_k \times a_k = T_0\, a_k^2$

$T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = \,?$

بیا معنای رابطه پارسوال:

① $\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

$P_{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$

$\frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N_0>} |a_k|^2$

② $\frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_{-k}$ $T_0 =$ ک.م.م $\{T_{0x}, T_{0y}\}$

$\frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]\, y[n] = \sum_{k=<N_0>} a_k\, b_{-k}$

③ $\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, y(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_k$

$\frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]\, y[-n] = \sum_{k=<N_0>} a_k\, b_k$

نکته مهم: هنگام استفاده از خاصیت جابجایی توجه کنید که:

اگر فرکانس پایه هر دو سیگنال یکسان باشد مستقیم از رابطه جابجایی استفاده کنید

اما اگر فرکانس پایه x و y یکسان نباشد به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

① فرکانس پایه کل یعنی $W_{tot} = g.c.m\{W_{0x}, W_{0y}\}$ را حساب می‌کنیم.

② اگر $m_1 = \frac{W_{0x}}{W_{tot}} \neq 1$ باشد ضرایب $x(t)$ تبدیل به $a_{(m_1)}[k]$ می‌شود

③ اگر $m_2 = \frac{W_{0y}}{W_{tot}} \neq 1$ باشد ضرایب $y(t)$ تبدیل به $b_{(m_2)}[k]$ می‌شود.

در نهایت با ضرایب جدید سری فوریه x و y رابطه جابجایی نوشته می‌شود.

مثال. اگر a_k ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ باشد مقادیر A , B , C را حساب کنید.

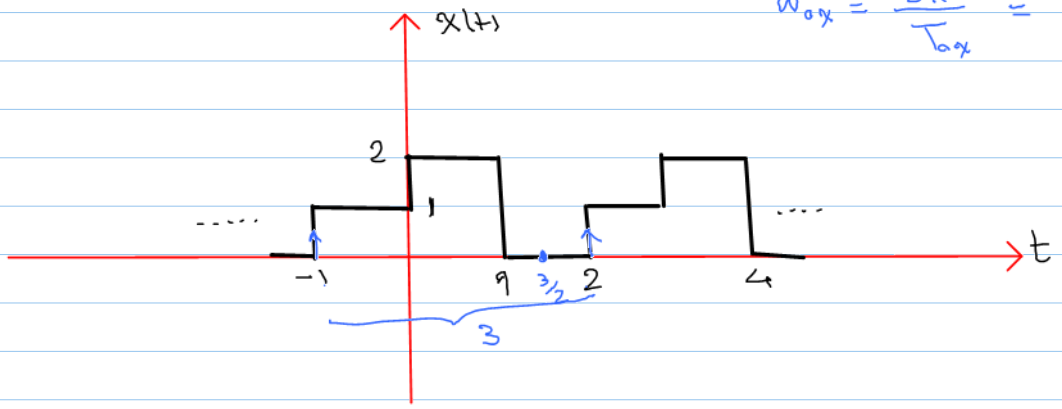
$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos(\pi k)$$

$$B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

$$C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$$w_{0x} = \frac{2\pi}{T_{0x}} = \frac{2\pi}{3}$$



$x(t)$, $w_0 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow a_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{3}t}$$

$t \to \frac{3}{2}$

$$x(\tfrac{3}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\pi} = A$$

$$Q = A$$

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos(\pi k) = ?$$

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (-1)^k$$

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\pi k}$$

$$B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

ضرایب y × ضرایب فوریه x $\sum$ یا $\sum$ (ضرایب فوریه)^2

$$? = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

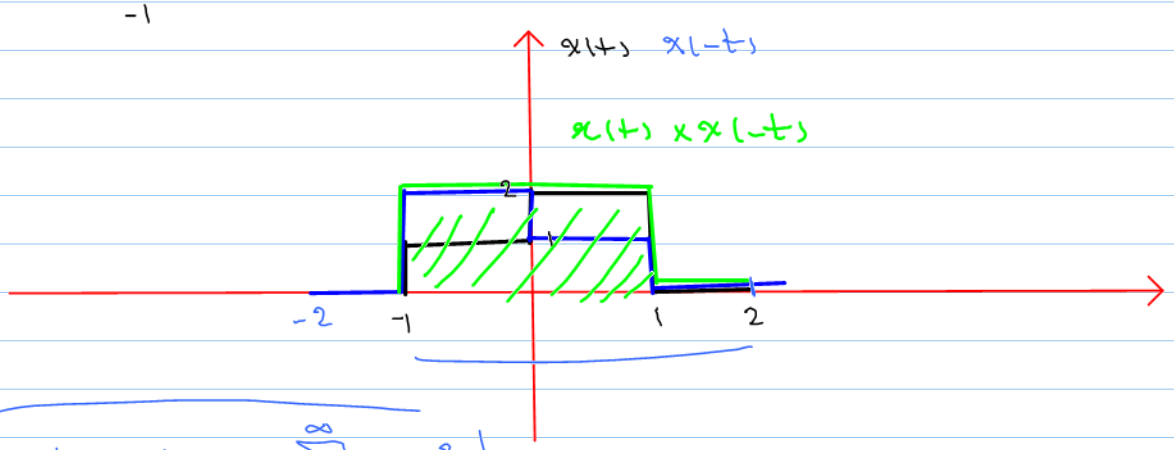
(3) $\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\,\cancel{y(t)}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cancel{b_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$\cancel{x(t)}\ \cancel{y(t)} \longrightarrow \cancel{b_k}$

$$\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\,x(-t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

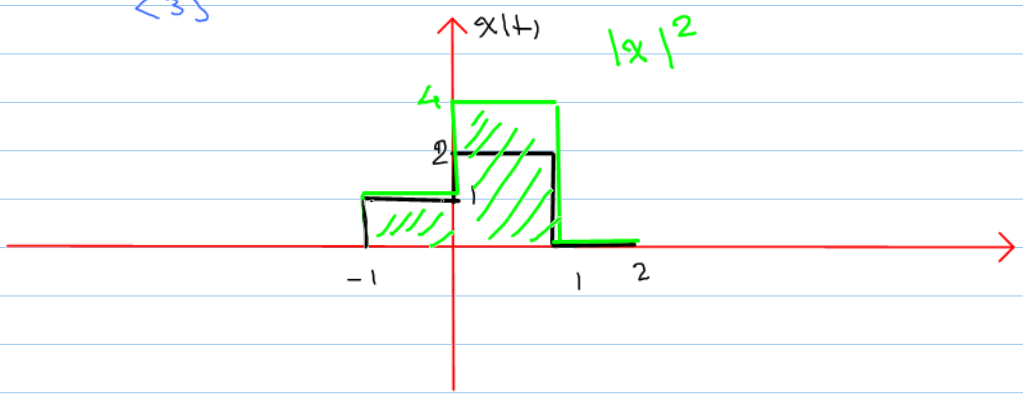
$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x(t)\,x(-t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$



$$\frac{1}{3} \times 4 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2$$

$$C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

(1) $\frac{1}{3}\int_{\langle 3\rangle} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$



$$\frac{1}{3}(1+4) = \sum |a_k|^2$$

مثال: اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\delta(2t-3k)\, e^{j\frac{\pi}{3}t}$ را C_k بنامیم

مقدار C_0 و C_3 را حساب کنید.

$$z(t) \longrightarrow C_k$$

$$C_0=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} z(t)\,dt$$

$$C_k=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} z(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\delta(2t-3k)\,e^{j\frac{\pi}{3}t} \qquad C_0=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\delta(2t-3k)\,e^{j\frac{\pi}{3}t}\,dt$$

$$z(t)=\underbrace{\left(3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(2t-3k)\right)}_{x(t)}\times\underbrace{e^{j\pi/3\,t}}_{y(t)}$$

$$x(t)\times y(t)\longrightarrow a_k * b_k$$

$$3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k)\longrightarrow a_k=\frac{1}{3}\times 3=1 \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{3}$$

$t\to 2t$

$$3\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(2t-3k)\longrightarrow a_k=1 \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{3}\times 2=\frac{4\pi}{3}$$

$$x(t),\ \omega_{0x}=\frac{4\pi}{3}\longrightarrow a_k=1$$

$$y(t),\ \omega_{0y}=\frac{\pi}{3}\longrightarrow b_k=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$x(t)\times y(t)\longrightarrow a_k * b_k$$

$$\omega_0=g.c.m\left\{\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right\}=\frac{\pi}{3}$$

$$m_1=\frac{4\pi/3}{\pi/3}=4\neq 1\longrightarrow a_k\longrightarrow a_{(4)}[k]$$

$$m_2=\frac{\pi/3}{\pi/3}=1 \qquad b_k$$

$x(t) * y(t) \longrightarrow a_{(4)}[k] * b_k$

$$b_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = 1\,\delta(k-1)$$



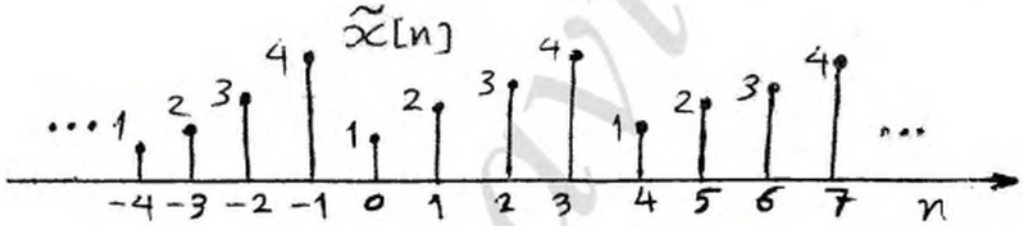
$$a_{(4)}[k] * \delta(k-1) = a_{(4)}[k-1]$$

$$x[n] * \delta[n-a] = x[n-a]$$

$z(t) = x(t) \times y(t) \longrightarrow a_{(4)}[k-1] = c_k$

$$\begin{cases} c_0 = a_{(4)}[-1] = 0 \\ c_3 = a_{(4)}[2] = 0 \\ c_{-3} = a_{(4)}[-4] = a_{-4/4} = a_{-1} = 1 \end{cases}$$

فرض کنید ضرایب سری فوریهٔ سیگنال $\tilde{x}[n]$ داده شده در شکل زیر برابر a_k باشد. اگر سیگنال $\tilde{y}[n]$ را به صورت سیگنالی با ضرایب سری فوریه $b_k = a_k^2$ تعریف کنیم، در این صورت $y[2]$ چقدر است؟



۱) ۵

۲) $۶\frac{۱}{۲}$

۳) ۰

۴) $۷\frac{۱}{۲}$

$x[n] \longrightarrow a_k$

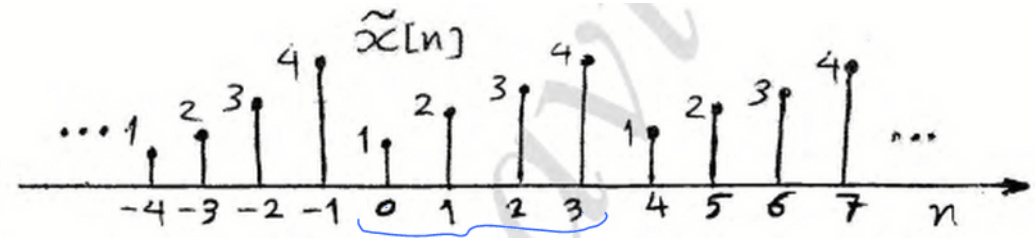
$y[n] \longrightarrow b_k = a_k^2$ $\qquad$ $y[2] = ?$

$x[n] * x[n] \longrightarrow N_0\, a_k \times a_k = N_0 a_k^2$

$\frac{1}{N_0}\, x[n] * x[n] \longrightarrow a_k^2$

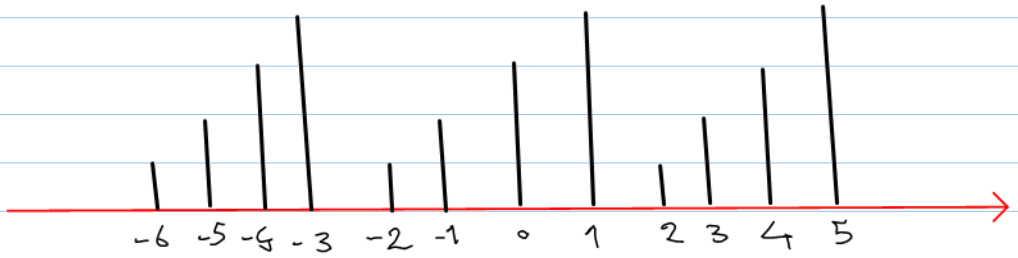
$y[n]$

$$y[2] = \frac{1}{N_0} \sum_{m=<N_0>} x[m]\, x[2-m] = \frac{1}{N_0} \sum_{m=<N_0>} x[m]\, x[2-m]$$

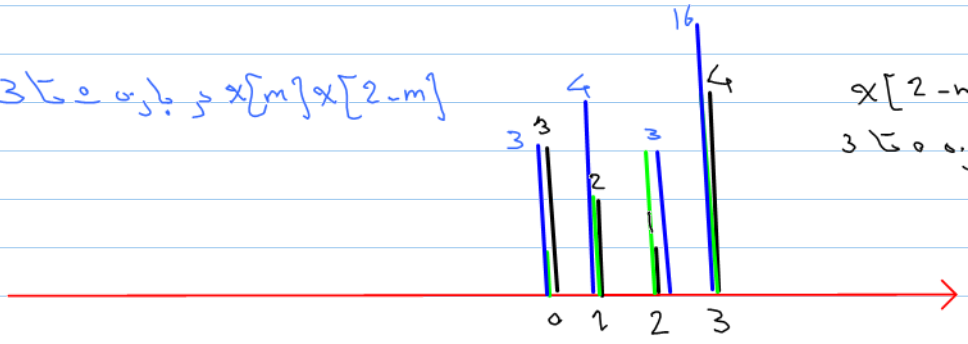


$N_0 = 4$

$$y[2] = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{3} x[m]\, x[2-m]$$



ضرب $x[m]x[2-m]$ در بازه ۳ تا ۰



$x[2-m]$ در بازه ۳ تا ۰

$$y[2] = \frac{1}{4}(26)$$

برق ۹۱

فرض کنید سیگنال حقیقی $\tilde{x}[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی $N=4$ بوده و مقدار متوسط آن صفر است. اگر در بسط به سری فوریهٔ این سیگنال دو تا از ضرایب به صورت $a_1 = -1+j3$, $a_2 = -2$ باشند، در این صورت توان متوسط سیگنال $\tilde{x}[n]$ چقدر است؟

۱) ۱۴

۲) ۱۸

۳) ۲۸

۴) ۲۴

$x[n]$ ، $N_0 = 4$ $\longrightarrow$ a_k

x حقیقی و مقدار dc $= a_0$

$$\begin{cases} a_2 = -2 \\ a_1 = -1 + j3 \end{cases}$$

$$P_x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{3} |a_k|^2$$

اطلاعات مسأله ← حوزه زمان ← x حقیقی و مقدار متوسط $x = 0$

حوزه زمان ← a_2 ، a_1

$x[n]$ حقیقی $\longrightarrow$ $x[n] = x^*[n]$

$$a_k = a^*_{-k}$$

مقدار متوسط x $= a_0$

$$a_0 = a_0$$

اطلاعات در حوزه زمان

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -1 + j3 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

$a_k = a^*_{-k}$

$$P_x = \sum_{k=0}^{3} |a_k|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2$$

$a_3 = ?$ $\qquad$ $a_{k+m\times 4} = a_k$

$a_3 = a_{\cdots + m\times 4}$

$a_3 = a_{0+m\times 4} \rightarrow m = -\frac{3}{4}$ ✗

$a_3 = a_{1+m\times 4} \rightarrow m = -\frac{2}{4}$ ✗

$a_3 = a_{2+m\times 4} \rightarrow m = -\frac{1}{4}$ ✗

$a_k = a^*_{-k} \rightarrow a_k^* = (a^*_{-k})^* = a_{-k}$

$\underline{a_k^* = a_{-k}}$

$a_0^* = a_{-0}$

$a_1^* = a_{-1} \rightarrow \underline{a_{-1}} = a_1^* = (-1+j3)^* = -1-j3$

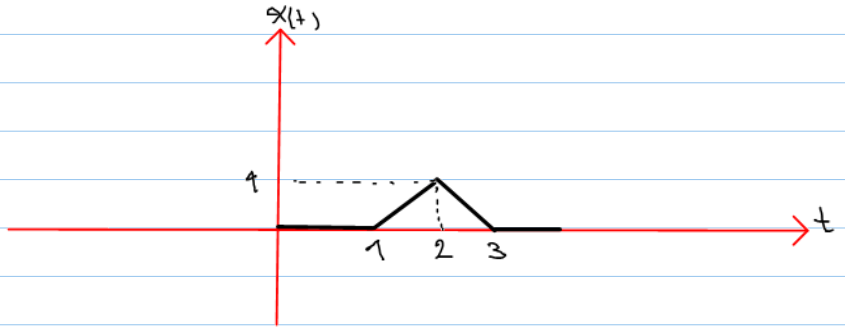
$a_3 = a_{\underline{-1}+m\times 4} \rightarrow m = 1$ ✓

$\checkmark a_3 = a_{-1} = -1-j3$

$a_0 = 0 \quad a_1 = -1+j3 \quad a_2 = -2 \quad a_3 = -1-j3$

$P_x = 0^2 + 10 + 2^2 + 10 = 24$ ✓

دکتری ۹۱. سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب $T_0 > 3$ در بازه $0 \le t \le T_0$ داده شده است. اگر ضرایب سری فوریه این سیگنال را a_k بنامیم، T_0 چقدر باشد تا $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = 0$



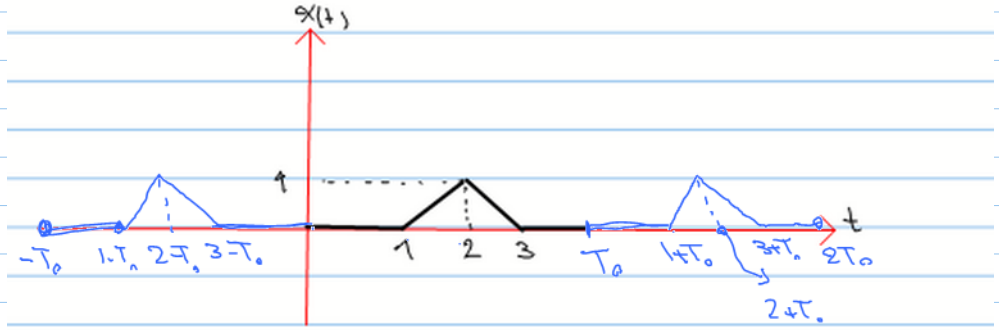
6 5 4 3

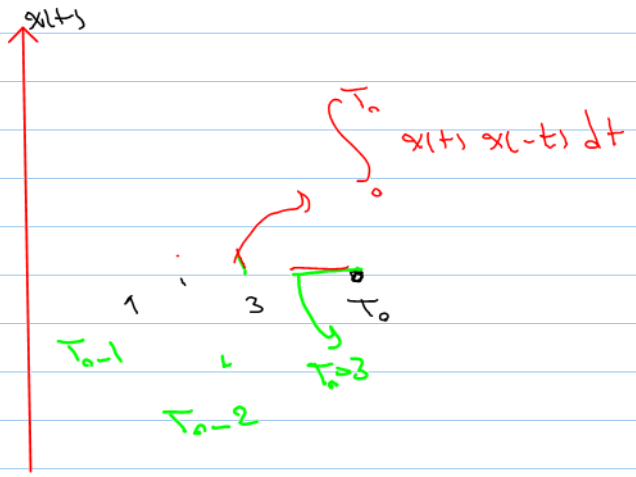
$x(t) \longrightarrow a_k$

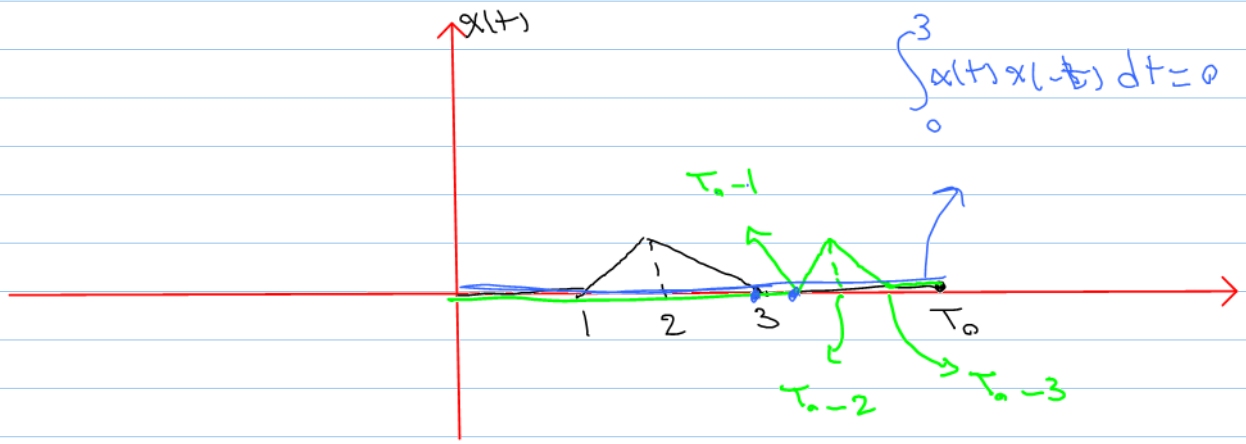
$? \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = 0 \longrightarrow T_0 = ?$

③ $\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, y(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k$

$\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = 0$

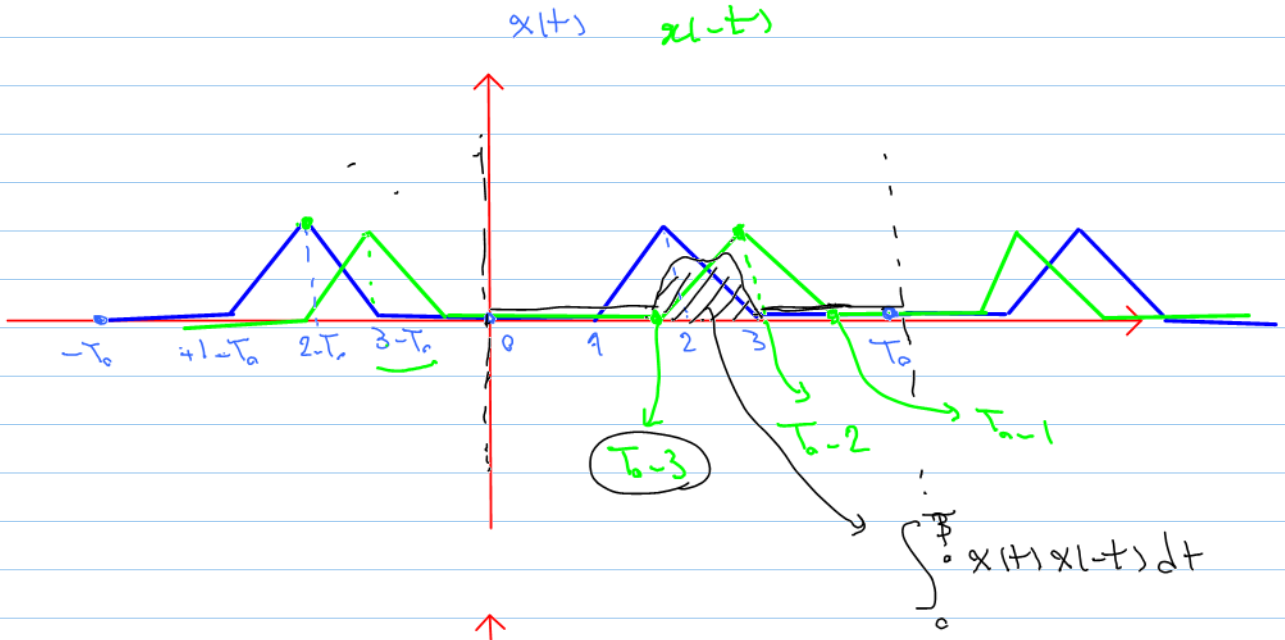


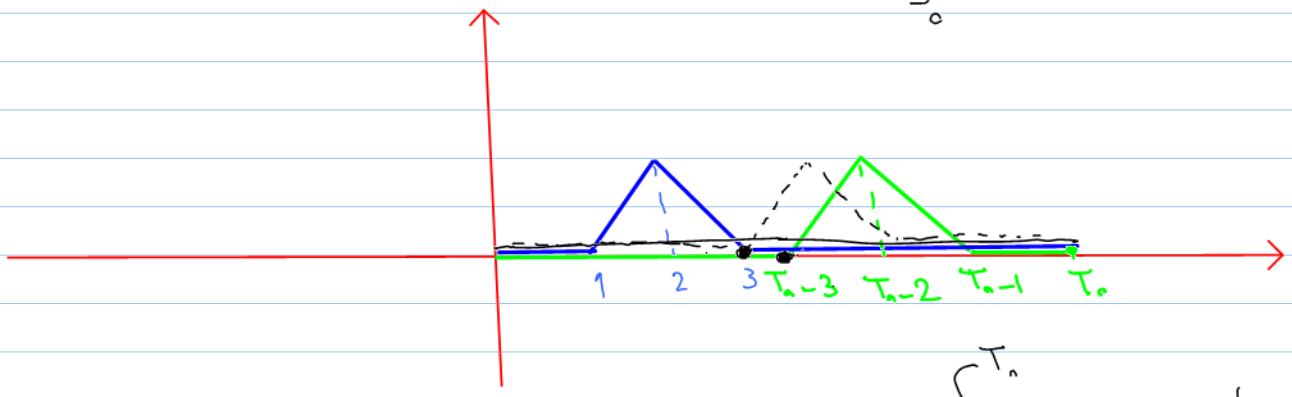




$T_0 - 1 > 3$ $\quad T_0 > 4$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,x(-t)\,dt = 0$$





$$\int_0^{T_0} x(t)x(-t)\,dt = 0$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 = 0$$

$T_0 - 3 \geq 3 \rightarrow \boxed{T_0 \geq 6}$

3 4 5 (6 ✓)

جلسه ۳۶ سیگنال

خاصیت دوگانی سری فوریه:

$x[n] \longrightarrow a[k]$

$a[n] \longrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$

خاصیت دوگانی فقط برای سیگنال گسسته است.

سری فوریه برای سیگنالهای متناوب تعریف می‌شود.

$x(t), T_0 \longrightarrow a_k$ متناوب a_k

$g[n] = \frac{n}{|n|+1} = a_n$?

$a_k = \frac{k}{|k|+1}$

$\begin{cases} x[n], N_0 \longrightarrow a_k \\ g[n] = a_n, N_0 \longrightarrow \frac{1}{N_0} x[-k] \end{cases}$ متناوب با N_0 a_k

جایی استفاده می‌شود که سیگنال داده شده بر حسب سری فوریه باشد.

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ داده شده را بیابید.

$$x[n] = \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\pi}, \quad N_0 = 8 \longrightarrow a_k ?$$

$$\Pi\left(\frac{n}{2N_1}\right), N_0 \longrightarrow \frac{2}{N_0} \frac{\sin(k \times \frac{2N_1}{N_0}\pi)}{\frac{2k\pi}{N_0}}$$

$$y[n] = \Pi\left(\frac{n}{4}\right), N_0 = 8 \longrightarrow b_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}, \quad N_0 = 8$$

$k \to n$

$$x[n] = \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\pi}, N_0 = 8 \longrightarrow a_k = ?$$

$$x[n] = b_n \longrightarrow \frac{1}{8} y[-k] = \frac{1}{8} \Pi\left(\frac{-k}{4}\right) = a_k$$

فرض کنید سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب N_0 دارای ضرایب سری فوریه a_k باشد.
اگر $y[n]=a_n$ تعریف شود ضرایب سری فوریه $y^*[-n+1]$ را بیابید.

$x[n]\ ,\ N_0 \longrightarrow a_k$

$k \to n$

$y[n]=a_n \longrightarrow \frac{1}{N_0}\, x[-k]=b_k$

$y[n]\ ,\ N_0 \longrightarrow b_k$

$y^*[-n+1] \longrightarrow ?$

$y[n]\ ,\ w_0 \longrightarrow b_k$

$n \to n-(-1)$ ، $e^{-jkw_0(-1)}$

$y[n+1]\ ,\ w_0 \longrightarrow b_k e^{jkw_0}$

$n \to -n$ ، $k \to -k$

$y[-n+1]\ ,\ w_0 \longrightarrow b_{-k} e^{-jkw_0}$

$*$ ، $k \to -k$

$y^*[-n+1]\ ,\ w_0 \longrightarrow \left(b_k e^{jkw_0}\right)^* = b_k^* e^{-jkw_0}$

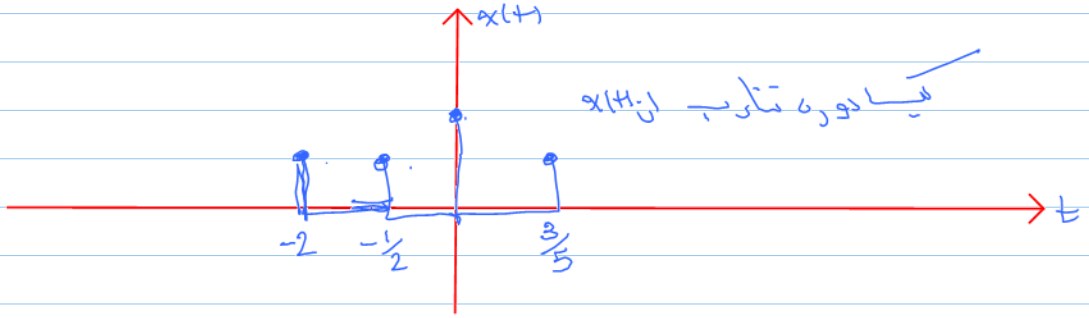
$b_k = \frac{1}{N_0}\, x[-k]$

$\frac{1}{N_0}\, x^*[-k]\, e^{-jkw_0}$

نکته! اگر $x(t)$ ($x[n]$) دارای دوره تناوب T_0 (N_0) باشد و $x(t)$ ($x[n]$) حداکثر در لحظات متوالی m مقدار ثابت باشد آنگاه داریم:

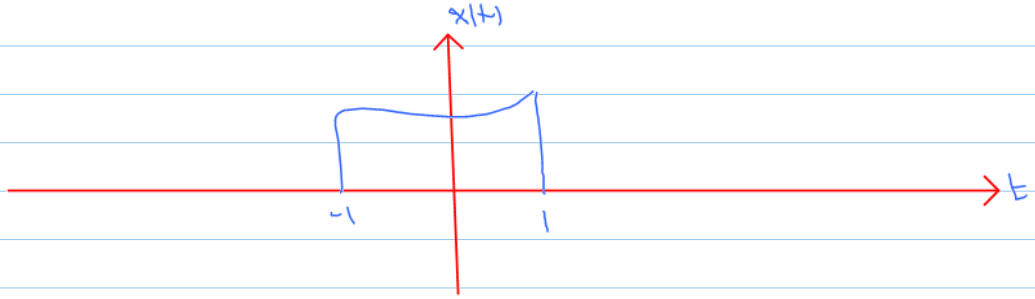
$$a_k = a_{k+\frac{T_0}{m}} \qquad a_k = a_{k+\frac{N_0}{m}}$$

$x(t)$, T_0 $\longrightarrow$ a_k ثابت تناوب



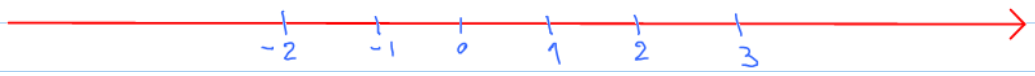
یک دوره تناوب $x(t)$

$$m = g.c.m\{-2, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{3}{5}\} = 1 \longrightarrow a_{k+\frac{T_0}{1}} = a_k$$



$$m = g.c.m\{\text{جاهایی که } x(t) \neq 0\} \longrightarrow a_k = a_{k+\frac{T_0}{m}}$$

$x[n]$, N_0 $\longrightarrow$ a_k , N_0



$$m = g.c.m\{\text{اعداد صحیح}\} = 1 \longrightarrow a_k = a_{k+\frac{N_0}{1}}$$

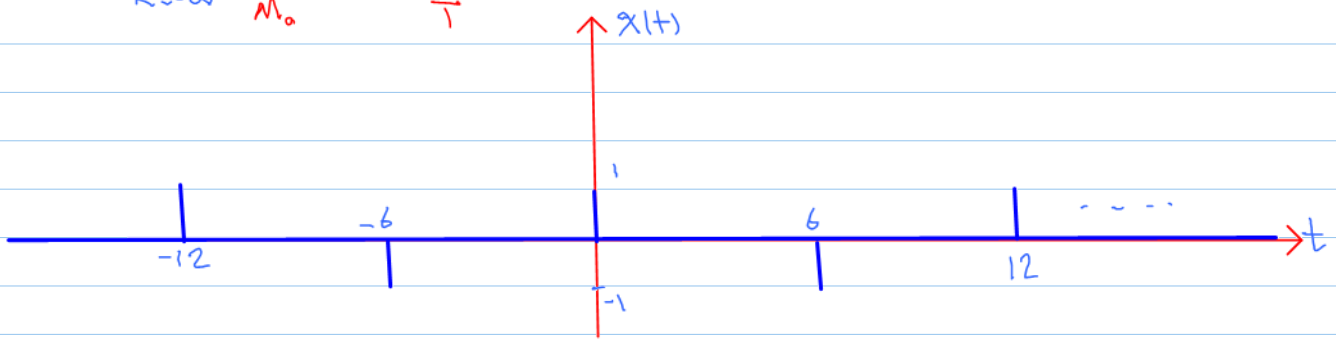
* هرگاه مزایب سری فوریه $x(t)$ متناوب باشد آنگاه یعنی $x(t)$ حتما در مزایب m مقدار دارد. و اگر مزایب سری فوریه $x[n]$ متناوب با دوره تناوب کمتر از N_0 مقدار داشته باشد این حالت اتفاق افتاده است.

مثال: در مورد ضرایب سری فوریه $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-6k)$ کدام گزینه صحیح است؟

(1 $a_2=a_5$ (2 $a_2=a_6$ (3 $a_2=a_3$ (4 $a_2=a_1$

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{(-1)^k}_{M_0}\,\delta(t-\underbrace{6k}_{T}) \quad , T_0=2\times 6=12$



$m=g.c.m\{0,6,12,18,\dots\}=6$

$a_k=a_{k+\frac{T_0}{6}} \rightarrow a_k=a_{k+\frac{12}{6}} \Rightarrow a_k=a_{k+2}$

$a_2=a_{2+2}=a_4=a_{4+2}=a_6$

$a_2=a_6$

سوال ۹۵: $x[n]$ یک سیگنال گسسته با دوره تناوب زوج N_0 است. اگر $z[n] \triangleq x[2n]$ باشد و ضرایب سری فوریه $x[n]$ برابر $a_k = a_{k+\frac{N}{2}}$ باشد آنگاه $x[2n+1]$ برابر است با: ۱) $-z[n]$ ۲) $(-1)^n z[n]$ ۳) ۰ ۴) $(-1)^n$

$x[n]$, N_0 $\longrightarrow$ a_k , $\frac{N_0}{2}$

هرگاه ضرایب سری سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب کمتر از N_0 باشد یعنی $x[n]$ حداکثر در $\frac{\text{دوره تناوب } x[n]}{a_k}$ مقدار دارد.

x در $\frac{N_0}{\frac{N_0}{2}} = 2$ مقدار دارد.

$$x[n] = \begin{cases} \text{غیرصفر} & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$x[3] = 0$ $\quad$ $x[5] = 0$

$x[2n+1] = x[\text{اعداد فرد}] = 0$

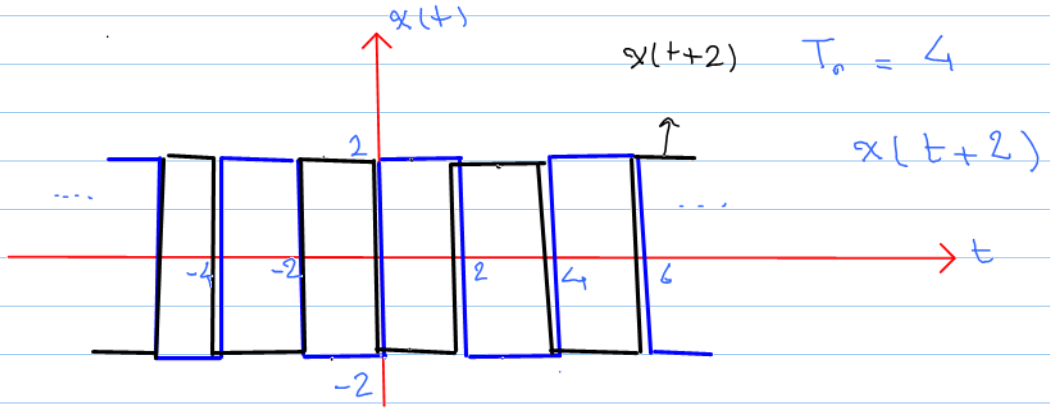
نکته! اگر x یک سیگنال متناوب دارای تقارن نیم موج باشد آنگاه منوایب سری فوریه آن به ازای kهای زوج صفر است.

تقارن نیم موج $\leftarrow$ $x(t+\frac{T_0}{2}) = -x(t)$ $\leftarrow$ $a_{\text{زوج}} = 0$

مثال: اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد، در مورد ضرایب سری فوریه آن کدام گزینه صحیح است؟

1) $\mathrm{Re}\{a_k\}=0$ 2) $a_k + a_k^* = 0$ 3) $a_4 = a_6 = 0$

$a_k + a_{-k}^* = 2\mathrm{Re}\{a_k\}$



$x(t+2) = -x(t)$ ← متناوب با دوره ← $a_{\text{زوج}} = 0$

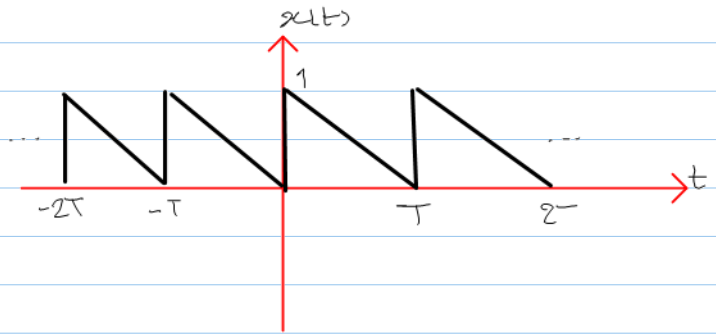
جلسه سوم آنلاین

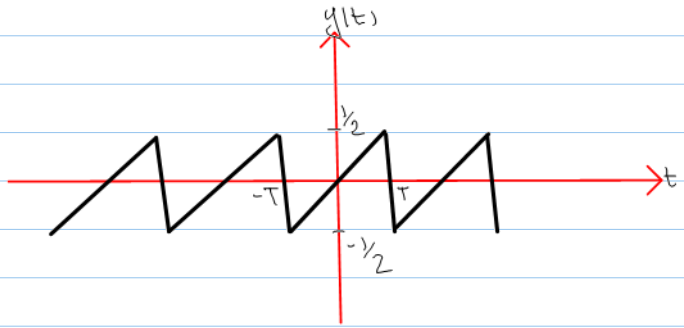
سیگنال

سری فوریه

① اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ را a_k بنامیم، ضرایب سری فوریه $y(t)$ کدام است؟

1) $a_k = \frac{1}{2}$
2) $a_k e^{-jk\pi}$
3) $a^*_{-k} = \frac{1}{2}$
4) $a_{-k} e^{-jk\pi} - \frac{1}{2}\delta(k)$

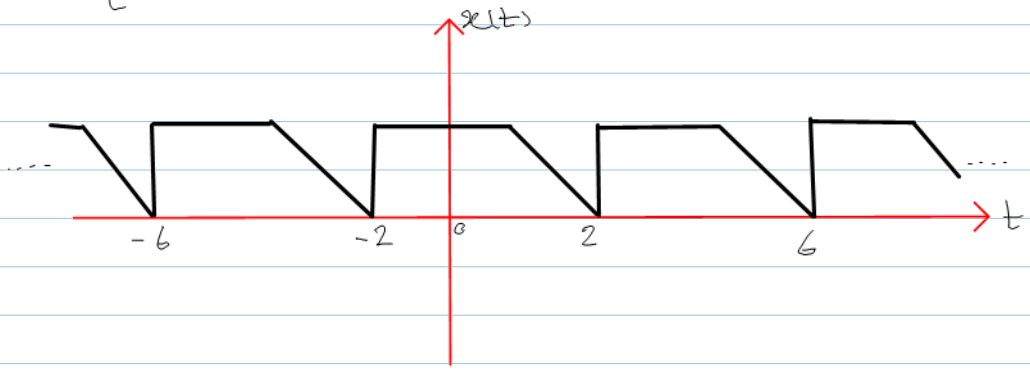




(2) اگر $x(t)$ دارای ضرایب سری فوریه a_k بوده و $y(t)$ دارای ضرایب سری فوریه b_k باشد، مقدار $y(t)$ در لحظه $t=3$ کدام است؟

$$b_k = \begin{cases} a_k & k \text{ زوج} \\ -a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

1) 0 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) 2



(۳) سیگنال $x(t)$ حقیقی با پریود $T_0=4$ است که دارای ضرایب سری فوریه a_k می‌باشد

که $a_k=0$ و $\forall |k|>1$ ضرایب سری فوریه یک سیگنال فرد است. $b_k=a_k e^{-j\frac{\pi}{2}k}$

با فرض $\int_2^6 |x(t)|^2 dt = 2$ ، سیگنال $x(t)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi}{2}t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{2}t)$ 2) $\pm\cos(\frac{\pi}{2}t)$

3) $\pm\cos(\frac{\pi}{2}t+\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$ 4) اطلاعات مسأله برای تعیین $x(t)$ کافی نیست.

۴) ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ کدام است؟

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{3}m}\,\delta(t-2m)$$

۱) $a_k = \frac{1}{6}\left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)\right)$

۲) $a_k = \frac{1}{3}\left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)\right)$

۳) $a_k = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(k-3m)$

۴) $a_k = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(k-1-3m)$

۵) کدام گزینه حاصل $\sum_{k=\langle N \rangle} e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$ را بدرستی نشان می‌دهد؟

1) ۰

2) $\sum_{k=\langle N \rangle} N\delta[n-kN]$

3) $\sum_{k=\langle N \rangle} N\delta[n-kN]$

4) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} N\delta[n-kN]$

(4)

آ) اگر $x(t) = \frac{1}{3} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}(-1)^k \cos(k\pi t)$ باشد حاصل $I = \int_{-1}^{1} x(t)\cos^2(\pi t)\,dt$ کدام است؟

$\frac{2}{3} + \frac{1}{\pi^2}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2}$

$1 + \frac{1}{2\pi^2}$

$\frac{1}{\pi^2}$

۷) سیگنال $x[n]$ دارای دوره تناوب $N=8$ می‌باشد. اگر $\sum_{n=-2}^{5} x[n] = 8$ و $\sum_{n=0}^{7} x[n](-1)^n = 1$ باشد، آنگاه سیگنال $x[n]$ با کمترین توان ممکن کدام است؟

1) $1 - \frac{1}{8}(-1)^n$

2) $1 + \frac{1}{8}(-1)^n$

3) $1 + \frac{1}{8}\cos(\frac{\pi}{2}n) + \frac{1}{8}\cos(\frac{\pi}{4}n)$

4) $\delta[n] + \delta[n-8]$ با دوره تناوب 8

۸) اگر a_k ضرایب سری فوریه $x(t)$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$x(t) = \begin{cases} A & t = 0, 3, 6, 9 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$T_0 = 9$$

1) $a_k = a_k e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$

2) $a_{k+3} = a_{k-3}$

3) $a_{k-3} = a_{k+3} e^{j\frac{k\pi}{9}}$

4) $a_{k-3} = a_{k+3} = a_{k-1}$

۹

x(t) یک سیگنال حقیقی متناوب با دوره تناوب ۲ و توان واحد می‌باشد و تمامی ضرایب فوریه آن بجـز a_1 و a_{-1} صفر می باشد. کدامیک ازگزینه های زیر در مورد این سیگنال صحیح نمی‌باشد؟

الف) $x(t) = \pm\sqrt{2}\cos(\pi t + \angle a_1)$

ب) مقدار بیشینه این سیگنال $\sqrt{2}$ می باشد.

ج) $x(0) = 0$

د) اگر a_1 حقیقی باشد، $x(t)$ یک سیگنال زوج خواهد بود.

۱۵

در مورد یک سیگنال حقیقی، گسسته و متناوب $x(n)$ با دوره تناوب ۵ و با ضرایب سری فوریه a_k: $a_7 = 2$ ، $a_{-1} = 1$ ، $a_5 = 0$. این سیگنال کدام است؟

۱) $2\cos(\frac{\pi n}{5}) + 4\cos(\frac{2\pi}{5}n)$

۲) $4\cos(\frac{\pi}{5}n) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}n)$

۳) $2\cos(\frac{2\pi}{5}n) + 4\cos(\frac{4\pi}{5}n)$

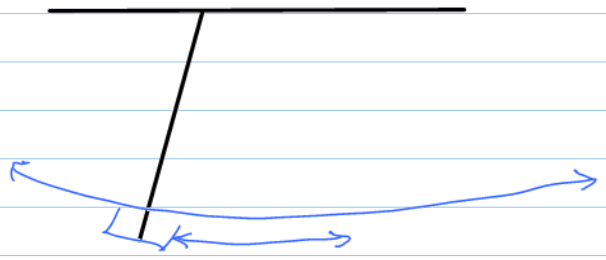
۴) $4\cos(\frac{2\pi}{5}n) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}n)$

جلسه ۲۷ سیگنال

«تبدیل فوریه»

سری فوریه: هدف؟ سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$ شامل چه فرکانس هایی می باشد؟

هوور DC: تابه:

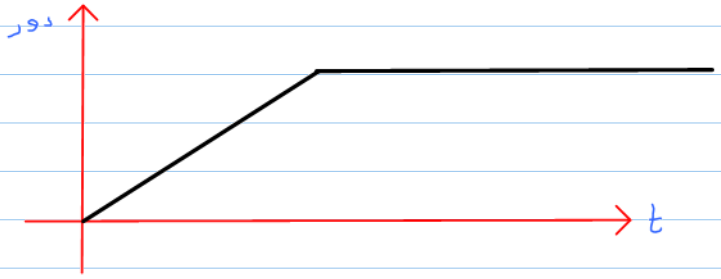




دور = 1200 rpm

فرکانس طبیعی = 60 Hz

$\omega = 3600 rpm = 60 Hz$ ← حوزه فرکانس ← $\omega(t)$

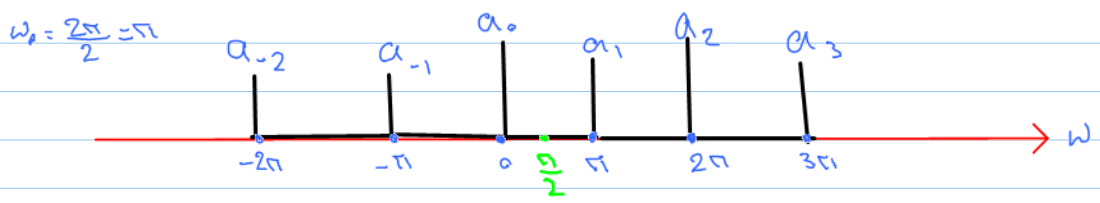


سری فوریه: اگر سیگنال متناوب باشد حوزه فرکانس ← حوزه زمان

$x(t)$, T_0 $\xrightarrow{FS}$ a_k → یعنی $x(t)$ شامل فرکانس‌های $k\omega_0$ است.

$k \times \frac{2\pi}{T_0}$

$x(t)$, $T_0 = 2$ →

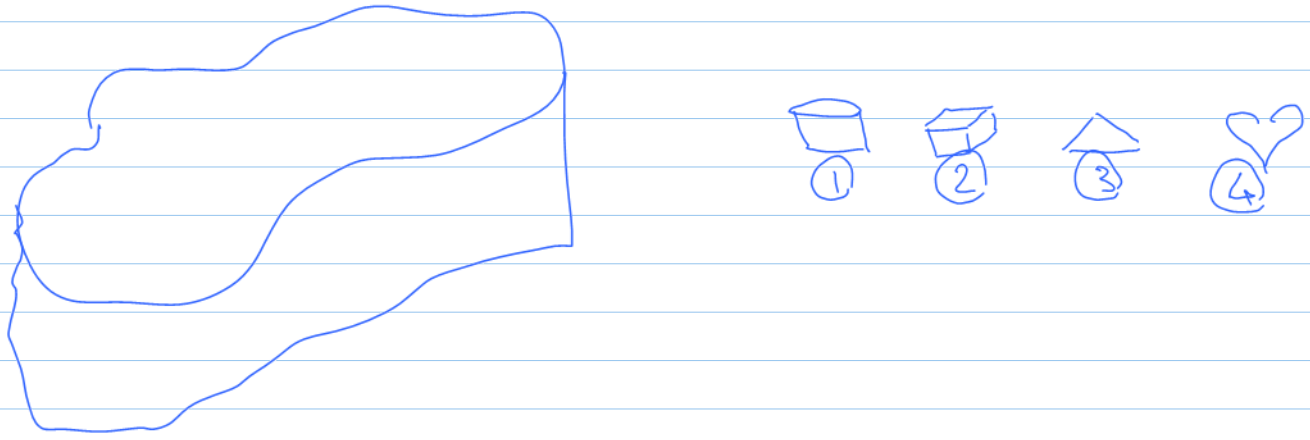


$x(t)$ با $e^{jk\omega_0 t}$ = وزن فرکانس = a_k $k\omega_0$



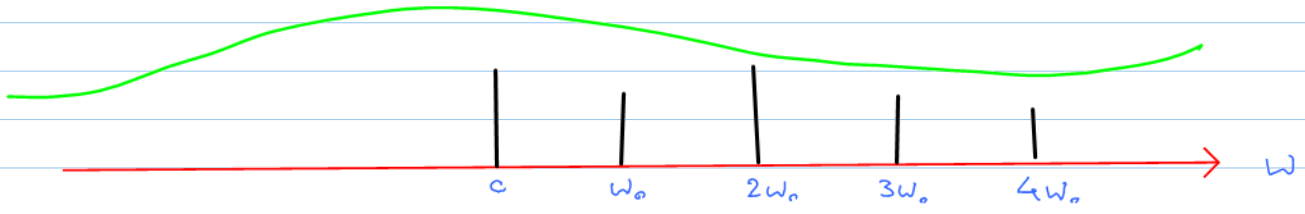
کیک = 3 تا قاب ① سایز بزرگ + 2 قاب ① سایز متوسط + 10 تا قاب ① سایز کوچک

$x(t), w_0 =$ w_0 تا 10 + $2w_0$ تا 2 + $3w_0$ تا 3



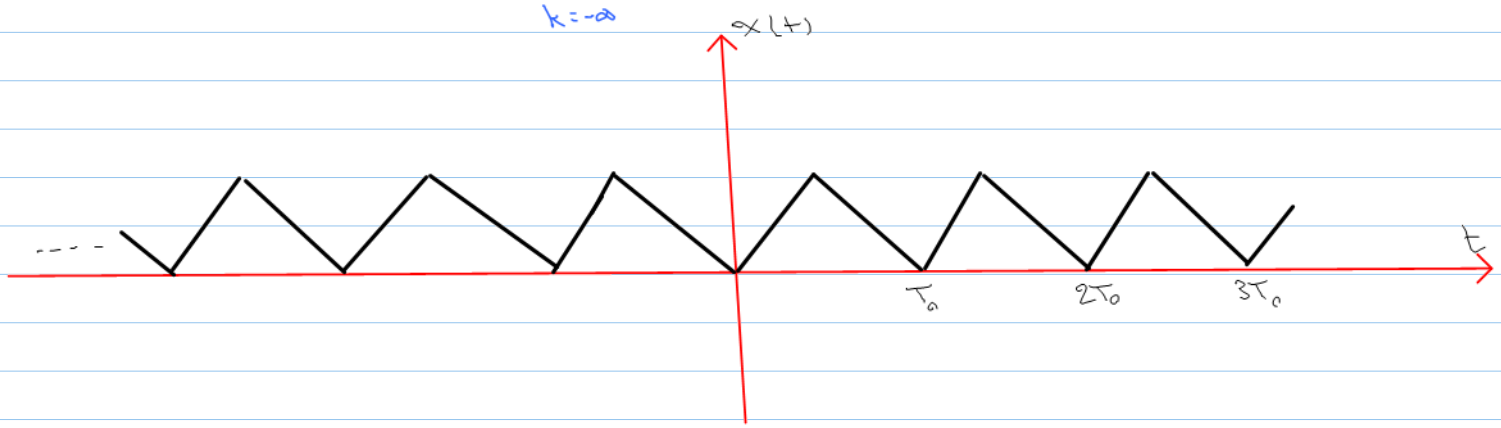
کیک = از کدام قالب‌ها

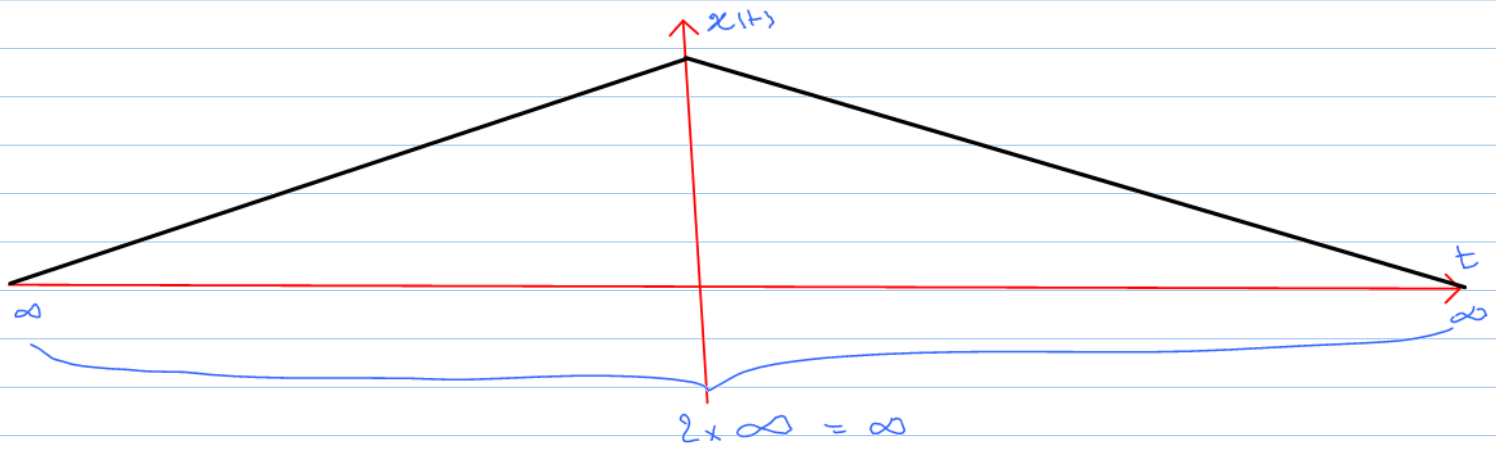
$x(t)$ ، نامتناوب = از کدام فرکانس‌ها

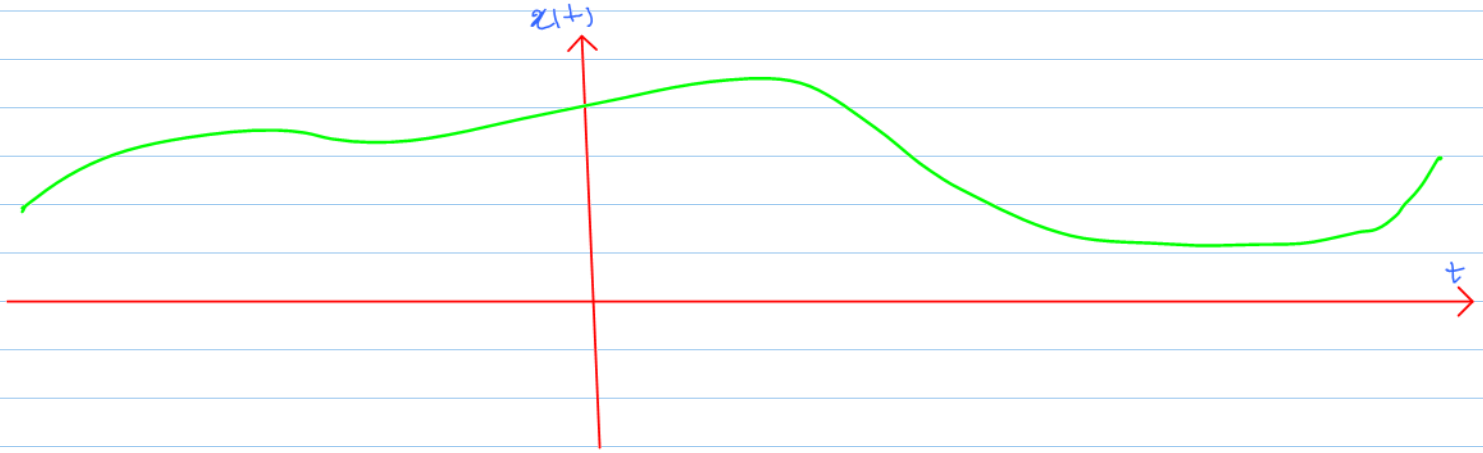


سیگنال نامتناوب ← حوزه فرکانس

$x(t)$ ، T_0 ⟶ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0 t}$







ادعا: این سیگنال از $-\infty$ به بعد تکرار می‌شود.

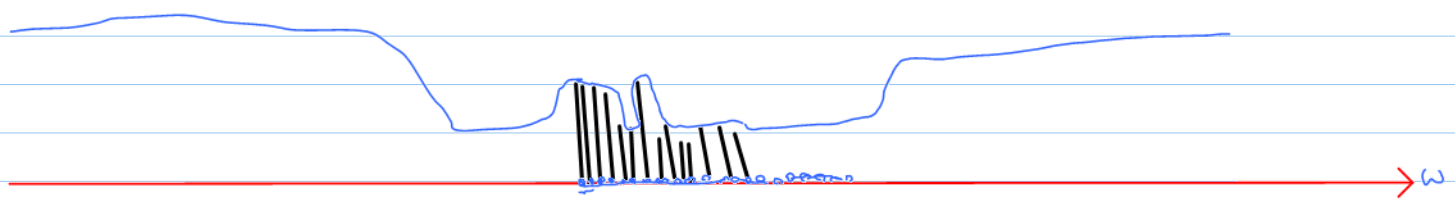
$T_0 = 2 \times \infty$ $\quad x(t)$

هر سیگنالی را می‌توان با دوره تناوب ∞ در نظر گرفت.

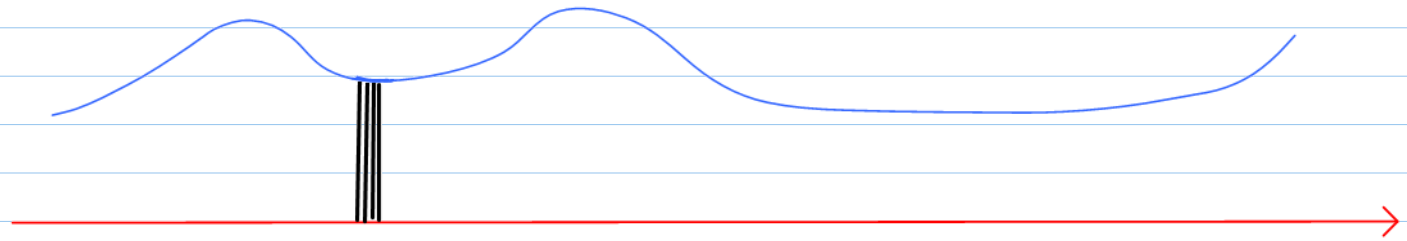
$$x(t),\ T_n = 2\times\infty \longrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jkw_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{2\times\infty} = 0^+ = \varepsilon \quad , \quad 0, \pm 1\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \pm 3\varepsilon, \dots$$



$kw_0 = (w)$ تمام اعداد برای w



a_k = $\omega = k\omega_0$ وزن

$X(j\omega)$ = " " " $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

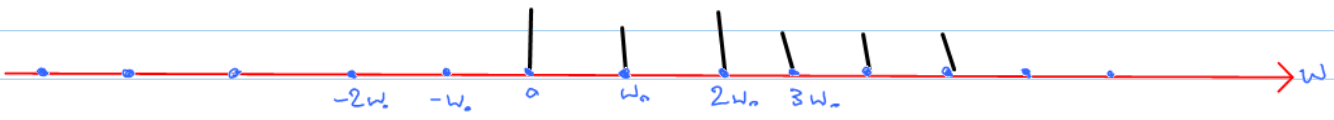
$$x(t) \longrightarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$$

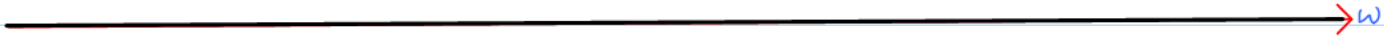
تبدیل فوریه ابزاری برای بدست آوردن معادل $x(t)$ نامتناوب در حوزه فرکانس می باشد.

* بر خلاف سیگنالهای متناوب که فقط شامل مضارب صحیح $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ می باشند، سیگنالهای نامتناوب شامل تمام فرکانسها ω می تواند باشد.

معادل حوزه فرکانس سیگنال متناوب، برحسب ω گسسته است.

" " " نامتناوب، " " پیوسته است.





$$x(t),\ T_0 \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \qquad k\omega_0 = \omega$$

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x[n],\ N_0 \longrightarrow a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

$$x[n],\ N_0=\infty \longrightarrow X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \sum_{k=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(j\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

با آنکه $x[n]$ در حوزه زمان گسسته است ولی می‌تواند تمام فرکانس‌ها را در خود داشته باشد.

معادل x در حوزه فرکانس ($X(j\omega)$) برحسب ω پیوسته است.

اگر x زمان گسسته باشد، $X(j\omega)$ متناوب با دوره تناوب 2π است.

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$X(j(\omega+2\pi)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}\, \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = X(j\omega)$$

$X(j(\omega+2\pi)) = X(j\omega)$ ← $X(j\omega)$ متناوب با 2π است.

$e^{+j\pi n} = (-1)^n$ $\qquad$ $\left(e^{j\pi n}\right)^2 = \left((-1)^n\right)^2$

$e^{j2\pi n} = 1$

$\left(e^{j2\pi n}\right)^{-1} = (1)^{-1}$

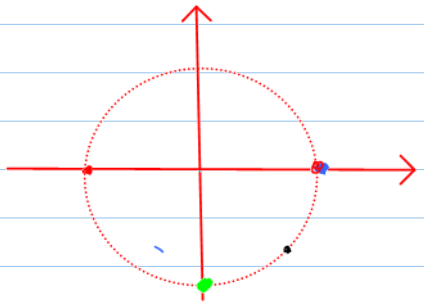
$e^{-j2\pi n} = \frac{1}{1} = 1$ ✓

$x(t) \longrightarrow X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$

$X(j(w+2\pi)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j(w+2\pi)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, e^{-j2\pi t}\, dt$

$e^{-j2\pi n} = \cos(-2\pi n) + j\sin(-2\pi n)$ (1, 0)

$e^{-j2\pi t} = \cos(-2\pi t) + j\sin(-2\pi t)$ ($\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)



$t = 0 \rightarrow 1$ $\qquad$ $t = \frac{1}{2} \rightarrow -1$ $\qquad$ $t = \frac{1}{4} \rightarrow 1$ $\qquad$ $t = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$

جلسه ۸ سیگنال

«تبدیل فوریه»

تبدیل فوریه برای سیگنالهای ناستاوب و متناوب.

$$\begin{cases} x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \text{ یا } X(\omega) \text{ یا } X(F) \\ x[n] \xrightarrow{F} X(j\omega) \text{ یا } X(\omega) \text{ یا } X(F) \text{ یا } X(e^{j\Omega}) \end{cases}$$

تبدیل فوریه

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

عکس تبدیل فوریه

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$X(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$$

$$x[n] \xrightarrow{F} X(j\omega) \qquad X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X(j\omega)\, e^{+j\omega n}\, d\omega$$

تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته وگسسته برحسب ω دوره ای است.

تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته متناوب با دوره تناوب 2π است.

حل مثال:

$$x(t) = e^{jat}\, u(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jat} \underbrace{u(t)}_{t \geq 0} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{jat} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{j(a-\omega)t}\, dt = \frac{1}{j(a-\omega)} e^{j(a-\omega)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j(a-\omega)} \left(e^{j(a-\omega)\times\infty} - 1 \right)$$

$$e^{j(a-w)\infty} = \cos((a-w)\infty) + j\sin((a-w)\infty)$$

$x(t) = e^{at}u(t)$ بسیار پرکاربرد.

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}\underbrace{u(t)}_{t\geq 0} e^{-jwt}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{(a-jw)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{a-jw}\left(e^{(a-jw)\infty} - \cancel{e^{(a-jw)\times 0}}^{1}\right)$$

$$e^{(a-jw)\infty} = e^{a\times\infty} \times e^{-jw\times\infty}$$

عددی بین ۱ و ۱-

$$e^{-jw\infty} = \cos(-w\times\infty) + j\sin(-w\times\infty)$$

$e^{a\times\infty}$ $a =$ عدد مختلط $a = 1 + j2$

$a = Re\{a\} + jIm(a)$

$$e^{a\times\infty} = e^{(Re(a)+jIm(a))\infty} = e^{Re(a)\times\infty}\,e^{jIm(a)\infty}$$

عددی بین ۱ و ۱-

$$e^{Re(a)\times\infty} = \begin{cases}\infty & Re(a) > 0\\ 0 & Re(a) < 0\end{cases}$$

$e^{2\times\infty} = e^{\infty} = \infty$ $\quad e^{-2\times\infty} = e^{-\infty} = 0$

$$e^{Re(a)\times\infty} \times e^{jIm(a)\times\infty} = \begin{cases}\infty & Re(a) > 0\\ 0 & Re(a) < 0\end{cases}$$

$$e^{(Re(a)+jIm(a))\infty} = e^{a\times\infty} = \begin{cases}\infty & Re\{a\} > 0\\ 0 & Re\{a\} < 0\end{cases}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega}\left(e^{ax\infty}\, e^{-j\omega\infty} - 1 \right)$$

$$e^{ax\infty}\, e^{-j\omega\infty} = \begin{cases} \infty & \mathrm{Re}(a) > 0 \\ 0 & \mathrm{Re}(a) < 0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{a - j\omega} \times (\infty - 1) = \infty & \mathrm{Re}(a) > 0 \\ \frac{1}{j\omega - a} & \mathrm{Re}(a) < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} \infty & \mathrm{Re}\{a\} > 0 \\ \frac{1}{j\omega - a} & \mathrm{Re}\{a\} < 0 \end{cases}$$

اگر $X(j\omega) = \infty$ یعنی تبدیل فوریه ندارد.

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow \begin{cases} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a} & \mathrm{Re}\{a\} < 0 \\ \text{وجود ندارد} & \mathrm{Re}\{a\} > 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \alpha^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} ?$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \underbrace{u[n]}_{n \geq 0} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n (e^{-j\omega})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(\alpha e^{-j\omega})}_{q}{}^n$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{q^{n_0}}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & |q|\geq 1 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(\alpha e^{-j\omega})}_{q}{}^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} & |\alpha e^{-j\omega}|<1 \\ \infty & |\alpha e^{-j\omega}|\geq 1 \end{cases}$$

$$|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha|\,\underbrace{|e^{-j\omega}|}_{1} = |\alpha|$$

$$x[n] = \alpha^n u[n] \longrightarrow \begin{cases} X(j\omega) = \dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} & |\alpha|<1 \\ \text{وجود ندارد} & |\alpha|\geq 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \delta(t-a)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad (t=a) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-j\omega a}}\, \delta(t-a)\, dt$$

$$= e^{-j\omega a} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt}_{1} = e^{-j\omega a}$$

$$x(t) = \delta(t-a) \longrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega a}$$

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow X(j\omega) = 1$$

$$x[n] = \delta[n-a] \longrightarrow$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-a]\, e^{-j\omega n} \quad (n=a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-j\omega a}}\, \delta[n-a]$$

$$= e^{-j\omega a} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-a]}_{1} = e^{-j\omega a}$$

$x[n] = \delta[n-a] \longrightarrow X(jw) = e^{-jwa}$

$x[n] = \delta[n] \longrightarrow X(jw) = 1$

$x(t) = e^{at} u(-t)$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} \underbrace{u(-t)}_{t \le 0} e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-jw)t} dt$$

$$= \frac{1}{a-jw} \left(e^{(a-jw)x0} - e^{(a-jw)x-\infty} \right)$$

$$X(jw) = \begin{cases} \frac{1}{a-jw} & Re\{a\} > 0 \\ \infty & Re\{a\} < 0 \end{cases}$$

جدول تبدیل فوریه:

حوزه زمان	شرط وجود	حوزه فرکانس
$e^{at}u(t)$	$Re\{a\} < 0$	$\frac{1}{jw - a}$
$e^{+at}u(-t)$	$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - jw}$
$t\,e^{at}u(t)$	$Re\{a\} < 0$	$\frac{1}{(jw - a)^2}$
$t\,e^{+at}u(-t)$	$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - jw)^2}$
$\delta(t - a)$	ندارد	e^{-jwa}
$\delta(t)$	ندارد	1
$u(t)$	ندارد	$\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$
e^{jat}	ندارد	$2\pi\delta(w - a)$
1	~	$2\pi\delta(w)$
$\frac{\sin(at)}{\pi t}$	$a > 0$	$\Pi\left(\frac{w}{2a}\right)$
$\Pi\left(\frac{t}{2a}\right)$	ندارد	$\frac{2\sin(w \times a)}{w}$
$\Lambda\left(\frac{t}{2a}\right)$	ندارد	$\frac{1}{2a}\left(\frac{2\sin(aw)}{w}\right)^2$
$e^{a\lvert t\rvert}$	$a < 0$	$\frac{-2a}{a^2 + w^2}$
$\delta^{(n)}(t)$	ندارد	$(jw)^n$
$sgn(t)$	~	$\frac{2}{jw}$

جدول تبدیل فوریه زمان گسسته:

حوزه زمان	شرط وجود	حوزه فرکانس
$\alpha^n u[n]$	$\|\alpha\| < 1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$
$\alpha^n u[-n]$	$\|\alpha\| > 1$	$\frac{1}{1-\alpha^{-1} e^{-j\omega}}$
$(n+1)\alpha^n u[n]$	$\|\alpha\| < 1$	$\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$
$\delta[n-a]$	ندارد	$e^{-j\omega a}$
$\delta[n]$	ندارد	1
$e^{j\omega a}$	ندارد	$2\pi\delta(\omega-a)$
1	ندارد	$2\pi\delta(\omega)$
$u[n]$	ندارد	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin[an]}{\pi n}$	$0 < a < \pi$	$\Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
$\Pi\left(\frac{n}{2a}\right)$	ندارد	$\frac{\sin\left((2a+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$
$\alpha^{\|n\|}$	$\|\alpha\| < 1$	$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(\omega)+\alpha^2}$

در تبدیل فوریه گسسته، $X(j\omega)$ متناوب با 2π است.

$X(j\omega)$ جدول فوق برای یک دوره متناوب است.

$x(t) = u(t)$ است ، $X(jf)$ را بدست آورید.

$$u(t) \longrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\underline{X(j2\pi f)} = \frac{1}{j2\pi f} + \pi\delta(2\pi f)$$

$X(jf)$

$X(jf)$ = یعنی ما ورودی بر حسب f نیاز داریم

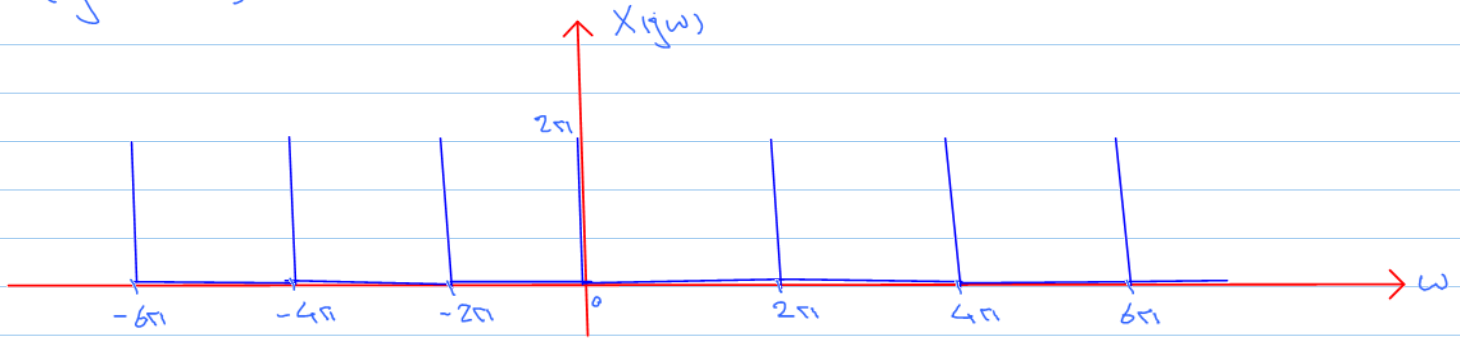
$x[n] = 1$ ← $X(jf)$ را رسم کنید.

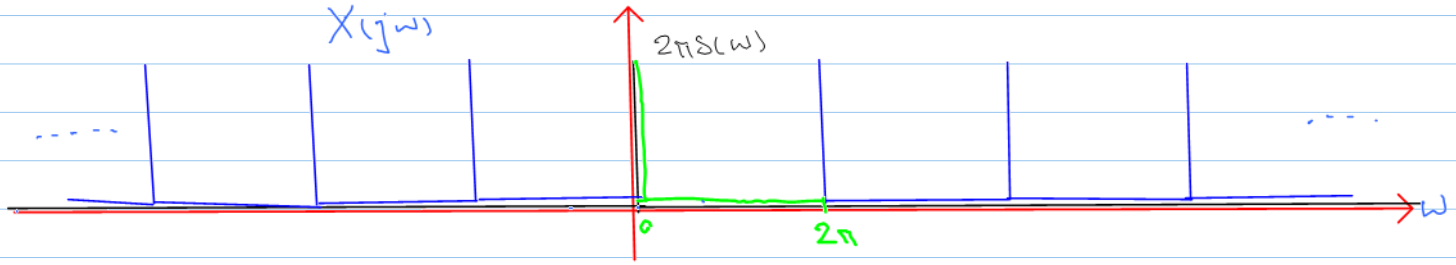
$$x[n] = 1 \longrightarrow X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$X(j2\pi f) = 2\pi\delta(2\pi f) \qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(2\pi f) = \frac{1}{|2\pi|}\delta(f)$$

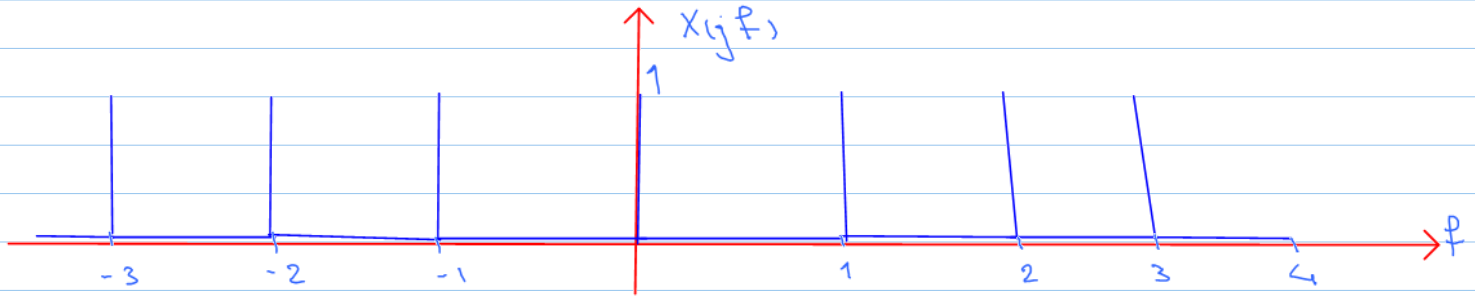
$$X(j2\pi f) = \delta(f)$$





$x[n]$

$2\pi\delta(\omega)$ ، $(0, 2\pi)$



$X(j2\pi f) = \delta(f)$ در حوزه دوره تناوب ω

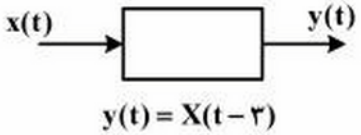
$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ $\omega = 2\pi f$

$X(j\frac{\omega}{2\pi}) = X(jf)$ در حوزه f دوره تناوب 1 است.

جلسه ۳۹ سیگنال

برق ۹۵

در شکل زیر، تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ را $X(\omega)$ می‌نامیم. رابطهٔ ورودی و خروجی این سیستم به صورت زیر است. در مورد این سیستم، کدام‌گزینه، نادرست است؟



$y(t) = X(t-۳)$

۱) حافظه‌دار است.

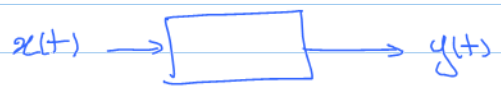
۲) خطی است.

۳) غیرسببی است.

۴) تغییرناپذیر با زمان است.

$x(t) \longrightarrow X(jw) = X(w)$

$y(t) = X(t-3) = X(w)\Big|_{w=t-3}$ $\qquad y(t) = X(t-3)$



بر حسب $x(t)$ ⇐ مثالیست $\qquad y(t) = x(t)$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt \longrightarrow X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-jw\tau}\, d\tau$$

$$y(t) = X(t-3) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j(t-3)\tau}\, d\tau$$

$$* \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j(t-3)\tau}\, d\tau \quad *$$

$y(t) =$ x x عدد ← خطی است

$t \overset{?}{\geq} \tau \quad ; \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$

$y(2)$ ⇒ غیر علّی ← حافظه دار

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j(t-3)\tau}\, d\tau \rightarrow \text{۳۷} \rightarrow \text{غیر ایستا}$$

تبدیل فوریه برای سیگنالهای متناوب و نامتناوب

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب:

$x(t)\ ,\ T_0, w_0 \xrightarrow{FS} a_k$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ e^{jkw_0 t}$$

تقریب سری فوریه

$X(jw) = ?$

$x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$

حوزه زمان $\xrightarrow{F}$ حوزه فرکانس $\qquad t \xrightarrow{F} w$

$$F\{x(t)\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ e^{jkw_0 t}\right\}$$

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = \frac{d}{dt}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(t^2+3)k$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(t^2k+3k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}(t^2k+3k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\ \frac{d}{dt}(t^2+3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2t$$

$$X(jw) = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ e^{jkw_0 t}\right\}$$

$$X(jw) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ F\{e^{jkw_0 t}\}$$

$e^{jat} \xrightarrow{F} 2\pi\delta(w-a)$

$e^{j(kw_0)t} \xrightarrow{F} 2\pi\delta(w-kw_0)$

$x(t), T_0 \xrightarrow{FS} a_k$

$$X(jw) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(w - kw_0)$$

$x[n], N_0 \xrightarrow{FS} a_k$

$$X(jw) = 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k \delta(w - kw_0)$$

سوال ۱۲.

پاسخ فرکانس سیستم زمان پیوسته‌ای به صورت $H(j\omega) = \cos\omega$ است. این سیستم در کدام گروه قرار دارد؟

۱) غیر علّی، پایدار، معکوس‌ناپذیر
۲) علّی، پایدار، معکوس‌پذیر
۳) غیر علّی، ناپایدار، معکوس‌ناپذیر
۴) علّی، ناپایدار، معکوس‌پذیر

پاسخ ضربه = $F\{h(t)\} \longrightarrow$ LTI یعنی سیستم

$$H(jw) = \cos(w) = \frac{1}{2}e^{jw} + \frac{1}{2}e^{-jw}$$

$h(t) = ?$

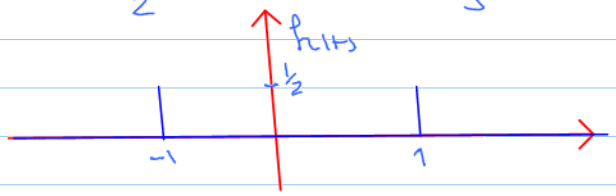
$$\delta(t-a) \xrightarrow{F} e^{-jaw}$$

$$\delta(t+1) \xrightarrow{F} e^{j1w}$$
$$\delta(t-1) \xrightarrow{F} e^{j(-1)w}$$

$$+\quad \frac{1}{2}\delta(t+1) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{jw}$$
$$\frac{1}{2}\delta(t-1) \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-jw} \quad +$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1) \xrightarrow{F} \frac{1}{2}e^{jw} + \frac{1}{2}e^{-jw} = H(jw)$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$



علی $\longrightarrow$ $h(t) = 0 \quad \forall t<0$

$h(t) \neq 0 \quad \forall t<0 \longrightarrow$ غیر علی

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty \longrightarrow$ پایدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)\,dt = 1 < \infty \longrightarrow \text{پایدار}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \left(\frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t)*\delta(t+1) + \frac{1}{2}x(t)*\delta(t-1)$$

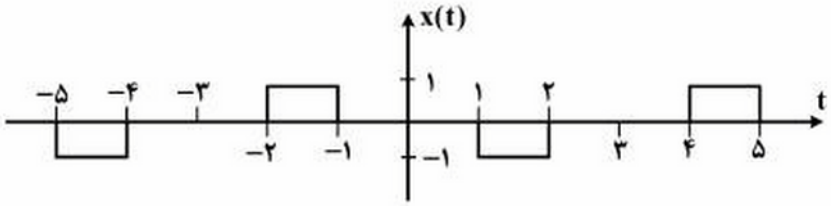
$$y(t) = \frac{1}{2}x(t+1) + \frac{1}{2}x(t-1)$$

معکوس پذیری ـ غیر

برق ۹۵

سیگنال متناوب نشان‌داده شده در شکل زیر $(x(t))$ از سیستمی با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\pi t}$ عبور می‌کند.

سیگنال خروجی برابر کدام است؟



۱) $\frac{-۲}{\pi}\sin(\frac{\pi}{۳}t)$

۲) $۲\pi\cos(\frac{\pi}{۳}t)$

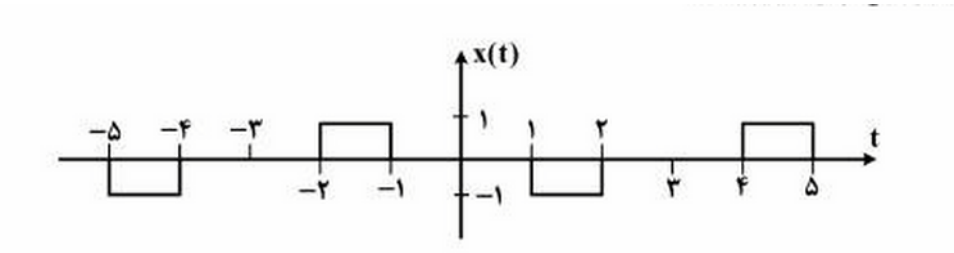
۳) $\frac{۲}{\pi}\sin(\frac{\pi}{۶}t)$

۴) $\frac{۳}{۲\pi}\cos(\frac{\pi}{۳}t)$

پاسخ سیستم LTI + پاسخ فرکانسی $H(jw)$ + ورودی متناوب ←

$w_0 \longrightarrow H(jkw_0) \neq 0 \longrightarrow a_k \longrightarrow b_k = a_k H(jkw_0) \longrightarrow y(t)$

$h(t) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\pi t}$



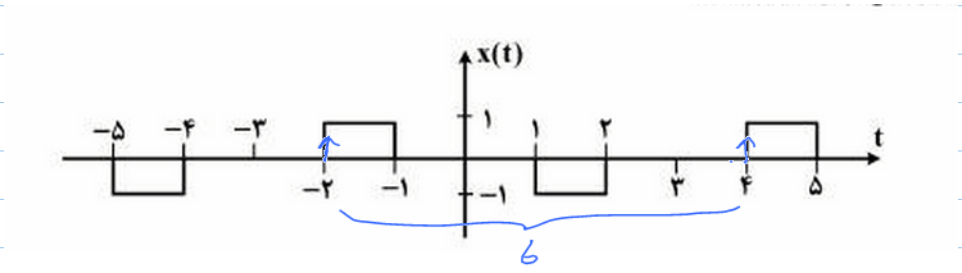
$y(t) = x(t) * h(t)$

هرگاه $h(t)$ به شکل یکی از سطرهای جدول تبدیل فوریه باشد مثل این است که $H(jw)$ را داده باشند.

$\dfrac{\sin(at)}{\pi t} \xrightarrow{F} \Pi(\dfrac{w}{2a})$

$h(t) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\pi t} \longrightarrow H(jw) = \Pi(\dfrac{w}{\pi})$

پاسخ سیستم LTI با $H(jw) = \Pi(\frac{w}{\pi})$ به ورودی متناوب $x(t)$ کدام است؟

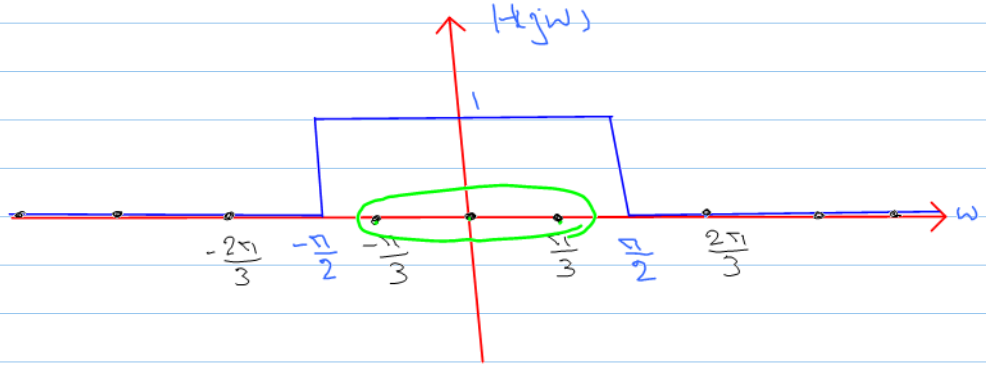


مطابق روش حل سوم

① $T_0 = 6$

② $w_0 = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

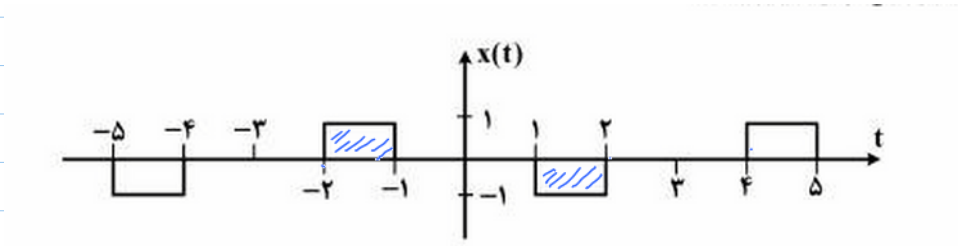
③ $H(jk\frac{\pi}{3}) \neq 0$ برای کدام k ها می‌شود؟



$k=0$ $k=1$ $k=-1$ $k=2$ $k=2$

$$H(jk\tfrac{\pi}{3}) = \begin{cases} 1 & k=0,\pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

④ a_0, a_1, a_{-1} $\quad a_0 = \frac{1}{6}\int_{-2}^{4} x(t)\,dt = 0$



⑤ $b_k = a_k H(jk\tfrac{\pi}{3}) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ a_1 \times 1 & k=1 \\ a_{-1}\times 1 & k=-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$b_k = \begin{cases} a_1 & k=1 \\ a_{-1} & k=-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

⑥ $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\frac{\pi}{3}t} = b_{-\infty} e^{j(-\infty)\frac{\pi}{3}t} + \cdots + b_{-2} e^{-j2\frac{\pi}{3}t} + b_{-1} e^{-j\frac{\pi}{3}t} + b_0 e^{0} + b_1 e^{j\frac{\pi}{3}t} + b_2 e^{j2\frac{\pi}{3}t} + \cdots$

$$y(t) = a_1 e^{j\frac{\pi}{3}t} + a_{-1} e^{j\frac{\pi}{3}t}$$

یادآوری: e^{jat} ، $\sin(at)$ ، $\cos(at)$ سیگنال‌های تک‌تونی (a)

$$y(t) = \underbrace{a_1 e^{j\frac{\pi}{3}t}}_{\frac{\pi}{3}} + \underbrace{a_{-1} e^{-j\frac{\pi}{3}t}}_{-\frac{\pi}{3}} \rightarrow$$

y سیگنال تک‌تونی با $\pm\frac{\pi}{3}$

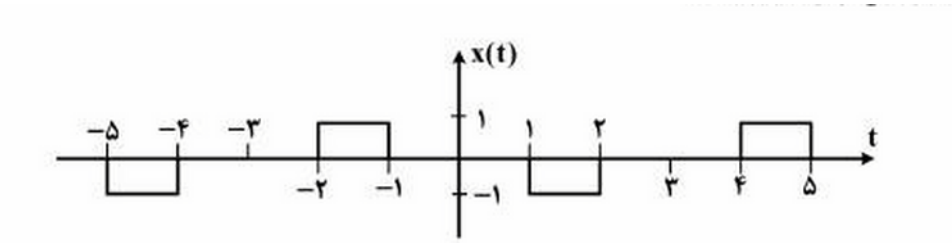
۱) $\frac{-2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{3}t)$ ← $\pm\frac{\pi}{3}$ فرد ✓

۲) $2\pi\cos(\frac{\pi}{3}t)$ ← $\pm\frac{\pi}{3}$ زوج

۳) ~~$\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{6}t)$~~ ← $\pm\frac{\pi}{6}$

۴) $\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}t)$ ← $\pm\frac{\pi}{3}$ زوج

$y(t) = x(t) * h(t)$



$h(t) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\pi t}$ → زوج

$x(t)$ ← فرد

$y(t) =$ (فرد) * (زوج) = فرد

حاسبه انتگرالی از $x(t)$ یا $X(jw)$ ؟

جلسه ۵۵ سیگنال

تبدیل فوریه

محاسبه انتگرال یا سیگما

$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$

$x[n] \xrightarrow{F} X(j\omega)\ ,\ T_0 = 2\pi$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad , \quad X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \quad , \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$x(t),\ \omega_0 \xrightarrow{FS} a_k \rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x[n],\ \omega_0 \xrightarrow{FS} a_k \rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} 2\pi a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

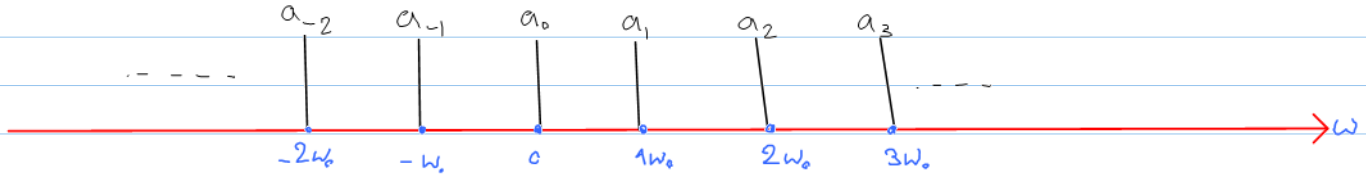
$X(j\omega)$ ← وزن ضربه ω در سیگنال $x(t)$ یا $x[n]$

$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$X(j2) = \frac{1}{j2}$

$x(t),\ \omega_0 \longrightarrow a_k$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$$



$\omega_0 = \pi$

a_k : وزن ضربه $x(t)$ در $k\omega_0$

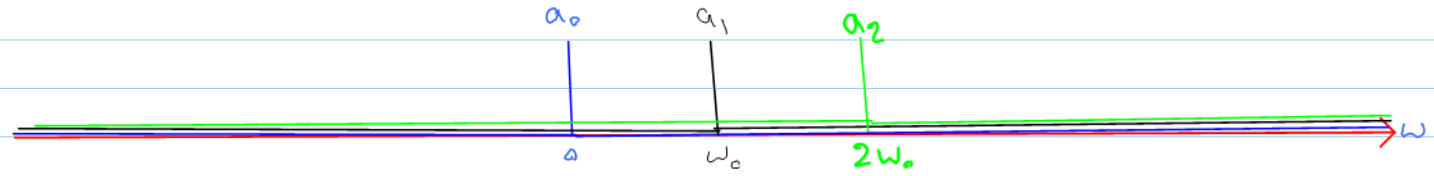
وزن ضربه a_2 ← $\frac{2\pi}{2\omega_0}$

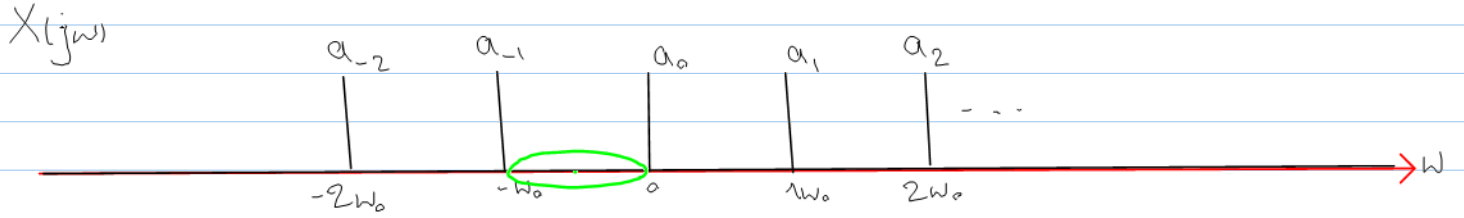
$a_{3/2}$ ← $\frac{3}{2}\pi$ ″ ″

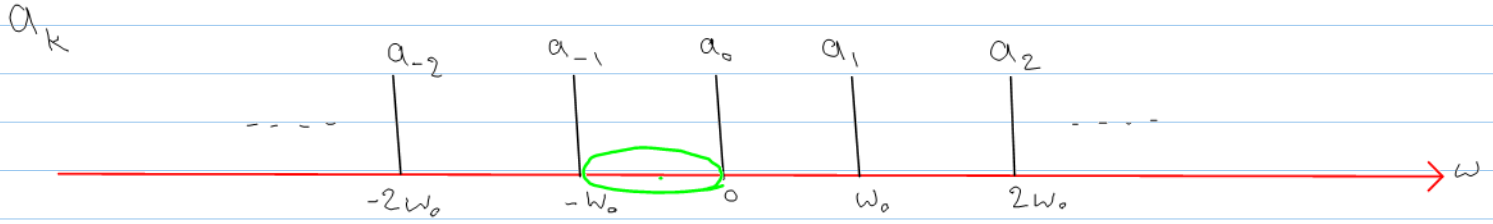
$\frac{3}{2}\omega_0$

ضرایب سری فوریه وزن ضربه‌های تشکیل دهنده $X(j\omega)$ ~ تابع ضربه‌ها

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \left(a_0 \delta(\omega) + a_1 \delta(\omega - \omega_0) + a_2 \delta(\omega - 2\omega_0) + \dots \right)$$







$a_k \longrightarrow$ وزن ضربه‌ها $\longleftarrow k\omega_0$

$X(j\omega) \longrightarrow$ وزن تابع ضربه‌ها

سیگنال x در حوزه زمان را بدهد و $X(j\omega)$ در حیطه فوریه را بخواهد: $\omega = a$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(ja) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jat}\, dt \qquad X(ja) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jan}$$

تبدیل فوریه $X(j\omega)$ را بدهد و حاصل $x(a)$ را بخواهد؟

$$x(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega a}\, d\omega \quad , \quad x[a] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)\, e^{ja\omega}\, d\omega$$

اگر x در حوزه زمان را بدهد انتگرالی از $X(jw)$ یا $X(jw)e^{j\theta}$ یا $X(jw)\sin(\theta)$ یا $X(jw)\cos(\theta)$ را بخواهد؟

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{j2w}\, dw = ?$$

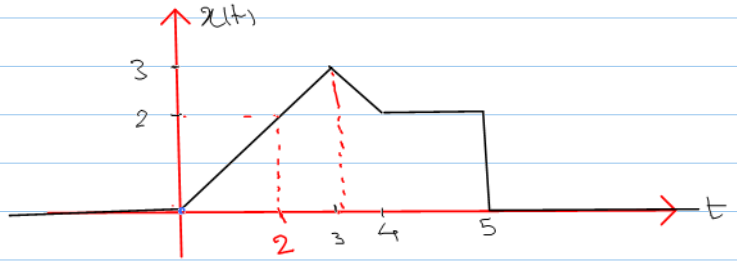
در فرمول دوم عکس تبدیل فوریه، t را طوری عدد می‌دهیم که برابر خواسته ما شود.

اگر $X(jw)$ را بدهد انتگرالی از $x(t)$، $x(t)e^{j\theta}$، $x(t)\cos(\theta)$، $x\sin(\theta)$ را بخواهد:

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

w را طوری عدد می‌دهیم که فرمول دوم برابر خواسته ما شود.

مثال.



$x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, dw$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\cos(2w)\, dw$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, dw = A$$

(jwt: 1 → 0)

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, dw$$

$$0 = A$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\cos(2w)\, dw \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

$$\cos(2w) = \frac{1}{2}e^{j2w} + \frac{1}{2}e^{-j2w}$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} X(jw) e^{j2w} dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} X(jw) e^{-j2w} dw$$

$$B = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw) e^{j2w} dw}_{C} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw) e^{-j2w} dw}_{D}$$

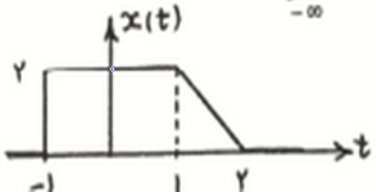
$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw) e^{jwt} dw$$

$$2\pi x(2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw) e^{j2t} = C \qquad 2\pi x(-2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw) e^{-jw2} dw = D$$

$$B = 2\pi x(2) + 2\pi x(-2) = 2\pi$$

۸۱ برق

۶- اگر سیگنال x(t) مطابق شکل زیر باشد و X(ω) تبدیل فوریهٔ آن باشد، حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, d\omega$ چقدر است؟



۱) ۴π

۲) ۲π

۳) ۴

۴) ۲

$x(t) \xrightarrow{F} X(jw) = X(w)$ ✓

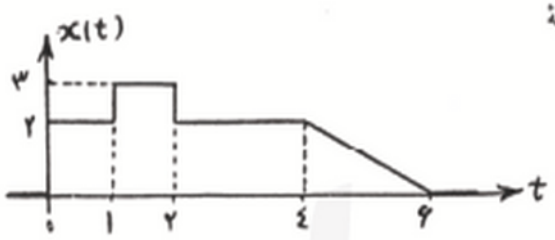
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\,dw = ? = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{jwt}\,dw$$

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwt}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw$$

برق ۸۱

۱- اگر سیگنال x(t) مطابق شکل مقابل باشد و X(ω) تبدیل فوریهٔ آن باشد، در این صورت $X(0) = X(\omega)|_{\omega=0}$ چقدر است؟



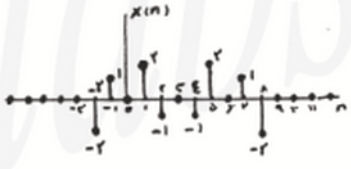
۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

۴) ۱۳

فرض کنید X(jΩ) مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال x(n) که در شکل نمایش داده شده است باشد. در این صورت مقدار X(0) و فاز X(jΩ) به ترتیب برابر است با:



۱) ۰ ، -2Ω

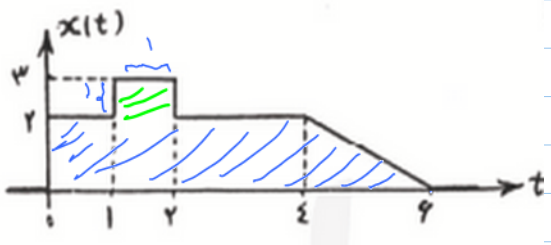
۲) ۰ ، -3Ω

۳) ۶ ، ۰

۴) ۶ ، -2Ω

$x(t) \longrightarrow X(\omega)$ $\qquad X(0) = ?$

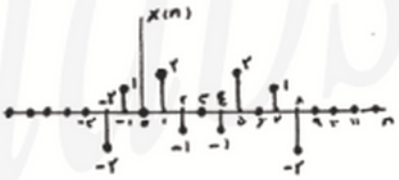
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = X(0)$$



$$X(0) = (1\times 1) + 2\times\left(\frac{4+6}{2}\right) = 11$$

برق ۸۲

فرض کنید $X(j\Omega)$ مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال $x(n)$ که در شکل نمایش داده شده است باشد. در این صورت مقدار $X(0)$ و $X(\pi)$ به ترتیب برابر است با:



۱) 0 ، -2Ω

۲) 0 ، -3Ω

۳) 6 ، 0

۴) 6 ، -2Ω

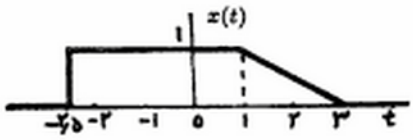
$x[n] \longrightarrow X(j\Omega)$ $\qquad X(j0) = X(0)$

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

$$= (-2 + 1 + 4 + 2 + -1 + -1 + 2 + 1 + -2)$$

۵۷ برق

سیگنال $x(t)$ زیر را در نظر بگیرید. اگر $X(\omega)$ تبدیل فوریه این سیگنال باشد، مقادیر A و B چقدر است؟



$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\omega} X(\omega) d\omega$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{j2\omega} X(\omega) d\omega$$

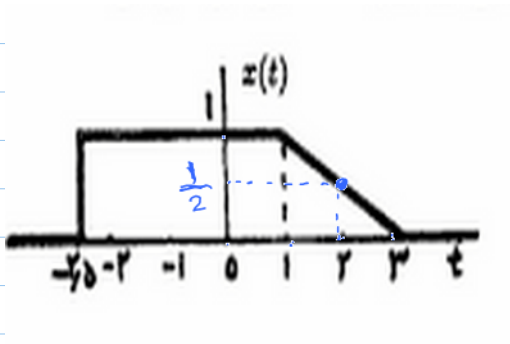
۱) $A = \pi, B = \pi j$ $\qquad$ ۲) $A = \frac{1}{2}, B = \frac{j}{2}$ $\qquad$ ۳) $A = \pi, B = 2\pi j$ $\qquad$ ۴) $A = 2\pi, B = 0$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{j2w}\, dw$$

$$2\pi\, x(t) = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwt}\, dw$$

$$2\pi\, x(2) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jw2}\, dw = A$$



$$A = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} (w)\, X(jw)\, e^{j2w}\, dw$$

$$2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

در این مواقع، با عبارات خطی نسبت به t، عبارت مورد نظر را بسازید.

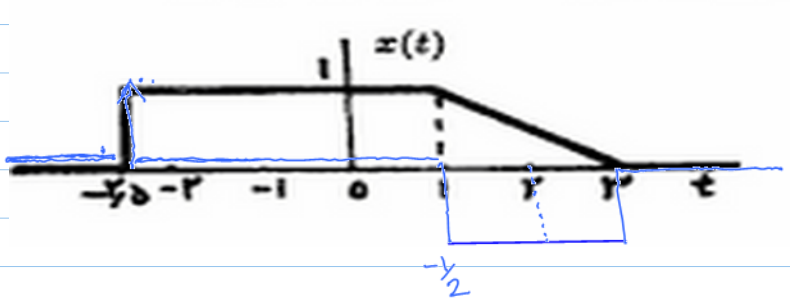
$$\frac{d}{dt}(2\pi x(t)) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw\right)$$

$$2\pi \frac{d}{dt} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, \frac{d}{dt}\left(e^{jwt}\right) dw =$$

$$2\pi \frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, jw\, e^{jwt}\, dw \qquad \int_{-\infty}^{\infty} w\, X(jw)\, e^{j2w}\, dw$$

$$\frac{2\pi}{j} \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=2} = \int_{-\infty}^{\infty} w\, X(jw)\, e^{jwt^2}\, dw = B$$

$$B = \frac{2\pi}{j} \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=2}$$



$$B = \frac{2\pi}{j} \times \frac{-1}{2} = \frac{-\pi}{j} = \pi j$$

برق ۸۹

اگر تبدیل فوریهٔ سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت زیر باشد:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

آنگاه $x[6]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

$$x[n] \longrightarrow X(jw) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi (-1)^k \delta(w - k\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(w - kw_0)$$

$x[6] = ?$

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{2}(-1)^k \\ w_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x[n], w_0 \longrightarrow a_k$

$w_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

$x[n], w_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow a_k = \frac{1}{2}(-1)^k$ $\qquad w_0 = \frac{\pi}{2} \quad N_0 = 4$

$x[6] = ?$

$$x[\overset{6}{n}] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jkw_0\overset{6}{n}} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2}(-1)^k e^{jk\times 3\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^1 e^{j3\pi} + \frac{1}{2}(-1)^2 e^{j6\pi} + \frac{1}{2}(-1)^3 e^{j9\pi}$$

$$x[6] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

حلسه آینده : پاسخ سیستم های LTI

جلسه 14 سیگنال

تبدیل فوریه

پاسخ سیستم LTI.

پاسخ فرکانسی $h(t) \xrightarrow{F} H(j\omega)$

$h[n] \longrightarrow H(j\omega)$

محاسبه پاسخ سیستم LTI با استفاده تبدیل فوریه:



* ورودی متناوب باشد
* $h(t)$ به شکل یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه باشد
* پاسخ فرکانسی داده باشد
* ورودی سیگنال نمایی مختلط e^{jat} , $\cos(at)$, $\sin(at)$
* ورودی به شکل یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه باشد.

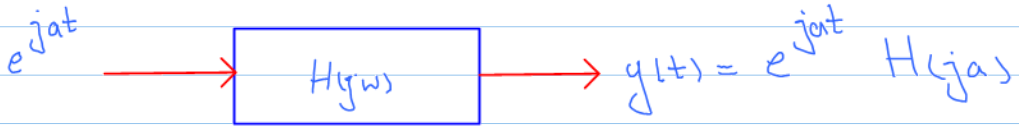
(1) ورودی x متناوب باشد ← از سری فوریه ← فصل 3

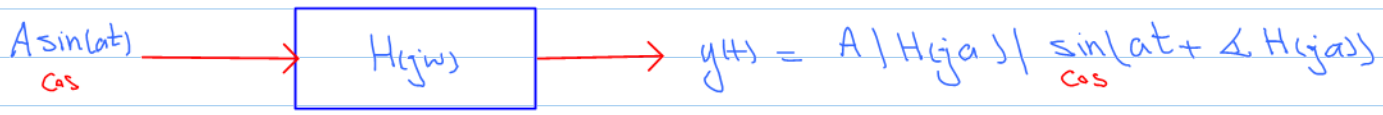
(2) ورودی یا $h(t)$ نمایی مختلط باشد

(3) غیر از حالت 1 و 2

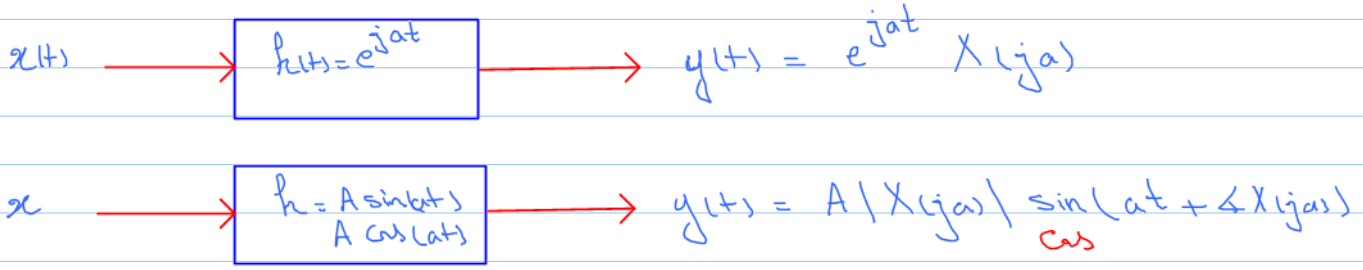
حالت دوم:

سیگنال نمایی مختلط را به فرم e^{jat} نوشته و تبدیل فوریه سیگنال دوم را حساب می‌کنیم.





ورودی نمایی مختلط



حالت سوم:

$X(jw) \times H(jw) = Y(jw) \longrightarrow y(t)$

برای سیگنال $z(t)$ با تبدیل فوریه $X(jw)$ خاصیت $\int_{-\infty}^{\infty} wX(jw)e^{jw}dw = 0$ برقرار است. کدام یک از سیگنال‌های داده شده می‌تواند جزء این دسته از سیگنال باشد؟

۱) $e^{-\frac{(t+1)^2}{2}}$

۲) $e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

۳) $te^{-\frac{t^2}{4}}$

۴) $(t-1)e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}$

یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ فرکانسی $H(j\omega)=|k|e^{j\theta}$ در فاصله فرکانسی $[۳۰Hz, ۲۰۰Hz]$ می‌باشد. اگر پاسخ این سیستم به ورودی $x_۱(t)=(۱+j)e^{j۱۲۰\pi t}$ برابر $y_۱(t)=۲e^{j(۱۲۰\pi t+\frac{۵\pi}{۱۲})}$ باشد، پاسخ سیستم به ورودی $x_۲(t)=j\sqrt{۲}e^{j۲۰۰\pi t}$ برابر کدام خواهد بود؟

۱) $۲e^{j(۲۰۰\pi t+\frac{۲\pi}{۳})}$ ۲) $\sqrt{۲}e^{j(۲۰۰\pi t+\frac{۲\pi}{۳})}$ ۳) $۲\sqrt{۲}e^{j(۲۰۰\pi t+\frac{۲\pi}{۳})}$ ۴) $۲e^{j(۲۰۰\pi t+\frac{۵\pi}{۱۲})}$

$x_1(t) = (1+j)\, e^{j120\pi t} \longrightarrow y_1(t) = 2\, e^{j(120\pi t + 5\pi/12)}$

$x_2(t) = j\sqrt{2}\, e^{j200\pi t} \longrightarrow ?$

$$H(jw) = \begin{cases} |k|\, e^{j\theta} & 30 \le f \le 200 \\ \text{دلخواه} & \text{else} \end{cases}$$

$x_2(t) = j\sqrt{2}\, e^{j200\pi t}$ حالت ② → ورودی تک فرکانسی

$A\, e^{jat} \longrightarrow \boxed{H(jw)} \quad A\, e^{jat}\, H(ja)$

$j\sqrt{2}\, e^{j200\pi t} \longrightarrow \boxed{H(jw)} \longrightarrow y_2(t) = j\sqrt{2}\, e^{j200\pi t}\, H(j200\pi)$

$$H(j2\pi f) = \begin{cases} |k|\, e^{j\theta} & 30 \le f \le 200 \\ \text{دلخواه} & \text{else} \end{cases} \qquad w = 2\pi f$$

$f = 100$

$H(j200\pi) = |k|\, e^{j\theta}$

$y_2(t) = j\sqrt{2}\, e^{j200\pi t}\, |k|\, e^{j\theta}$

؟ θ و $|k|$

$x_1(t) = (1+j)\, e^{j120\pi t} \longrightarrow y_1(t) = 2\, e^{j(120\pi t + \frac{5\pi}{12})}$

$(1+j)\, e^{j120\pi t} \longrightarrow \boxed{H(jw)} \longrightarrow y(t) = (1+j)\, e^{j120\pi t} \times H(j120\pi)$

$H(j2\pi \times \underset{f}{60}) = |k|\, e^{j\theta}$

$y(t) = (1+j)\, e^{j(120\pi t)}\, |k|\, e^{j\theta} = 2\, e^{j(120\pi t + \frac{5\pi}{12})}$

$$|k|\, e^{j\theta} = \frac{2\, e^{j(120\pi t + 5\pi/12)}}{(1+j)\, e^{j(120\pi t)}} = \frac{2}{1+j}\, e^{j\frac{5\pi}{12}}$$

$$1+j = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$|k|\, e^{j\theta} = \frac{2}{\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}}\, e^{j5\pi/12} = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$|k| = \sqrt{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$y_2(t) = j\sqrt{2}\, e^{j(200\pi t)}$$

$$|k|\, e^{j\theta} = j\sqrt{2}\, e^{j(200\pi t)} \quad \sqrt{2}\, e^{j\pi/6}$$

$$= 2\, e^{j(200\pi t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})}$$

$$j = e^{j\pi/2}$$

$$y_2(t) = 2\, e^{j(200\pi t + \frac{2\pi}{3})}$$

۸۸

پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI به صورت $H(j\omega)=\begin{cases} j\omega e^{-j۲\omega} & |\omega|<\pi \\ ۰ & ow \end{cases}$ است. در صورتی که ورودی سیستم $x(t)=۲\cos ۴t+\sin ۲t$ باشد، خروجی کدام مورد خواهد بود؟

۱) $۲\cos(۲t)$

۲) $۲\cos(۲t-۶)$

۳) $۸\sin(۴t)+۲\cos(۲t)$

۴) $۸\sin(۴t-۱۲)+۲\cos(۲t-۶)$

$$H(j\omega) = \begin{cases} j\omega e^{-j3\omega} & |\omega| < \pi \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$x(t) = 2\cos(4t) + \sin(2t)$$

پاسخ فرکانسی ← فصل دوم ✗

ورودی $x(t)$ ← تک فرکانس ② تبدیل فوریه ✓ ، مثلثاتی ① سری فوریه

$$A \overset{\cos}{\sin}(at) \longrightarrow y(t) = A|H(ja)| \overset{\cos}{\sin}(at + \angle H(ja))$$

$x(t) = 2\cos(4t) + \sin(2t) \longrightarrow y(t) =$ پاسخ به $\cos$ + پاسخ به $\sin$

$$2\cos(4t) \longrightarrow y_1(t) = 2|H(j4)|\cos(4t + \angle H(j4))$$

$$\sin(2t) \longrightarrow y_2(t) = 1 \times |H(j2)| \sin(2t + \angle H(j2))$$

$$H(j2) = \begin{cases} j2e^{-j6} & |2| < 3.14 \checkmark \\ \\ \end{cases}$$

$$H(j4) = \begin{cases} & |4| < 3.14 \ \text{✗} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$H(j4) = 0 \longrightarrow |H(j4)| = 0 \qquad \angle H(j4) = 0$$

$$H(j2) = j2e^{-j6} = e^{j\pi/2} \times 2 \times e^{-j6} = 2e^{j(\frac{\pi}{2} - 6)}$$

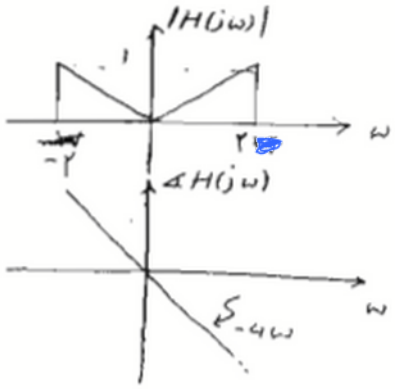
$$|H(j2)| = 2 \qquad \angle H(j2) = \frac{\pi}{2} - 6$$

$$y_1(t) = 0 \qquad y_2(t) = 1 \times 2 \sin(2t + \frac{\pi}{2} - 6) = 2\cos(2t - 6)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2\cos(2t - 6)$$

۱۹

اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یک فیلتر LTI در شکل مقابل رسم شده است. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = \sin\left(\frac{t}{۲}\right)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{t}{۲}-۱\right)$

۲) $\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{t}{۲}-۱\right)$

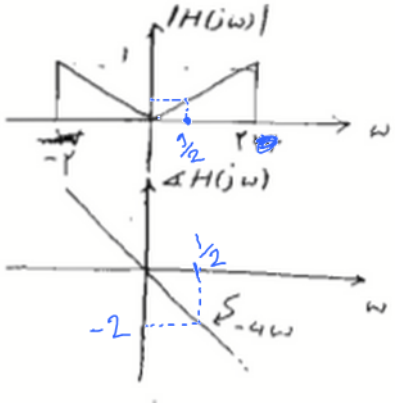
۳) $\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{t}{۲}-۲\right)$

۴) $\frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{t}{۲}-۲\right)$

پاسخ فرکاسی ← فصل دوم X

$x(t) = \sin(\frac{1}{2}t)$ ←
① مثلثی
② تک فرکانسی ✓

$x(t) = 1 \sin(\frac{1}{2}t) \longrightarrow y(t) = 1 \times |H(j\frac{1}{2})| \sin(\frac{1}{2}t + \angle H(j\frac{1}{2}))$



$|H(j\frac{1}{2})| = \frac{1}{4}$

$\angle H(j\frac{1}{2}) = -2$

$y(t) = 1 \times \frac{1}{4} \sin(\frac{1}{2}t - 2)$

9a

پاسخ یک سیستم زمان پیوسته LTI به ورودی $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ برابر با $y(t)=e^{-|\omega_0|}\cos(\omega_0 t)$ است و این نتیجه به ازای جمیع مقادیر $\omega_0 \in \mathbb{R}$ صادق است. اگر $h(t)$ پاسخ ضربه این سیستم باشد مقادیر $h(0)$ و $h(1)$ به ترتیب چقدر خواهند بود؟

۱) ۱ و $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ و $\frac{1}{2\pi}$ ۳) ۱ و $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{\pi}$ و $\frac{1}{4\pi}$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xrightarrow[H(j\omega)]{h(t)} y(t) = e^{-|\omega_0|}\cos(\omega_0 t)$$

$h(t)$? , $h(0)$ ← $H(j\omega)$

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow |H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)) = e^{-|\omega_0|}\cos(\omega_0 t)$$

$$|H(j\omega_0)| = e^{-|\omega_0|} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = 0$$

$\omega_0 \in \mathbb{R} \rightarrow$ $\omega = \omega_0$ (دلخواه)

$$|H(j\omega)| = e^{-|\omega|} \quad , \quad \angle H(j\omega) = 0$$

$$H(j\omega) = e^{-|\omega|}\, e^{j0} = e^{-|\omega|}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|}\, e^{j\omega \times 0}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|}\, d\omega$$

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-(-\omega)}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\omega}\, d\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\omega}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\omega}\, d\omega\right)$$

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1}\left(e^{0} - e^{-\infty}\right) + \frac{+1}{-1}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right)\right) = \frac{1}{\pi}$$

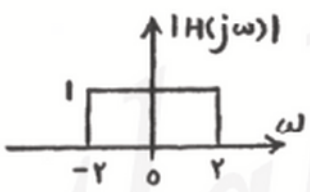
$h(1) =$ تعریف نشده

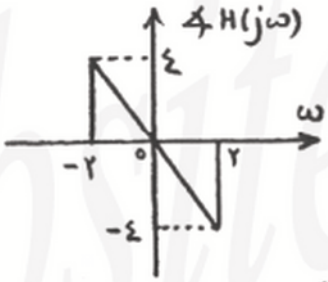
جلسه 42 سیگنال

* هرگاه ورودی متناوب باشد
* $h(t)$ به شکل یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه
* پاسخ وزکاس داده باشد
* ورودی سیگنال تک‌وزکاس ← e^{jat} , $\cos(at)$, $\sin(at)$
* ورودی به شکل یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه باشد.

1. ورودی x متناوب باشد ← از سری فوریه ← فصل 3
2. ورودی یا $h(t)$ تک‌وزکاس باشد
3. غیر از حالت 1 و 2 ✓

سیگنال $x(t) = 2\pi\delta(t)$ وارد سیستم LTI با مشخصات فرکانسی شکل مقابل می‌شود. در این صورت مقدار خروجی در لحظهٔ $t = 2$ برابر است با:





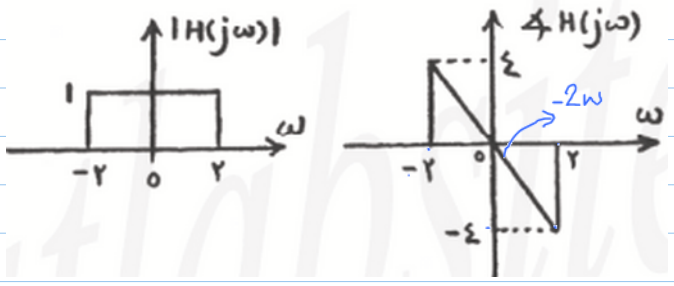
۱) 4π

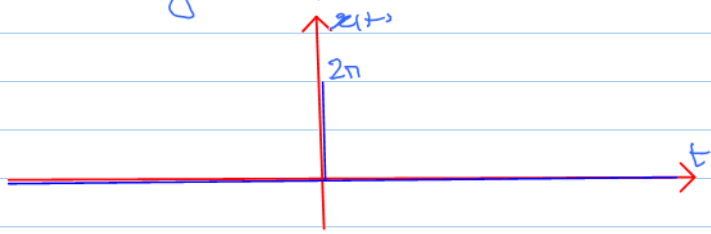
۲) $\frac{4}{\pi}$

۳) ۴

۴) $\frac{2}{\pi}$

$x(t) = 2\pi\,\delta(t) \longrightarrow$ $y(t) = ?$ $y(2) = ?$





غیرازحالت ① و ②

$X(j\omega) = 2\pi$ ، $H(j\omega)$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$

$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\angle H(j\omega)} = \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{j(-2\omega)}$

$Y(j\omega) = 2\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-j2\omega} \longrightarrow y(t) = ?$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-j2\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) d\omega$$

$$y(2) = \int_{-\infty}^{2} \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) d\omega = \int_{-2}^{2} 1\, d\omega = 4 \checkmark$$

۱۹

۹- یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربهٔ $h(t) = e^{-۲t}u(t)$ می‌باشد. اگر سری فوریه نمایی خروجی سیستم را به صورت $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{jn\omega_0 t}$ نمایش دهیم، در این صورت مقدار $b_۲$ با فرض اینکه ورودی سیستم $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱+j۲\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۴+j۴\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۱+j۴\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۴+j۲\pi}$

$$h(t) = e^{-4t}\,u(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \qquad b_2 = ?$$

① $T_0 = 1 \rightarrow \omega_0 = 2\pi$ ② $H(jk\times\omega_0) \neq 0$?

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4} \qquad H(jk\times 2\pi) = \frac{1}{j2\pi k + 4} \rightarrow$$

لا يزال يحتوي على k وبالتالي ما زلنا مستمرين.

③ $a_k = \frac{1}{T_0} = 1$ ④ $b_k = a_k H(j2\pi k) = 1 \times \frac{1}{j2\pi k + 4}$

$$b_2 = \frac{1}{j4\pi + 4} \checkmark$$

۸۹

یک سیستم گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که دارای پاسخ ضربه $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ باشد ($u[n]$ مشخص کننده دنباله پله واحد می‌باشد). خروجی این سیستم $y[n]$ را وقتی تبدیل فوریه ورودی $X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$ باشد برابر کدام است؟

۱) $[3(\frac{3}{4})^n - 2(\frac{1}{2})^n]u[n]$ ۲) $[2(\frac{1}{2})^n - 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$ ۳) $[2(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$ ۴) $[-2(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ $\qquad X(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$

$y[n] = ?$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega) \longrightarrow y[n] = ?$

$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$Y(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \longrightarrow y[n] = ?$

$3 \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \longrightarrow 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

$-2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \longrightarrow -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$Y(j\omega) = \frac{A}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$

$\frac{A + B + \left(-\frac{A}{2} - \frac{3B}{4}\right)e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1}{\sim}$

$\begin{cases} A + B = 1 \longrightarrow B = -2 \\ -\frac{A}{2} - \frac{3B}{4} = 0 \longrightarrow A = -\frac{3B}{2} \longrightarrow A = 3 \end{cases}$

$Y(j\omega) = 3\,\frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} + (-2)\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$y[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

۱۰۰ـ یک سیستم زمان‌گسسته LTI دارای پاسخ فرکانسی $H(\Omega)=\frac{۲\cos(۲\Omega)}{۱+\cos^{۲}(\Omega)}$ می‌باشد، اگر ورودی این سیستم $x[n]=\begin{cases}۰ & ,\ n \text{ زوج}\\ ۲ & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}$ باشد خروجی آن چه خواهد بود؟

۱) $y[n]=\begin{cases}۰ & ,\ n \text{ زوج}\\ ۲ & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}$

۲) $y[n]=\begin{cases}۲ & ,\ n \text{ زوج}\\ ۰ & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}$

۳) $y[n]=۰$

۴) $y[n]=۲$

$$H(j\omega) = \frac{2\cos(2\omega)}{1+\cos^2(\omega)} \qquad x[n] = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{زوجي} \\ \text{فردي} \end{matrix} \qquad = 1 + -1(-1)^n$$

$$x[n] = \begin{cases} A & \text{زوجي} \\ B & \text{فردي} \end{cases} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}(-1)^n$$

$$x[n] = 1 - (-1)^n \qquad H(j\omega) = \frac{2\cos(2\omega)}{1+\cos^2(\omega)}$$

$$x[n] = 1 - e^{j\pi n} = e^{j0n} - e^{j\pi n}$$

$$e^{j\omega n} \longrightarrow e^{j\omega n} H(j\omega)$$

$$e^{j0n} \longrightarrow e^{j0n} \quad H(j0) = e^{j0n} \times \frac{2\cos(0)}{1+\cos^2(0)} = 1 \times 1 = 1$$

$$e^{j\pi n} \longrightarrow e^{j\pi n} \quad H(j\pi) = e^{j\pi n} \times \frac{2\cos(2\pi)}{1+(\cos(\pi))^2} = e^{j\pi n}$$

$$x[n] \longrightarrow 1 - e^{j\pi n} = 1 - (-1)^n$$

$$y[n] = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{زوجي} \\ \text{فردي} \end{matrix}$$

۹- سطح زیر منحنی سیگنال $v(t)$ به صورت $A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,dt$ تعریف می‌شود. اگر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد، که $x(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی و $h(t)$ پاسخ ضربه آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی یعنی A_y کدام است؟

۱) $A_y = A_x + A_h$
۲) $A_y = A_x \cdot A_h$
۳) $A_y = A_x * A_h$
۴) رابطه مشخصی بین A_y، A_x و A_h وجود ندارد.

$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt = A_v$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = A_x$ $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = A_h$

$y(t) = x(t) * h(t)$ $A_y = A_h, A_x$ برحسب =?

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = A_x$

$A_x = X(j0)$

$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\,dt = A_h \rightarrow A_h = H(j0)$

$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t}\,dt = A_y$ $A_y = Y(j0)$

$Y(j0) = H(j0)$ و $X(j0)$ برحسب =?

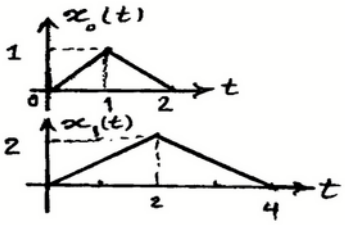
$y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega) \rightarrow Y(j0) = X(j0)\,H(j0)$

$A_y = A_x \times A_h$

۹۲

اگر $y_0(t)$ پاسخ یک سیستم LTI پایدار به ورودی $x_0(t)$ بوده و بدانیم $\int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t)dt = \pi$ می‌باشد، آن‌گاه در مورد $y_1(t)$ که پاسخ همان سیستم به ورودی $x_1(t)$ است، چه می‌توان گفت؟



۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = 2\pi$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = -4\pi$

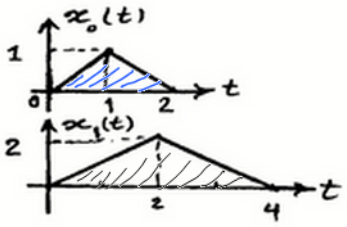
۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = +4\pi$

۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = 0$

$x_0(t) \longrightarrow y_0(t) \longrightarrow A_{y_0} = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t)\,dt = \pi$

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \longrightarrow A_{y_1} = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(t)\,dt = ?$

$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow A_y = A_x \times A_h$



$A_{y_0} = A_{x_0} \times A_h$

$\pi = A_{x_0} \times A_h$

$? = A_{y_1} = A_{x_1} \times A_h$

$A_{x_0} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

$\pi = 1 \times A_h \longrightarrow \boxed{A_h = \pi}$

$A_{x_1} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$

$A_{y_1} = 4 \times \pi = \boxed{4\pi}$

جلسه 43 سیگنال
تبدیل فوریه

خواص تبدیل فوریه:

۱- خطی بودن: تبدیل فوریه یک عملگر خطی است.

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$ax(t) \longrightarrow aX(j\omega)$

$F\{ax(t)\} = aF\{x(t)\} = aX(j\omega)$

$y(t) \longrightarrow Y(j\omega)$

$ax(t) \mp y(t) \longrightarrow aX(j\omega) \mp Y(j\omega)$

۲- انتقال زمانی و فرکانسی:

$x(t), \omega_0 \longrightarrow a_k$

$x(t-t_0), \omega_0 \longrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

$e^{jk_0\omega_0 t} x(t), \omega_0 \longrightarrow a_{k-k_0}$

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

$e^{j\omega_0 t} x(t) \longrightarrow X(j(\omega-\omega_0))$

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$

$x[n-n_0] \longrightarrow X(j\omega) e^{-j\omega n_0}$

$e^{j\omega_0 n} x[n] \longrightarrow X(j(\omega-\omega_0))$

* هرگاه غایی دیدیم، ابتدا غایی را مانده بگیرید و در نهایت آن را به صورت $e^{j(\quad)}$ اعمال کنید.

$e^{jat} \times 1 \longrightarrow ?$

e^{jat}:

$1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\omega \to \omega - a$

$e^{jat} \times 1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega - a)$

$X(j\omega) = e^{j2\omega} \times 1 \qquad x(t) = ?$

$t \to t-(-2)$:

$\delta(t) \longrightarrow 1$

$e^{j2\omega} = e^{-j\omega t_0}$

$\delta(t+2) \longrightarrow e^{j2\omega} \times 1$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & 0 \le t \le 3 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad X(jw) = ?$$

$$x(t) = e^{-2t} \times \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 3 \\ 0 & 0 \end{cases} = e^{-2t}\big(u(t) - u(t-3)\big)$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t-3)$$

$$e^{-2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{jw+2}$$

$t \to t-3$

$$e^{-2t}u(t-3) \longrightarrow ?$$

e^{-j3w}

$$e^{-2(t-3)}u(t-3) \longrightarrow \frac{e^{-j3w}}{2+jw}$$

$$\frac{e^{-2t}e^{6}u(t-3)}{e^{6}} \longrightarrow \frac{e^{-j3w}}{2+jw} \times \frac{1}{e^{6}}$$

$$e^{-2t}u(t-3) \longrightarrow \frac{e^{-j3w}}{2+jw} \times e^{-6} = \frac{e^{-(j3w+6)}}{2+jw}$$

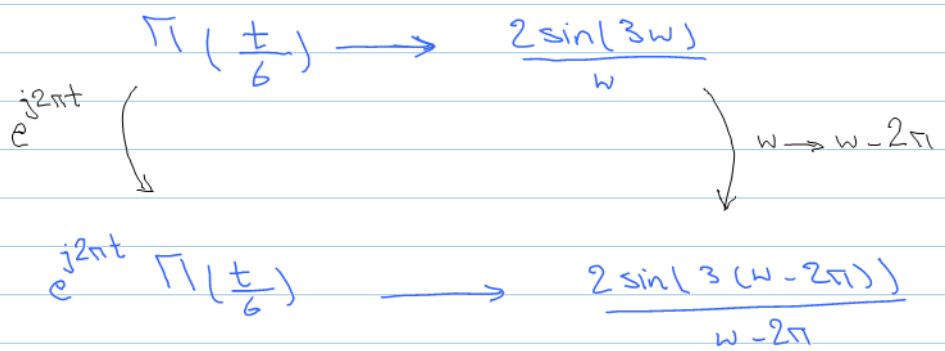
$$e^{-2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{2+jw}$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t-3) \longrightarrow \frac{1}{jw+2} - \frac{e^{-(j3w+6)}}{jw+2} = X(jw)$$

$$X(w) = \frac{2\sin(3(w-2\pi))}{w-2\pi} \qquad x(t) = ?$$

هر وقت t یا w به صورت سینوس یا تانژانت باشد، سینوس را نادیده می‌گیریم و آن را سر اعمال می‌کنیم.

$$\frac{2\sin(3w)}{w} \xrightarrow{F^{-1}} ?$$


$\Pi\left(\frac{t}{6}\right)$
$\frac{2\sin(3w)}{w}$
$e^{j2\pi t}$
$w \to w - 2\pi$
$e^{j2\pi t}\ \Pi\left(\frac{t}{6}\right)$
$\frac{2\sin(3(w-2\pi))}{w-2\pi}$

برق ۸۱

تبدیل فوریه سیگنال $x[n] = 4^{-n}u[n+2]$ کدام است؟

۱) $X(e^{j\Omega}) = \frac{64e^{-2j\Omega}}{4 - e^{-j\Omega}}$

۲) $X(e^{j\Omega}) = \frac{16e^{-j\Omega}}{4 - e^{-j\Omega}}$

۳) $X(e^{j\Omega}) = \frac{64e^{2j\Omega}}{4 - e^{-j\Omega}}$

۴) $X(e^{j\Omega}) = \frac{16e^{j\Omega}}{4 - e^{-j\Omega}}$

$$x[n] = 4^{-n}\, u[n+2] \longrightarrow X(j\omega) = ?$$

$$4^{-n}\, u[n] \longrightarrow ?$$

$$\alpha^n u[n] \xrightarrow{|\alpha|<1} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$4^{-n} = (4^{-1})^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$n \to n+2$; $e^{j2\omega}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2] \longrightarrow \frac{e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$4^{-n-2}\, u[n+2] \longrightarrow \frac{e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$4^2 \times 4^{-2} \times 4^{-n}\, u[n+2] \longrightarrow \frac{e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \times 4^2$$

$$4^{-n}\, u[n+2] \longrightarrow \frac{16\, e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{64\, e^{j2\omega}}{4-e^{-j\omega}}$$

مرور ۸۷

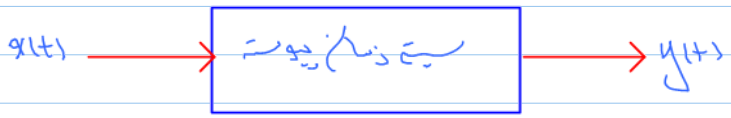
فرض کنید $X(f)$ تبدیل فوریه ورودی و $Y(f)$ تبدیل فوریه خروجی یک سیستم زمان پیوسته می‌باشد. در این سیستم ضابطه کلی زیر وجود دارد $Y(f) = X(f-1) + X(f+1)$ این سیستم یک سیستم ..... است.

۱) با حافظه و تغییرپذیر با زمان

۲) با حافظه و تغییرناپذیر با زمان

۳) بدون حافظه و تغییرپذیر با زمان

۴) بدون حافظه و تغییرپذیر با زمان



$$Y(f) = X(f-1) - X(f+1) \qquad y(t) = \text{x(t) رسم}$$

$$x(t) \longrightarrow X(jw) \Rightarrow X(j2\pi f)$$

$$y(t) \longrightarrow Y(j2\pi f)$$

$$e^{jat}\, x(t) \longrightarrow X(j(w-a)) = X(j(2\pi f - a)) = X\left(j2\pi\left(f - \frac{a}{2\pi}\right)\right)$$

$$e^{jat}\ x(t) \longrightarrow X(f) \quad \Big\downarrow \quad f \to f - \frac{a}{2\pi}$$

$$e^{jat}\, x(t) \longrightarrow X\left(f - \frac{a}{2\pi}\right)$$

$$\frac{a}{2\pi} = 1 \to a = 2\pi$$

$$e^{j2\pi t}\, x(t) \longrightarrow X(f-1)$$

$$e^{-j2\pi t}\, x(t) \longrightarrow X(f+1) \qquad \frac{a}{2\pi} = -1 \to a = -2\pi$$

$$e^{j2\pi t}\, x(t) - e^{-j2\pi t}\, x(t) \longrightarrow X(f-1) - X(f+1) = Y(f)$$

$$y(t) \longrightarrow Y(f)$$

$$y(t) = e^{j2\pi t}\, x(t) - e^{-j2\pi t}\, x(t) = x(t)\left(\frac{e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}}{2j}\right) \times 2j$$

$$y(t) = x(t)\sin(2\pi t) \times j2$$

منابط سینی

و آخر دوس حافظ

رابطه‌ی ورودی ـ خروجی یک سیستم زمان گسسته به صورت: $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ داده شده است. $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه ورودی $x[n]$ می‌باشد. کدام عبارت در مورد این سیستم صحیح نمی‌باشد؟

۱) سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

۲) سیستم خطی و تغییرپذیر با زمان است.

۳) سیستم وارون‌پذیر و پایدار است.

۴) سیستم پایدار و بدون حافظه است.

$y[n] =$ بر حسب $x[n]$ $\qquad x[n] \longrightarrow X(jw) = X(e^{jw})$

$$Y(jw) = X(j(w-w_0)) = X(e^{j(w-w_0)})$$

$$x[n] \longrightarrow X(jw)$$

$$x[n]e^{jw_0 n} \longrightarrow X(j(w-w_0)) = Y(jw)$$

$$y[n] \longrightarrow Y(jw)$$

$y[n] = e^{jw_0 n} x[n]$ مطابق بیت $\qquad$ ۳۷

تمرین: هر کدام دیگری را اثبات کنید.

برق ۸۵

فرض کنید $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم بوده و $X(j\omega)$ تبدیل فوریه ورودی سیستم است. کدام‌یک از دو سیستم زیر تغییر ناپذیر با زمان (TI) می‌باشند؟

سیستم ۱: $y(t) = x(0) + X(t-3)$ ، سیستم ۲: $y(t) = X(0) + x(t-3)$

۱) فقط سیستم ۱ ۲) فقط سیستم ۲ ۳) هر دو سیستم ۴) هیچ‌یک از دو سیستم

سیستم ۱: $y(t)=x(0)+X(t-3)$ ، سیستم ۲: $y(t)=X(0)+x(t-3)$:پاسخ

1) $y(t)=x(0)+X(t-3)$ مثالها سپ

$X(t-3)=?$ x برحسب

$$X(w)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-jw\tau}d\tau$$

$$X(t-3)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j(t-3)\tau}d\tau$$

$$y(t)=x(0)+\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j(t-3)\tau}d\tau$$

۳۷ تمرین: ثابت کنید.

2) $y(t)=X(0)+x(t-3)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau+x(t-3)$

تمرین: ثابت کنید که ۳۷ است.

3- مقیاس دهی

$x(t)\longrightarrow X(w)$

$$\begin{cases} x(at)\longrightarrow\frac{1}{|a|}X(\frac{w}{a}) & \text{زمانی} \\ \frac{1}{|a|}x(\frac{t}{a})\longrightarrow X(aw) & \text{فرکانسی} \end{cases}$$

$x[n]\longrightarrow X(w)$

$$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x[\frac{n}{m}] & \text{اگر } n \text{ مضرب } m \text{ باشد} \longrightarrow \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{(m)}[n]\longrightarrow X(mw) \\ x[mn]\longrightarrow\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}X(\frac{w}{m}-\frac{2\pi}{m}i) \end{cases}$$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$x(2t) \longrightarrow \frac{1}{|2|} X(\frac{w}{2})$

$x(-2t) \longrightarrow \frac{1}{|-2|} X(\frac{w}{-2})$

$x(-2t+1) \longrightarrow$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$t+1$

$x(t+1) \longrightarrow e^{jw} X(w)$ $\quad t_0 = -1$

$\times \frac{1}{|-2|}$, $w \to \frac{w}{-2}$

$t \to -2t$

$x(-2t+1) \longrightarrow \frac{1}{|-2|} e^{j(\frac{-w}{2})} X(\frac{w}{-2})$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$t \to at$ $\quad \times \frac{1}{|a|}$, $w \to \frac{w}{a}$

$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{w}{a})$

$x(-2t+1) \longrightarrow \frac{1}{2} e^{-j\frac{w}{2}} X(-\frac{w}{2})$

$X(jw) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j3w}}$ $\qquad x[n] = ?$

سپس ترین سیگنال را از جدول انتخاب کنید (سیگنال پایه)

$a^n u[n] \xrightarrow{|a|<1} \frac{1}{1 - a e^{-jw}}$

$f_{[n]} = (\frac{1}{2})^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-jw}}$ $\quad w \to 3w$

$f_{(3)}[n] = x[n] \longrightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j3w}} = X(w)$

$x_{(m)}[n] \longrightarrow X(mw)$

$x[n] \longrightarrow X(w)$

بسط دادن با ضریب m

$w \to mw$

$x_{(m)}[n] \longrightarrow X(mw)$

$x[n] = f_{(3)}[n] \quad ; \quad f[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

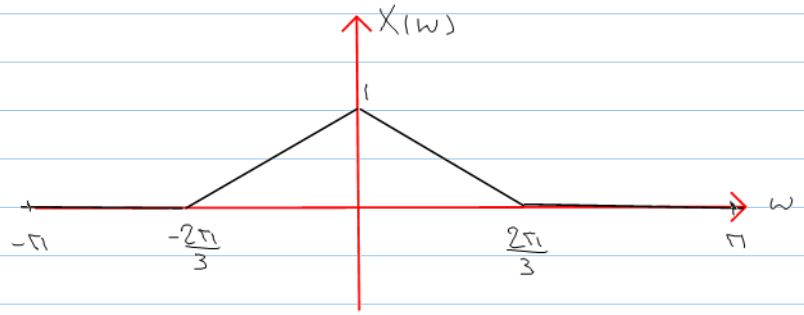
$$x[n] = \begin{cases} f[\frac{n}{3}] & n=3k \\ 0 & else \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}} u[\frac{n}{3}] & n=3k \\ 0 & else \end{cases}$$

$u[an] = u[n]$ مشکل اول

$x[n] \longrightarrow X(w)$

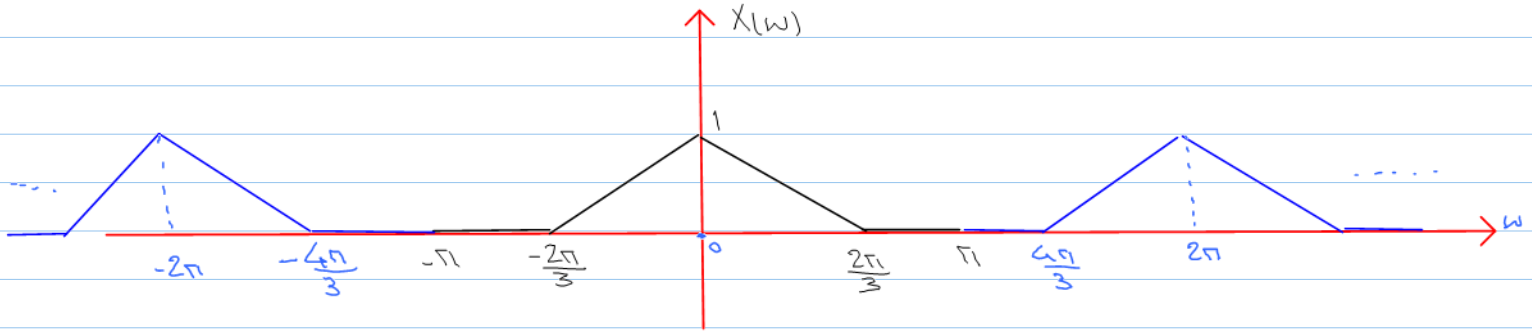
$y[n] = x[2n] \longrightarrow Y(w)$ ($Y(w)$ را رسم کنید. (برای a ها دلخواه))

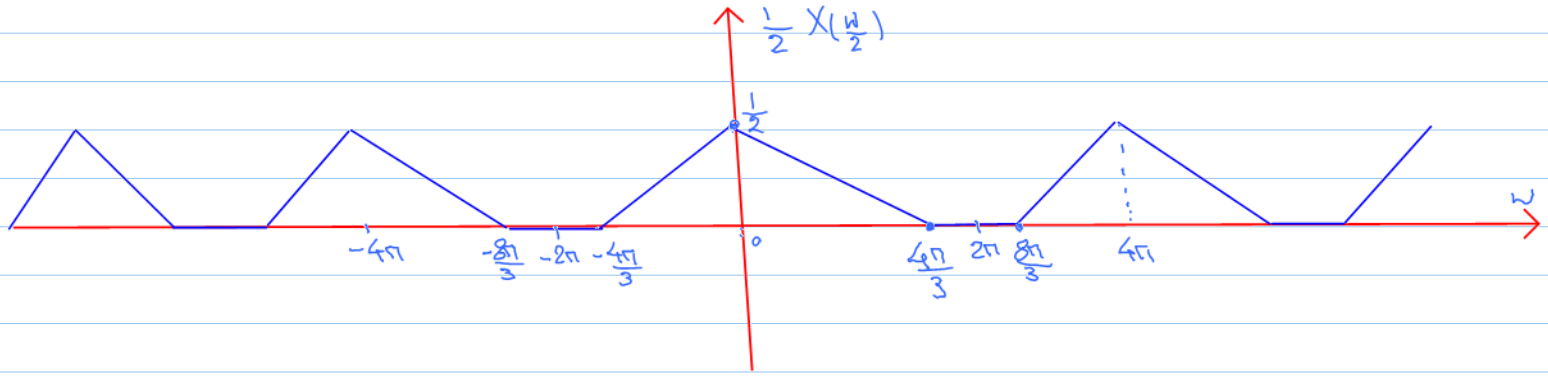


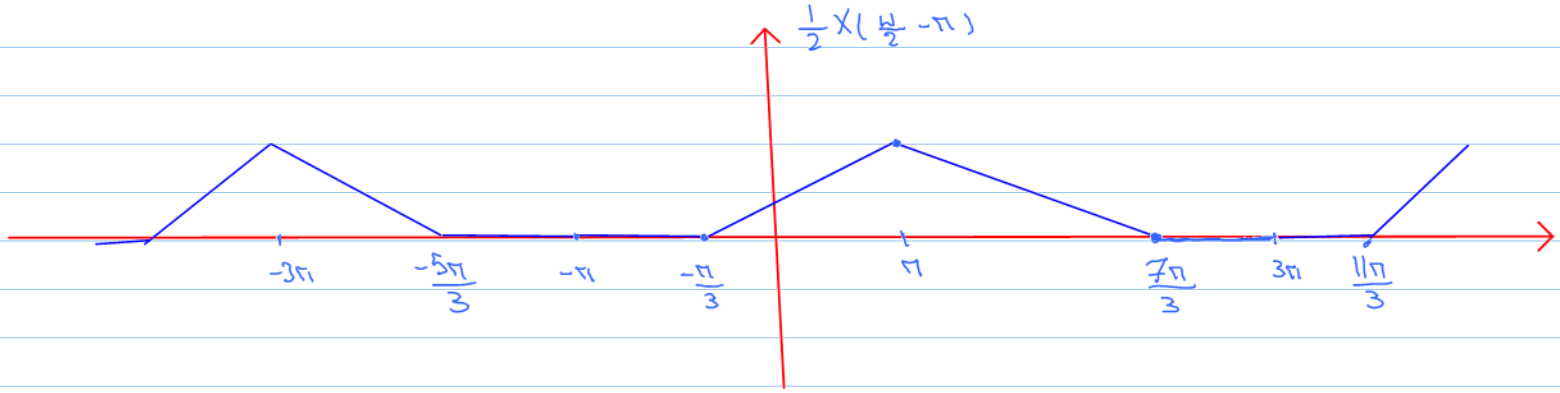
$x[n] \longrightarrow X(w)$

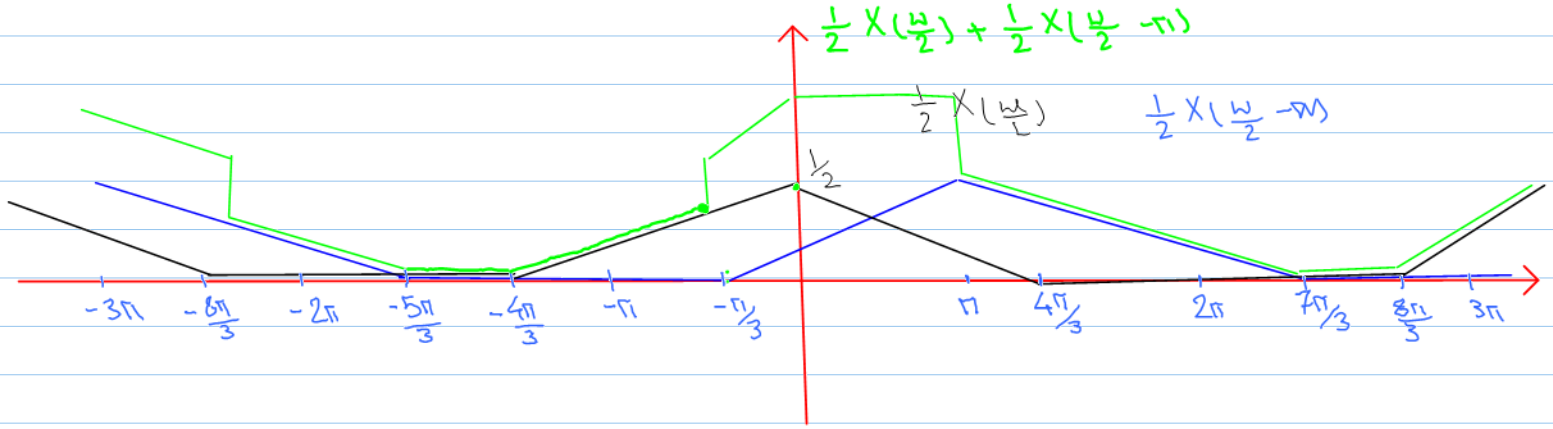
$y[n] = x[2n] \longrightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{1} X(\frac{w}{2} - \frac{2\pi}{2} i) = \frac{1}{2} X(\frac{w}{2}) + \frac{1}{2} X(\frac{w}{2} - \pi) = Y(w)$

$$Y(w) = \frac{1}{2} X(\frac{w}{2}) + \frac{1}{2} X(\frac{w}{2} - \pi)$$


X(w)
1
w
-2π
-4π/3
-π
-2π/3
0
2π/3
π
4π/3
2π


1/2 X(w/2)
1/2
w
-4π
-8π/3
-2π
-4π/3
0
4π/3
2π
8π/3
4π


1/2 X(w/2 - π)
-3π
-5π/3
-π
-π/3
π
7π/3
3π
11π/3


1/2 X(w/2) + 1/2 X(w/2 - π)
1/2 X(w/2)
1/2 X(w/2 - π)
1/2
-3π
-8π/3
-2π
-5π/3
-4π/3
-π
-π/3
π
4π/3
2π
7π/3
8π/3
3π

برق ۷۹

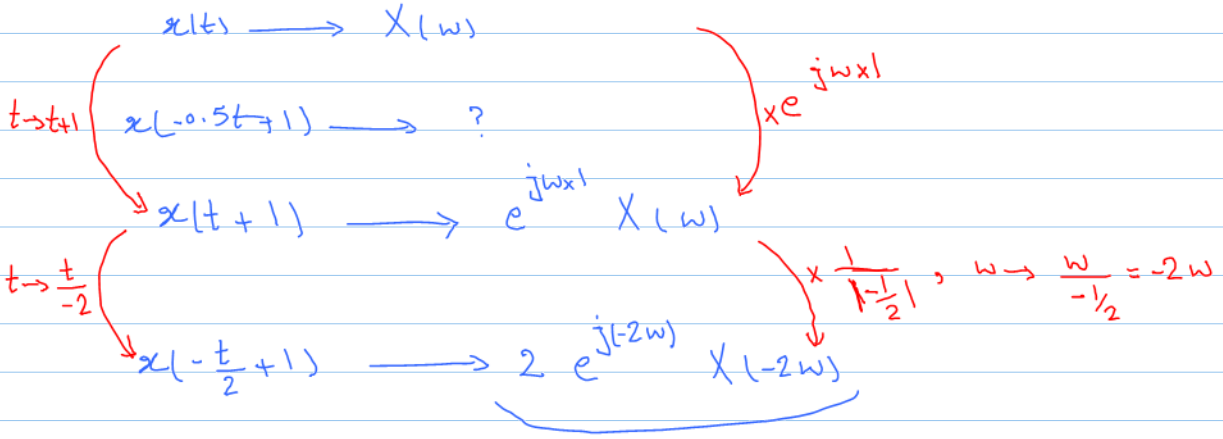
تبدیل فوریه $x(t)$ را با $X(f)$ نشان می‌دهیم. تبدیل فوریه $y(t)=x(1-0.5t)$ کدام است؟

۱) $-2e^{-j4\pi f}X(-2f)$

۲) $-2e^{j4\pi f}X(2f)$

۳) $2e^{-j4\pi f}X(-2f)$

۴) $2e^{j4\pi f}X(2f)$



$-\frac{t}{2} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{\alpha} t$

$w = 2\pi f \longrightarrow 2\, e^{-j2\times 2\pi f}\, X(-2\times 2\pi f)$

$= 2\, e^{-j4\pi f}\, X(2\pi(-2f))$

بستگی دارد $= 2\, e^{-j4\pi f}\, X(-2f)$

جلسه 44 سیگنال

حوزه تبدیل فوریه

④ وارونگی زمانی و فرکانسی

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$ یا $X(\omega)$ یا $X(F)$

$x(-t) \longrightarrow X(-j\omega)$ یا $X(-\omega)$ یا $X(-F)$

$x \longrightarrow X(\omega)$

$t \to -t$, $n \to -n$ ↓

$\omega \to -\omega$ ↓

$x(-t) \longrightarrow X(-\omega)$

$x[-n]$

خاصیت زوج بودن:

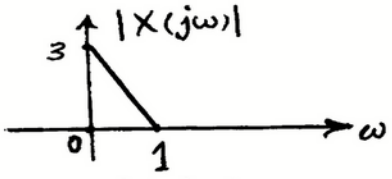
$x(t) = x(-t)$

↓ ↓

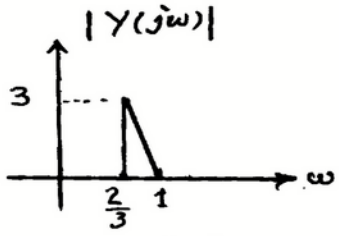
$X(j\omega) = X(-j\omega)$

* اگر x در حوزه زمان زوج باشد آنگاه $X(j\omega)$ زوج
* ~ ~ ~ ~ ~ فرد ~ ~ فرد

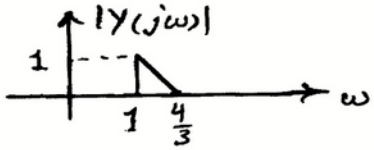
اندازهٔ تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. اندازهٔ تبدیل فوریه $y(t) = x(3t-2)e^{jt}$، کدام است؟



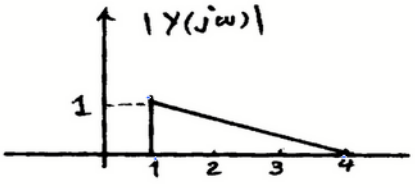
۱)



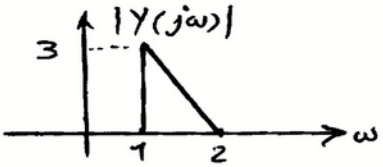
۲)



۳)



۴)



$x(t) \longrightarrow X(jw)$ $\quad |X(jw)|$ ✓

$y(t) = e^{jt}\, x(3t-2) \longrightarrow Y(jw)$ $\quad |Y(jw)| = ?$

$x(t) \longrightarrow X(jw)$

$t \to t-2$ ↓ $\quad$ ↓ $\times e^{-jw\times 2}$

$x(t-2) \longrightarrow e^{-j2w} X(jw)$

$t \to 3t$ ↓ $\quad$ ↓ $\times \frac{1}{|3|}, w \to \frac{w}{3}$

$x(3t-2) \longrightarrow \frac{1}{|3|} e^{-j2\frac{w}{3}} X(j\frac{w}{3})$

$\times e^{jt}$ ↓ $\quad$ ↓ $w \to w-1$

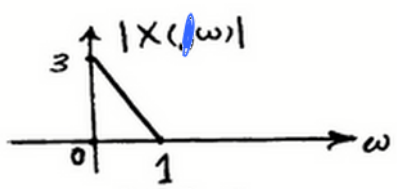
$y(t) = e^{jt}\, x(3t-2) \longrightarrow \frac{1}{3} e^{-j2\frac{w-1}{3}} X(\frac{w-1}{3}) = Y(w)$

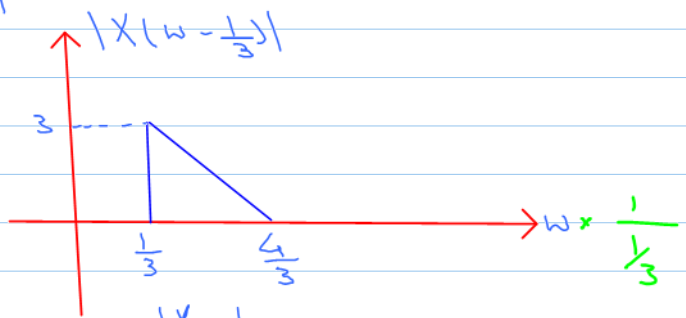
$$Y(w) = \frac{1}{3} e^{-j\frac{2}{3}(w-1)} X(\tfrac{1}{3}w - \tfrac{1}{3})$$

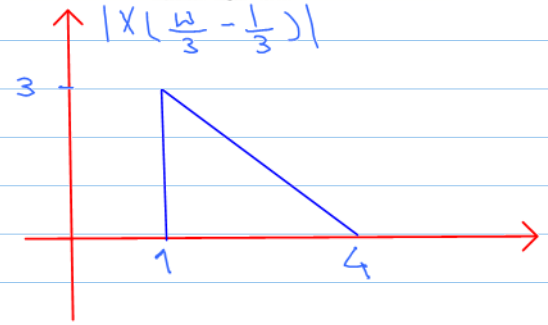
$$|Y(w)| = \left| \frac{1}{3} e^{-j\frac{2}{3}(w-1)} X(\tfrac{1}{3}w - \tfrac{1}{3}) \right|$$

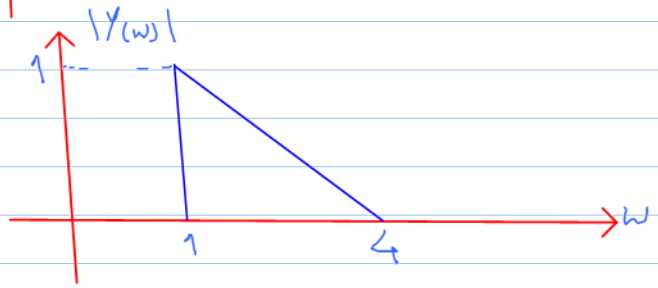
$$= \left|\frac{1}{3}\right| \left| e^{-j\frac{2}{3}(w-1)} \right| \left| X(\tfrac{1}{3}w - \tfrac{1}{3}) \right|$$

$$|Y(w)| = \frac{1}{3} \left| X(\tfrac{1}{3}w - \tfrac{1}{3}) \right|$$



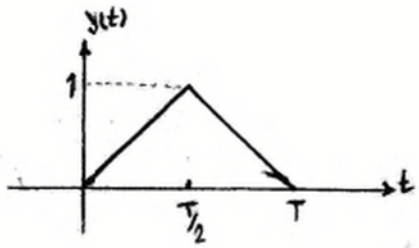






۹۵

پاسخ ضربه یک سیستم LTI یک سیگنال فرد است. اگر خروجی سیستم برای یک سیگنال $x(t)$، به صورت $y(t)$ مطابق با شکل زیر باشد، خروجی سیستم برای سیگنال $x(-t)$ چگونه است؟



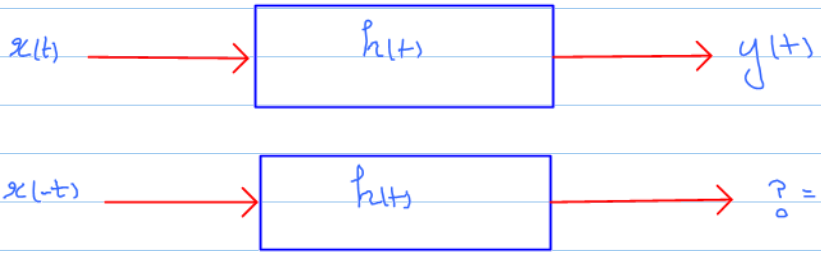
۱)

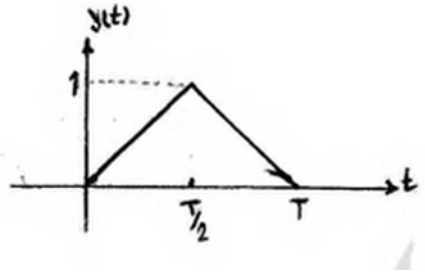

۲)


۳)


۴)


avi Kani





$h(t) = -h(-t) \rightarrow h(-t) = -h(t)$

$y(t) = x(t) * h(t)$

$y_2(t) = x(-t) * h(t) = ?$

$x(t) * h(-t) = x(t) * (-h(t)) = -x(t) * h(t)$

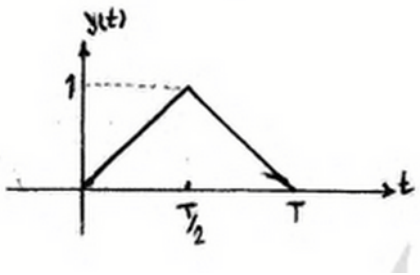
$= -y(t)$

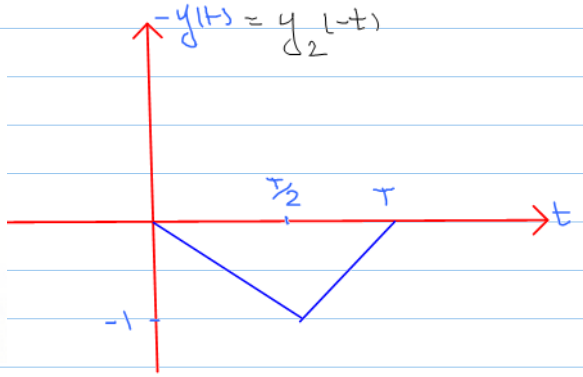
$Y(w) = X(w)\,H(w)$

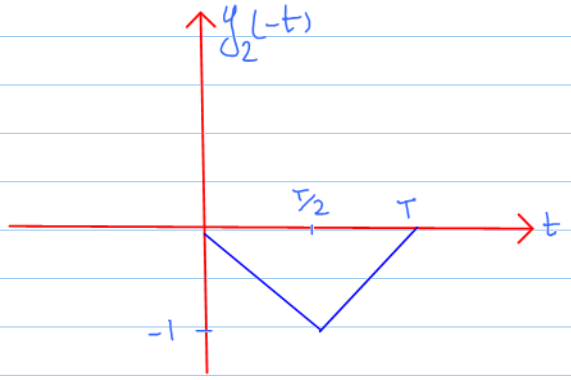
$Y_2(w) = X(-w)\,H(w)$ $\quad w' = -w$

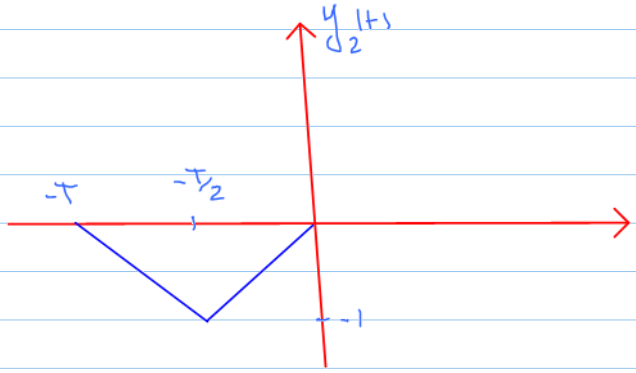
$Y_2(-w') = X(w') \times H(-w')$

$y_2(-t) = x(t) * h(-t) = -y(t) \rightarrow y_2(-t) = -y(t)$









⑤ تقارن مزدوج

$x(t) \longrightarrow a_k$

$x^*(t) \longrightarrow a^*_{-k}$

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$x^*(t) \longrightarrow X^*(-j\omega)$

$x^*[n]$

تقارن مزدوج:

$x \longrightarrow X(j\omega)$

$*$ ↓ ، $*$ ↓ و $\omega \to -\omega$

$x^*(t)$

$x^*[n] \longrightarrow X^*(-j\omega)$

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$t \to -t$ و $*$ ↓ ، $*$ ↓

$x^*(-t) \longrightarrow X^*(j\omega)$

* اگر x در حوزه زمان $\longrightarrow X(j\omega)$

① حقیقی و زوج $\longleftarrow$ حقیقی و زوج

② حقیقی و فرد $\longleftarrow$ موهومی خالص و فرد

③ موهومی خالص و زوج $\longleftarrow$ موهومی خالص و زوج

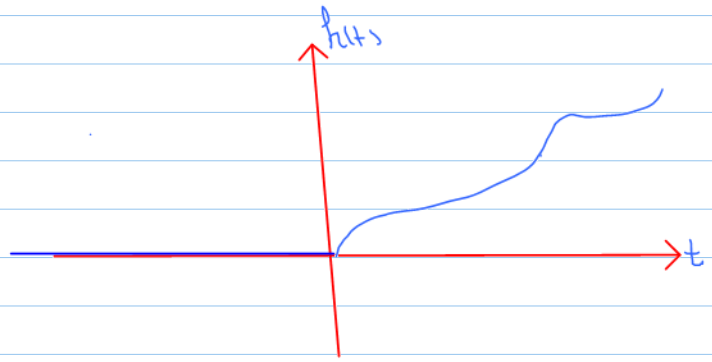
④ موهومی خالص و فرد $\longleftarrow$ حقیقی و فرد

مثال. کدام گزینه در مورد پاسخ ضربه یک سیستم LTI که علّی بوده و پاسخ ضربه حقیقی دارد و حافظه دار

می‌تواند صحیح باشد؟

1) تابعی زوج از t است.
2) مودی خالی است.
3) تابعی فرد از t است.
4) حقیقی نیست.

حافظه‌دار و سیستم علّی و $h(t)$ حقیقی $H(j\omega)$



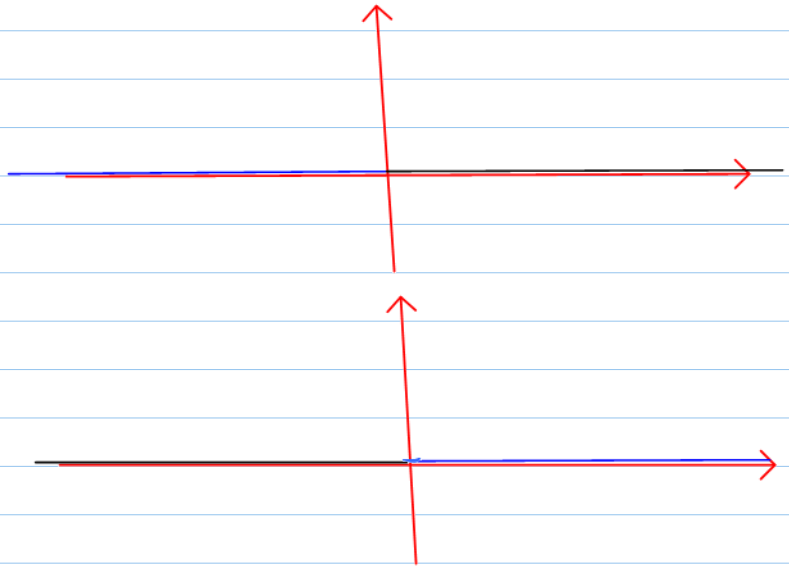
① $h(t)$ → حقیقی

② $h(t)=0 \quad \forall t<0$

③ $h(t) \neq k\delta(t)$

زوج → $h(t)=0$ ✗

فرد → $h(t)=0$ ✗



$h(t)$ نه زوج است نه فرد است.

1) $H(j\omega)$ زوج ⟶ $h(t)$ زوج ✗

3) ~ فرد ⟶ ~ فرد ✗

2) $H(j\omega)$ موهومی محض ⟶ $h(t)$ حقیقی ✗

چون $h(t)$ حقیقی است اگر بخواهیم $H(j\omega)$ موهومی محض بشود حتماً باید $h(t)$ فرد هم باشد.

$H(j\omega) \neq j(\quad)$

$H(j\omega)$ موهومی محض نیست

↓

حقیقی

آیا $H(j\omega)$ می‌تواند حقیقی باشد؟ خیر ← چون $h(t)$ زوج نیست

گزینه 4/

۸۱

اگر قسمت حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان حقیقی و علّی برابر $H_R(\omega) = \pi\delta(\omega)$ باشد، پاسخ ضربه آن کدام است؟

۱) $h(t) = \delta(t)$

۲) $h(t) = u(t)$

۳) $h(t) = e^{-t}u(t)$

۴) $h(t) = u(t) - u(t-1)$

LTI سیستم → { علی — $\mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = \pi\delta(\omega)$; $h(t)$ حقیقی — $h(t) = ?$

علی → { زمان: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$; $h(t) = h^*(t)$ }

فرکانس: $\frac{H(j\omega) + H^*(j\omega)}{2} = \pi\delta(\omega)$

$$H(j\omega) + H^*(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

زمان: $h(t) + h^*(-t) = 1$

$h(t) \longrightarrow H(j\omega)$

$h^*(-t) \longrightarrow H^*(j\omega)$

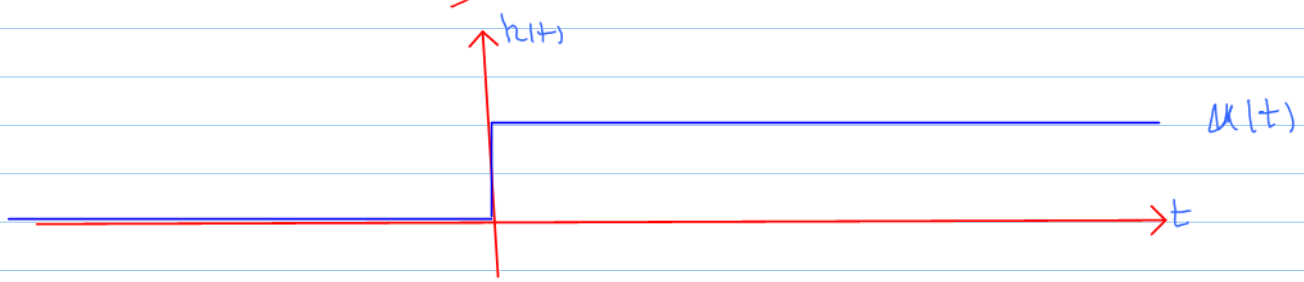
① $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ — h(سببی) $= 0$

② $h(t) = h^*(t) \longrightarrow h(-t) = h^*(-t)$

③ $h(t) + h^*(-t) = 1$

③ $\longrightarrow h(t) + h(-t) = 1 \longrightarrow h(t) = ?$

اگر $t > 0$ ($-t < 0$) $\longrightarrow$ h(سببی) $+ h$(سببی) $= 1 \longrightarrow h$(سببی) $= 1$



«جلسه 45 سیگنال»

خواص تبدیل فوریه:

$x(t) \longrightarrow X(jw)$

$x(-t) \longrightarrow X(-jw)$

$x(t-a) \longrightarrow e^{-jaw} X(jw)$

$e^{jat} x(t) \longrightarrow X(j(w-a))$

$x^*(t) \longrightarrow X^*(-jw)$

$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X(j\frac{w}{a})$

اگر x در حوزه زمان، $X(jw)$

زوج ⟷ زوج

فرد ⟷ فرد

حقیقی و زوج ⟷ حقیقی و زوج

موهومی و فرد ⟷ حقیقی و فرد

حقیقی و فرد ⟷ موهومی و فرد

موهومی و زوج ⟷ موهومی و زوج

مثال: $X(\omega) = \frac{2}{\omega^2 - 2\omega + 2}$ ، $x(t)$ را حساب کنید.

سخت‌ترین سیگنال را از جدول تبدیل فوریه

$$x(t) \longrightarrow \frac{2}{\omega^2 - 2\omega + 2} = X(\omega)$$

$$e^{+a|t|} \xrightarrow{a<0} \frac{-2a}{\omega^2 + a^2}$$

$$X(\omega) = \frac{2}{(\omega-1)^2 + 1}$$

$$e^{-|t|} \longrightarrow \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

$$xe^{jt} \downarrow \qquad \omega \to \omega - 1 \downarrow$$

$$x(t) = e^{jt}\, e^{-|t|} \longrightarrow \frac{2}{(\omega-1)^2 + 1} = X(\omega)$$

۸۸

$X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال دلخواه $x(t)$ است. $X^*(۳-۲\omega)$ تبدیل فوریه کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۳}{۲}e^{۳jt}x^*\left(\frac{۳t}{۲}\right)$

۲) $\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۳jt}{۲}}x^*\left(-\frac{t}{۲}\right)$

۳) $\frac{۱}{۲}e^{\frac{۳jt}{۲}}x^*\left(\frac{t}{۲}\right)$

۴) $\frac{۳}{۲}e^{-۳jt}x^*\left(-\frac{۳t}{۲}\right)$

تقارن در مبنا

مقیاس دهی

شیفت

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$? \longrightarrow X^*(-2w+3)$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$*$ ↓ ↓

$x^*(t) \longrightarrow X^*(-w)$

↓ ↓ $w \to w-3 \to X^*(-(w-3)) = X^*(-w+3)$

$e^{j3t}\ x^*(t) \longrightarrow X^*(-w+3)$

$|\frac{1}{2}|, t \to \frac{1}{2}t$ ↓ ↓ $w \to 2w = \frac{w}{\alpha} \to \alpha = \frac{1}{2}$

$|\frac{1}{2}|\, e^{j3\frac{t}{2}}\, x^*(\frac{t}{2}) \longrightarrow X^*(-2w+3)$

$x(\alpha t) \longrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X(\frac{w}{\alpha})$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

$|\alpha|, t \to \alpha t$ ↓ ↓ $w \to \frac{w}{\alpha}$

$|\alpha|\, x(\alpha t) \longrightarrow X(\frac{w}{\alpha})$

تق ۹۵ اگر $x[n]$ حقیقی باشد شرط کافی برای حقیقی بودن $X(e^{j\omega})$ ؟

~~شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن زوج تبدیل فوریه گسسته ـ زمان $x[n]$ و $X(e^{j\omega})$ عبارت است از:~~

۱) برای کلیه nها: $x[-n] = x[n]$

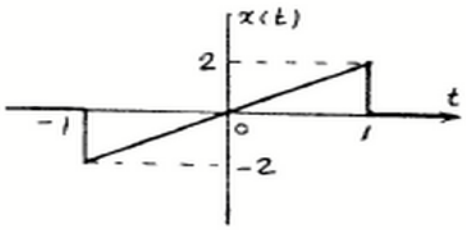
۲) برای صرفاً nهای زوج: $x[-n] = x[n]$

۳) برای صرفاً nهای فرد: $-x[-n] = x[n]$

۴) برای nهای زوج: $x[-n] = x[n]$ و برای nهای فرد $x[-n] = -x[n]$

$x[n]$ حقیقی و زوج باشد $\Rightarrow$ $X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج

تبدیل فوریه سیگنال مقابل به صورت $X(\omega)$ داده می‌شود.



کدام یک از گزینه‌های زیر کاملاً صحیح است؟

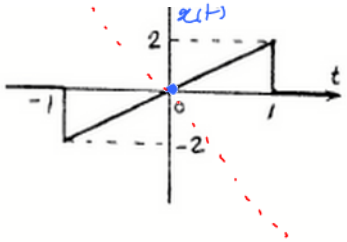
۱) $\mathrm{Im}[X(\omega)] = 0$ ، $X(\omega = -X(-\omega)$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$

۲) $\mathrm{Re}[X(\omega)] = 0$ ، $X(\omega) = -X(-\omega)$ ، $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$

۳) $X(\omega) = X^{*}(\omega)$ ، $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$ و $\mathrm{Im}[X(\omega)] = 0$

۴) $\mathrm{Re}[X(\omega)] = 0$ ، $X(\omega) = X^{*}(\omega)$ ، $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$

$x(t) \longrightarrow X(w)$



۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$, $X(\omega) = -X(-\omega)$, $Im[X(\omega)] = 0$

۲) $X(\omega) = -X(-\omega)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$, $Re[X(\omega)] = 0$

۳) $Im[X(\omega)] = 0$, $X(\omega) = X^*(\omega)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$

۴) $X(\omega) = X^*(\omega)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 0$, $Re[X(\omega)] = 0$

اطلاعات ← سؤال

$x(t) \longrightarrow$ در حوزه‌ی زمان $\longrightarrow$ در حوزه‌ی فرکانس

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\,dw = ? = 0$$

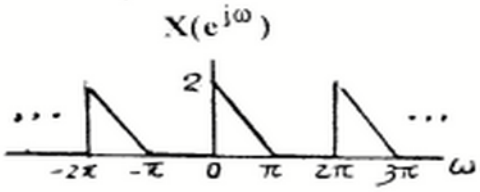
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwt}\, dw$$

$$2\pi\, x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(w)dw$$

	حوزه‌ی زمان	حوزه‌ی فرکانس
1)	$x(t)$ حقیقی و فرد	$X(w)$ موهومی و فرد ✗
2)	$x(t)$ موهومی و فرد	$X(w)$ حقیقی و فرد ✓
3)	$x(t)$ حقیقی و زوج	$X(w)$ حقیقی و زوج ✗
	$x(t)$ موهومی و فرد	$X(w)$ موهومی و فرد ✗
4)	$x(t)$ موهومی و حقیقی	✗

$x(t)$		$X(w)$
حقیقی و زوج	⟷	حقیقی و زوج
موهومی و فرد	⟷	حقیقی و فرد
حقیقی و فرد	⟷	موهومی و فرد
موهومی و زوج	⟷	موهومی و زوج

تبدیل فوریهٔ زمان ـ گسستهٔ سیگنال $x[n]$ در شکل مقابل داده شده است. اگر



سیگنال زمان ـ پیوستهٔ $f(t)$ به صورت $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}e^{j2nt}$ تعریف شود. مقدار $f(t)$ در $t=\frac{\pi}{2}$ چقدر است؟ (جزء حقیقی: $Re\{\circ\}$)

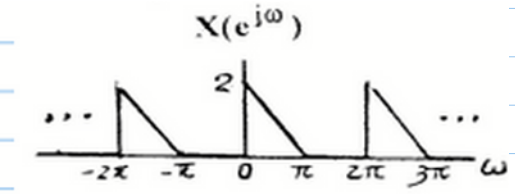
۱) ۲

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) ۰

$x[n] \longrightarrow X(jw)$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j2nt}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j\pi n} \quad = ?$$

$X(jw)$ را بدانیم و سیگنالی از $x[n]$ را خواسته است. ←

$$X(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn}$$

□ تبدیل فوریه $= \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ □ e^{-jwn}

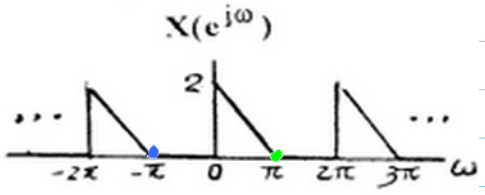
$$Re\{x[n]\} \longrightarrow \frac{1}{2}X(jw) + \frac{1}{2}X^*(-jw)$$

$$\frac{1}{2}X(j\cancel{w}^{-\pi}) + \frac{1}{2}X^*(-j\cancel{w}^{-\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}\, e^{-j\cancel{w}^{-\pi}n}$$

$$? = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j\pi n}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{X(-j\pi)}^{0} + \frac{1}{2}\cancel{X^*(j\pi)}^{0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{x[n]\}\, e^{j\pi n} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$(X(j\pi))^*$



سیگنال زمان ـ گسسته $x[n]$ به صورت زیر داده شده است:

$$x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]+3^n u[-n]$$

اگر تبدیل فوریهٔ $x[n]$ را با $X(e^{j\omega})=X_R(\omega)+jX_I(\omega)$ نشان دهیم (که X_R و X_I به ترتیب جزء حقیقی و جزء موهومی $X(e^{j\omega})$ هستند) و تبدیل فوریهٔ سیگنال $y[n]$ را به صورت $Y(e^{j\omega})=6X_I(\omega+\frac{\pi}{2})$ تعریف کنیم، در این صورت $y[1]$ چقدر است؟

۱) $-j\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-j\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

$x[n] \longrightarrow X(jw)$

$g[n] \longrightarrow 6\,\mathrm{Im}\{X(j(w+\frac{\pi}{2}))\}$ $\qquad g[1]=?$

$x[n] \longrightarrow X(w)$

$z[n] = e^{-j\frac{\pi}{2}n}\,x[n] \longrightarrow X(w+\frac{\pi}{2}) = Z(w)$

$Z[n] \longrightarrow Z(w)$

$? \longrightarrow \mathrm{Im}(Z(w)) = \frac{1}{2j}\left(Z(w) - Z^*(w)\right)$

$\frac{1}{2j}\left(Z(w) - Z^*(w)\right) \Rightarrow ?$

$\frac{1}{2j}\ Z[n] \longrightarrow \frac{1}{2j} Z(w)$

$\frac{1}{2j}\ Z^*[-n] \longrightarrow \frac{1}{2j} Z^*(w)$

$z[n] = e^{-j\frac{\pi}{2}n}\,x[n] \longrightarrow X(w+\frac{\pi}{2}) = Z(w)$

$6\left(\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{2}n}x[n] - \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{2}n}x[-n]\right)^*\right) \longrightarrow 6\,\mathrm{Im}\{X(w+\frac{\pi}{2})\} = \mathrm{Im}\{Z(w)\}$

$g[n] = \frac{3}{j}e^{-j\frac{\pi}{2}n}x[n] - \frac{3}{j}e^{-j\frac{\pi}{2}n}x^*[-n] \longrightarrow 6X_I(w+\frac{\pi}{2}) = Y(w)$

$g[1] = \frac{3}{j}e^{-j\frac{\pi}{2}}x[1] - \frac{3}{j}e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(x[-1]\right)^*$

$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - 3^n u[-n] \qquad x[1] = \frac{1}{2} \qquad \left(x[-1]\right)^* = \left(-3^{-1}\right)^* = -\frac{1}{3}$

$g[1] = \frac{3}{j}(-j)\,\frac{1}{2} - \frac{3}{j}(-j)(-\frac{1}{3}) = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

در یک سیستم LTI پایدار علّی باپاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=1+\cos(2\pi f_0 n+\frac{\pi}{3})$ به صورت $y[n]=j-e^{j2\pi f_0 n}$ بدست آمده است. مقدار $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{h[n]\}\sin(2\pi f_0 n)$ در این سیستم چقدر است؟

۱) -1

۲) $+1$

۳) $\cos\frac{\pi}{3}$

۴) $-\sin\frac{\pi}{3}$

* $x[n] = 1 + \cos(2\pi f_0 n + \frac{\pi}{3}) \longrightarrow y[n] = j - e^{j2\pi f_0 n}$ * سیستم علی و بایدار

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{h[n]\} \sin(2\pi f_0 n) \quad = ?$$

حرکاه سیگنال از $h[n]$ یا $h[n]e^{j\Omega}$ یا $h[n]\sin(\Omega)$ یا $h[n]\cos(\Omega)$

خواسته مسئله تبدیل به تعریف تبدیل فوریه!

تبدیل فوریه سیگنال $= \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ سیگنال $\times e^{-jwn}$

خواسته مسئله $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{h[n]\}\left(\frac{1}{2j} e^{j2\pi f_0 n} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi f_0 n}\right)$

خواسته مسئله $= \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{h[n]\} e^{j2\pi f_0 n} - \frac{1}{2j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{h[n]\} e^{-j2\pi f_0 n}$

$h[n] \longrightarrow H(jw)$

$Re\{h[n]\} \longrightarrow \frac{1}{2} H(jw) + \frac{1}{2} H^*(jw)$

$$\frac{1}{2} H(jw) + \frac{1}{2} H^*(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Re\{h[n]\} e^{-jwn}$$

خواسته مسئله $= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2} H(-j2\pi f_0) + \frac{1}{2} H^*(-j2\pi f_0)\right)$

$$-\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2} H(j2\pi f_0) + \frac{1}{2} H^*(j2\pi f_0)\right)$$

باید $H(j2\pi f_0)$ و $H(-j2\pi f_0)$ را بیابیم.

$h[n] \longrightarrow H(jw)$

$x[n] = 1 + \cos(2\pi f_0 n + \frac{\pi}{3}) \xrightarrow{H(j\omega)} y[n] = j - e^{j2\pi f_0 n}$

$e^{j\omega n} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow e^{j\omega n} H(j\omega)$

$H(j\omega)$ و x حساب کنیم. $y[n]$ را بدست آوریم

$x[n] = 1 + \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 n} e^{j\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 n} e^{-j\frac{\pi}{3}}$

$1 = e^{j0n} \longrightarrow 1 \; H(j0)$

$+$

$\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j(2\pi f_0 n)} \longrightarrow e^{j2\pi f_0 n} \; H(j2\pi f_0) \times \frac{1}{2} e^{j\pi/3}$

$+ \; e^{j\frac{\pi}{3}} \longrightarrow e^{j\frac{\pi}{3}} \; H(j\pi/3) \; +$

$\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2\pi f_0 n} \longrightarrow e^{-j2\pi f_0 n} \; H(-j2\pi f_0) \times \frac{1}{2} e^{-j\pi/3}$

$\underbrace{1 + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi f_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2\pi f_0 n}}_{x[n]} \rightarrow 1 \; H(j0) + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi f_0 n} H(j2\pi f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2\pi f_0 n} H(-j2\pi f_0)$

چاپ سیستم LTI ورودی $x[n]$ باید به شرط باشد.

$j = e^{j2\pi f_0 n} = H(j0) + \frac{1}{2} e^{j\pi/3} H(j2\pi f_0) e^{j2\pi f_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} H(-j2\pi f_0) e^{-j2\pi f_0 n}$

$j = H(j0)$

$-1 = \frac{1}{2} e^{j\pi/3} H(j2\pi f_0) \longrightarrow H(j2\pi f_0) = -2 e^{-j\pi/3} \quad H^*(j2\pi f_0) = -2 e^{j\pi/3}$

$0 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} H(-j2\pi f_0) \longrightarrow H(-j2\pi f_0) = 0 \;, \; H^*(-j2\pi f_0) = 0$

$\text{مقدار} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2} H(-j2\pi f_0) + \frac{1}{2} H^*(-j2\pi f_0)\right)$

$-\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2} H(j2\pi f_0) + \frac{1}{2} H^*(j2\pi f_0)\right) = \frac{e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/3}}{2j}$

تمرین ۲

در یک سیستم LTI پایداری علّی با پاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=1+\cos[2\pi f_0 n+\frac{\pi}{3}]$ به صورت $y[n]=j-e^{j2\pi f_0 n}$ به دست آمده است. مقدار $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Re\{h[n]\sin(2\pi f_0 n)\}$ در این سیستم برابر کدام است؟

۱) $\sum_n Re\{h[n]\}\sin(2\pi f_0 n)=-1$

۲) $\sum_n Re\{h[n]\}\sin(2\pi f_0 n)=\sum_n Re\{h[n]\}\cos(2\pi f_0 n)$

۳) $\sum_n Re\{h[n]\}\sin(2\pi f_0 n)=\sin\frac{\pi}{3}$

۴) $\sum_n Re\{h[n]\}\sin(2\pi f_0 n)=-1$

۹۴

تبدیل فوریه کدام یک از توابع (سیگنال‌های) داده شده دارای کلیّه خصوصیات زیر است؟

الف) $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=0$ ، ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(j\omega)d\omega=0$ ، ج) $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)d\omega=0$

۱) $x(t)=t^{3}e^{-|t|}$

۲) $x(t)=t^{2}e^{-|t|}$

۳) $x(t)=e^{-t^{2}}-1$

۴) $x(t)=te^{-|t|}$

$x(t) \longrightarrow X(w)$

در حوزه فرکانس

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 0 \quad (ج \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega)d\omega = 0 \quad (ب \quad , \quad Re\{X(j\omega)\} = 0 \quad (الف$$

حوزه زمان

۱) $x(t) = t^2 e^{-|t|}$

۲) $x(t) = t^2 e^{-|t|}$

۳) $x(t) = e^{-t^2} - 1$

۴) $x(t) = te^{-|t|}$

الف) $Re\{X(jw)\} = 0 \longrightarrow$ ؟ $x(t)$

$X(jw)$ موهومی محض $\longrightarrow$ $x(t)$ حقیقی و فرد

~~موهومی و فرد~~ ~~و ج~~

ج) $0 = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw = 2\pi x(0) \longrightarrow x(0) = 0$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} w X(jw)\,dw = 0$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,e^{jwt}\,dw\right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw\left(\frac{d}{dt}e^{jwt}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,jw\,e^{jwt}\,dw$$

$$\frac{2\pi}{j}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} w X(jw)\,e^{jwt}\,dw$$

$$\frac{2\pi}{j}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \longrightarrow \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

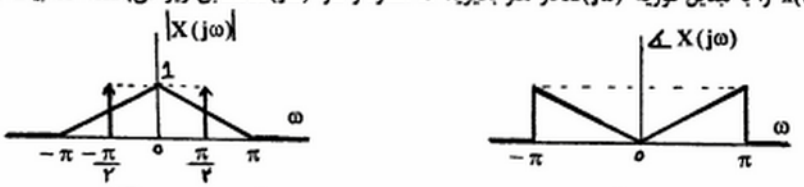
~~۴)~~ $x(t) = t\,e^{-|t|} \longrightarrow 1\,e^{-|t|} + t\left.\frac{d\,e^{-|t|}}{dt}\right|_{t=0} = 1 + 0 \neq 0$

✓۱) $x = t^3 e^{-|t|} \longrightarrow 3t^2 e^{-|t|} + t^3\left.\frac{d}{dt}(e^{-|t|})\right|_{t=0} = 0 + 0 = 0$ ✓

جلسه ۴۶ سیگنال

برق ۸۵

سیگنال پیوستهٔ $x(t)$ را با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ در نظر بگیرید که اندازه و فاز $X(j\omega)$ مطابق زیر می‌باشد؟ کدام‌یک از عبارات زیر صحیح است؟



۱) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}$

۲) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}$

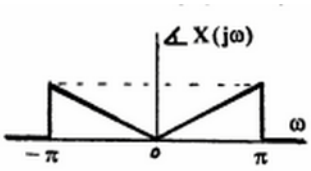
۳) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

۴) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j \angle X(j\omega)}$

صحیح است؟

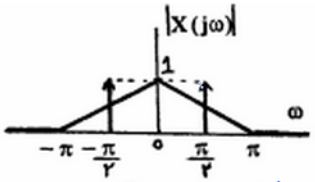


۱) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}$

۲) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}$

۳) $x(t)$ زوج بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

۴) $x(t)$ حقیقی بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$



اطلاعات ← بر حوزه زمان سوال ← حوزه زمان

$x(t)$

$x(t)$ زوج ؟ ⟷ $X(j\omega)$ زوج

$X(j\omega) \stackrel{?}{=} X(-j\omega)$

$|X(j\omega)|\, e^{j \angle X(j\omega)} \stackrel{?}{=} |X(-j\omega)|\, e^{j \angle X(-j\omega)}$

$\begin{cases} |X(j\omega)| \stackrel{?}{=} |X(-j\omega)| \checkmark \\ \angle X(j\omega) = \angle X(-j\omega) \checkmark \end{cases} \longrightarrow X(j\omega) = X(-j\omega) \checkmark$

$X(j\omega)$ زوج است ← $x(t)$ زوج است.

$x(t) = x^*(t)$ ← $x(t)$ حقیقی

$X(j\omega) \stackrel{?}{\neq} X^*(-j\omega) \longrightarrow$ حقیقی نیست.

$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j \angle X(j\omega)}$

$X^*(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{-j \angle X(j\omega)}$

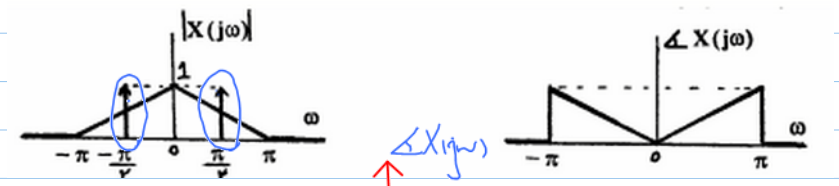
$X^*(-j\omega) = |X(-j\omega)|\, e^{-j \angle X(-j\omega)} = |X(j\omega)|\, e^{-j \angle X(j\omega)}$

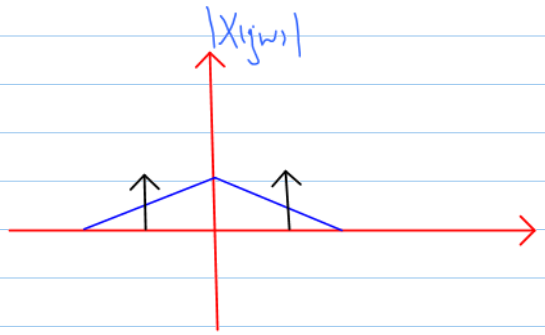
$|X(j\omega)|\, e^{j \angle X(j\omega)} \stackrel{?}{=} |X(j\omega)|\, e^{-j \angle X(j\omega)}$

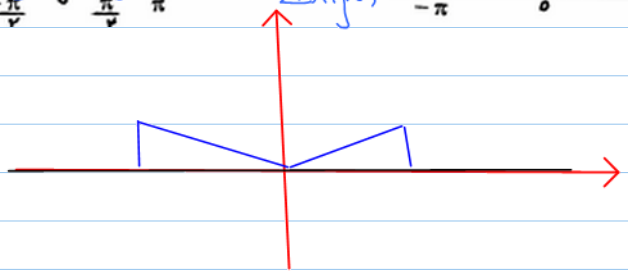
$\angle X(j\omega) \stackrel{?}{\neq} -\angle X(j\omega)$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \begin{cases} \infty & ? \\ \frac{1}{2\pi} & ? \end{cases}$

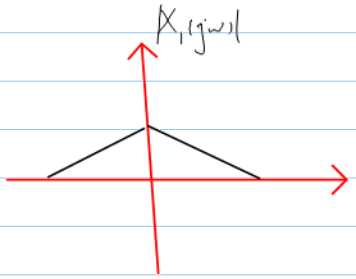
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \infty$$

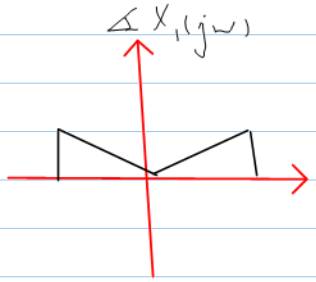






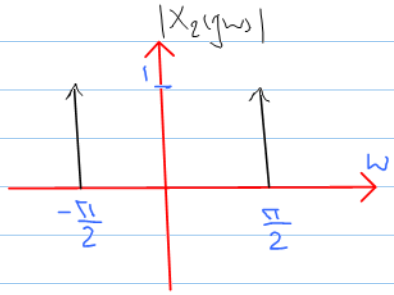
$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ X(jw) = X_1(jw) + X_2(jw) \end{cases}$$

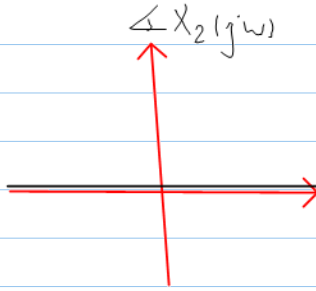




$$X_2(jw) = \left(\delta(w-\tfrac{\pi}{2}) + \delta(w+\tfrac{\pi}{2})\right) e^{j0}$$

$$X_2(jw) = \delta(w-\tfrac{\pi}{2}) + \delta(w+\tfrac{\pi}{2})$$





$$x_2(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t} = 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

$$x(t) = x_1(t) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

$$E_x = E_{x_1} + \infty = \begin{cases} 0 + \infty = \infty \\ b + \infty = \infty \\ \infty + \infty = \infty \end{cases}$$

$$E_x = \infty$$

سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. اطلاعات زیر در مورد این سیگنال در دسترس است.

- $x(t)$ حقیقی است.
- $x(t) = 0 \quad t \leq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi |t| e^{-|t|}$

$x(t)$ برابر کدام است؟

۱) $x(t) = 2\pi t e^{-t} u(t)$

۲) $x(t) = 2\pi t e^{t} u(t)$

۳) $x(t) = 2t e^{t} u(t)$

۴) $x(t) = 2t e^{-t} u(t)$

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

حوزه زمان $\begin{cases} x(t) \text{ حقیقی است.} \\ x(t) = 0 \quad t \le 0 \end{cases}$

حوزه زمان / حوزه مکان $\leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} e^{j\omega t}\, d\omega = 2\pi |t| e^{-|t|}$

سیگنال $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}$ تبدیل فوریه $e^{jwt}\, dt$

تبدیل فوریه $= Re\{X(jw)\}$

$x(t) \longrightarrow X(jw)$

$? \longrightarrow \frac{X(jw) + X^*(jw)}{2} = \frac{1}{2} X(jw) + \frac{1}{2} X^*(jw)$

$\frac{1}{2} x(t) \longrightarrow \frac{1}{2} X(jw)$

$t \to -t$ و $*$ ، $+$ ، $*$ ، $+$

$\left(\frac{1}{2} x(-t)\right)^* \longrightarrow \frac{1}{2} X^*(jw)$

$\frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x^*(-t) \longrightarrow Re\{X(jw)\}$

$\frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x^*(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Re\{X(jw)\} e^{jwt}\, dw$

$\frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x^*(-t) = \frac{1}{2\pi} (2\pi |t| e^{-|t|}) = |t| e^{-|t|}$

$* \quad x(t) + x^*(-t) = 2|t| e^{-|t|} \quad *$

$x(t) = 0 \quad t < 0$

x (عددی) $= 0$

$x(t) = x^*(t) \longrightarrow x(-t) = x^*(-t)$

$x(t) + x(-t) = 2|t| e^{-|t|}$

فرض: $t \ge 0 \longrightarrow$ x (مثبت) $+ x$ (~~عدد مثبت~~ منفی) $= 2t e^{-t}$

$\begin{cases} t \ge 0 & x(t) = 2t e^{-t} \\ t < 0 & x(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow x(t) = \begin{cases} 2t e^{-t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = 2te^{-t} u(t)$

⑤ مشتق گیری:

$$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$$

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t) \longrightarrow (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$$

$$x[n]-x[n-1] \longrightarrow (1-e^{-j\omega})\,X(j\omega)$$

$$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$$

$$(-jt)^k x(t) \longrightarrow \frac{d^k}{d\omega^k}X(j\omega)$$

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$$

$$(-jn)^k x[n] \longrightarrow \frac{d^k}{d\omega^k}X(j\omega)$$

⑥ انتگرال گیری:

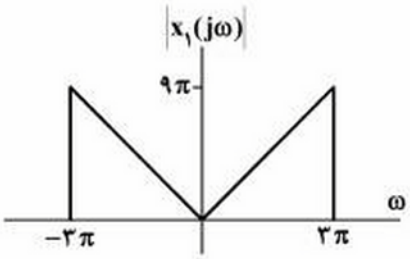
$$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$$

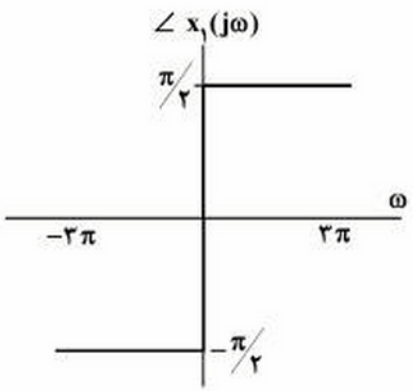
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \frac{X(j\omega)}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(j0)\,\delta(\omega) \quad , \quad \text{متناوب با } 2\pi$$

برق 95

$x_1(t)$، که اندازه و زاویهٔ تبدیل فوریهٔ آن به شکل زیر است، کدام‌یک از گزینه‌های زیر خواهد بود؟



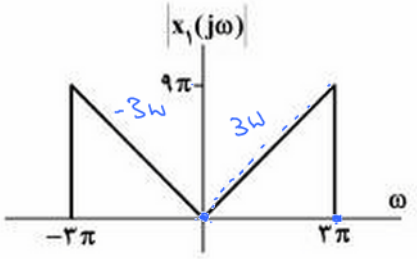


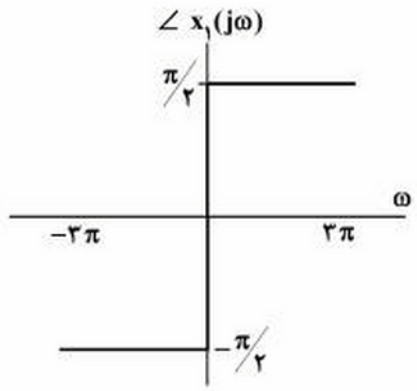
۱) $\frac{3}{\pi t^2}(3\pi t\cos(3\pi t)-\sin(3\pi t))$

۲) $\frac{3}{\pi t}(3\pi t\sin(3\pi t)-\cos(3\pi t))$

۳) $\frac{3\sin(3\pi t)}{\pi t^2}$

۴) $\frac{3\cos(3\pi t+\frac{\pi}{4})}{\pi t^2}$





$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$X(j\omega) = |X(j\omega)| \, e^{j \angle X(j\omega)}$

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} 3\omega & 0 \le \omega \le 3\pi \\ -3\omega & -3\pi \le \omega \le 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\angle X(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega \ge 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 3\omega \, e^{j\frac{\pi}{2}} & 0 \le \omega \le 3\pi \\ -3\omega \, e^{j(-\frac{\pi}{2})} & -3\pi \le \omega \le 0 \\ 0 \times e^{j(\pm\frac{\pi}{2})} = 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} j3\omega & 0 \le \omega \le 3\pi \\ j3\omega & -3\pi \le \omega \le 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = j3\omega \times \begin{cases} 1 & 0 \le \omega \le 3\pi \\ 1 & -3\pi \le \omega \le 0 \\ 0 & \end{cases}$$

$$X(j\omega) = 3j\omega \times \underbrace{\Pi\left(\frac{\omega}{6\pi}\right)} \longrightarrow x(t) = ?$$

$$3\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t} \longrightarrow 3\Pi\left(\frac{\omega}{6\pi}\right)$$

$\frac{d}{dt}$ ↓ $\times j\omega$

$$3\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}\right) \longrightarrow 3j\omega\,\Pi\left(\frac{\omega}{6\pi}\right)$$

$$x(t) = 3\left(\frac{+3\pi\cos(3\pi t)\times\pi t - \pi\times\sin(3\pi t)}{(\pi t)^2}\right) =$$

سیگنال زمانی $x(t)$ متناظر با تبدیل فوریه $X(j\omega)=\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin 2\omega - j\cos 2\omega}{1+j(\frac{\omega}{3})}\right\}$ ، کدام است؟

۱) $te^{-3t+2}u(t+2)$

۲) $3te^{-3(t-2)}u(t-2)$

۳) $-3te^{-3(t+2)}u(t+2)$

۴) $te^{-3t-2}u(t-2)$

$$X(j\omega)=\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin 2\omega - j\cos 2\omega}{1+j\left(\frac{\omega}{3}\right)}\right\} \Rightarrow$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin(\theta)$$

$$? = -j\cos(2w) + \sin(2w)$$

$$? = -j\left(\cos(2w) + \frac{1}{-j}\sin(2w)\right)$$

$$? = -j\left(\cos(2w) + j\sin(2w)\right)$$

$$= -j\,e^{j2w}$$

$$X(jw) = \frac{d}{dw}\left(\frac{-j\,e^{j2w}}{1+j\frac{w}{3}}\right)$$

$$X(jw) = -j\,\frac{d}{dw}\left(\frac{e^{j2w}}{1+j\frac{w}{3}}\right)$$

$$e^{-t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{1+jw}$$

$$\frac{1}{|\alpha|}, t\to\frac{t}{\alpha} \qquad w\to\frac{w}{3} \quad \alpha=\frac{1}{3}$$

$$3e^{-3t}u(3t) \longrightarrow \frac{1}{1+j\frac{w}{3}}$$

$$t\to t-a \qquad t\to t-2 \qquad e^{j2w} \qquad e^{jaw}$$

$$3e^{-3(t-2)}u(3(t-2)) \longrightarrow \frac{e^{j2w}}{1+j\frac{w}{3}}$$

$$-jt \qquad \frac{d}{dw}$$

$$-jx - j3te^{-3(t-2)}u(3(t-2)) \longrightarrow -j\,\frac{d}{dw}\left(\frac{e^{j2w}}{1+j\frac{w}{3}}\right) = X(jw)$$

$$x(t) = -3te^{-3t+6}u(3t-6)$$

$$u(3t-6) = u(t-2) \qquad u(\alpha f(t)) = u(f(t))$$

$$u(3(t-2)) = u(t-2)\checkmark$$

بروی ۸۳ و ۹۵

در صورتیکه رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی یک سیستم زمان-گسسته بصورت: $Y(\Omega)=\int_{\Omega-\frac{\pi}{4}}^{\Omega+\frac{\pi}{4}} X(\theta)d\theta$ باشد، آنگاه رابطه بین ورودی و خروجی در حوزه زمان برابر است با:

$$\left(x[n]=\frac{\sin Wn}{n\pi} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(\Omega)=\begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le |\Omega| \le W \\ 0 & ; \quad W < |\Omega| \le \pi \end{cases} \right.$$

$$\left. 0 < W < \pi \qquad\qquad X(\Omega) \text{ متناوب با تناوب } 2\pi \right)$$

۱) $y[n]=2x[n]\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n}$

۲) $y[n]=x[n]\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n\pi}$

۳) $y[n]=2x[n]\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n\pi}$

۴) $y[n]=2\pi x[n]\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n}$

$x[n] \longrightarrow X(jw) = X(w)$ ، $y[n] = x[n]$ برحسب

$$y[n] \longrightarrow Y(w) = \int_{w-\frac{\pi}{4}}^{w+\frac{\pi}{4}} X(\theta)\, d\theta$$

ب) $y[n]$ را روی $x[n]$ محاسبه کنید. رابطه y و x در حوزه فرکانس/ زمان

$$\frac{\sin(an)}{\pi n} \longrightarrow \Pi\left(\frac{w}{2a}\right) = \begin{cases} 1 & -a \le w \le a \rightarrow -a \le |w| \le a \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$Y(w) = \int_{w-\frac{\pi}{4}}^{w+\frac{\pi}{4}} X(\theta)\, d\theta \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dY(w)}{dw}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(w+\tfrac{\pi}{4})\} - \mathcal{F}^{-1}\{X(w-\tfrac{\pi}{4})\}$$

$X(w+\frac{\pi}{4})$ ، $X(w-\frac{\pi}{4})$ ، $\frac{dY}{dw}$

$$\begin{cases} y[n] \longrightarrow Y(w) \\ -jn\,y[n] \longrightarrow \frac{dY}{dw} \end{cases}$$

$x[n] \longrightarrow X(w)$

$e^{-jan}\, x[n] \longrightarrow X(w+a)$

$e^{-j\frac{\pi}{4}n}\, x[n] \longrightarrow X(w+\frac{\pi}{4})$

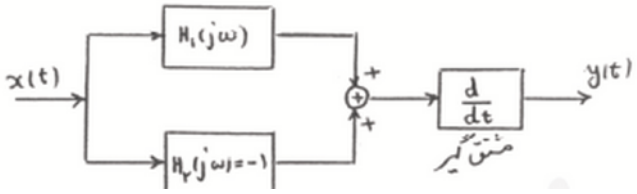
$e^{j\frac{\pi}{4}n}\, x[n] \longrightarrow X(w-\frac{\pi}{4})$

$$-jn\,y[n] = e^{-j\frac{\pi}{4}n}\,x[n] - e^{j\frac{\pi}{4}n}\,x[n]$$

$$y[n] = 2x\,x[n]\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2 \times jn}\right) = x[n]\,\frac{2\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}$$

$$y[n] = x[n]\,\frac{2\sin(\frac{\pi}{4}n)}{n}$$

۱۲- اگر در سیستم نمایش داده شده در شکل زیر $H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$ باشد، در این صورت تابع تبدیل کل سیستم $\left(H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right)$ کدام است؟

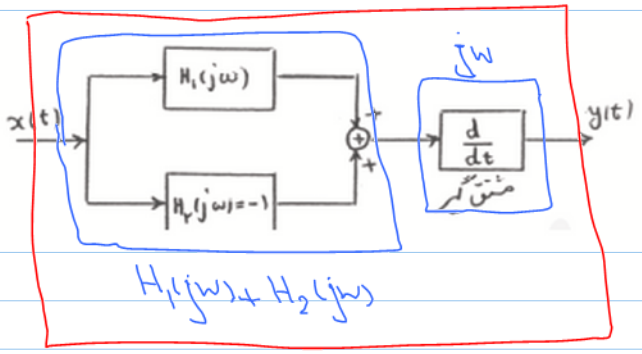


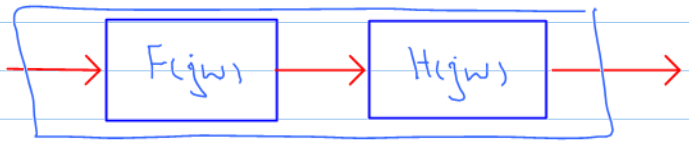
۱) $\frac{\omega^2}{1 + j\omega}$

۲) $j\omega * [H_1(j\omega) - 1]$

۳) $\frac{1}{j\omega}\left[\frac{1}{1 + j\omega} - 1\right]$

۴) $\frac{d}{d\omega}\left[\frac{-j\omega}{1 + j\omega}\right]$





$F(jw) \times H(jw)$

$$\frac{Y(jw)}{X(jw)} = \left(\frac{1}{1+jw} - 1\right)(jw) = \frac{-jw}{1+jw} \times jw = \frac{w^2}{1+jw}$$

۹۶ بد و ق

سیگنالی داریم که طیف آن به شکل $X(j\omega)=j\sqrt{\pi}\,sgn(\omega)[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$ است. مقدار مشتق این سینگال در $t=0$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۲) $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

۳) ۰

۴) $-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

$X(j\omega) = j\sqrt{\pi}\,\mathrm{sgn}(\omega)[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$

$x(t) \longrightarrow X(jw)$

$\frac{dx}{dt} \longrightarrow jw\,X(jw)$

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow jw\left(j\sqrt{\pi}\,\mathrm{sgn}(w)\right)\left(u(w+1) - u(w-1)\right) = Y(jw)$

$$y(\cancel{t}^{\,0}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(jw)\, e^{jw\cancel{t}^{\,0}}\, dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(jw)\, dw$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\sqrt{\pi}\, w\,\mathrm{sgn}(w)\,\underbrace{\left(u(w+1) - u(w-1)\right)}_{1,\ -1 \le w \le 1}\, dw$$

$$u(\alpha+a) - u(\alpha+b) = \begin{cases} 1 & -a \le \alpha \le -b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\sqrt{\pi}\right)\int_{-1}^{1} w\,\mathrm{sgn}(w) \times 1\, dw$$

$$\mathrm{sgn}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \ge 0 \\ -1 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\left(\int_{-1}^{0} -1 \times w\, dw + \int_{0}^{1} +1 \times w\, dw\right)$$

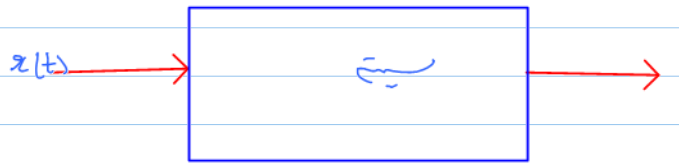
$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\left(-1\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\ \checkmark$$

برق ۸۲

اگر رابطه زیر مابین تبدیل فوریه‌های ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در یک سیستم زمان پیوسته برقرار باشد، در آنصورت سیستم جزء کدام دسته است؟

$$Y(j\Omega) = e^{j\Omega}X(j\Omega) + j\frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$

۱) خطی تغییرناپذیر با زمان، غیرعلی
۲) خطی، تغییرناپذیر با زمان، علی
۳) خطی، تغییرپذیر با زمان، غیر علی
۴) غیر خطی، تغییرناپذیر با زمان، علی



$y(t) =$ برحسب $x(t)$

$$Y(jw) = e^{j2w} X(jw) + j\frac{dX(jw)}{dw}$$

$$y(t) = x(t+2) + j(-jt)x(t)$$

$$y(t) = t\,x(t) + x(t+2)$$

خطی؟ غیرخطی؟ TI؟

$y = \quad x + x$ ✓ خطی

TV ✓

$t \geq \begin{cases} t & \checkmark \\ t+2 & X \end{cases}$ $\forall t \rightarrow$ غیرعلی

جلسه 47 سیگنال

کانولوشن و ضرب دو سیگنال:

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$y(t) \longrightarrow Y(j\omega)$

ضرب $\xleftrightarrow{\text{تغییر حوزه}}$ کانولوشن

$$x(t)\,y(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)\,Y(j(\omega-\theta))\,d\theta$$

$$x[n]\,y[n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) \circledast Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(j\theta)\,Y(j(\omega-\theta))\,d\theta$$ متناوب با 2π

$$x(t) * y(t) \longrightarrow X(j\omega)\,Y(j\omega)$$

$$x[n] * y[n] \longrightarrow X(j\omega)\,Y(j\omega)$$

کانولوشن برحسب f:

$$\begin{cases} x(t)\,y(t) \longrightarrow X(f) * Y(f) \\ x[n]\,y[n] \longrightarrow X(f) \circledast Y(f) \end{cases}$$

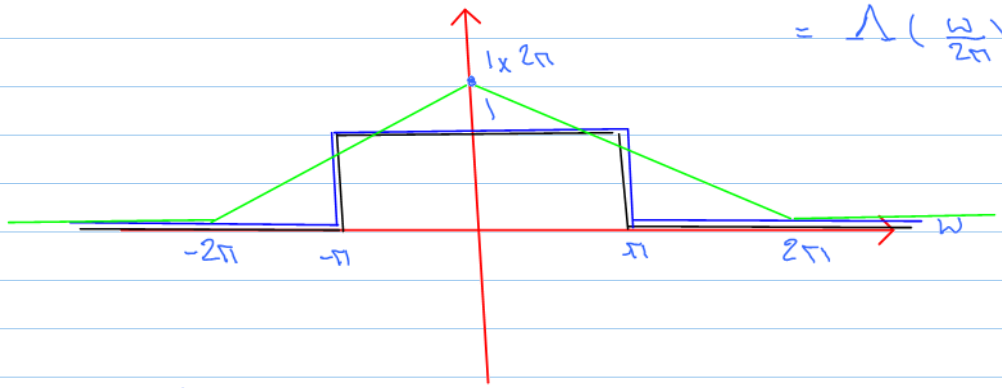
ضریب $\frac{1}{2\pi}$ ندارد

مثال: تبدیل فوریه $\text{sinc}(t)^2$ را حساب کنید.

$$* \quad \frac{\sin(at)}{\pi t} \xrightarrow{a>0} \Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right) *$$

$$\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right) * \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\,\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\,\Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right)$$

$$= \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



$$* \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) *$$

بروی ۹۲

فرض کنید سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sin c(t-k)$ که $\sin c(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ در این صورت مقدار $x(\frac{۳}{۴})+x(\frac{۱}{۴})$ برابر است با:

۱) ۱

۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۶}{۴}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t-k) \qquad x(\tfrac{1}{4}) + x(\tfrac{3}{4}) = ?$$

$$x(\tfrac{1}{4}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\tfrac{1}{4}-k) = ?$$ بلد نیستیم.

در سیگنال ، حزم جدیدی از سیگنالها را مذارع.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k) \quad , \quad \text{sinc}(t)$$

$$x(t) = \text{sinc}(t) \underbrace{(*)} \overbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)} = \underline{\text{sinc}(t)} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}} * \delta(t-k)$$

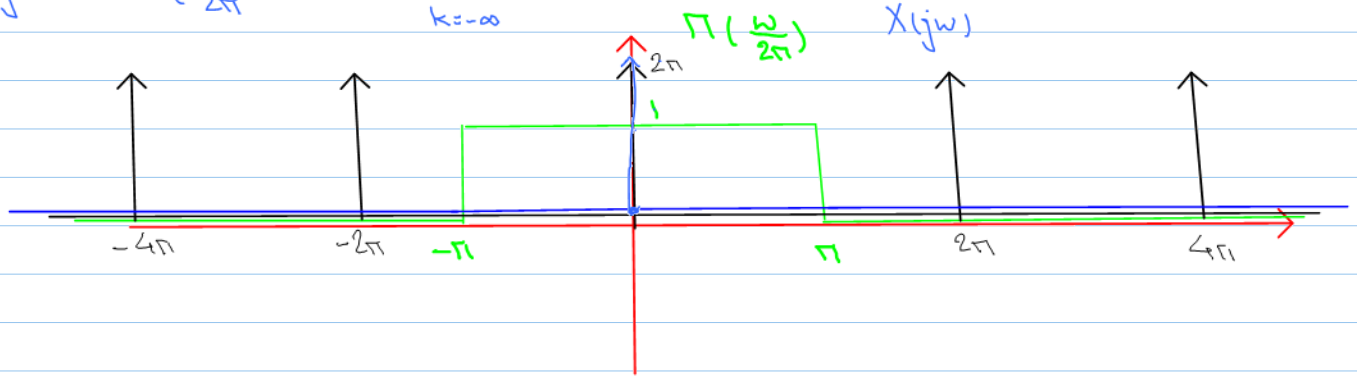
روی t عمل می‌کند. — مستقل از t

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) * \delta(t-k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t-k) \checkmark$$

$$x(t) = \underline{\text{sinc}(t)} \underline{*} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)}$$ تبدیل فوریه

$$X(jw) = \Pi(\tfrac{w}{2\pi}) \times 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - 2\pi k)$$



$$X(jw) = 2\pi\delta(w) \longrightarrow \underline{x(t) = 1}$$

$$x(\tfrac{1}{4}) + x(\tfrac{3}{4}) = 1 + 1 = \underline{2}$$

دکتری ۹۶

سیگنال $x(t) = ۱ + ۲\cos(۲\pi t) + ۴\cos(۴\pi t)$ از فیلتری با پاسخ ضربهٔ $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\pi(\frac{t}{۴T}))}{\pi t} \delta(t - nT)$ عبور کرده و سیگنال $y(t)$ را تولید می‌کند.

مقادیر A و T برای آنکه $y(t) = ۱ + ۴\cos(۴\pi t)$ باشد، برابر کدام است؟

۱) $A = \frac{۱}{۲}$ ، $T = \frac{۱}{۲}$

۲) $A = \frac{\pi}{۲}$ ، $T = \frac{\pi}{۲}$

۳) $A = ۱$ ، $T = ۱$

۴) امکان‌پذیر نیست.

سیگنال $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi t) + 4\cos(4\pi t)$ از فیلتری با پاسخ ضربهٔ LTI



$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\pi(\frac{t}{4T}))}{\pi t} \delta(t - nT)$ عبور کرده و سیگنال $y(t)$ را تولید می‌کند.

مقادیر A و T برای آنکه $y(t) = 1 + 4\cos(4\pi t)$ باشد، برابر کدام است؟

۱) $A = \frac{1}{2}$ ، $T = \frac{1}{2}$

۲) $A = \frac{\pi}{2}$ ، $T = \frac{\pi}{2}$

۳) $A = 1$ ، $T = 1$

۴) امکان‌پذیر نیست.

$e^{jat} \longrightarrow e^{jat} H(ja)$

$1 = e^{j0t} \longrightarrow e^{j0t} H(j0) = 1\, H(j0)$

$+ \quad 2\cos(2\pi t) \longrightarrow 2\,|H(j2\pi)|\cos(2\pi t + \angle H(j2\pi))$

$+ \quad 4\cos(4\pi t) \longrightarrow 4\,|H(j4\pi)|\cos(4\pi t + \angle H(j4))$

$1 + 2\cos(2\pi t) + 4\cos(4\pi t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = \overset{1}{\cancel{H(j0)}} + 2\,\overset{0}{\cancel{|H(j2\pi)|}}\cos(2\pi t + \angle H(j2\pi)) + 4\,\overset{1}{\cancel{|H(j4\pi)|}}\cos(4\pi t + \overset{0}{\cancel{\angle H(j4\pi)}})$

$= 1 + 4\cos(4\pi t)$

$H(j0) = 1$

$H(j2\pi) = 0$ $\quad H(j2\pi) = |H(j2\pi)|\, e^{j\angle H(j2\pi)} = 0 \times e^{j0} = 0$

$H(j4\pi) = 1$ $\quad H(j4\pi) = 1\, e^{j0} = 1$

$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\frac{\pi}{4T}t)}{\pi t} \delta(t - nT)\right\}$ $\quad A, T = ?$

$H(jw) = ?$ $\quad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(jw)$

$H(jw) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\frac{\pi}{4T}t)}{\pi t} \delta(t - nT)\right\}$ $\quad t = nT$

$$= \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n T} \delta(t - nT) \right\}$$

دوی t عل حدة

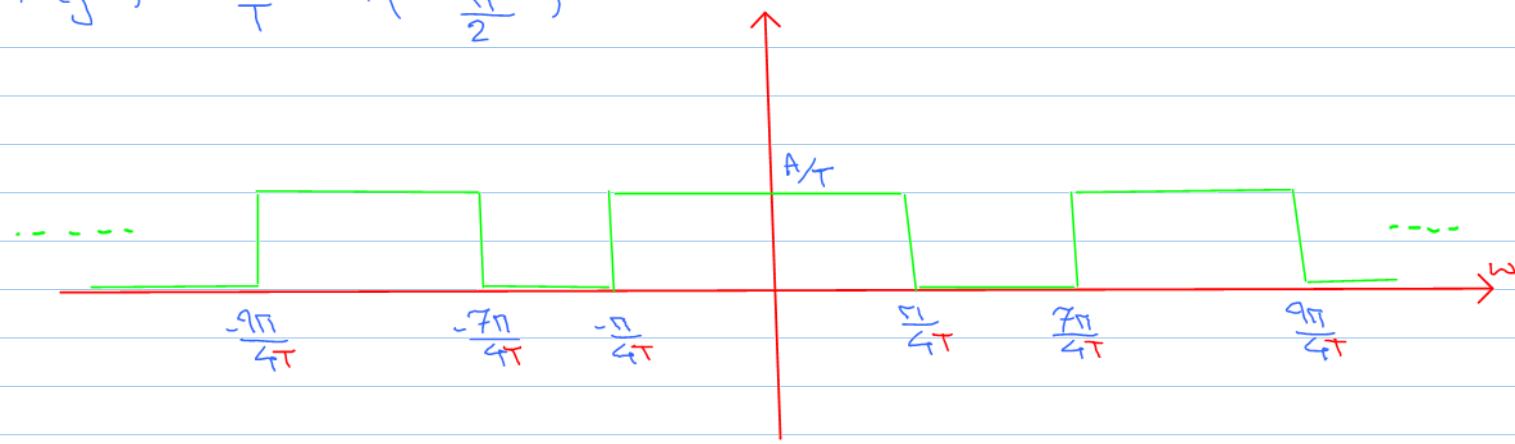
$$H(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi T n} \mathcal{F}\{\delta(t-nT)\}$$

$$H(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi T n} e^{-j\omega nT} = \frac{A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n} e^{-j\omega T n}$$

$$\Pi\left(\frac{\omega}{\frac{\pi}{2}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

$$\frac{A}{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n} e^{-j\omega T n} = H(j\omega)$$

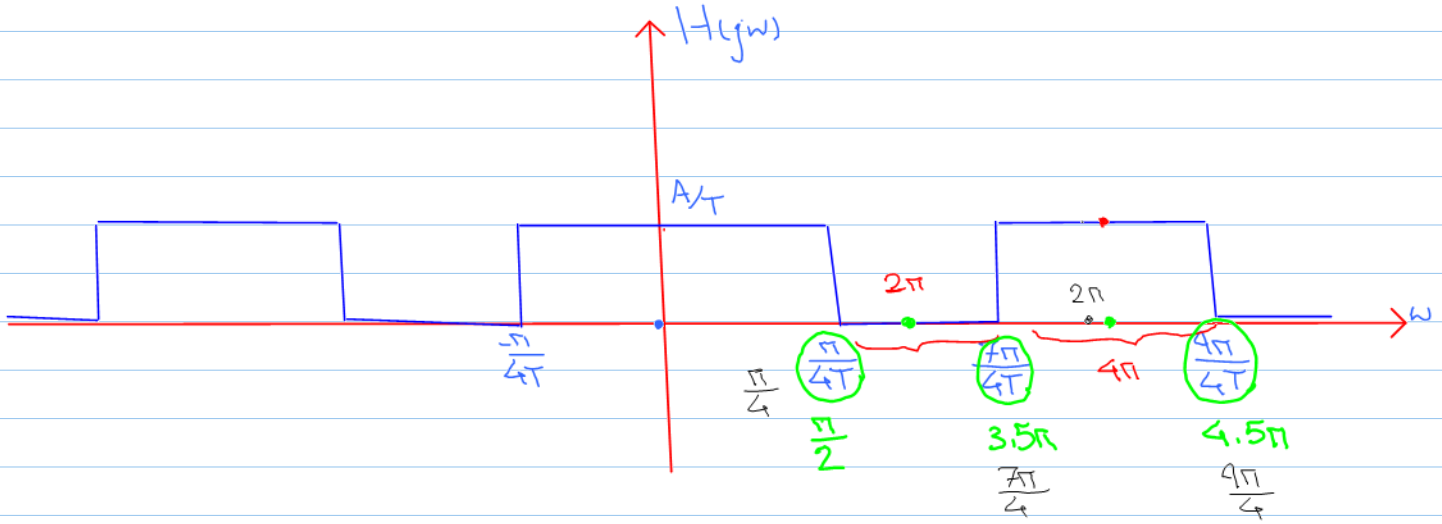
$$H(j\omega) = \frac{A}{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{\frac{\pi}{2}}\right)$$



$$\frac{A}{T} \Pi\left(\frac{\omega}{\frac{\pi}{2}}\right) \longrightarrow \frac{A}{T} \Pi\left(\frac{\omega T}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{A}{T} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n} \longrightarrow \frac{A}{T} \Pi\left(\frac{\omega}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

متناوب بـ 2π



$$\begin{cases} H(j0) = 1 = A/T \longrightarrow A = T \\ H(j2\pi) = 0 \\ H(j4\pi) = 1 \end{cases}$$

1) $A = T = \frac{1}{2}$ ✓

3) $A = T = 1$

برق ۹۷

اگر رابطهٔ $X(e^{j\omega}) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۲\pi} X(e^{j\theta}) \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}e^{j(\frac{\omega}{۲}-\theta)}} d\theta$ برقرار باشد، کدام گزینه، درست است؟

۱) $x[n] = ۰ \quad for |n| > ۱$

۲) $x[n] = ۰ \quad for\, n = even$

۳) $x[n] = ۰ \quad for |n| > ۰$

۴) $x[n] = ۰ \quad for\, n = odd$

$$X(jw) = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X(j\theta) \; \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j(\frac{w}{2} - \theta)}} \, d\theta$$

$x[n] \longrightarrow X(jw)$

$$X(jw) \neq \frac{1}{2\pi} X(jw) \circledast \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{jw}} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\theta) \; \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j(w-\theta)}} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(jw) \circledast \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{w}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\theta) \; \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{w-\theta}{2}}} \, d\theta$$

$$X(j2w) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\theta) \; \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{2w-\theta}{2}}} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} X(jw) \circledast \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{jw}}$$

$$X(j2w) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\theta) \; \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{j(w-\theta)}} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} X(jw) \circledast \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{jw}}$$

$$X(j2w) = \frac{1}{2\pi} X(jw) \circledast \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{jw}}$$

حوزه زمان

$$x_{(2)}[n] = x[n] \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$x[n] \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$n < 0 \longrightarrow$ $\quad 0 = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & \text{زوج } n = 2k \quad k \text{ اعداد صحیح منفی} \\ 0 & \text{فرد } n = 2k+1 \quad \sim \quad \sim \quad \sim \end{cases}$

$x[k] = 0$ ← k اعداد صحیح منفی

$x\left[\frac{2k}{2}\right] = 0$

$0 = 0$

$x[n]$ در لحظات منفی صفر است.

$x[-1] = 0$ $x[-2] = 0$ $x[-3] = 0$ ....

$x[-1] = 0$ $n = -1$ $|n| = 1$

۱) $x[n] = 0$ for $|n| > 1$

۲) $x[n] = 0$ for $n =$ even ←

۳) $x[n] = 0$ for $|n| > 0$ ← ✓

۴) $x[n] = 0$ for $n =$ odd

$x[n] = 0 \quad \forall \quad n > 0 \;\&\; n < 0 \rightarrow n \neq 0$

برق ۹۷

حاصل کانولوشن $\frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} * \cos^2(\frac{\pi t}{2})$ ، برابر کدام است؟

(یادآوری: $(\pi(\frac{t}{2T}) \xleftrightarrow{F} 2T\sin c(\frac{\omega T}{\pi})$

۱) $0/25 + 0/5\cos^2(\frac{\pi t}{2})$

۲) $-0/25 + 0/5\cos^2(\frac{\pi t}{2})$

۳) $\cos^2(\frac{\pi t}{2})$

۴) $0/5\cos^2(\frac{\pi t}{2})$

$$x(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 * \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = ?$$

مربع

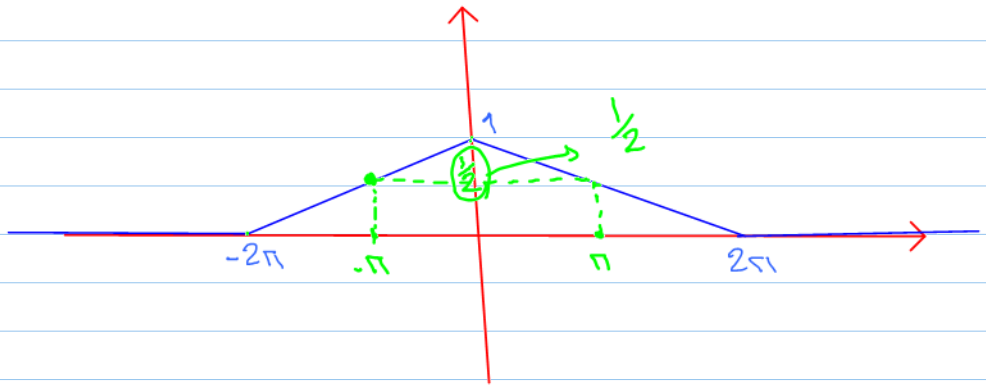
$$\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow \Lambda\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(\pi t)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi t)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi t) \longrightarrow \pi\delta(w) + \frac{1}{2}\pi\left(\delta(w-\pi)+\delta(w+\pi)\right)$$

$$\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 * \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \longrightarrow \Lambda\left(\frac{w}{2\pi}\right) \times \frac{1}{2}\pi\left(2\delta(w)+\delta(w-\pi)+\delta(w+\pi)\right)$$

$$X(jw) = \frac{\pi}{2}\left(2\,\Lambda\left(\frac{w}{2\pi}\right)\delta(w) + \Lambda\left(\frac{w}{2\pi}\right)\delta(w-\pi) + \Lambda\left(\frac{w}{2\pi}\right)\delta(w+\pi)\right)$$



$$X(jw) = \pi\delta(w) + \frac{1}{2}\left(\pi\,\delta(w-\pi) + \pi\,\delta(w+\pi)\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \checkmark$$

برق ۹۶

S، سیستم LTI، با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\frac{\sin(۴(t-۱))}{\pi(t-۱)}$ را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=(\frac{\sin(۲t)}{\pi t})^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{\sin(۲(t-۱))}{\pi(t-۱)}\times\frac{\sin(۲(t-\frac{۱}{۲}))}{\pi(t-\frac{۱}{۲})}$

۲) $\left(\frac{\sin(۲(t-۱))}{\pi(t-۱)}\right)^۲$

۳) $\left(\frac{\sin ۴(t-۱)}{\pi(t-۱)}\right)^۲$

۴) $\left(\frac{\sin(۲(t-\frac{۱}{۲}))}{\pi(t-\frac{۱}{۲})}\right)^۲$



$$y(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2 * \frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)} = ?$$

$$\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow \Lambda\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

$$\left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow ?$$

$t \to \frac{2}{\pi}t$; $\frac{1}{\left|\frac{2}{\pi}\right|}$; $w \to \frac{w}{\frac{2}{\pi}}$

$$\times\frac{4}{\pi^2} \quad \left(\frac{\sin(2t)}{2t}\right)^2 \longrightarrow \frac{4}{\pi^2}\times\frac{\pi}{2}\,\Lambda\left(\frac{\frac{\pi}{2}w}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\,\Lambda\left(\frac{w}{4}\right)$$

$$x(t) = \frac{\sin(2t)^2}{\pi^2 t^2} \longrightarrow \frac{2}{\pi}\,\Lambda\left(\frac{w}{4}\right) = X(jw)$$

$$\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)} \longrightarrow ?$$

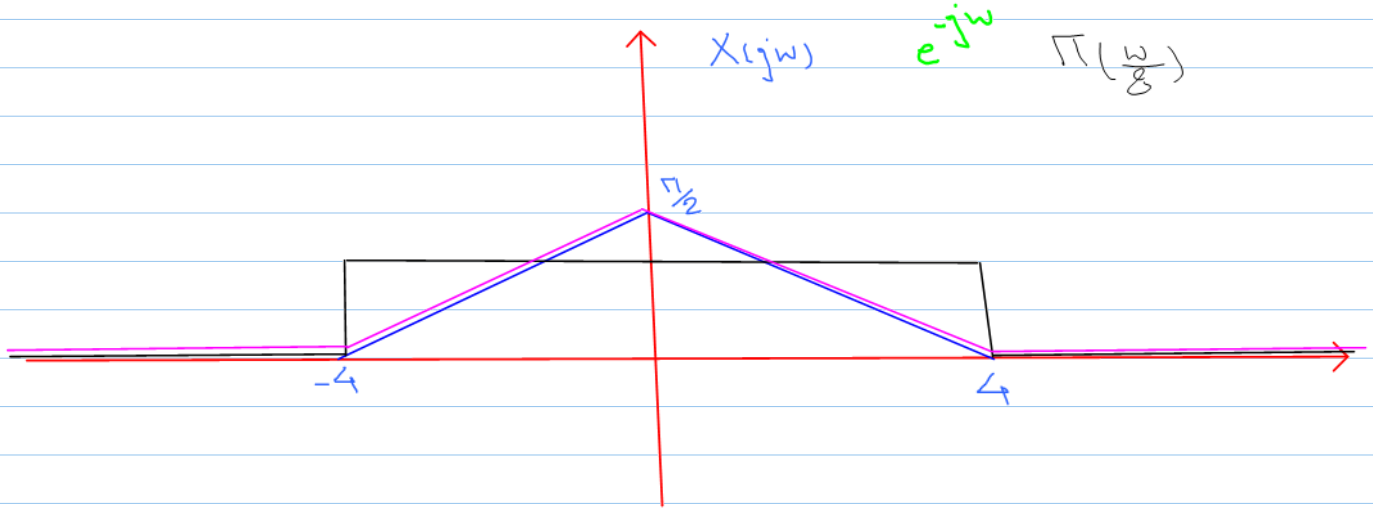
$$\frac{\sin(\cancel{4}t)}{\pi t} \longrightarrow \Pi\left(\frac{w}{2\cancel{4}}\right)$$

$$\frac{\sin(4t)}{\pi t} \longrightarrow \Pi\left(\frac{w}{8}\right)$$

$t \to t-1$; $e^{-jw\times 1}$

$$\frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)} \longrightarrow e^{-jw}\,\Pi\left(\frac{w}{8}\right) = H(jw)$$

$$Y(jw) = X(jw)\,H(jw)$$



$$Y(jw) = X(jw)\,e^{-jw}\,\Pi\left(\frac{w}{8}\right) = e^{-jw}\left(X(jw)\,\Pi\left(\frac{w}{8}\right)\right)$$

$$Y(jw) = e^{-jw}\,X(jw)$$

$$x(t) \longrightarrow X(jw)$$

$$g(t) = x(t-1) \longrightarrow e^{-jw}X(jw) = Y(jw)$$

$$g(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2\Bigg|_{t\to t-1} = \left(\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^2$$

برق ۹۶

- فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته و $a[n]$ یک سیگنال گسسته باشد. «کانولوشن» این دو سیگنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (که خودش سیگنال پیوستهٔ $y(t)$ می‌شود):

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n]x(t-n) = a[n]*x(t)$$

$a[n]*x(t) \longrightarrow A(e^{jw}) \times X(jw)$



رابطهٔ تبدیل فوریهٔ این سیگنال‌ها یعنی $X(j\omega)$، $A(e^{j\omega})$، $Y(j\omega)$ کدام است؟

۱) $Y(j\omega)=A(e^{j\omega})X(j\omega)$

۲) $Y(j\omega)=\frac{۱}{۲\pi}A(e^{j\omega})X(j\omega)$

۳) $Y(j\omega)=A(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-۲k\pi))$

۴) $Y(j\omega)=\frac{۱}{۲\pi}A(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega-۲k\pi))$

$x(t) \longrightarrow X(jw)$

$a[n] \longrightarrow A(e^{jw})$

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\, x(t-n)\right\} \longrightarrow Y(jw) = ?$$

(زمان پیوسته) (زمان پیوسته)

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(jw)$$

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(jw)$$

روی t عمل می‌کند

$$Y(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{a[n]\, x(t-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\, \mathcal{F}\{x(t-n)\}$$

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(jw)$$

$$x(t-n) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-jwn} X(jw)$$

$$Y(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\, e^{-jwn} X(jw) = X(jw) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\, e^{-jwn}$$

$$A(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\, e^{-jwn}$$

$$Y(jw) = X(jw)\, A(e^{jw})$$

برو ۸۹

اگر تبدیل فوریهٔ سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت زیر باشد:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

آنگاه $x[6]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

$x[n] \longrightarrow X(jw)$

$$X(jw) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta(w - k\tfrac{\pi}{2}) \qquad (-1)^k = e^{j\pi k} \qquad x[6] = ?$$

$$X(jw) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi e^{j\pi k} \delta(w - \tfrac{k\pi}{2}) \qquad k = \tfrac{2}{\pi} w$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi e^{j2w} \delta(w - k\tfrac{\pi}{2})$$

$$X(jw) = e^{j2w} \times \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - k\tfrac{\pi}{2})$$

$$x[n] = \delta[n+2] * 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - 4k)$$

$$2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - \tfrac{4}{T_0} k] \longrightarrow 2 \times \frac{2\pi}{4T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - k\frac{2\pi}{4T_0})$$

$$x[n] = 2\,\delta[n+2] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+2] * \delta[n-4k]$$

n için

$$x[n] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+2-4k]$$

$x[6] = ?$ $\qquad x[6] = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[8-4k] = 2$ ✓ (1)

جلسه 48 سیگنال

رابطه پارسوال: مقایسه انرژی سیگنال با استفاده از تبدیل سیگنال x

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \qquad E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$x(t) \text{ یا } x[n] \longrightarrow X(j\omega)$$

بیان اصلی پارسوال

$$\begin{cases} E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \\ E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{cases}$$

* در چه مواردی از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم؟

1- $x(t)$ را بدهد و انتگرالی از توان دوم $X(j\omega)$ یا توان دوم $|X(j\omega)|$ را بخواهد.

2- $X(j\omega)$ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ $x(t)$ یا توان دوم $|x(t)|$ ~

3- انتگرالی از حاصلضرب دو سیگنال x و y را بخواهد.

4- ~ ~ ~ ~ تبدیل فوریه $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ ~ ~.

دو رابطه مهم جانبی پارسوال:

①
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(-j\omega) d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\omega) Y(-j\omega) d\omega$$

②
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[-n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

③
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y^*(-j\omega) d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\omega) Y^*(-j\omega) d\omega$$

مثال حاصل $I = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)^2 dt$ را بیابید.

$$\text{sinc}(t)^2 = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2$$

$x(t)$ را سوال $\leftarrow$ $x(t)$ از تقارن دوم

$$x(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2$$

$$|x(t)|^2 = \left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right|^2 = \left|\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2\right| = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \leftarrow$$ حال اصلی

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = ? = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

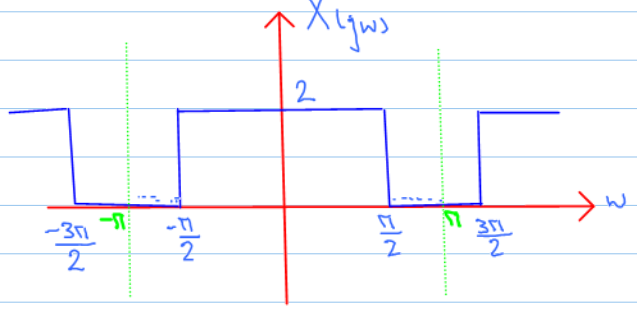
$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \longrightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad |X(j\omega)| = \begin{cases} |1| = 1 & -\pi \leq \omega \leq \pi \\ |0| = 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$|X(j\omega)|^2 = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, d\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \checkmark$$

مثال. تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ به شکل زیر داده شده است. حاصل $A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$ را بیابید.



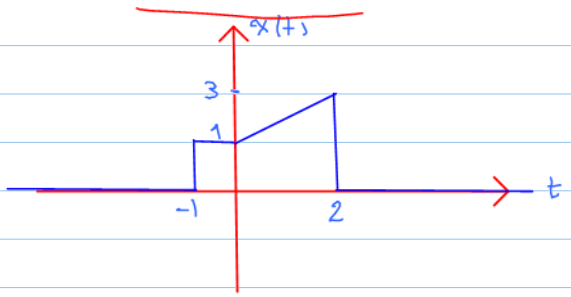
$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = ?$$

پارسوال ← جبران اصلی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2)^2 \, d\omega = 2 \checkmark$$

مثال. سیگنال $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. حاصل $I = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$ را بیابید.



$x(t)$ را داده و انتگرالی از توان دوم $X(j\omega)$

یاد آوری ←

بیان اصلی: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

$|X(j\omega)|^2 \neq X(j\omega)^2 \rightarrow |X(j\omega)| \neq X(j\omega) \rightarrow$ $X(j\omega)$ حقیقی

$x(t)$ حقیقی و زوج ← $X(j\omega)$ حقیقی X

پس از بیان اصلی فوق استفاده کرد.

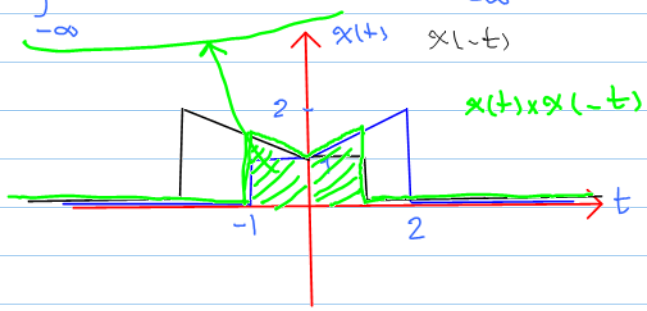
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)}_{\text{سیگنال اول}} \underbrace{X(j\omega)}_{\text{سیگنال دوم}} d\omega$$

انتگرالی از حاصلضرب تبدیل فوریه دو سیگنال ← بیان دوم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

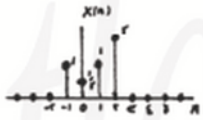
$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X(j\omega) d\omega = I$$



برق ۸۲

اگر $x(n)$ به صورت زیر باشد، مقدار $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$ کدام است؟

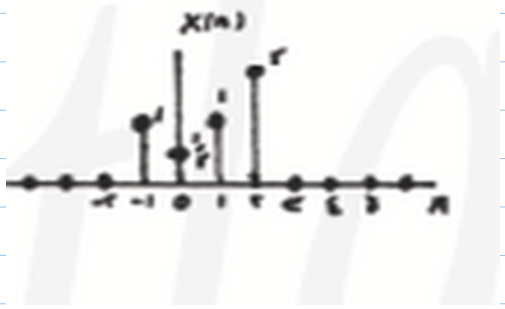


۱) ۱۲π

۲) ۱۸π

۳) ۳۶π

۴) $\frac{۴۵\pi}{۲}$



$$x[n] \longrightarrow X(jw)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(jw)}{dw} \right|^2 dw$$

انتگرالی از اندازه تبدیل فوریه به توان دو ← بیان اصلی پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\text{سیگنال}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{تبدیل سیگنال}|^2 dw$$

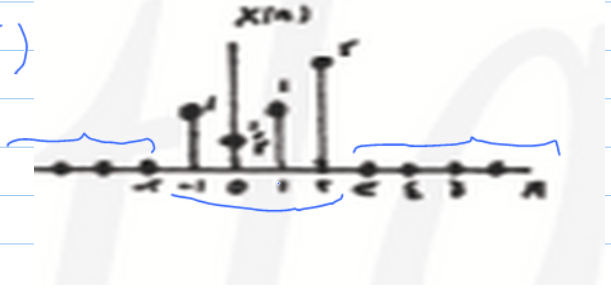
$$-jn\,x[n] \longrightarrow \frac{dX(jw)}{dw}$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |-jnx[n]|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(jw)}{dw} \right|^2 dw = I$$

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|-j|^2 |nx[n]| \right)^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nx[n]|^2$$

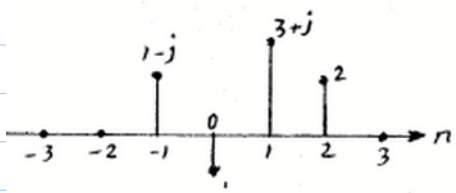
$$= 2\pi \left(|-1x1|^2 + |0x\tfrac{1}{3}|^2 + |1x1|^2 + |2x2|^2 \right)$$

$$= 2\pi (1 + 0 + 1 + 16) = 36\pi$$



سیگنال $x[n]$ مطابق شکل روبه‌رو داده شده است:

$$x[n] = (1-j)\delta[n+1] - \delta[n] + (3+j)\,\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$



حاصل انتگرال $\int_{0}^{2\pi} \left| \frac{d}{d\omega} \mathrm{Im}(X(e^{j\omega})) \right|^2 d\omega$ کدام است؟

۱) 24π

۲) 22π

۳) 20π

۴) 26π

تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ مقابل به صورت $X(\omega)$ داده می‌شود.

$x[n] \longrightarrow X(jw)$ $\qquad I = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dw} Im(X(jw)) \right|^2 dw$

بیان اصلی پارسوال

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2 = \int_0^{2\pi} |Y(jw)|^2 dw$$

✓ $x[n] \longrightarrow X(jw)$ $\qquad Y(jw) = \frac{d}{dw}(Im(X(jw)))$

$\downarrow Im$

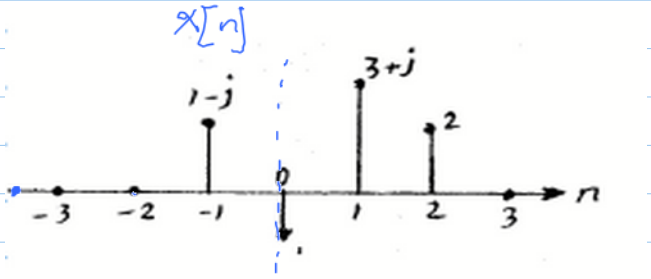
$\frac{x[n] - x^*[-n]}{2} \longrightarrow Im(X(jw))$

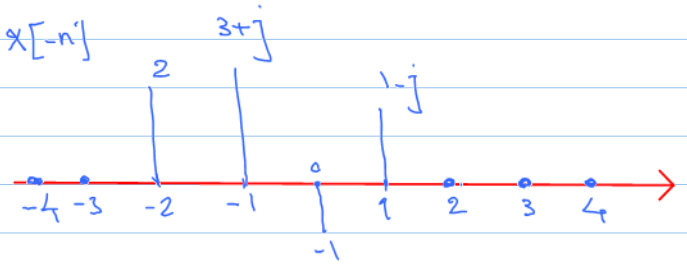
$\downarrow \frac{d}{dw}$

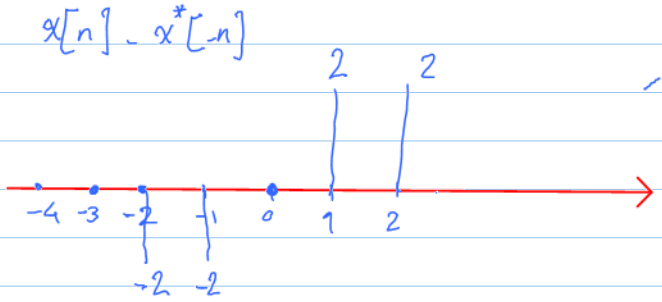
$-jn\left(\frac{x[n]-x^*[-n]}{2}\right) \longrightarrow \frac{d}{dw}(Im(X(jw))) = Y(jw)$

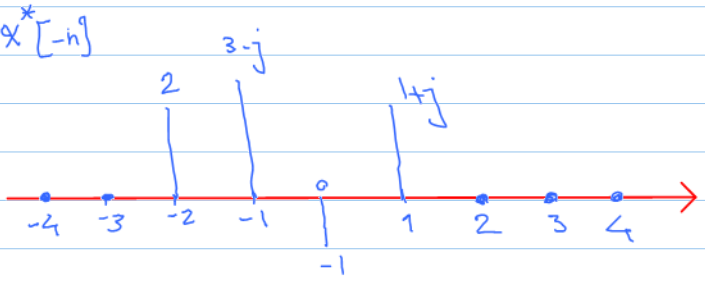
$$g[n] = -j\frac{n}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

$$I = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2$$









$$I = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| -j\frac{n}{2}(x[n] - x^*[-n]) \right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|-j| \left|\frac{n}{2}\right| |x[n] - x^*[-n]| \right)^2$$

$$= 2\pi \left(\cancel{0} + \left(\left|\frac{-3}{2}\right| \times |0|\right)^2 + \cancel{\left(\left|\frac{-2}{2}\right| \times |-2|\right)^2} + \cancel{\left(\left|\frac{-1}{2}\right| \times |-2|\right)^2} + \cancel{\left(\left|\frac{0}{2}\right| \times |0|\right)^2} \right)$$

$$+\left(\left|\tfrac{1}{2}\right| \times \underbrace{|2|}_{1}\right)^2 + \left(\left|\tfrac{2}{2}\right| \times \underbrace{|2|}_{4}\right)^2 + \left(\left|\tfrac{3}{2}\right| \times \underbrace{|0|}_{0}\right)^2 + \cdots$$

$$= 2\pi(4+1+1+4) = 20\pi \checkmark$$

دوگانی تبدیل فوریه و سری فوریه:

$$\begin{cases} x(t),\ T_0 \longrightarrow a_k \\ x[n],\ T_0 \longrightarrow a_k \end{cases} \longrightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow X(\omega) \\ X(t) \longrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{cases} \quad (\omega \to t,\ t \to \omega)$$

$$\begin{cases} x(t),\ T_0 \longrightarrow a_k \\ y[n] = a_n \longrightarrow Y(\omega) = x\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases} \quad (k \to n)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\begin{cases} x[n] \longrightarrow X(\omega),\ 2\pi \\ X(t),\ 2\pi \longrightarrow a_k = x[-k] \end{cases}$$

مثال. تبدیل فوریه $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$ را بیابید.

$$e^{+a|t|} \xrightarrow{a<0} \frac{-2a}{\omega^2+a^2}$$

$$x(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{a=-1} \frac{2}{\omega^2+1} = X(\omega)$$

$$\frac{2}{t^2+1} \longrightarrow 2\pi\, x(-\omega) = 2\pi\, e^{-|-\omega|}$$

$$\frac{1}{t^2+1} \longrightarrow \pi\, e^{-|-\omega|} = \pi\, e^{-|\omega|} \quad \checkmark$$

هرگاه تبدیل فوریه یک سیگنال را بخواهیم اگر به جای t، ω بگذارم همانه

یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه می شود.

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \longrightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$\omega \to t$

$$\Pi\left(\frac{t}{2\pi}\right) \longrightarrow 2\pi\, \frac{\sin(-\pi\omega)}{-\pi\omega} = \frac{2\sin(\pi\omega)}{\omega}$$

سوال ۸۹

$x(t)$ سیگنال متناوب با پریود T و ضرائب سری فوریه a_k است. اگر $y[n]$ دنباله زمان گسسته با تبدیل فوریه $Y(\omega)$ باشد و داشته باشیم $a_k = y[-k], \forall k$ در آن صورت کدام گزینه کامل‌تر است؟

۱) $x(\omega) = Y(l\omega)$ و l عدد صحیح حقیقی

۲) $x(\omega) = Y(\alpha\omega)$ و α عدد حقیقی دلخواه

۳) $x(\omega) = Y(\omega)$

۴) $x(\omega) = Y(\frac{2\pi}{T}\omega)$

$x(t), T \longrightarrow a_k$

$y[n] \longrightarrow Y(\omega)$

$y[-k] = a_k \rightarrow y[-n] = a_n$

$y[n] = a_{-n}$

$x(t), T \xrightarrow{FS} a_k$

$f[n] = a_n \xrightarrow{F} x(-\frac{\omega}{\omega_0}) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$a_n \xrightarrow{F} x(-\frac{T}{2\pi}\omega)$

$n \to -n$ ، $\omega \to -\omega$

$y[n] = a_{-n} \xrightarrow{F} x(\frac{T}{2\pi}\omega) = Y(\omega)$

$Y(\omega) = x(\frac{T}{2\pi}\omega) \longrightarrow x(\omega) = Y(\frac{2\pi}{T}\omega)$

۱- اگر $X(w)$ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ باشد در آن صورت ضرایب بسط سری فوریه $X(t)$ عبارتند از:

۱) $x[k]$ ۲) $x[-k]$ ۳) $\frac{1}{2\pi}x[k]$ ۴) $\frac{1}{2\pi}x[-k]$

$x[n] \xrightarrow{F} X(w), 2\pi$

$w \to t$

$X(t), 2\pi \xrightarrow{FS} a_k = x[-k]$

اگر $x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$، در آن صورت ضرائب سری فوریه $y(t) \triangleq X\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t}\right)$ عبارتند از:

۱) $x[k]$

۲) $x[-k]$

۳) $\frac{T}{2\pi}x[-k]$

۴) $\frac{T}{2\pi}x[k]$

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$

$y(t) = X\left(j\frac{2\pi}{T}t\right) \longrightarrow a_k = ?$

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$

$X(jt), 2\pi \longrightarrow x[-k] = b_k$

$X(j\alpha t), \frac{2\pi}{\alpha} \longrightarrow \underline{x[-k]} = a_k \qquad \alpha = \frac{2\pi}{T}$

اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ باشد، در این صورت ضرایب بسط سری فوریه سیگنال زمان پیوسته $y(t) = X(e^{j2t})$ کدام است؟

۱) $x[-k]$

۲) $x[k]$

۳) $x[2k]$

۴) $x[-2k]$

$x[n] \longrightarrow X(j\omega), 2\pi$

$X(j2t) \longrightarrow b_k = ?$

$X(jt), 2\pi \longrightarrow a_k = x[-k]$

$X(j2t), \frac{2\pi}{2} \longrightarrow b_k = a_k = x[-k]$

رابطهٔ $(f*f)(t)=3f(\frac{t}{2})$ برای کدام یک از توابع زیر برقرار است؟

۱) $\frac{3}{\pi^2+t^2}$

۲) $\frac{3}{\pi}\frac{1}{5-jt}$

۳) $6\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

۴) $3\pi\,\delta(\frac{t}{2}-1)$

$$f(t) = \frac{3}{\pi^2 + t^2} \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{3}{\pi}\frac{1}{5 - jt} \quad (2)$$

$$f(t) = 6\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (3)$$

$$f(t) = 3\pi\,\delta\left(\frac{t}{2} - 1\right) \quad (4)$$

$$f(t) * f(t) = 3 f\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\pi^2 + \tau^2} \times \frac{3}{\pi^2 + (t-\tau)^2}\, d\tau \stackrel{?}{=} 3\,\frac{3}{\pi^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$f(t) * f(t) = 3 f\left(\frac{1}{2}t\right)$$

$$F(jw) \times F(jw) = 3 \times 2\, F(j2w)$$

$$F(jw) \times F(jw) \stackrel{?}{=} 6\, F(j2w) \;?$$

1) $f(t) = \dfrac{3}{\pi^2 + t^2} \longrightarrow F(jw) = ?$ X

$$e^{-\pi|t|} \longrightarrow \frac{2\pi}{w^2 + \pi^2}$$

$$\frac{3}{2\pi} \times \frac{2\pi}{t^2 + \pi^2} \longrightarrow \frac{3}{2\pi} \times 2\pi\, e^{-\pi|-w|}$$

$$f(t) \longrightarrow 3e^{-\pi|w|} = F(jw)$$

$$3e^{-\pi|w|} \times 3e^{-\pi|w|} \stackrel{?}{\neq} 6 \times 3e^{-\pi|2w|}$$

2) $f(t) = \dfrac{3}{\pi}\,\dfrac{1}{-jt + 5} \longrightarrow F(jw)$

$$\frac{3}{\pi}\,\frac{1}{5 - jw}$$

$$e^{at}u(t) \xrightarrow{Re(a)<0} \frac{1}{-a + jw}$$

$$e^{5t}u(t) \xrightarrow{Re(5)>0} \frac{1}{-5 + jw}$$

$$\frac{3}{\pi} \times e^{5t}u(t) \not\longrightarrow \frac{3}{\pi}\,\frac{1}{5 - jw}$$

$e^{at}\,u(-t) \xrightarrow{\text{Re}(a)>0} \frac{1}{+a-jw}$

$\frac{3}{\pi} e^{5t}\,u(-t) \longrightarrow \frac{3}{\pi}\,\frac{1}{5-jw}$

$f(t) = \frac{3}{\pi}\,\frac{1}{5-jt} \longrightarrow 2\pi\left(\frac{3}{\pi}\,e^{-5w}\,u(w)\right) = F(jw)$

$F(jw) = 6\,e^{-5w}\,u(w)$ $\qquad F(jw)\,F(jw) = 6\,F(j2w)$

$6\,e^{-5w}\,u(w) \times 6\,e^{-5w}\,u(w) \stackrel{?}{=} 6\left(6\,e^{-10w}\,u(2w)\right)$

$36\,e^{-10w}\,u^2(w) = 36\,e^{-10w}\,u(2w)$ ✓ (over $u(w)$)

$(u(\alpha))^2 = u(\alpha)$ $\qquad u(m\alpha) = u(\alpha)$

3) $f(t) = 6\,\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \longrightarrow F(jw) = 6\,\Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)$

$6\Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right) \times 6\,\Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right) \stackrel{?}{=} 6\left(6\,\Pi\left(\frac{2w}{2\pi}\right)\right)$

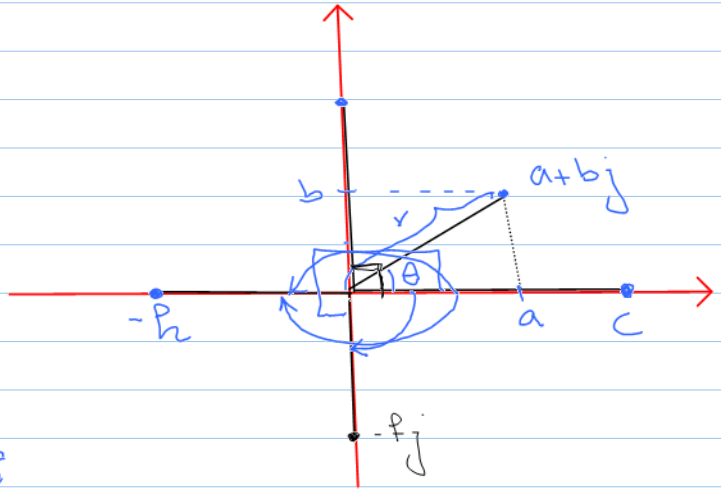
$36\,\Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right) \neq 36\,\Pi\left(\frac{w}{\pi}\right)$

4) $f(t) = 3\pi\,\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) \longrightarrow F(jw) = 3\pi\,e^{-j\frac{w}{2}}$

$3\pi \times e^{-j\frac{w}{2}} \times 3\pi\,e^{-j\frac{w}{2}} \stackrel{?}{\neq} 6\left(3\pi\,e^{-jw}\right)$

$a+bj = r\,e^{j\theta}$

θ = زاویه = $\angle$ فاز



عدد حقیقی = c $\rightarrow$ $\angle c = 0^\circ$

موهومی = dj $\rightarrow$ $\angle dj = 90^\circ$

$-fj \rightarrow \angle -fj = 270^\circ = -90^\circ$

$-h \rightarrow \angle -h = 180^\circ = -180^\circ$

$x(t) = a+bj$ $\quad \angle x(t)$ $\quad X(jw) \rightarrow \angle X(jw)$

$x(t)$ حقیقی و زوج $\leftarrow$ $X(jw)$ حقیقی و زوج

$$\angle X(jw) = \begin{cases} 0 & \text{مثبت} \\ 180^\circ & \text{منفی} \end{cases}$$

$x(t)$ حقیقی $\leftarrow$ روی محاسبه

$x(t+a)$ زوج و حقیقی $\leftarrow$ تبدیل فوریه $x(t+a)$ حقیقی و زوج

$x(t) \rightarrow X(jw)$

$x(t+a) \rightarrow e^{jaw}X(jw)$ $\quad \angle X(jw)e^{jwa} = 0$ یا 180°

$\angle X(jw) + \angle 1e^{jwa} = 0 \rightarrow \angle X(jw) + wa = 0$ یا 180°

$re^{j\theta} \rightarrow \theta$

$$\angle X(jw) = -aw + k\pi$$

جلسه ۷۹ سیگنال

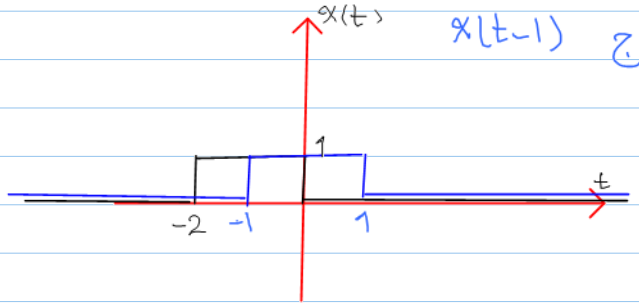
خاصیت تبدیل فوریه:

هرگاه خاصیت $x(t)$ یا $X(j\omega)$ را بخواهد از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

اگر $x(t)$ یا $x[n]$ **حقیقی** باشد آنگاه داریم:

* اگر $x(t+a)$ ($x[n+a]$) زوج باشد آنگاه داریم: $\angle X(j\omega) = -\omega a + k\pi$; k صحیح

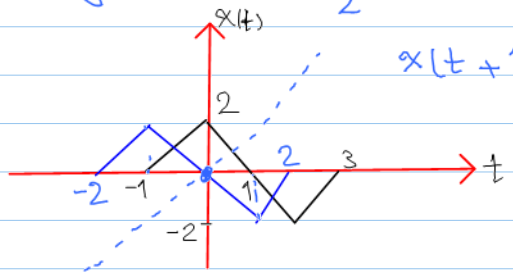
یعنی در حوزه زمان یا زوج باشد یا بتوان با شیفت دادن آن را تبدیل به سیگنال زوج کرد.



$x(t-1)$ زوج

$\angle X(j\omega) = -1 \times -\omega = +\omega$

* اگر $x(t+a)$ ($x[n+a]$) سیگنال فرد باشد $\angle X(j\omega) = -\omega a \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



$x(t+1)$ فرد $\rightarrow$

$\angle X(j\omega) = -\omega \times 1 \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$

اگر $X(j\omega)$ **حقیقی** باشد آنگاه داریم:

اگر $X(j(\omega+a))$ زوج باشد آنگاه $\angle x(t) = at + k\pi$

اگر $X(j(\omega+a))$ فرد باشد آنگاه $\angle x(t) = at \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$

$X(j\omega) = \frac{\omega}{\omega^2+1}$ حقیقی

اگر $x(t)$ موهومی محض باشد آنگاه داریم:

$x(t) = j f(t)$

$x(t+a)$ یک سیگنال زوج باشد $\longleftarrow$ $\angle X(j\omega) = -\omega a \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$

~ ~ ~ ~ فرد ~ $\longleftarrow$ $\angle X(j\omega) = -\omega a + k\pi$

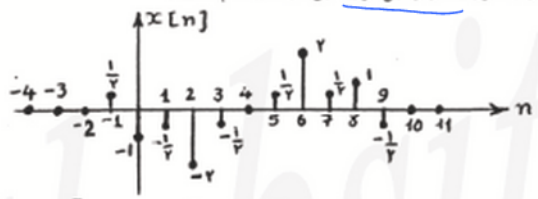
اگر $X(j\omega)$ حقیقی و فرد باشد

$X(j(\omega+\alpha))$ زوج باشد ⟵ $\angle x(t) = at \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$

~ فرد ~ ⟵ $\angle x(t) = at + k\pi$

برق ۸۱

۷- اگر سیگنال $x[n]$ به صورت زیر باشد ، در اینصورت فاز تبدیل فوریه این سیگنال کدام است ؟



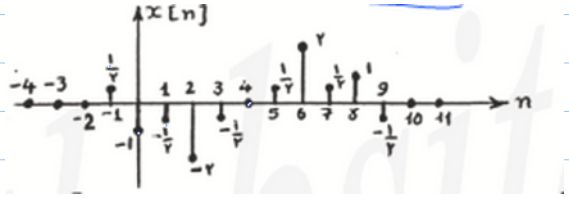
۱) صفر

۲) $-\frac{\pi}{2}$

۳) -4ω

۴) $-4\omega \pm \frac{\pi}{2}$

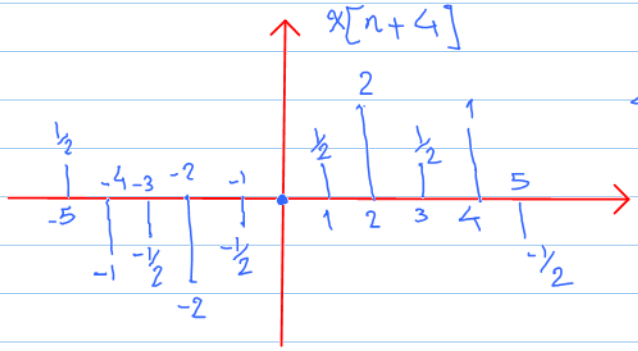
$x[n] \longrightarrow X(jw)$ $\quad\quad$ $\angle X(jw) = ?$



$x[n]$ ← حقیقی ← آیا با شیفت دادن $x[n]$

می‌توان آن را تبدیل به سیگنال زوج یا فرد کرد؟

$x[n]$ حقیقی



$x[n+4]$ فرد ←

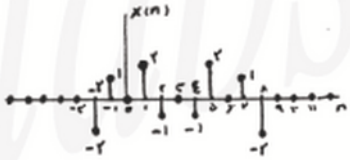
$$\angle X(jw) = -wx4 \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$= -4w \mp \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\angle X(jw) = -4w \mp \frac{\pi}{2} \qquad k=0$$

برق ۸۲

فرض کنید $X(j\Omega)$ مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال $x(n)$ که در شکل نمایش داده شده است باشد. در این صورت مقدار $X(0)$ و فاز $X(j\Omega)$ به ترتیب برابر است با:

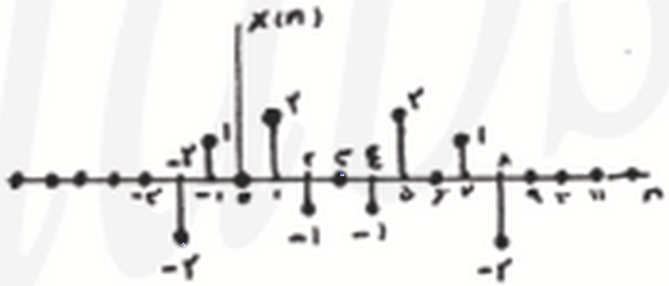


۱) 0 ، -2Ω

۲) 0 ، -3Ω

۳) 0 ، 6

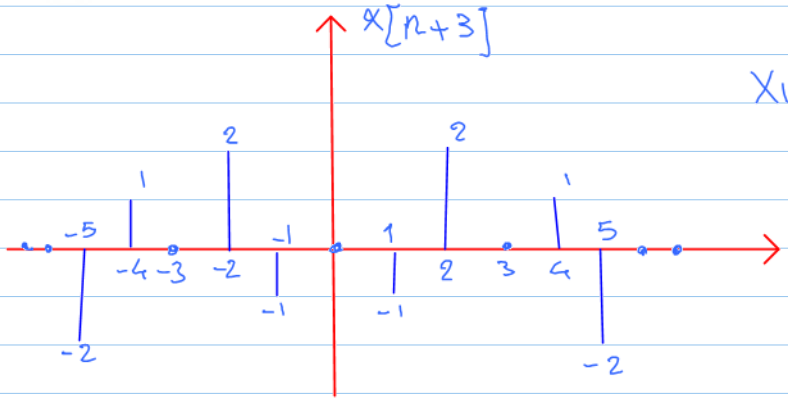
۴) 6 ، -2Ω



$x[n] \longrightarrow X(\Omega) = X(\omega)$

$X(0) = ?$

$\angle X(\omega) = ?$



$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \times 1$$

$$= -2 + 1 + 0 + 2 + -1 + 0 + -1 + 2 + 0 + 1$$

$$= 2$$

$x[n]$ حقيقي

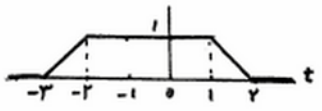
$\angle X(j\omega) = -\omega \times 3 + k\pi$

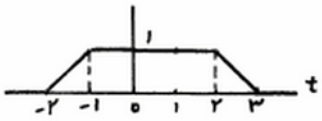
$= -3\omega + k\pi$

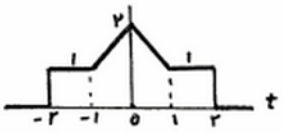
← e.g. $x[n+3]$

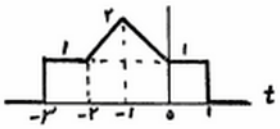
۸۶

۱۰. در صورتی که تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ یعنی $X(\omega)$ دارای مشخصات $\angle X(\omega) = \omega$، $X(\omega)|_{\omega=0} = 4$ و $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi$ باشد، کدام گزینه برای $x(t)$ مناسب است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


① $\angle X(jw) = w$ ② $X(j0) = 4$ ③ $\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw = 2\pi$

اطلاعاتی در حوزه فرکانس ← $x(t)$ در حوزه زمان

③ $\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw = 2\pi \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,e^{jwt}\,dw$

③ $x(t)\big|_{t=0} = 1$

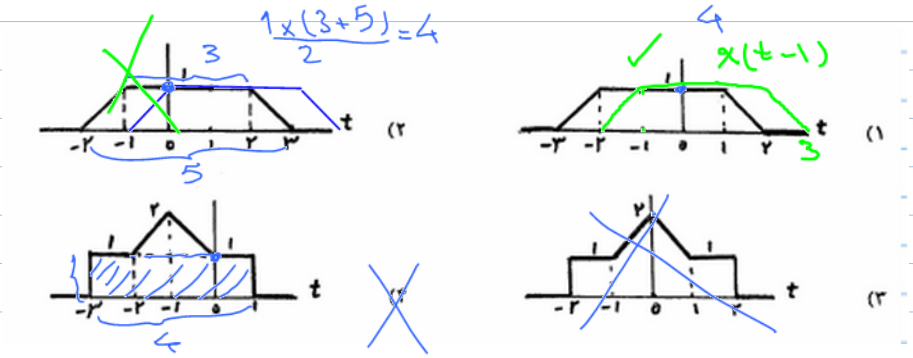
$2\pi\, x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,e^{jwt}\,dw$ ($e^{jwt} \rightarrow t=0$: 1)

$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\,dw = 2\pi$

$\boxed{x(0) = 1}$

② $X(j0) = 4$ $\quad 4 = X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-jwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$

② $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 4$



① $\angle X(jw) = w$

حداکثر بتوان $x(t)$ را حقیقی

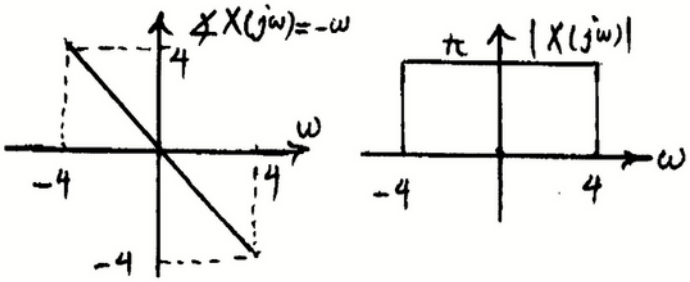
$x(t)$ حقیقی ←

$\angle X(jw) = -wxa = w \rightarrow a = -1$

$x(t+a)$ زوج باشد

$x(t-1)$ زوج است.

در صورتی که اندازه و فاز تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ به صورت شکل زیر باشد. فاز تبدیل فوریهٔ سیگنال $y(t) = |x(t)|^2$، کدام مورد خواهد بود؟



۱) برابر با صفر خواهد بود.

۲) برابر با فاز تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ یعنی $\angle x(j\omega) = -\omega$ خواهد بود.

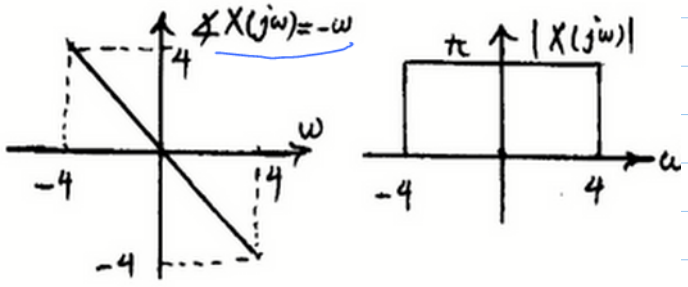
۳) برابر با $\angle y(j\omega) = -4\omega$ خواهد بود.

۴) برابر با $\angle y(j\omega) = -2\omega$ خواهد بود.

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

$y(t) = |x(t)|^2 \longrightarrow Y(j\omega)$

$\angle Y(j\omega)$



$x(t)$ حقیقی و $x(t+1)$ زوج ← $\angle X(j\omega) = -\omega x^1$

$x(t+1)$ حقیقی و زوج ✓

$x^*(t+1)$ حقیقی و زوج

$y(t+1) = |x(t+1)|^2 = x(t+1)\,x^*(t+1)$

$x(t+1)$ حقیقی ⟵ $x(t+1) = x^*(t+1)$

$y(t+1)$ حقیقی و زوج ← تبدیل فوریه $y(t+1)$ حقیقی و زوج

$\angle$ تبدیل فوریه $y(t+1) = 0$

$y(t) \longrightarrow Y(j\omega)$

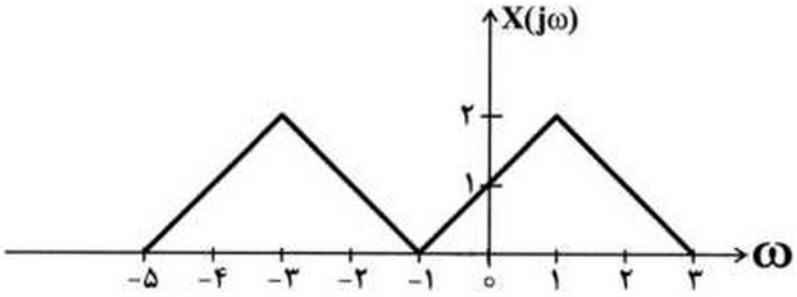
$y(t+1) \longrightarrow e^{j\omega x 1} Y(j\omega)$ $\quad \angle e^{j\omega} Y(j\omega) = 0$

$\angle e^{j\omega} + \angle Y(j\omega) = 0$

$\omega + \angle Y(j\omega) = 0 \rightarrow \angle Y(j\omega) = -\omega$

۹۷

تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر است. گزینهٔ درست در مورد آن کدام است؟

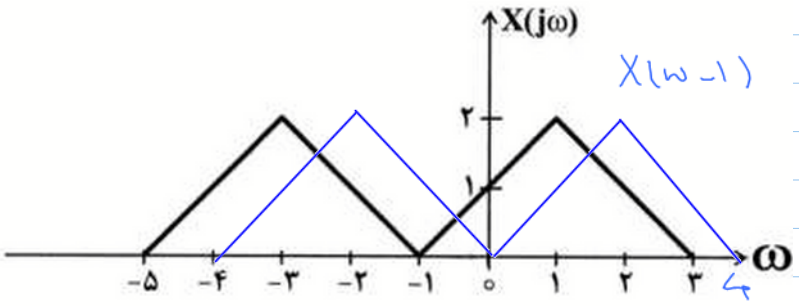


۱) $\sphericalangle x(t) = t$

۲) $x(t)$ حقیقی است.

۳) $\sphericalangle x(t) = -t$

۴) $x(t)$ موهومی و زوج است.



$x(t)$ ی

$X(jw)$ حقیقی ←

$X(w+a)$

$X(w-1)$ ی ←

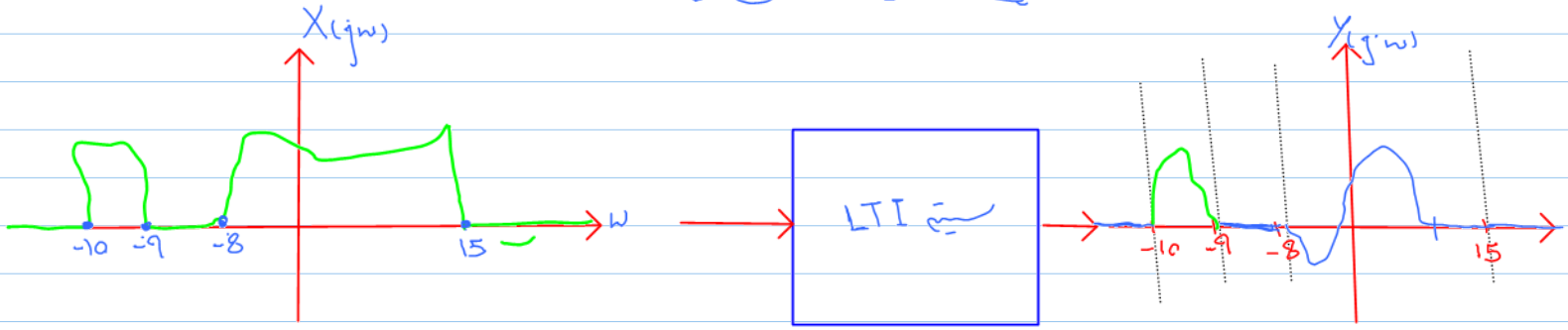
$x(t) = -1 \times t = -t$ ی

نکته خیلی مهم:

هرگاه در سوالات عبارت سیستم LTI (خطی تغییر ناپذیر با زمان) را در کنار عبارات می توانید دیدید از ع زیر استفاده کنید.

در سیستم LTI فرکانس جدید تولید نمی شود.

یعنی بازه فرکانسی که تبدیل فوریه خروجی غیر صفر است حتماً زیر مجموعه ای از بازه فرکانسی است که تبدیل فوریه ورودی غیر صفر است.



نکته! یک سیستم با ورودی x و خروجی y، LTI است اگر و فقط اگر

$Y(j\omega)/X(j\omega)$ = عبارت بدون اجمام ← یعنی عدد شود.

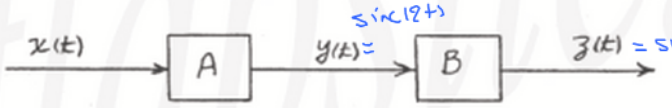
نکته! اگر ورودی ای برای شناسایی سیستم LTI استفاده شود باید به ازای هیچ فرکانسی صفر شود چون اگر صفر شود در $\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ تولید عدد ∞ می شود.

جاهایی که $X(j\omega)$ صفر است حتماً باید $Y(j\omega)$ هم صفر باشد.

شناسایی: $H(j\omega)$ را به ازای تمام فرکانس ها بدست آوریم.

برق ۸۴

فرض کنید دو سیستم مجهول مطابق شکل زیر به صورت متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. به ورودی سیستم سیگنال $x(t) = \text{sinc}(t)$ را اعمال می‌کنیم $y(t) = \text{sinc}(2t)$ و $z(t) = \text{sinc}(t)$ می‌شود. کدام یک از دو سیستم A و B می‌توانند LTI باشند؟



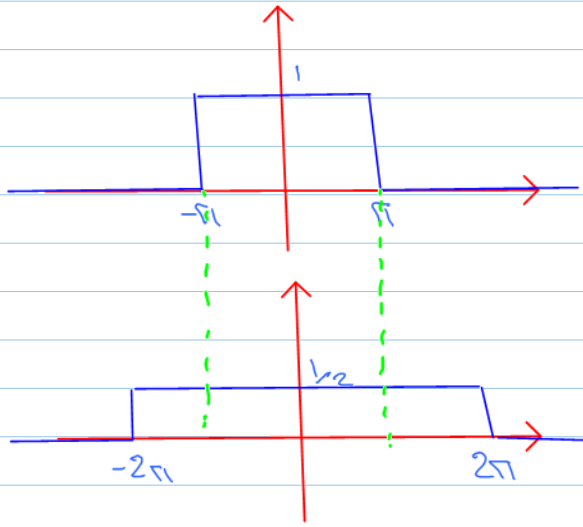
۱) فقط A
۲) فقط B
۳) هر دو
۴) هیچ‌کدام

اگر سیستمی خواهد LTI باشد باید هرکجا تبدیل فوریه ورودی ضرب تبدیل فوریه خروجی هم باید ضرب شود.

ورودی سیستم A $\rightarrow x(t) \rightarrow \text{sinc}(t) \rightarrow$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \rightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

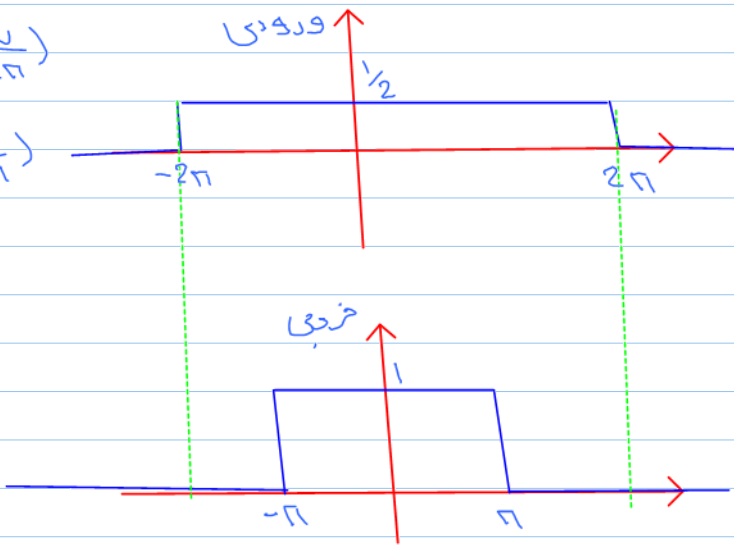
خروجی سیستم A : $\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} \rightarrow \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$



سیستم A می‌تواند LTI باشد.

سیستم B : ورودی $\text{sinc}(2t) \rightarrow \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$

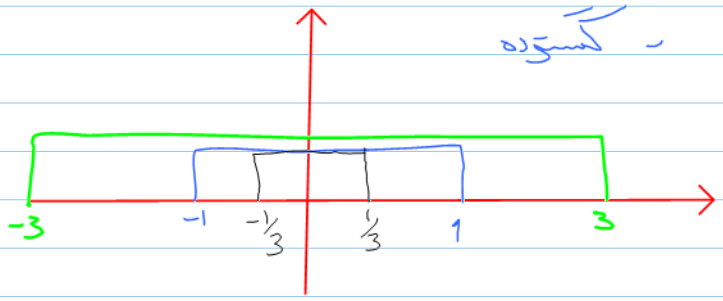
خروجی $\text{sinc}(t) \rightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$



سیستم B می‌تواند LTI باشد.

$x(at)$ ← $|a|>1$ ← در حوزه زمان فشرده

$|a|<1$ ← ـ ـ ـ گسترده



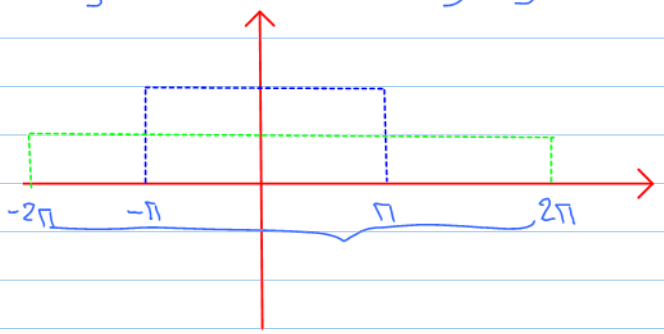
$x(3t)$

$x(\frac{1}{3}t)$

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a})$$

$x(at)$ ← $|a|>1$ ← $x(t)$ در حوزه زمان فشرده و در حوزه فرکانس گسترده

$|a|<1$ ← ـ ـ ـ گسترده و ـ ـ ـ فشرده



$x(t)=\text{sinc}(t)$ → [ ] → $\text{sinc}(2t)$

$y(t) = x(2t)$

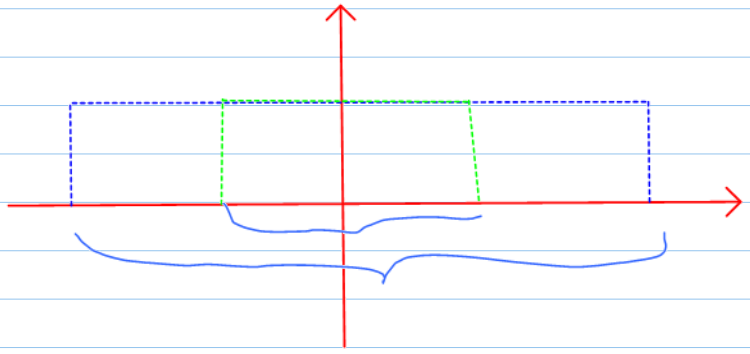
خروجی

$x(2t)$ ← $x(2t)$ ← $x(t)$ در حوزه فرکانس گسترده

چون خروجی نسبت به ورودی در حوزه فرکانس گسترده شده ← فیلتر LTI پایین‌گذر

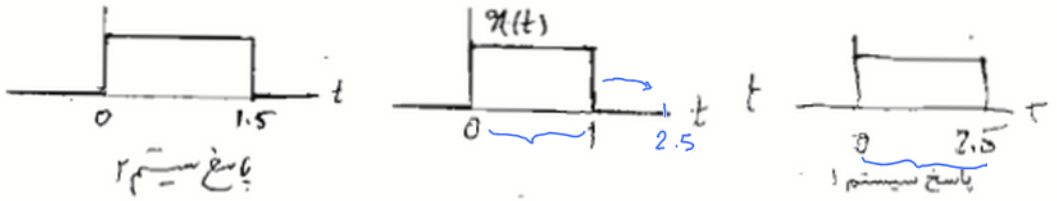
$y=\text{sinc}(2t)$ → [ ] → $z=\text{sinc}(t)$

$z(t)=y(\frac{1}{2}t)$ ← چون z نسبت به ورودی در حوزه زمان گسترده و در حوزه فرکانس فشرده شد.



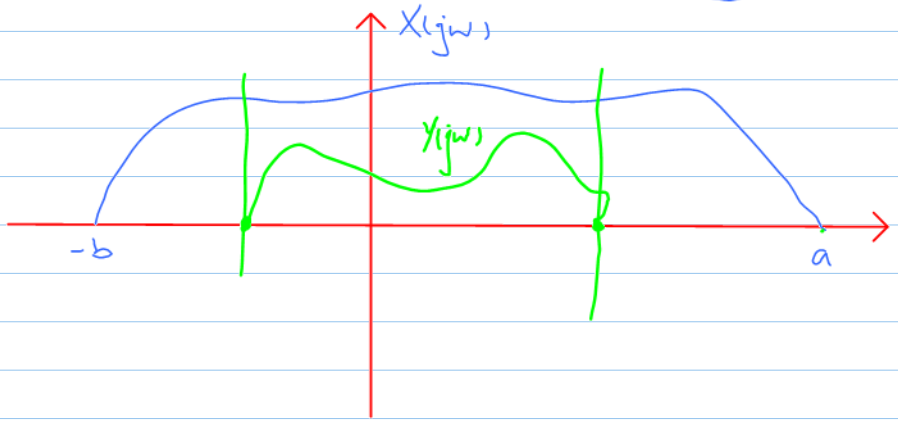
سوال ۸۹

در شکل زیر ورودی $x(t)$ و پاسخ دو سیستم به این ورودی نشان داده شده است. کدام یک از این دو سیستم می‌تواند یک سیستم LTI باشد؟





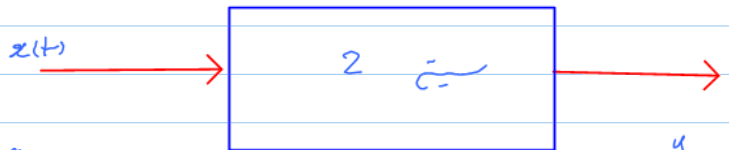
خروجی سیستم ۱ نسبت به ورودی در همه‌ی زمان گسترده شده پس در همه‌ی فشرده شده است.



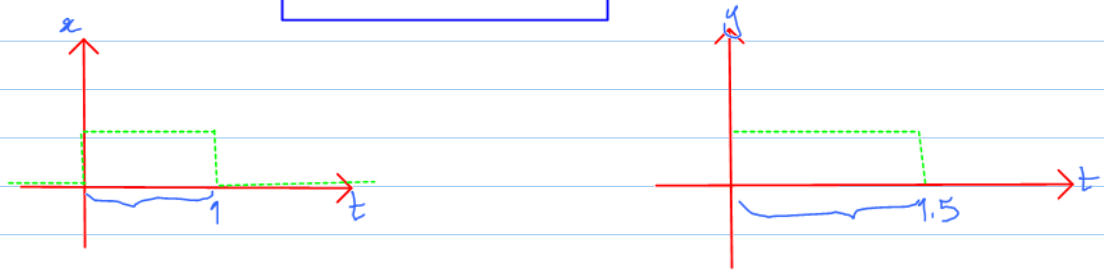
پس می‌تواند LTI باشد.

اگر در سیستم خروجی در همه‌ی زمان نسبت به ورودی گسترده‌تر باشد می‌تواند LTI باشد.

" " " " " " " " فشرده‌تر " نمی‌تواند LTI باشد.



سیستم ۲ هم می‌تواند LTI باشد.



دکتری ۹۶

کدام اظهار نظر زیر یک استنتاج صحیح می‌باشد؟ ($u(t)$ تابع پله واحد)

۱) پاسخ یک سیستم به ورودی $x(t) = tu(t)$ برابر $x^2(t)$ می‌باشد. این سیستم قطعاً غیرخطی می‌باشد.

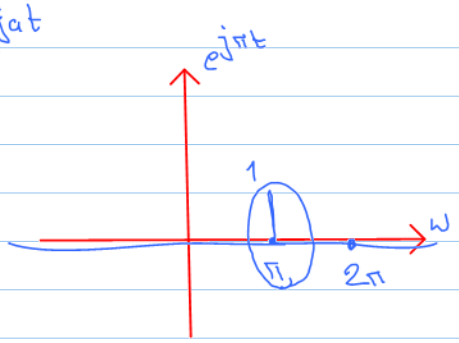
۲) پاسخ یک سیستم به ورودی $e^{j\pi t}$ برابر $e^{j2\pi t}$ است. این سیستم قطعاً LTI نمی‌باشد.

۳) پاسخ یک سیستم به ورودی $u(t)$ برابر $u(t+1)$ است. این سیستم قطعاً علّی نمی‌باشد.

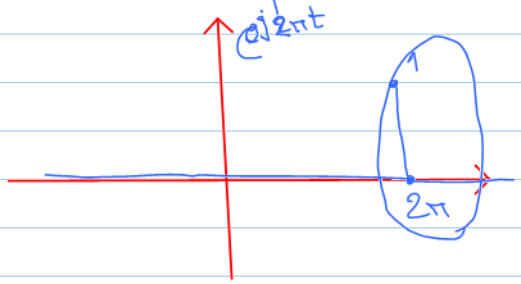
۴) پاسخ یک سیستم به ورودی $u(t)$ برابر $u(t-1)$ است. این سیستم قطعاً علّی می‌باشد.

1) $x(t) = tu(t)$

e^{jat}



$y(t) = t^2 u(t) = \underbrace{t\,x(t)}_{x^2(t)}$ → خطی



تست ۹۵

$x(t)$ ورودی مشخص شده و $y(t)$ خروجی متناظر در یک سیستم خطی است. اگر برای هر τ دلخواه، خروجی متناظر با $x(t-\tau)$ برابر $y(t-\tau)$ باشد. شرط کافی برای تغییرناپذیری با زمان سیستم توسط کدام $x(t)$ تأمین می‌شود؟

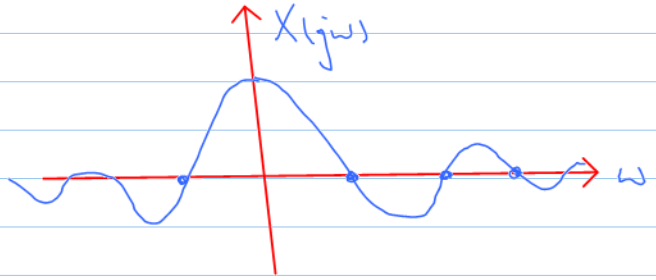
۱) $x(t) = \text{sinc}(t)$ ۲) $x(t) = \text{rect}(t)$ ۳) $x(t) = u(t)$ ۴) هیچ‌کدام

$x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau)$ TI

$\frac{Y(jw)}{X(jw)} \neq \frac{\text{عدد}}{0}$

X 1) $\text{sinc}(t) \longrightarrow \Pi(\frac{w}{2\pi}) \rightarrow$ برابر صفر $-\pi$ و π خارج از $X(jw)$

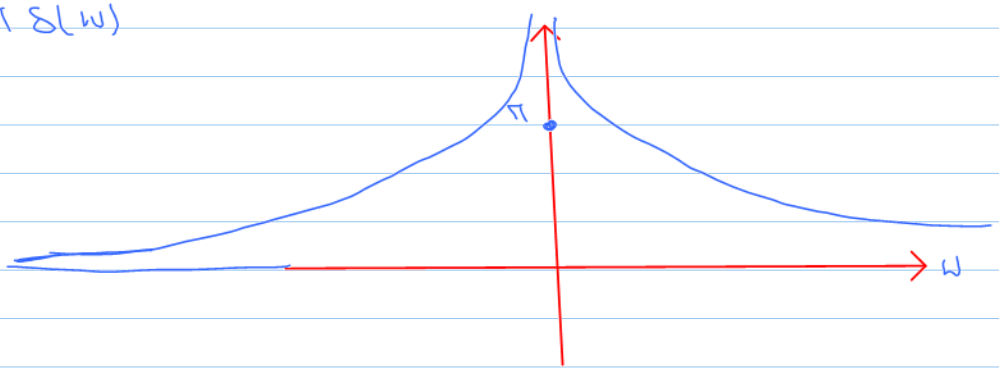
X 2) $\text{rect}(t) = \Pi(\frac{t}{1}) \longrightarrow \text{sinc}(\frac{t}{2\pi})$



✓3) $u(t) \longrightarrow \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$

$X(jw) \neq 0$

$X(j\infty) = \frac{1}{j\infty} = 0^+$



برق ۸۸

H(jω)

کدام یک از سیگنال‌ها به عنوان ورودی (تحریک) برای تعیین پاسخ فرکانس یک سیستم LIT کفایت می‌کند؟

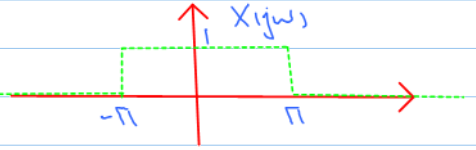
۱) $x(t) = e^{-|t|}$

۲) $x(t) = \Pi(t)$

۳) $x(t) = \Lambda(t)$

۴) $x(t) = \text{sinc}(t)$

X 4) $x(t) = \text{sinc}(t) \longrightarrow X(jw) = \Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)$ →



X 3) $\Lambda(t) \longrightarrow X(jw) = 1\left(\frac{2\sin(\frac{w}{2})}{w}\right)^2$

$w = 2\pi \longrightarrow X(j2\pi) = \left(\frac{2\sin(\pi)}{2\pi}\right)^2 = 0$

X 2) $x(t) = \Pi(t) \longrightarrow X(jw) = 2\frac{\sin(\frac{w}{2})}{w}$

$w = 2\pi \longrightarrow X(j2\pi) = 0$

✓ 1) $e^{-|t|} \longrightarrow X(jw) = \frac{2}{w^2+1} \neq 0$

$w = \infty \longrightarrow X(jw) = 0^+$

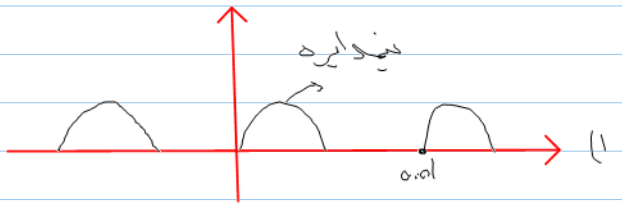
جلسه 5ام سیگنال

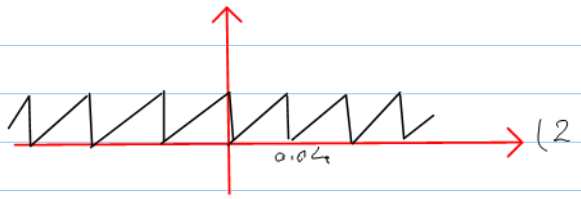
تبدیل فوریه

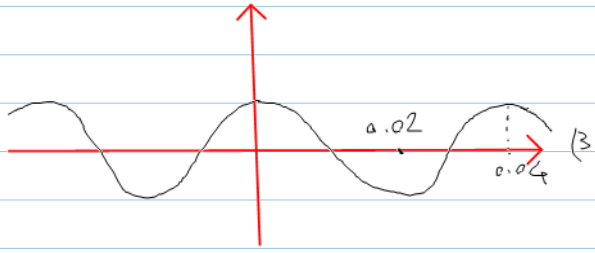
برق ۹۳

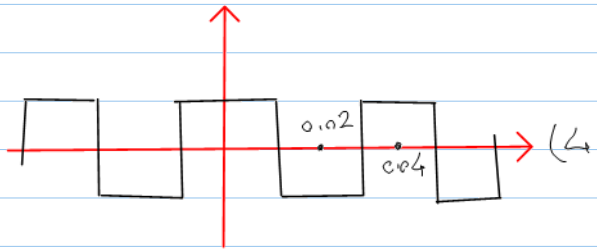
فرض کنید که خروجی یک سیستم LTI پایدار به صورت $y(t) = \cos(2\pi \times 50t)$ باشد.

در این صورت تنها یکی از سیگنالهای زیر می تواند ورودی این سیستم باشد. آن سیگنال کدام است؟









می‌توانند ← LTI ← دستگاه LTI فرکانس جدید تولید کنند.

خروجی شامل فرکانس‌هایی است که حتماً در ورودی وجود داشته.

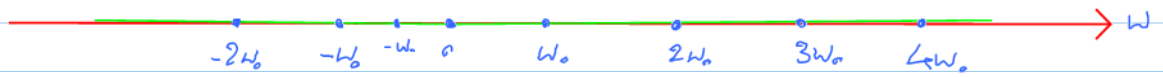
$y(t) = \cos(100\pi t)$ ← تک‌فرکانس

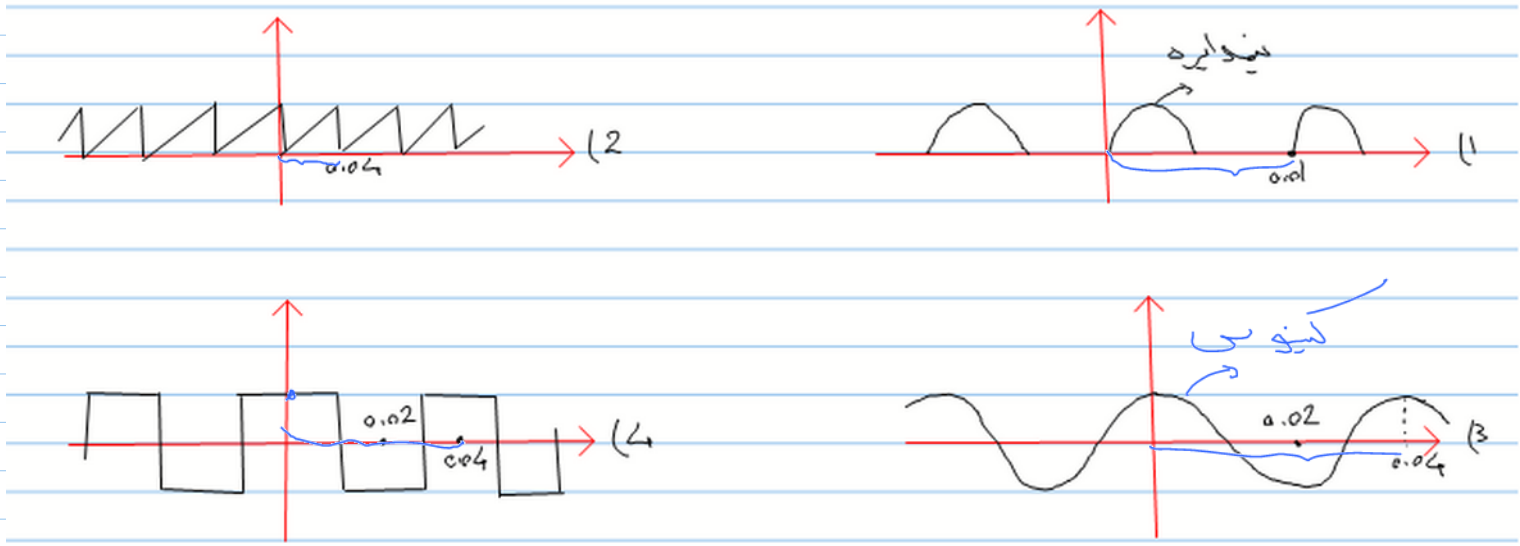
$y(t)$ فقط شامل فرکانس 100π است.

$x(t)$ حتماً شامل فرکانس 100π است.

شامل فرکانس‌های مضرب صحیح از ω_0 می‌شود. ← $x(t)$, T_0

اگر a_k یعنی وزن فرکانس $k\omega_0$ غالباً مخالف صفر باشد یعنی $x(t)$ شامل $k\omega_0$ است.





1) $x(t)$, $T_0 = 0.01 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{100}} = 200\pi$

$x(t)$ فقط می‌تواند شامل فرکانس‌های مضرب صحیح از 200π شود.



گزینه 1 رد می‌شود چون 100π مضرب صحیح از 200π نیست.

2), 3), 4) → $x(t)$, $T_0 = 0.04$ → $w_0 = \frac{2\pi}{\frac{4}{100}} = 50\pi$

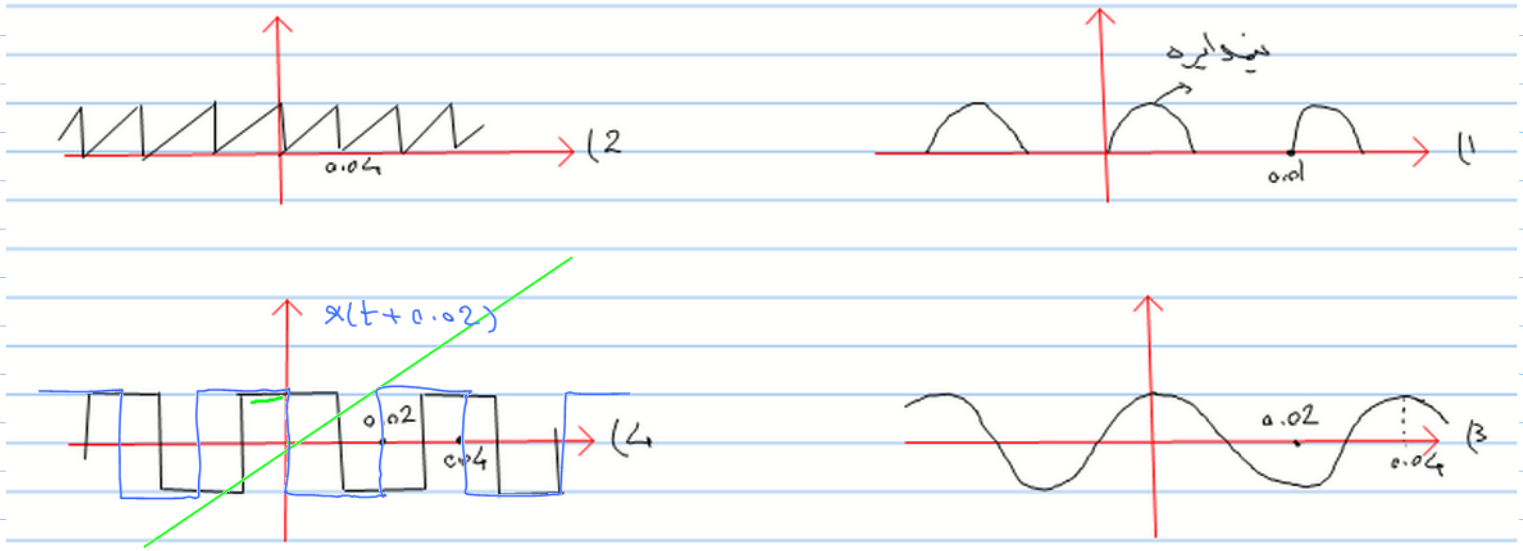
100π مضرب صحیح از 50π هست.

گزینه های 2 ، 3 ، 4 می تواند شامل ضرب های صحیح از 50π باشد.

$100\pi = 2w_0$ → $k=2$ →

به ازای شامل شدن 100π می شود $a_2 \neq 0$ باشد.

X 3) → $\cos(50\pi t)$ → تک زمانی → فقط شامل 50π است.



$a_2 = 0$ → شامل 100π نمی شود.

یادآوری: اگر سیگنال $x(t)$ دارای تعدادی بیش موج باشد فقط شامل ضرایب

مزدی شود.

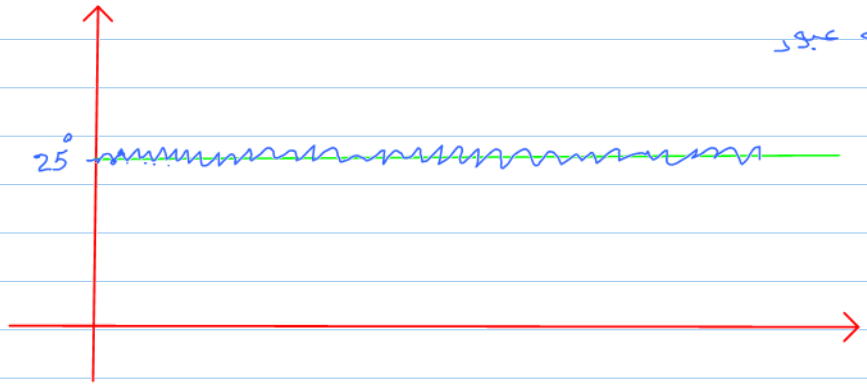
$$a_k = \begin{cases} 0 & k = \text{زوج} \\ \neq 0 & k = \text{مزد} \end{cases}$$

4) → تعدادی بیش موج دارد → $a_2 = 0$ /

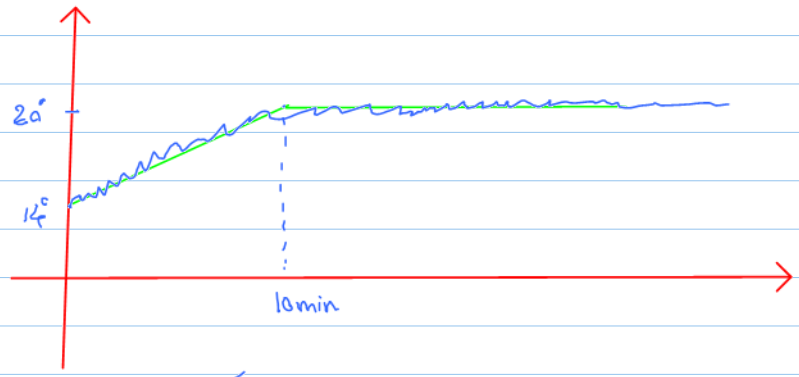
2) ✓

فیلتر ماشین ← فیلتر خود

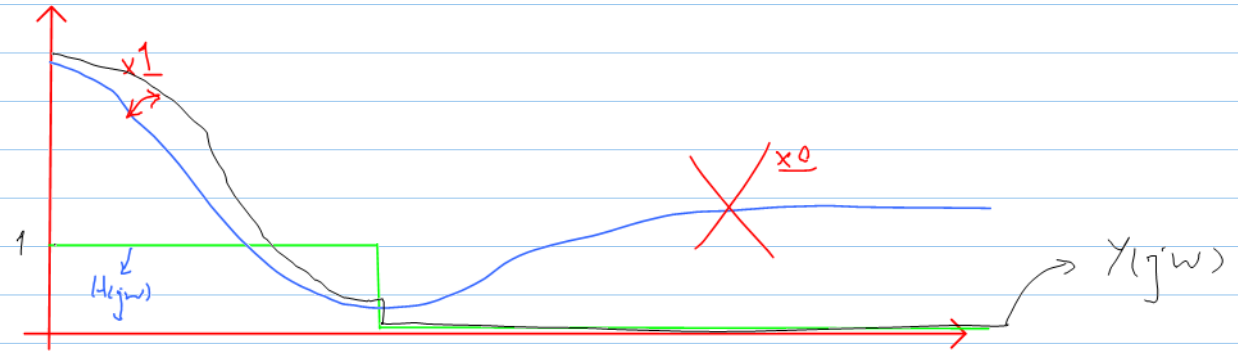
هوا ← گرد و غبار ← حذف
هوای خالص ← عبور



تغییرات ← تغییرات سریع ← نویز
تغییرات کند





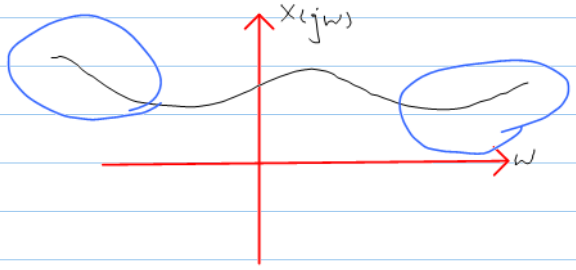


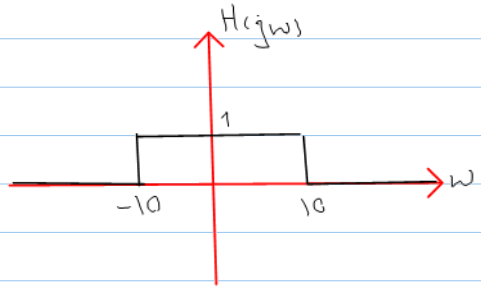
$X(jw) \rightarrow \boxed{H(jw)} \rightarrow Y(jw) = H(jw)\,X(jw)$

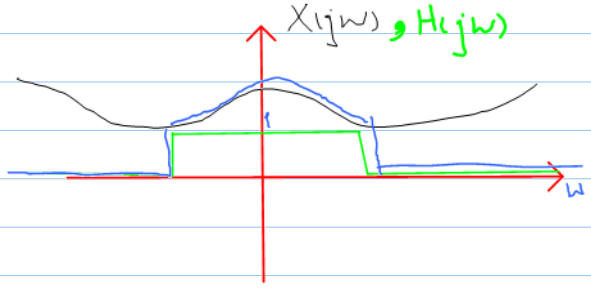
فیلترها:

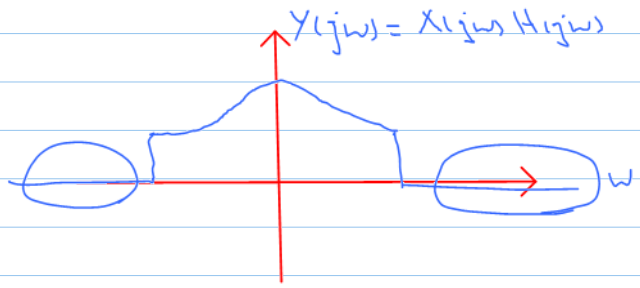


$$Y(jw) = X(jw)\,H(jw)$$









فیلتر یعنی یک سیستم LTI که در خروجی سیستم برخی از فرکانس‌های ورودی حذف شده است.

انواع فیلترها:

1- فیلتر پایین گذر: یعنی فرکانس‌های پایین را از خود عبور داده و بقیه فرکانس‌ها را حذف می‌کند.

نوع فرکانس ω_1

به عبارتی اندازه $H(jw)$ در فرکانس‌های پایین بزرگ بوده(1) و در مابقی فرکانس‌ها $|H(jw)|$ نزدیک صفر است.

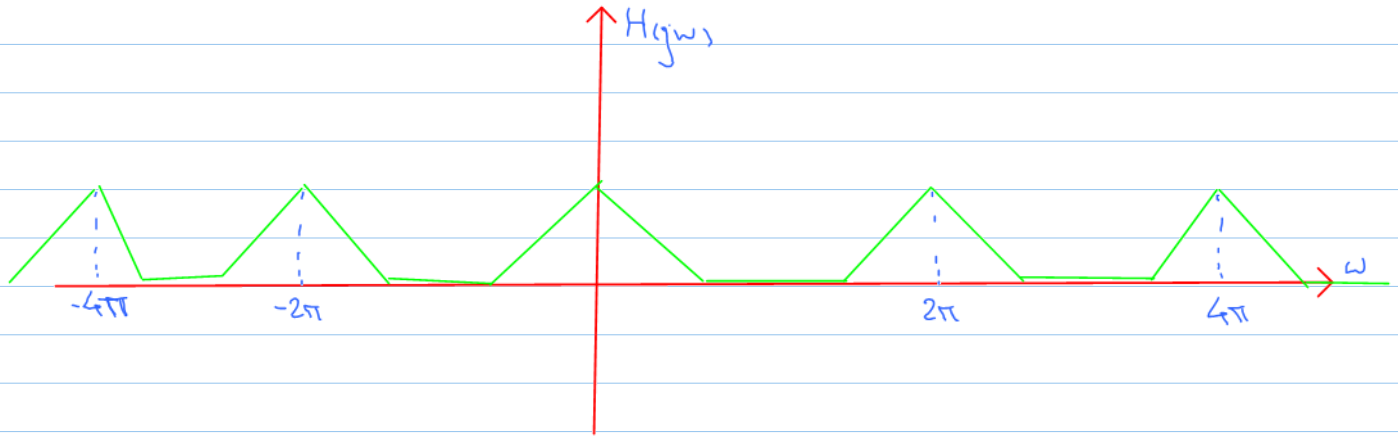
2- فیلتر بالاگذر: فرکانس‌های پایین ورودی را حذف می‌کند.

ω_1

$$|H(jw)| = \begin{cases} \text{نزدیک صفر} & \text{عبار فرکانس‌های بالا و} \\ 1 & \text{فرکانس‌های بالا و} \end{cases}$$

3- فیلتر میان گذر: فقط فرکانس‌های میانی ورودی را عبور داده و بقیه فرکانس‌ها را حذف می‌کند.

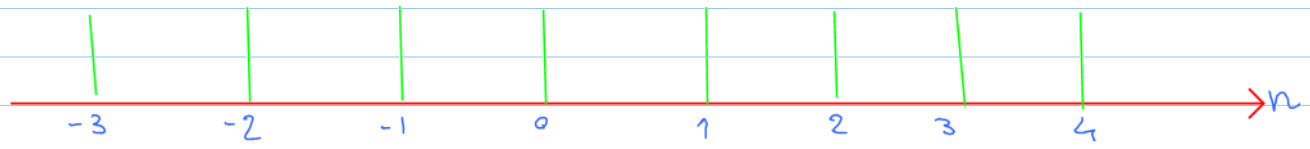
$$|H(jw)| = \begin{cases} 1 & \text{فرکانس‌های میانی} \\ 0 & \text{بقیه فرکانس‌ها} \end{cases}$$



$x[n] = e^{jwn}$

تغییرات در واحد زمان

$w = 0$ ، $w = 2\pi$



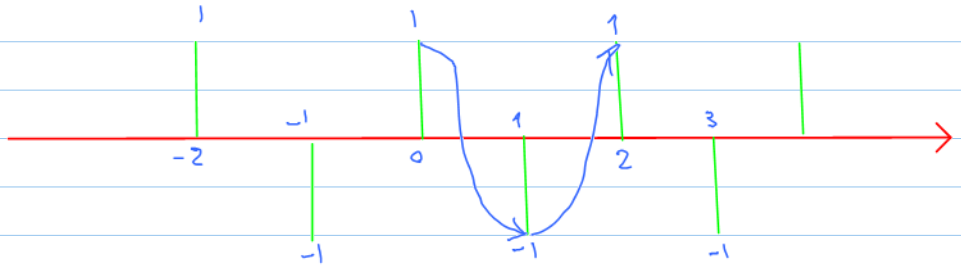
فرکانس = 0 ← تغییرات = 0

$x[n] = e^{j2\pi n} = (e^{j\pi n})^2 = ((-1)^n)^2 = 1$

$x[n]$ پایین ترین میزان تغییرات $w = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

پایین ترین فرکانس ← مضرهای زوج از π = w

$w = \pi \rightarrow e^{j\pi n} = (-1)^n$



$e^{jwn} = \cos(wn) + j\sin(wn)$

$-1, 1$

بالاترین میزان تغییرات فرکانس $w = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$

۴- فیلتر میان گذر: فقط فرکانسهای میانی را از خود عبور می دهد.

نوع فرکانس ۰ → میان گذر

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{فرکانسهای میانی} \\ 1 & \text{بقیه فرکانسها} \end{cases}$$

در فیلترها با اندازه $H(j\omega)$ کار داریم.

نکته خیلی مهم ۰

در فیلترهای زمان پیوسته داریم:

نزدیک ۰ ≈ فرکانس پایین

∞ ≈ فرکانس بالا

۱۰ → ۱۰۰۰ rad/s ≈ فرکانس میانی

در فیلترهای زمان گسسته داریم:

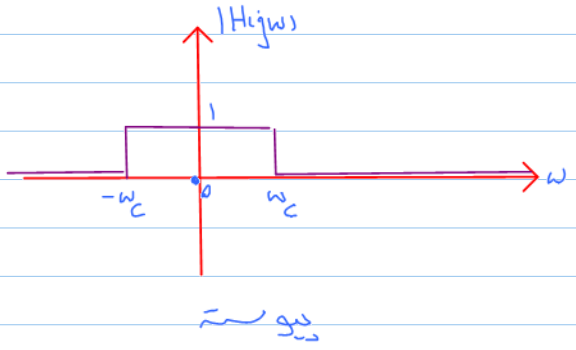
نزدیک مضرهای زوج π ≈ فرکانس پایین

نزدیک مضرهای فرد π ≈ فرکانس بالا

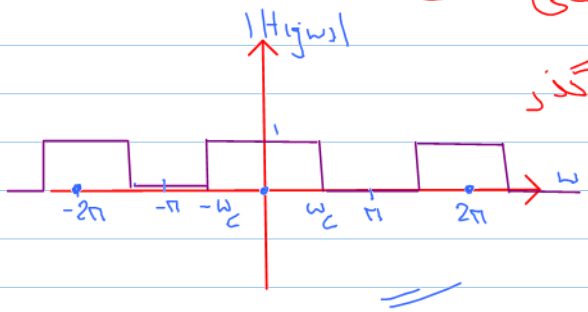
بین فرکانس پایین و بالا = فرکانس میانی

شکل فیلترهای مختلف

۱- پایین گذر



پیوسته



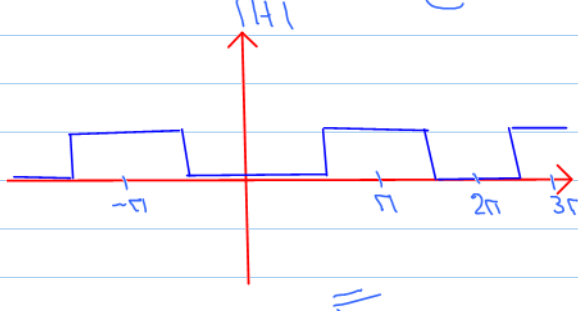
گسسته

ω_c: فرکانس قطع



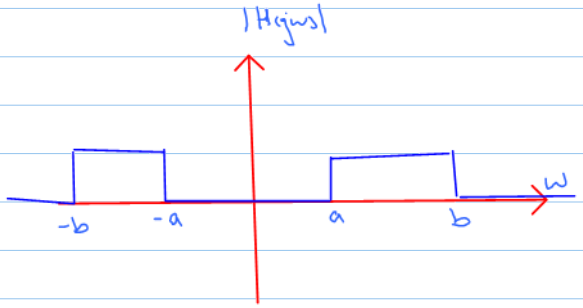
پیوسته

۲- بالاگذر

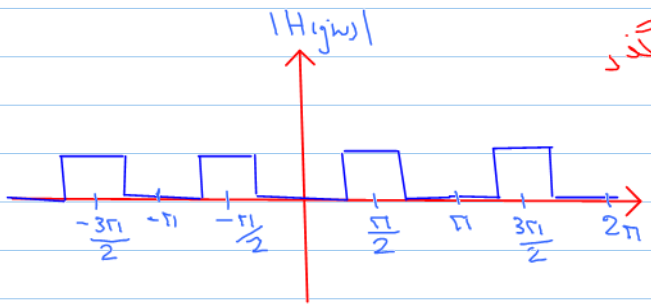


گسسته

3- میان گذر

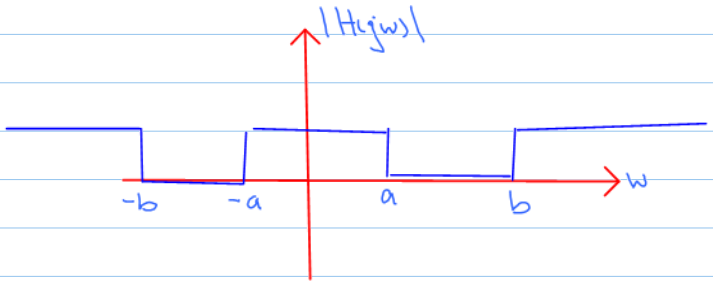


پایین گذر

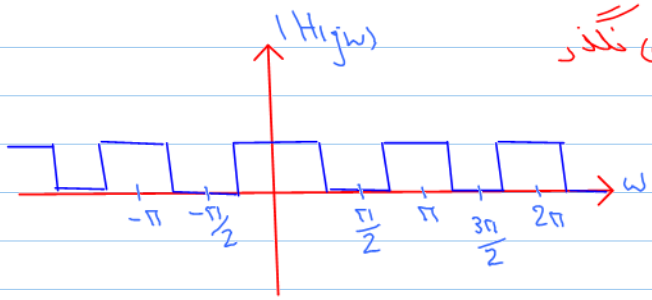


بالا گذر

4- میان نگذر



پایین گذر



بالا گذر

برق ۸۸

یک سیستم LTI زمان گسسته و علّی، با معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$y[n]+\frac{۱}{۴}y[n-۱]-\frac{۳}{۸}y[n-۲]=۴x[n-۲]+x[n-۱]-\frac{۳}{۲}x[n]$$

این سیستم چه نوع فیلتری است؟

۱) میان گذر ۲) میان نگذر ۳) تمام گذر ۴) پایین گذر

نوع فیلتر ← $|H(j\omega)|$ کجا ها صفر و کجا ها ∞

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{3}{8}y[n-2]=4x[n-2]+x[n-1]-\frac{3}{2}x[n]$$

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$Y(j\omega)+\frac{1}{4}Y(j\omega)e^{-j\omega\times1}-\frac{3}{8}Y(j\omega)e^{-j2\omega}=4X(j\omega)e^{-j2\omega}+X(j\omega)e^{-j\omega}-\frac{3}{2}X(j\omega)$$

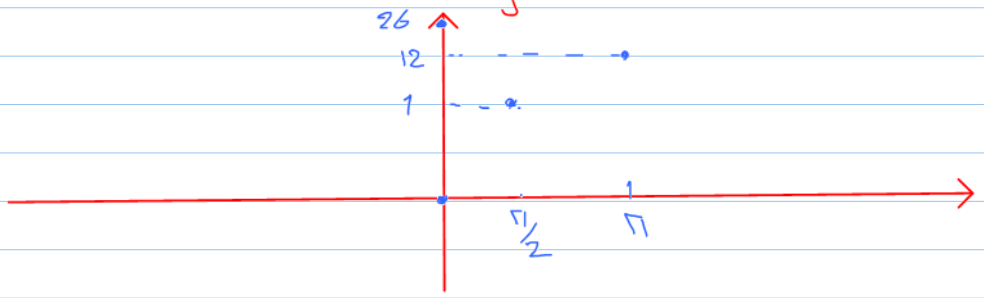
$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{4e^{-j2\omega}+e^{-j\omega}+\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{3}{8}e^{-j2\omega}}$$

$$H(j\omega)=\frac{\frac{3}{2}+e^{-j\omega}+4e^{-j2\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{3}{8}e^{-j2\omega}}$$

به ازای $\omega=\pi \rightarrow H(j\pi)=\dfrac{\frac{3}{2}+e^{-j\pi}+4e^{-j2\pi}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\pi}-\frac{3}{8}e^{-j2\pi}}=\dfrac{9/2}{\frac{3}{8}}=12$ ← دهانه گشاد

به ازای $\omega=0 \rightarrow H(j0)=\dfrac{\frac{3}{2}+1+4}{1+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}}=\dfrac{13/2}{7/8}=\dfrac{4\times13}{2}$

به ازای $\omega=\frac{\pi}{2} \rightarrow H(j\pi/2)=\dfrac{\frac{3}{2}+e^{-j\pi/2}+4e^{-j\pi}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}-\frac{3}{8}e^{-j\pi}}=\dfrac{-2.5-j}{2-j}$



عام گذر

جلسه 51 سیگنال

فیلترها:

تعیین نوع فیلتر ←

① تعیین $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

② محاسبه $H(j\omega)$ در فرکانس هایی ، بالا و میانی

زمان پیوسته ← $H(j0)$ ، $H(j\infty)$ ، $H(j\frac{1}{2})$

زمان گسسته ← $H(j0)$ ، $H(j\pi)$ ، $H(j\frac{\pi}{2})$

③ محاسبه اندازه H های محاسبه شده در مرحله ②

④ در فرکانس هایی که اندازه H نزدیک ۰ است یعنی حذف

بزرگتر یا مساوی ۱ است یعنی گذر

برق ۷۹

دو سیستم LTI زیر به ترتیب چه نوع فیلتری هستند؟

سیستم ۱ : $y[n] = 0.9\,y[n-1] + 0.1\,x[n]$

سیستم 2 : $y[n] = -0.9\,y[n-1] + 0.1\,x[n]$

۱) هر دو بالاگذر ۲) هر دو پایین گذر ۳) پایین گذر - بالاگذر ۴) بالاگذر - پایین گذر

① $y[n] = 0.9\,y[n-1] + 0.1\,x[n]$

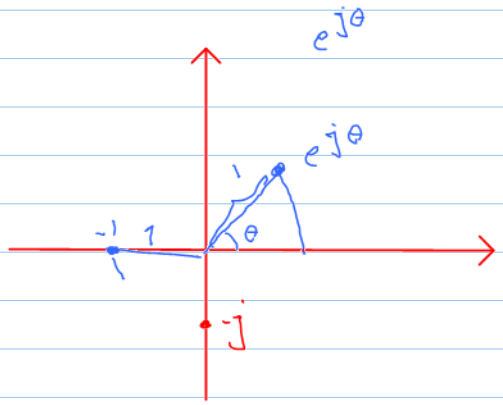
① $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = ?$

$y[n] \rightarrow Y(j\omega)$ $\quad x[n] \rightarrow X(j\omega)$

$y[n-1] \rightarrow e^{-j\omega} Y(j\omega)$

$Y(j\omega) = 0.9\,e^{-j\omega} Y(j\omega) + 0.1\,X(j\omega) \rightarrow Y(j\omega)(1 - 0.9\,e^{-j\omega}) = X(j\omega)$

$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{0.1}{1 - 0.9e^{-j\omega}}$



② $\omega = 0 \rightarrow H(j0) = \frac{0.1}{1 - 0.9 \times 1} = 1$

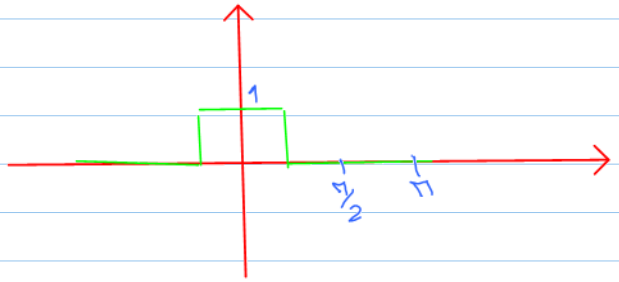
$\omega = \pi \rightarrow H(j\pi) = \frac{0.1}{1 - 0.9\,e^{-j\pi}} = \frac{1}{19}$ ($e^{-j\pi} = -1$)

$\omega = \pi/2 \rightarrow H(j\pi/2) = \frac{0.1}{1 - 0.9\,e^{-j\pi/2}} = \frac{0.1}{1 + 0.9j}$ ($e^{-j\pi/2} = -j$)

③ $|H(j0)| = 1$ ✓ پایین گذر

$|H(j\pi)| = \frac{1}{19}$ بالا گذر

$|H(j\pi/2)| = \frac{0.1}{\sqrt{1^2 + 0.9^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1.81}} \simeq \frac{0.1}{1.3} = \frac{1}{13}$ میان گذر



پایین گذر

$$y[n] = -0.9\,y[n-1] + 0.1\,x[n]$$

① $$Y(j\omega) = -0.9\,e^{-j\omega}\,Y(j\omega) + 0.1\,X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{0.1}{1 + 0.9\,e^{-j\omega}}$$

② $\omega = 0 \longrightarrow$ $$H(j0) = \frac{0.1}{1+0.9} = \frac{1}{19}$$

$\omega = \pi \longrightarrow$ $$H(j\pi) = \frac{0.1}{1+0.9\,e^{-j\pi}} = 1$$ ($e^{-j\pi} = -1$)

$\omega = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ $$H(j\pi/2) = \frac{0.1}{1+0.9\,e^{-j\pi/2}} = \frac{0.1}{1 - 0.9j}$$

③ $$|H(j0)| = \frac{1}{19}$$ نقد ديبن

$$|H(j\pi)| = 1$$ نقد بالا

$$|H(j\pi/2)| = \frac{0.1}{\sqrt{1^2 + (-0.9)^2}} \approx \frac{1}{13}$$ نقد بايين

بالا نقد

اگر ورودی یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\omega_c = ۳\pi \frac{rad}{sec}$ به صورت زیر باشد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [۲(-۱)^k \delta(t - \frac{k}{۲}) - \delta(t - \frac{۱}{۲} - k)]$$

آنگاه خروجی فیلتر کدام است؟

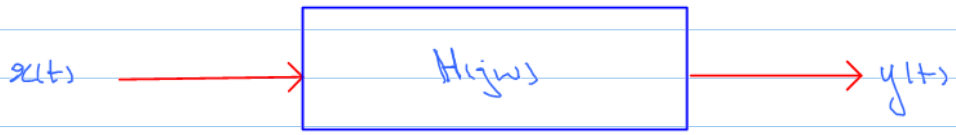
۱) $y(t) = (۱۰\cos ۲\pi t) - ۱$

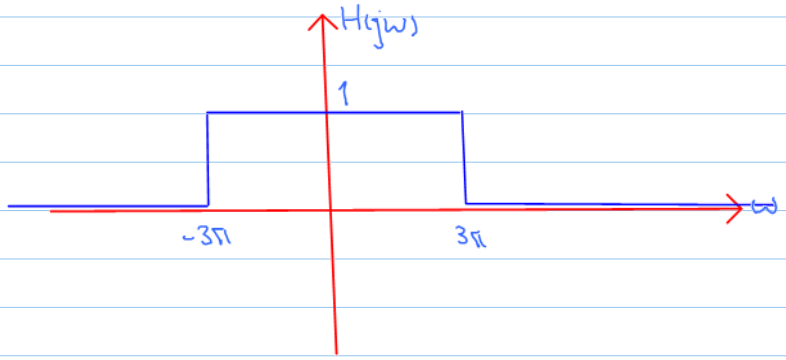
۲) $y(t) = (۵\cos ۲\pi t) - ۱$

۳) $y(t) = (-\cos ۲\pi t) + ۵$

۴) $y(t) = (-۲\cos ۲\pi t) + ۵$

بررسی سیستم‌های قدرت ۱





$$x(t) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \delta(t-\tfrac{1}{2}k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\tfrac{1}{2}-k)$$

اگر سیستم LTI با $H(j\omega)$ پاسخ به ورودی $x(t)$

سیگنال یا سری فوریه ← چون $x(t)$ متناوب و غیر تکازکانس ← سری فوریه:

① $\omega_0 \rightarrow$ $x(t) = \underbrace{2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k \delta(t-\frac{1}{2}k)}_{\frac{1}{2}\times 2} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{1}{2}-k)}_{1}$

$$\sum f(m)\,\delta(t-T_0 k)$$

$T_0 \times M$

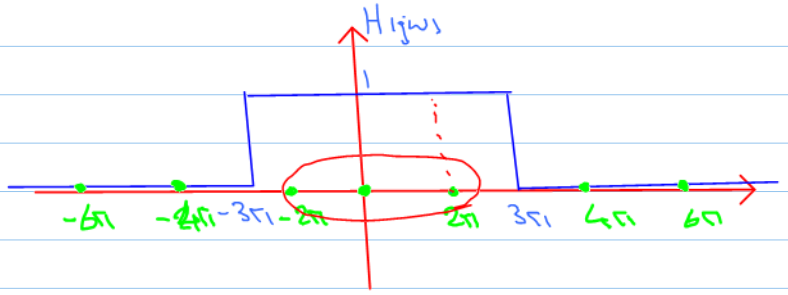
$f(m) = (-1)^k = e^{j\pi k} \rightarrow M = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$\sum \delta(t-k) \longrightarrow 1$$

$T_0 x = \text{ک.م.م}\{\frac{1}{2}\times 2, 1\} = 1 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

② $H(jk\omega_0) \neq 0$

$k \times 2\pi$



$k \times 2\pi = \begin{cases} 2\pi \longrightarrow k=1 \\ -2\pi \longrightarrow k=-1 \\ 0 \longrightarrow k=0 \end{cases}$

$H(jk\omega_0) = \begin{cases} 1 & k=0,\pm1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

③ $x(t) \longrightarrow a_k \longrightarrow a_0, a_1, a_{-1}$

$$x(t) = \underbrace{2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k \delta(t-\tfrac{1}{2}k)}_{} - \underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tfrac{1}{2}-k)}_{}$$

$2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \delta(t-\frac{1}{2}k)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{1} \longrightarrow 2\times\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}(1-(-1)^k) = 2(1-(-1)^k)$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{1} \longrightarrow \frac{1}{1}$

$t \to t-\frac{1}{2}$ ↓ $e^{-jk\omega_0 \times \frac{1}{2}}$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{1}{2}-k)$, $\omega_0 = 2\pi \longrightarrow 1 \times e^{-jk\pi} = (-1)^k$

$2\sum(-1)^k\delta(t-\frac{1}{2}k)$, $\omega_0=2\pi \longrightarrow 2-2(-1)^k$

$-$

$\sum\delta(t-\frac{1}{2}-k)$, $\omega_0=2\pi \longrightarrow (-1)^k$

$x(t) \longrightarrow 2-3(-1)^k = a_k$

$a_0, a_1, a_{-1} \longrightarrow a_0 = -1 \quad a_1 = 5 \quad a_{-1} = 5$

④ $b_k = a_k H(jk\omega_0)$

$$b_k = \begin{cases} -1 & k=0 \\ 5 & k=1 \\ 5 & k=-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\times 2\pi t} = -1 + 5e^{j2\pi t} + 5e^{-j2\pi t}$$

$$= -1 + 10\cos(2\pi t)$$

$$10\cos(2\pi t) = 10\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi t}\right)$$

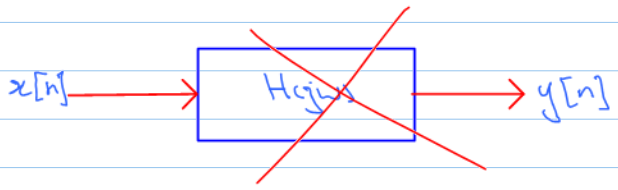
ق ۸۹

اگر $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \cos\omega & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \\ 0 & 0 \le |\omega| \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشد و $y[n] = (-1)^n x[n]$ ، $y[n]$ پاسخ ضربه یک فیلتر ..... است.

۱) بالاگذر ۲) میان‌گذر ۳) میان‌نگذر ۴) پایین‌گذر

$x[n] \longrightarrow X(jw)$, 2π

$y[n] = (-1)^n x[n] \longrightarrow Y(jw)$



$h[n] = y[n] \longrightarrow H(jw) = X(jw)$

$x[n] \longrightarrow X(jw)$

$e^{j\pi n} x[n] \longrightarrow X(j(w-\pi))$ ($w \to w-\pi$)

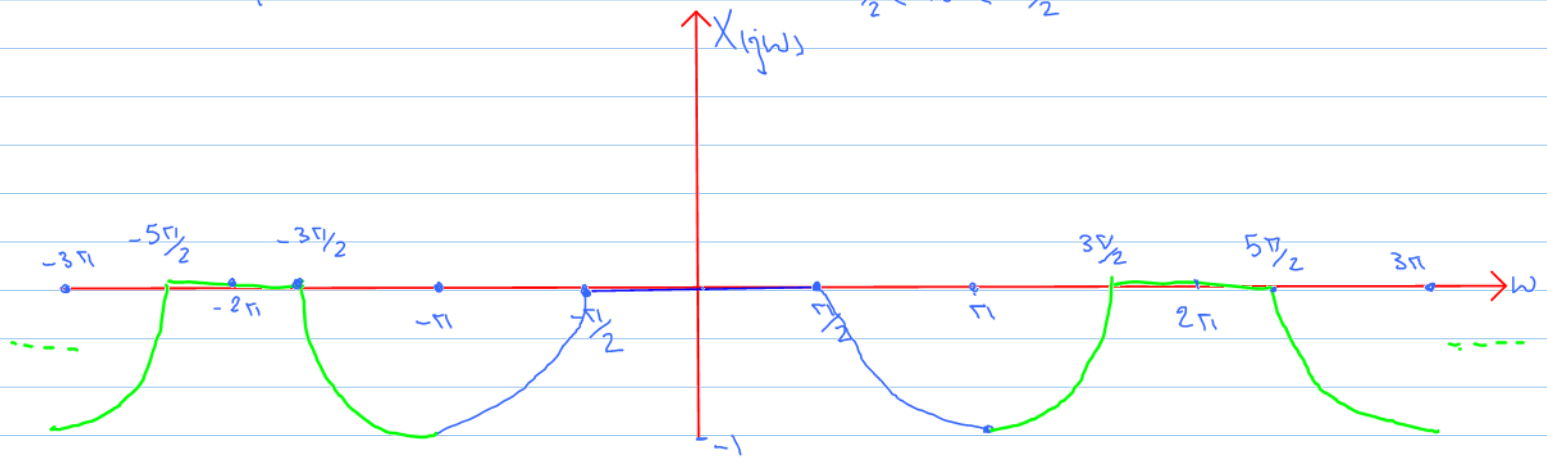
$y[n]$ $\qquad$ $Y(jw) = H(jw)$

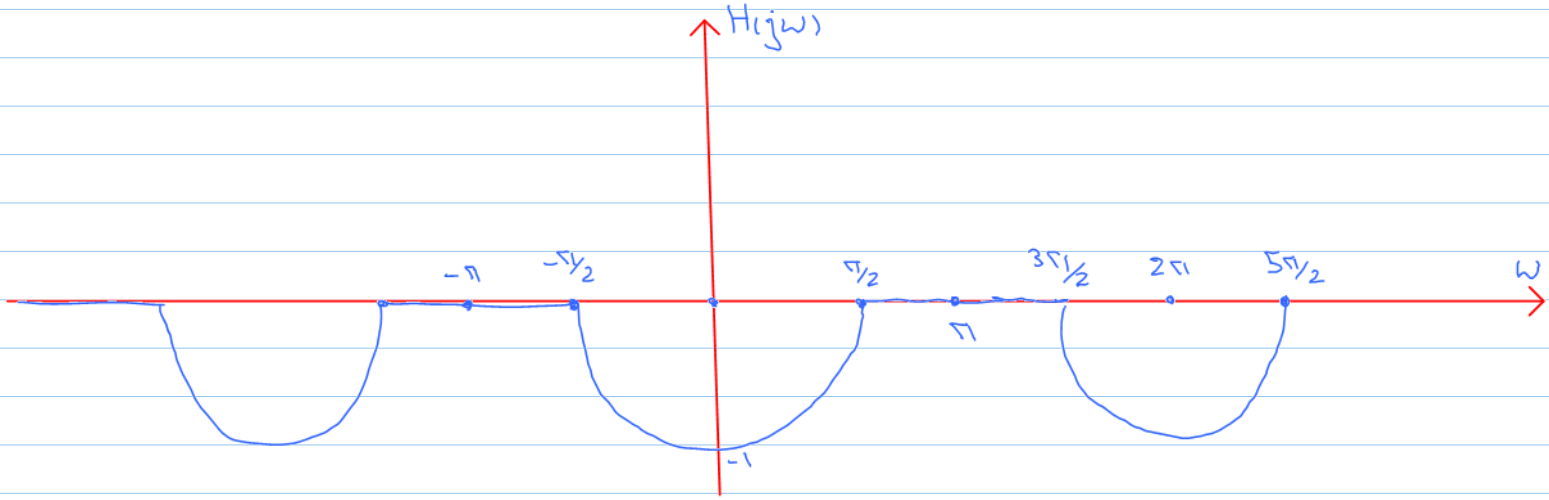
$$X(jw) = \begin{cases} \cos(w) & \frac{\pi}{2} < |w| < \pi \\ 0 & 0 < |w| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} < |w| < \pi$ $\Rightarrow$ $\pi > w > \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} > w > -\pi$

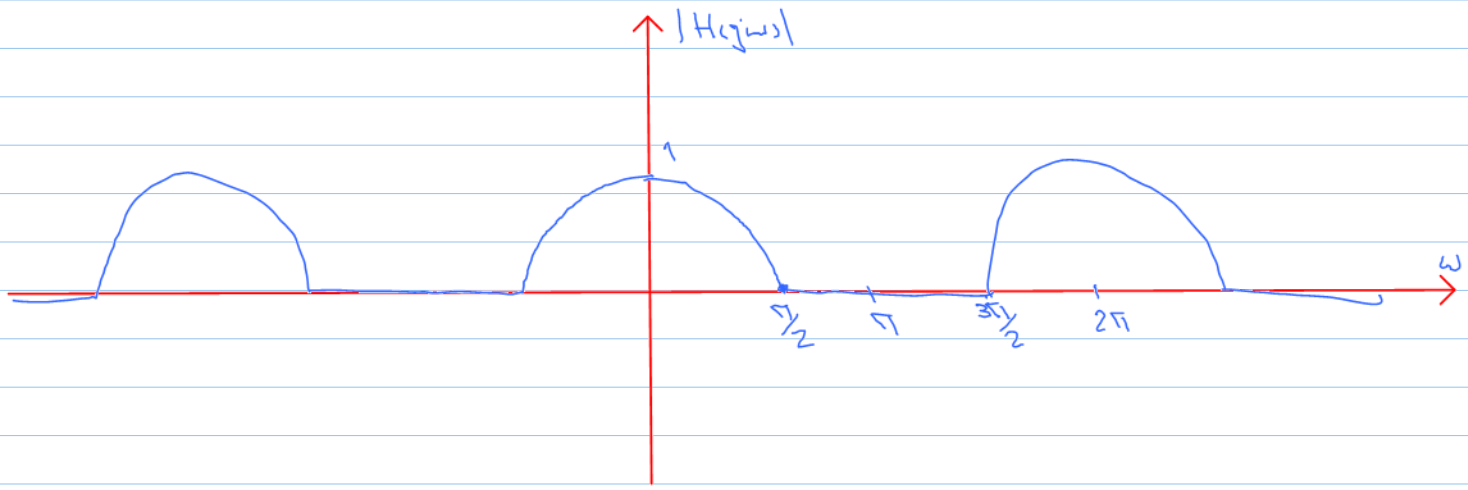
$0 < |w| < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $-\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow H(jw) = X(j(w-\pi))$





عدد حقیقی منفی = $-1 \times$ عدد حقیقی مثبت



$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 0 & \omega = \pi \\ 0 & \omega = \pi/2 \end{cases}$$

پایین گذر

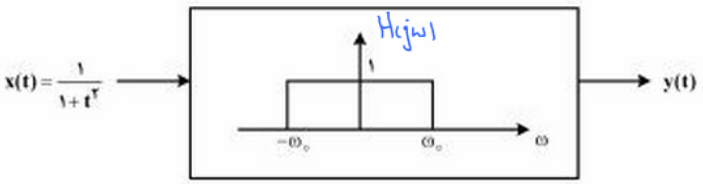
بالا گذر

میان گذر

باند گذر

برق دکتری ۹۶

سیگنال $y(t)$ خروجی فیلتر پایین‌گذر ایدئال با فرکانس قطع ω_0 به ورودی $x(t)=\frac{1}{1+t^2}$ است. انرژی $y(t)$، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt$، برابر کدام است؟

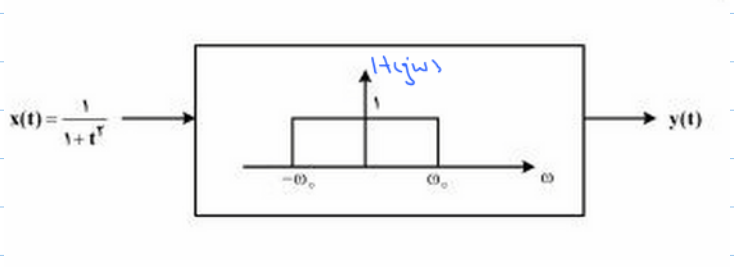


۱) $\pi^2(1-e^{-2\omega_0})$

۲) $\pi^2(1-\frac{1}{2}e^{-2\omega_0})$

۳) $\pi(1-\frac{1}{2}e^{-2\omega_0})$

۴) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\omega_0})$



$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt$

رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)\,Y(-j\omega)\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)\,Y(-j\omega)\,d\omega$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$$

$$\frac{1}{1+t^2} \longrightarrow ?$$

$$e^{+a|t|} \xrightarrow{a<0} \frac{-2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{1}{2}e^{-1|t|} \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\omega^2+1}$$

$$\frac{1}{2}e^{-|t|} \longrightarrow \frac{1}{\omega^2+1}$$

$\omega \to t$

خاصیت دوگانی

$$x(t)\quad \frac{1}{t^2+1} \longrightarrow 2\pi\left(\frac{1}{2}e^{-|-\omega|}\right) = X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \pi e^{-|\omega|}, \quad H(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$Y(j\omega) = \pi e^{-|\omega|} \times \begin{cases} 1 & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$Y(-jw) = \pi e^{-|-w|} \times \begin{cases} 1 & -w_0 < -w < w_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$Y(-jw) = \pi e^{-|w|} \times \begin{cases} 1 & -w_0 < w < w_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi e^{-|w|} \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right) \times \pi e^{-|w|} \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right) dw$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-w_0}^{w_0} e^{-2|w|} \Pi\left(\frac{w}{2w_0}\right) dw \qquad -w_0 < w < w_0$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_{-w_0}^{w_0} e^{-2|w|} dw = \frac{\pi}{2} \left(\int_{-w_0}^{0} e^{2w} dw + \int_{0}^{w_0} e^{-2w} dw \right)$$

$$I = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2w_0}\right) + \frac{-1}{2}\left(e^{-2w_0} - 1\right) \right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-2w_0}\right)$$

$-w_0 < w < 0 \rightarrow |w| = -w$ $\qquad$ $0 < w < w_0 \rightarrow |w| = w$

اعلام فصل 4، 5 سیگنال

حتماً در آزمون فصل ۴، 5 شرکت کنید.

آزمون تبدیل فوریه

مهلت ارسال پاسخ جهت بررسی و ارائه راههای تقویت نقاط ضعف: تا پایان آذر ۹۸

توجه: زمانی که احساس کردید در تبدیل فوریه به مهارت کافی دست یافتید جهت خودارزیابی به سوالات این آزمون در مدت زمان ۱ ساعت پاسخ دهید.

* پس از حل سوالات، پاسخهای خود را به صورت خوانا و مرتب برای بنده ارسال کنید. به دلیل محدودیت زمانی پاسخهای ناخوانا بررسی نخواهد شد.
* برای پاسخ به سوالات همین فایل را پرینت گرفته و روی همین فایل پاسخ دهید. پاسخهای بدون صورت سوال بررسی نمی شود.

① سیگنال $x(t)$ حقیقی و فرد است. در مورد عبارت $A = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(w)\,dw$ کدام گزینه درست است؟

1) A حقیقی و صفر است.

2) A حقیقی و مثبت است.

3) A مختلط است.

4) نمی‌توان در مورد علامت A اظهار نظر کرد.

② عکس تبدیل فوریه $X(jw) = \frac{e^{(2-jw)}}{2-jw}$ کدام است؟

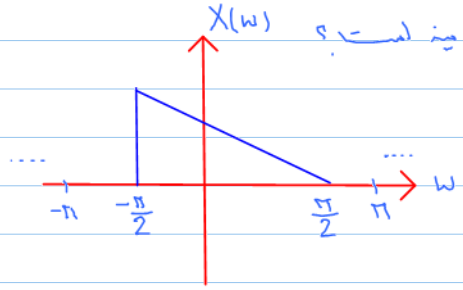
1) $e^{-2t}u(t-1)$

2) $e^{2t}u(-t+1)$

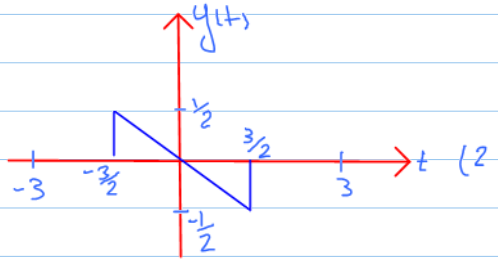
3) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

4) $e^{2(t-1)}u(-t+1)$

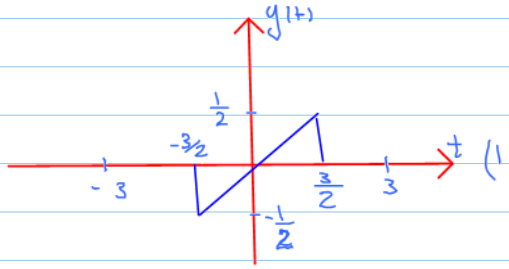
③ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ در شکل زیر داده شده است. اگر سیگنال زمان پیوسته $y(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم شکل $y(t)$ کدام گزینه است؟



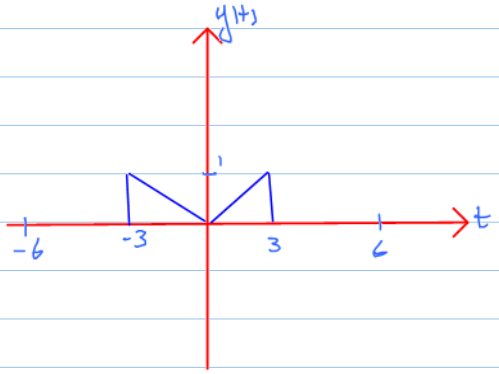
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0[n]\, e^{j\frac{\pi}{3}nt}$$



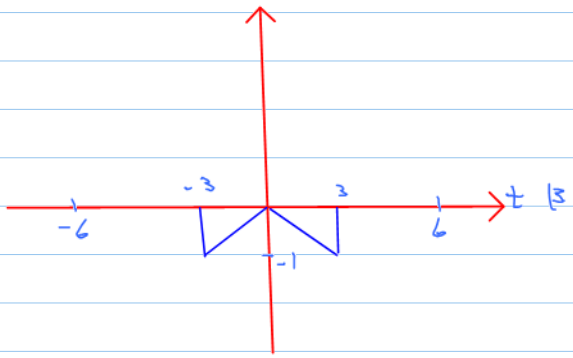
(2



(1



(4



(3

④ سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ می‌باشد. اگر $y[n]=x[\frac{n}{3}]$ باشد، تبدیل فوریه y کدام است؟

1) $(1+e^{-j\omega})X(e^{j3\omega})$

2) $(1+e^{-j3\omega})X(e^{j3\omega})$

3) $(e^{-j\omega}+e^{-j3\omega})X(e^{j3\omega})$

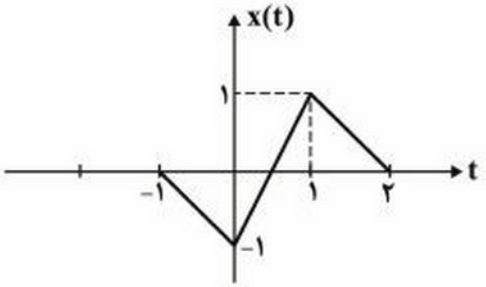
4) $(1+e^{-j\omega}+e^{-j3\omega})X(e^{j3\omega})$

5) اگر تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت $X(\omega) = \frac{1}{1-2e^{-j\omega}}$ باشد $x[n]$ کدام است؟

1) $2^n u[n]$
2) $(\frac{1}{2})^n u[n]$
3) $(\frac{1}{2})^{-n} u[-n-1]$
4) $-2^n u[-n-1]$

۶

تبدیل فوریهٔ سیگنال ارائه شده در شکل زیر، کدام است؟



۱) $e^{-j\pi f}\,sinc^{۲}(f)\sin(\frac{\pi f}{۴})$

۲) $-۲je^{-j\pi f}\,sinc^{۲}(f)\sin(\pi f)$

۳) $e^{-j\pi f}\,sinc^{۲}(f)\sin(\frac{\pi f}{۲})$

۴) $je^{-j\pi f}\,sinc^{۲}(\frac{f}{۲})\sin(\pi f)$

۷

رابطهٔ ورودی ـ خروجی یک سیستم زمان ـ گسسته به صورت زیر است:

$$y[n]=\begin{cases}۲x[n] , & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ باشد}\\ -x[n] , & \text{اگر } n \text{ مضرب ۳ نباشد}\end{cases}$$

اگر $X(e^{j\omega})$ و $Y(e^{j\omega})$، به ترتیب، تبدیل فوریهٔ گسستهٔ $x[n], y[n]$ باشند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر بیان کنندهٔ رابطهٔ این دو است؟

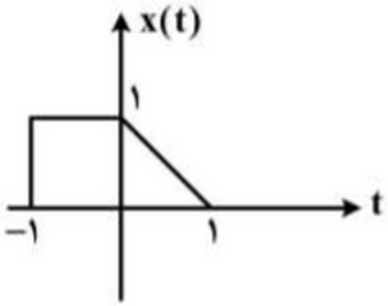
۱) $Y(e^{j\omega})=\frac{۱}{۲}X(e^{j(\omega+\frac{۲\pi}{۳})})+\frac{۱}{۲}X(e^{j(\omega-\frac{۲\pi}{۳})})$

۲) $Y(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega+\frac{۲\pi}{۳})})+X(e^{j(\omega-\frac{۲\pi}{۳})})$

۳) $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\frac{\omega+۲\pi}{۳}})+X(e^{j\frac{\omega}{۳}})+X(e^{j\frac{\omega-۲\pi}{۳}})$

۴) $Y(e^{j\omega})=\frac{۱}{۲}X(e^{j\frac{\omega+۲\pi}{۳}})+X(e^{j\frac{\omega}{۳}})+\frac{۱}{۲}X(e^{j\frac{\omega-۲\pi}{۳}})$

اگر $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ در شکل زیر باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^۲(j\omega)d\omega = ۱$

۲) $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^۲ d\omega = ۱$

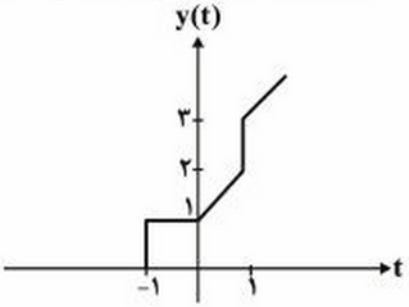
۳) $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^۲(j\omega)d\omega = ۲$

۴) $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^۲ d\omega = ۲$

kurcomp

۹

پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $tu(t)$ در شکل زیر ارائه شده است. در مورد پاسخ فرکانسی این سیستم، کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟



۱) $|H(0)| = 0$

۲) $|H(0)| = 2$

۳) $|H(j\frac{\pi}{2})| = 1$

۴) $|H(j\frac{\pi}{2})| = 0$

جلسه 52 سیگنال

تبدیل لاپلاس

مقدمه:

هدف کلی از همه تبدیل‌ها ← انتقال سیگنال از حوزه زمان به حوزه فرکانس و ساده سازی محاسبات

تبدیل

هدف سری فوریه: سنجش میزان شباهت سیگنالهای متناوب با $e^{jk\omega_0 t}$ یا $e^{jk\omega_0 n}$

که ω_0 فرکانس پایه سیگنال است و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ می باشد.

$x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ a_k : وزن فرکانس موهومی محض $jk\omega_0$ در سیگنال x

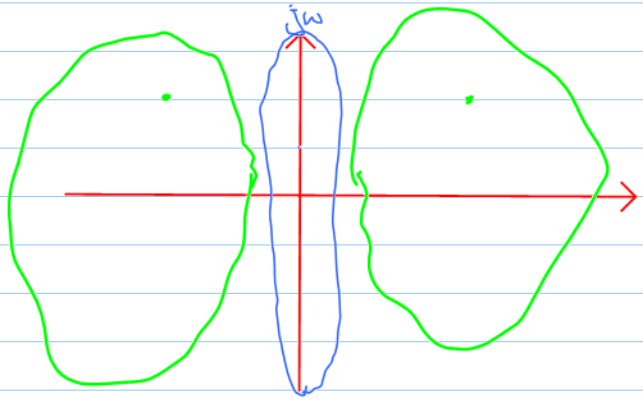
هدف تبدیل فوریه: سنجش میزان شباهت سیگنال x (متناوب یا غیر متناوب) با $e^{j\omega t}$

$x(t)$ یا $x[n] \xrightarrow{F} X(j\omega)$

$X(j\omega)$: وزن فرکانس موهومی محض $j\omega$ در سیگنال x

سؤال: آیا سیگنالها همه فرکانسهای موهومی محض دارند؟ خیر

سؤال: اگر بخواهیم وزن فرکانسهای حقیقی یا مختلط در سیگنال x را تعیین کنیم چکار کنیم؟



تبدیل فوریه ← وزن فرکانس $j2$

$2+j2$ ~ ~ → ؟

تبدیل لاپلاس: مجموعه سیگنال هایی زمان پیوسته با e^{st} که $s=\sigma+j\omega$ بوده و کل فرکانس ها را دربرگیرد.

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ → وزن فرکانس مختلط s در $x(t)$

$X(s)$: وزن فرکانس مختلط s در سیگنال $x(t)$

تعریف تبدیل لاپلاس

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

تعریف تبدیل فوریه

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

* تبدیل لاپلاس همان تبدیل فوریه است که به جای $j\omega$ ، s گذاشته شده.

$x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \times e^{-s\times 0}\, dt$$

($\delta(t)$ فقط در $t=0$ مقدار دارد؛ e^{-st} در $t=0$ برابر 1 است)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$x(t) = e^{at}\,u(t)$

$x(t) = e^{at}\,u(t) \xrightarrow{Re(a)<0} X(jw) = \frac{1}{-a+jw} = \frac{1}{jw-a}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}\,\underbrace{u(t)}_{t\geq 0}\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{at}\,e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)\infty} - \cancel{e^{(a-s)\times 0}}^{\,1}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{a-s}\,e^{(a-s)\times\infty} + \frac{1}{s-a} \quad ; \quad a = Re(a) + jIm(a)$$

$$s = \sigma + jw$$

$$e^{(a-s)\times\infty} = e^{(Re(a)-\sigma + j(Im(a)-w))\infty}$$

$$= \underbrace{e^{(Re(a)+\sigma)\infty}}_{\text{عدد حقیقی}} \times \cancel{e^{j(Im(a)-w)\infty}}$$

عدی مختلط با -1 و 1

$$e^{\text{عدد حقیقی}\times\infty} = \begin{cases} \infty & \text{عدد حقیقی} > 0 \\ 0 & \sim < 0 \end{cases}$$

$$e^{(Re(a)-\sigma)\times\infty} = \begin{cases} \infty & Re(a)-\sigma > 0 \\ 0 & \sim < 0 \end{cases}$$

$$e^{(a-s)\infty} = \begin{cases} \infty & Re(a)-\sigma > 0 \\ 0 & Re(a)-\sigma < 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \begin{cases} \infty & Re(a) > \sigma = Re(s) \\ \frac{1}{s-a} & Re(a) < \sigma = Re(s) \end{cases}$$

$x(t) = e^{at} u(t)$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{Re}(a) > \text{Re}(s) \\ \infty & \text{Re}(a) < \text{Re}(s) \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega - a} & \text{Re}(a) > 0 = \text{Re}(s) \\ \text{undefined} & \text{Re}(a) < 0 = \text{Re}(s) \end{cases}$$

$s = \sigma + j\omega$

$s = 0 + j\omega$

$x(t) = e^{at} u(t)$ $\xrightarrow{\text{Re}(a) > 0}$ $\frac{1}{j\omega - a}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $\begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{Re}(a) > \text{Re}(s) \\ \infty & \text{Re}(a) < \text{Re}(s) \end{cases}$

$x(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\,\underbrace{u(-t)}_{t\le 0}\,e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t}\,dt = \frac{1}{a+s}\left(\cancel{e^{-(a+s)0}}^{1} - e^{-(a+s)(-\infty)}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{a+s} - \frac{1}{a+s}e^{(a+s)(\infty)}$$

$$e^{(a+s)\infty} = \begin{cases} \infty & -Re(a) > +Re(s) \\ 0 & -Re(a) < Re(s) \end{cases}$$

$$x_1(t) = -e^{-at}u(-t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a+s} & -Re(a) < Re(s) \\ -\infty & -Re(a) > Re(s) \end{cases}$$

$$x_2(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(a) < Re(s) \\ \infty & Re(a) > Re(s) \end{cases}$$

تعریف ناحیه همگرایی: مقادیری از s که به ازای آنها $X(s)$ ، $\pm\infty$ نمی‌شود را ناحیه همگرایی گویند و با ROC (region of convergence) نشان می‌دهیم.

$x(t) = e^{at}u(t)$ $\qquad$ $x(t) = -e^{+at}u(-t)$

$ROC = \{ s \mid X(s) \neq \pm\infty \}$

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(a) < Re(s) \Rightarrow ROC \\ \infty & Re(a) > Re(s) \quad X \end{cases}$$

$$ROC = \{ s \mid X(s) \neq \pm\infty \} = \{ s \mid Re(s) > Re(a) \} = Re(s) > Re(a)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(a) > Re(s) \Rightarrow ROC \\ \infty & Re(a) < Re(s) \quad X \end{cases}$$

$ROC = \{ s \mid Re(s) < Re(a) \}$

$$e^{at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \; ; \; ROC = Re(s) > Re(a)$$

$$-e^{at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \; ; \; ROC = Re(s) < Re(a)$$

$x(t) = \delta(t)$ $\qquad$ $x(t) = u(t)$

$\delta(t) \longrightarrow X(s) = 1 \quad ; \quad ROC =$ کل صفحه s

$x(t) = u(t) \longrightarrow$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(t)}_{t \geq 0} e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\left(e^{-s\times\infty} - \overbrace{e^{-s\times 0}}^{1}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\times\infty}$$

$$e^{-(\sigma+j\omega)\infty} = e^{-\sigma\times\infty} \times \underbrace{e^{-j\omega\times\infty}}_{\text{عددی محدود}}$$

$$e^{-j\omega\times\infty} = \underbrace{\cos(\omega\times\infty)}_{-1 \leq \;\leq 1} - j\underbrace{\sin(\omega\times\infty)}_{-1 \leq \;\leq 1} \rightarrow \text{عددی محدود}$$

$$e^{-\sigma\times\infty} = \begin{cases} e^{-\infty} = 0 & \sigma > 0 \\ e^{\infty} = \infty & \sigma < 0 \end{cases}$$

$$e^{-\sigma\infty} \times e^{-j\omega\infty} = \begin{cases} 0 & \sigma > 0 \\ \infty & \sigma < 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \sigma > 0 \rightarrow Re(s) > 0 \\ \infty & \sigma < 0 \rightarrow Re(s) < 0 \end{cases}$$

$u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$, $ROC = Re(s) > 0$

$\delta(t) \longrightarrow X(s) = 1 \quad ; \quad ROC =$ کل صفحه s

نکته! تبدیل لاپلاس یکتا نیست و با ROC به صورت یکتا مشخص می‌شود.

$$X(s) = \frac{1}{s-a} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = e^{+at}u(t) \\ x(t) = -e^{at}u(-t) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \underline{ROC} = Re(s) > Re(a) \Longrightarrow x(t) = e^{at}u(t)$$

جدول تبدیل لاپلاس:

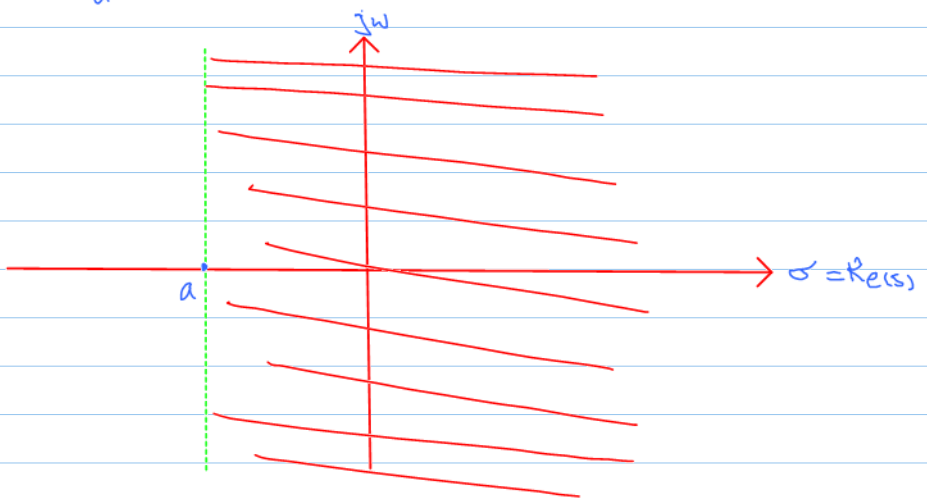
$x(t)$	$X(s)$	ROC
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$Re(s) > Re(a)$
$-e^{+at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$Re(s) < Re(a)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
$u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) < 0$
$\delta(t)$	1	$ROC = \mathbb{R}$
$\delta(t+a), a>0$	e^{as}	$\mathbb{R} - \{\infty\}$
$\delta(t+a), a<0$	e^{as}	$\mathbb{R} - \{-\infty\}$
$\cos(at)u(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re(s) > 0$
$-\cos(at)u(-t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re(s) < 0$
$\sin(at)u(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re(s) > 0$
$-\sin(at)u(-t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re(s) < 0$
$e^{\lvert a\rvert t}, Re(a) < 0$	$\frac{2a}{s^2-a^2}$	$Re(a) < Re(s) < -Re(a)$

جلسه 53 سیگنال

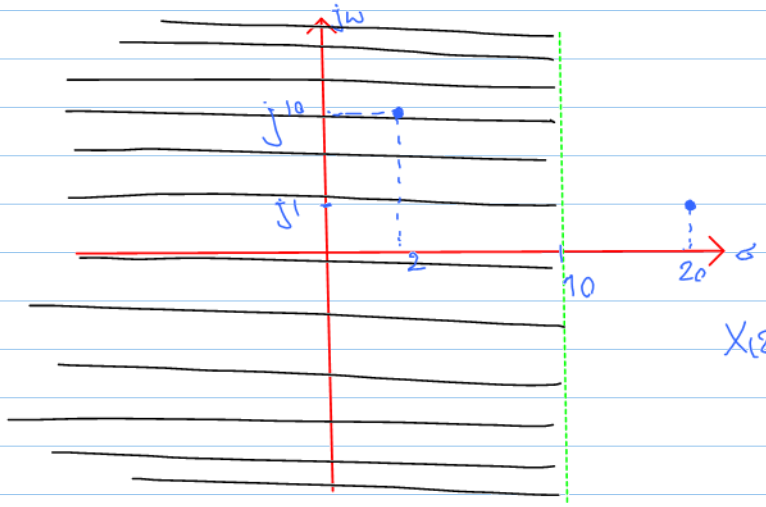
ناحیه همگرایی

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(s) > Re(a) \\ \infty & Re(s) < Re(a) \end{cases}$$

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a} \; ; \; ROC = Re(s) > Re(a)$$



$$X(s) = \frac{1}{s-10} \; , \; ROC = Re(s) < 10$$



$X(s)$ وزن فرکانس s در $x(t)$

$\frac{1}{2+j10-10}$ = " " $2+j10$ " "

$X(20+j1) = \infty$ = " " $s = 20+j1$ وزن فرکانس

$$ROC = \{s \mid X(s) \neq \pm\infty\} \longrightarrow s_0 = b + jc$$

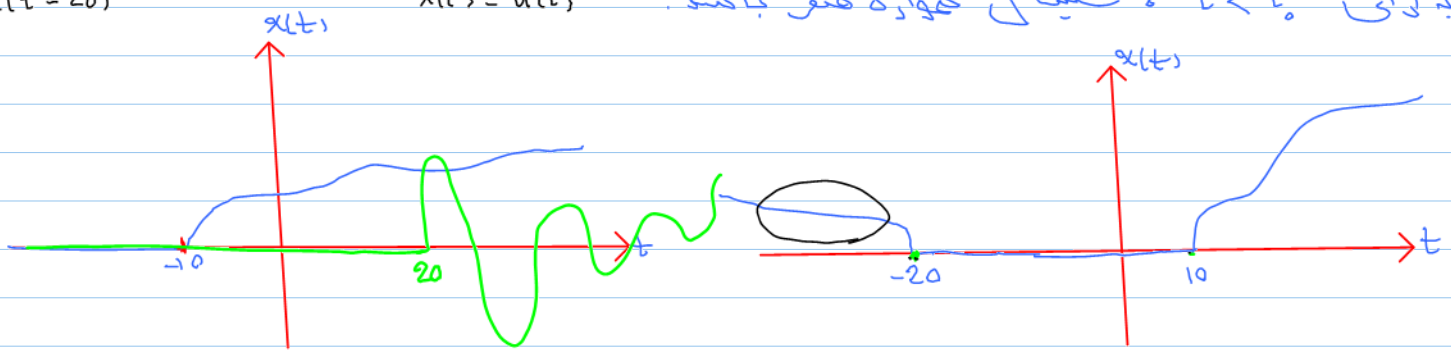
$s_0 \in ROC \longrightarrow X(s_0) =$ محدود

$s_0 \notin ROC \longrightarrow X(s_0) = \infty$

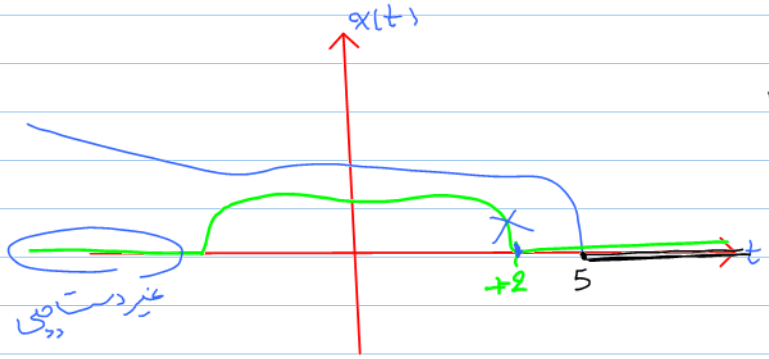
خاصیت ROC در تبدیل لاپلاس:

۱- سیگنال دست راستی یا راست رو: سیگنالی که عددی مثل t_0 وجود داشته باشد که برای $t > t_0$ ، سیگنال همواره صفر باشد.

$x(t) = u(t)$ $\quad$ $u(t-20)$



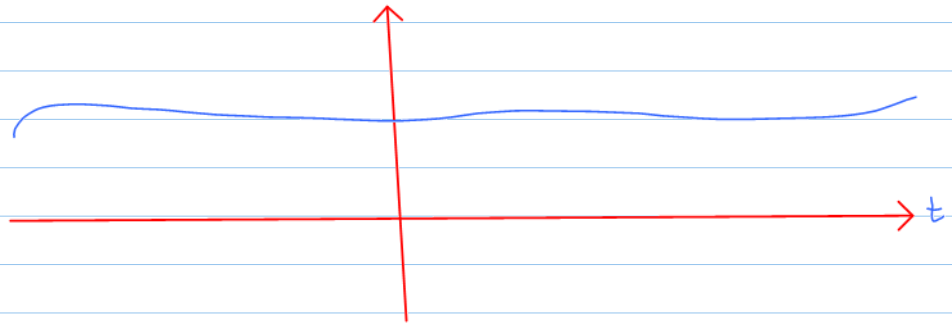
۲- سیگنال دست چپی: سیگنالی که عددی مثل t_0 وجود داشته باشد که برای $t < t_0$ ، $x(t)$ صفر شود.

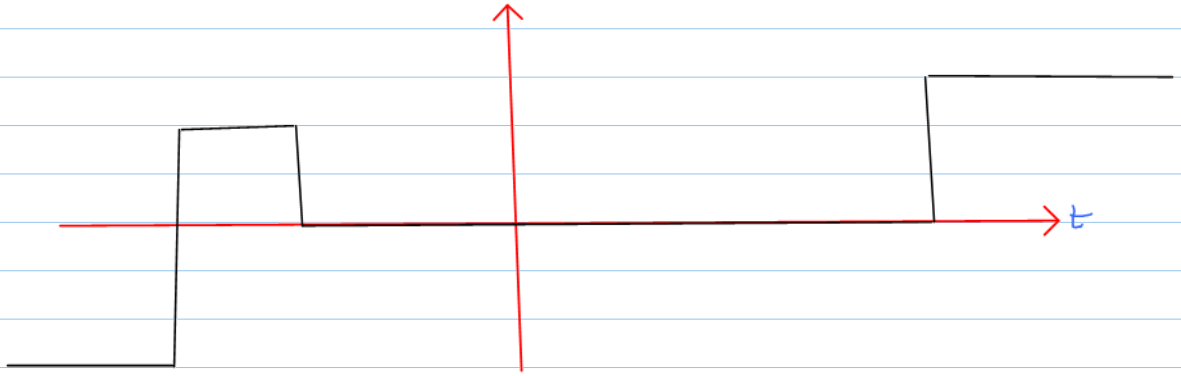


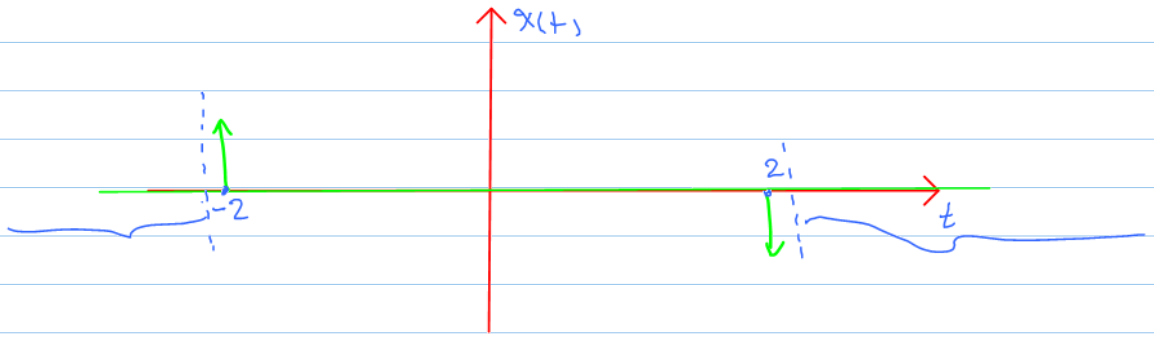
$$\forall\ t > 5 \rightarrow x(t) = 0$$

$$x(t) = \sin(t)\ u(-t)$$

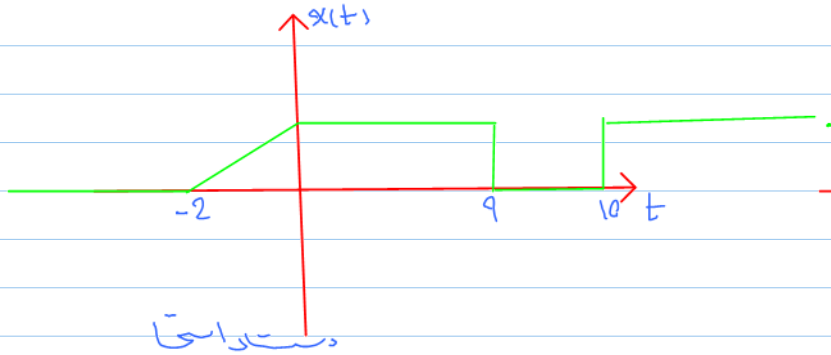
۳- سیگنال دو طرفه: سیگنالی که از هر دو طرف نامحدود است.







$x(t) = 0 \quad \forall \quad t<-2 \ \text{و} \ t>2$ ← از هر دو طرف نامحدود



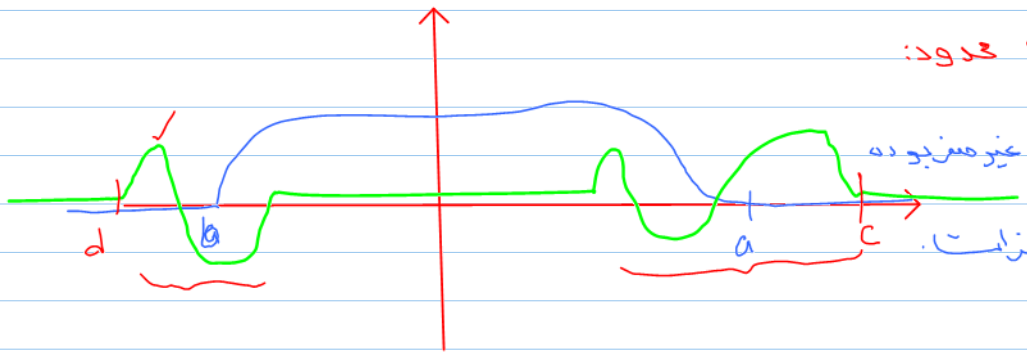
از سمت راست

$\forall \ t<-2 \rightarrow x(t)=0$



از هر دو طرف نامحدود

۷- سیگنال از هر دو طرف محدود:



یعنی به ازای $b < t < a$ غیرصفر بوده و به ازای $t < b$ و $t > a$ صفر است.

مفهوم قطب:

فرکانس خاص $s=a$ را قطب تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ گوییم اگر وزن فرکانس $s=a$ در سیگنال $x(t)$ برابر $\pm\infty$ باشد. یعنی $X(s)|_{s=a} = \pm\infty$ شود.

به عبارت دیگر ریشه های مخرج $X(s)$ را قطب گوییم. ($X(a) = \pm\infty$)

مفهوم صفر:

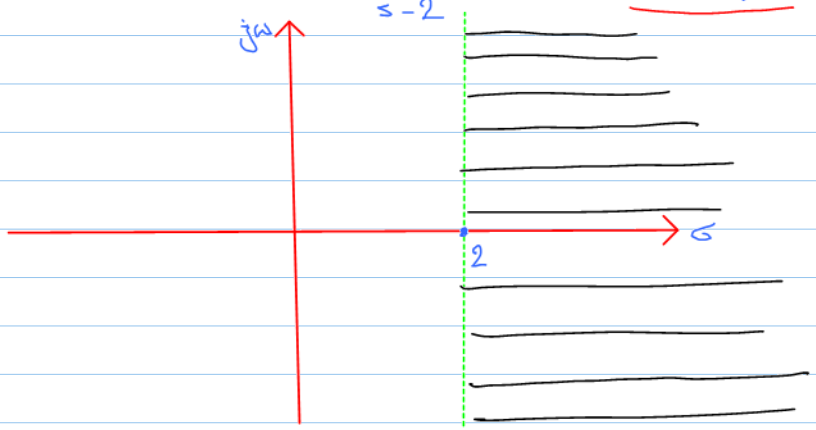
فرکانس $s=b$ را صفر تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ گوییم اگر وزن فرکانس $s=b$ در سیگنال $x(t)$ برابر صفر باشد. یعنی $X(s)|_{s=b} = 0$ شود.

به عبارت دیگر ریشه های صورت $X(s)$ را صفرهای $X(s)$ گوییم. ($X(b) = 0$)

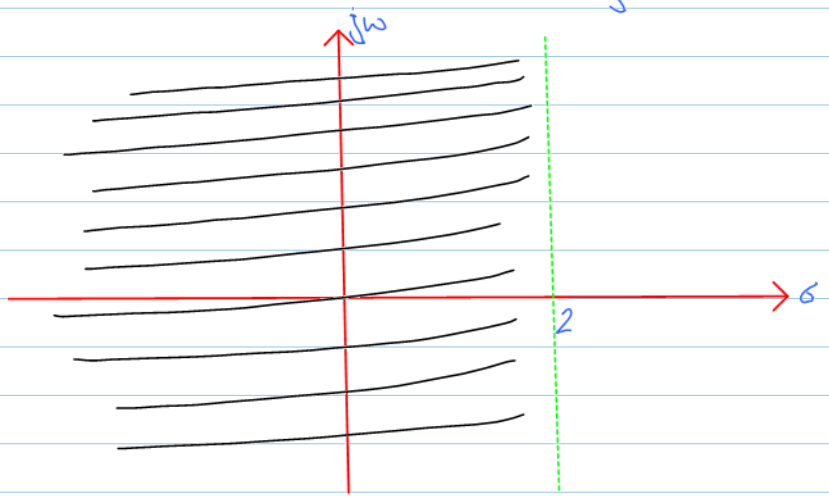
مفهوم ناحیه:

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a} \; ; \; ROC = Re(s) > Re(a)$$

$$x(t) = e^{2t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2} \; ; \; ROC = Re(s) > 2$$



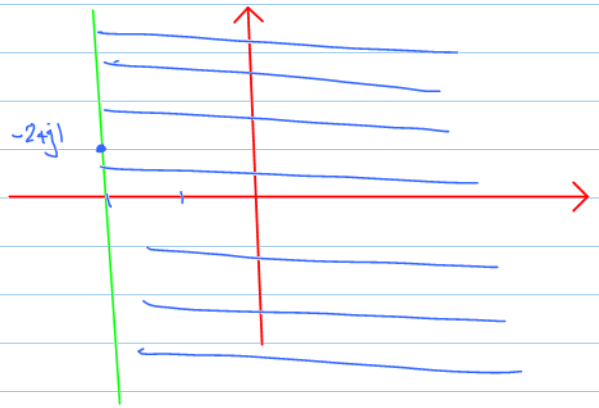
$x(t) = -e^{(2+j)t}\,u(-t) \longrightarrow X(s) = \dfrac{1}{s-(2+j)}$; $ROC = Re(s) < 2$



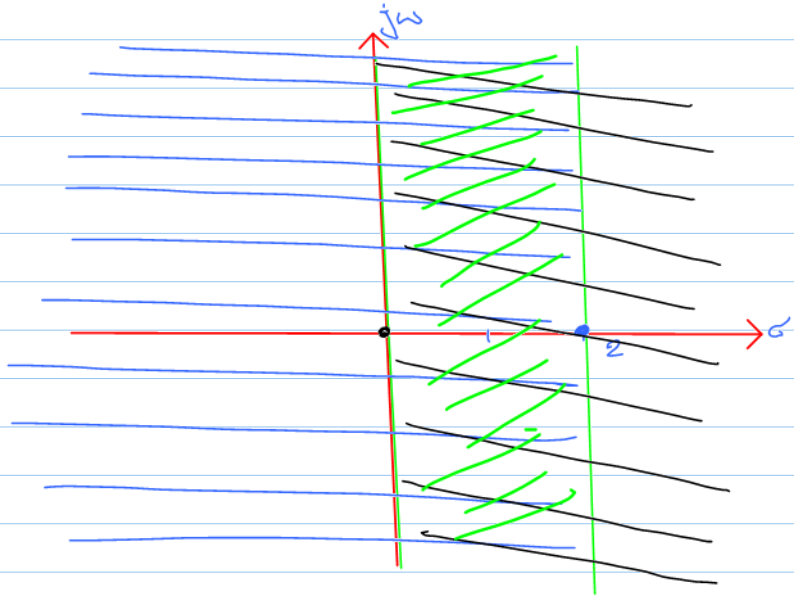
$Re(s) > a \longrightarrow$ سمت راست خط عمودی روی a

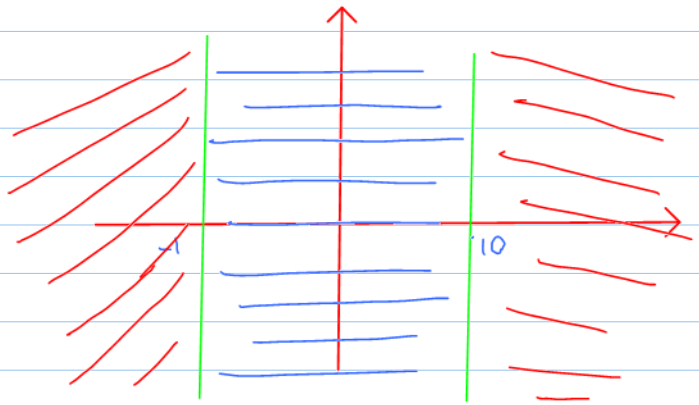
$Re(s) < a \longrightarrow$ سمت چپ خط عمودی روی a

$Re(s) > -2+j1$

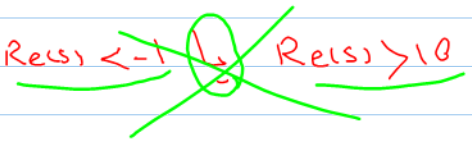


$0 < Re(s) < 2$





$-1 < Re(s) < 10$



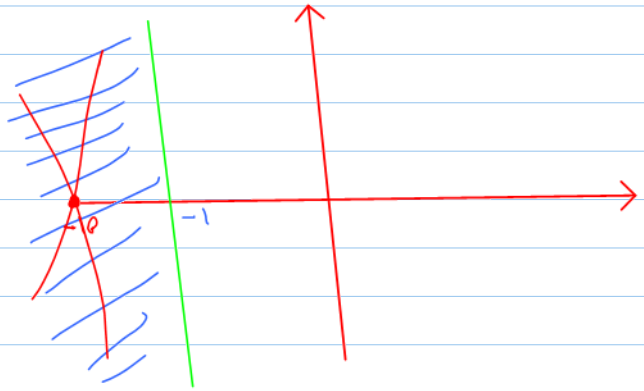
$ROC = \{s \mid X(s) \neq \pm\infty\}$

$s=a$ قطب $\rightarrow$ $X(a) = \infty$

$a \notin ROC$

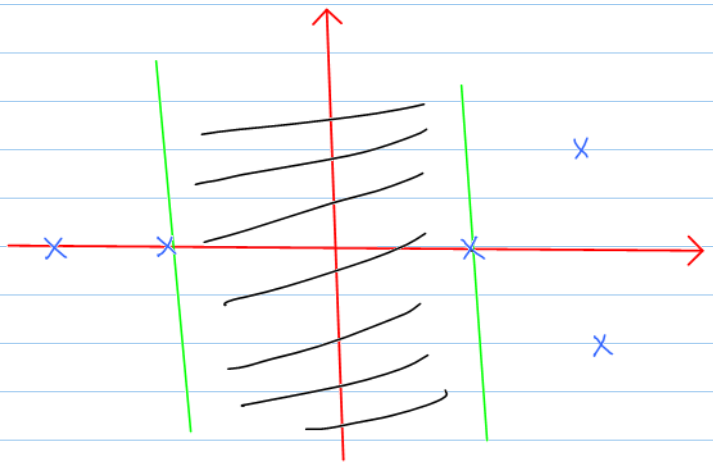
a: ~~$X(a) \neq \infty$~~

$$X(s) = \frac{1}{s+10}$$



$s=-10$ قطب

$-10 \notin ROC$



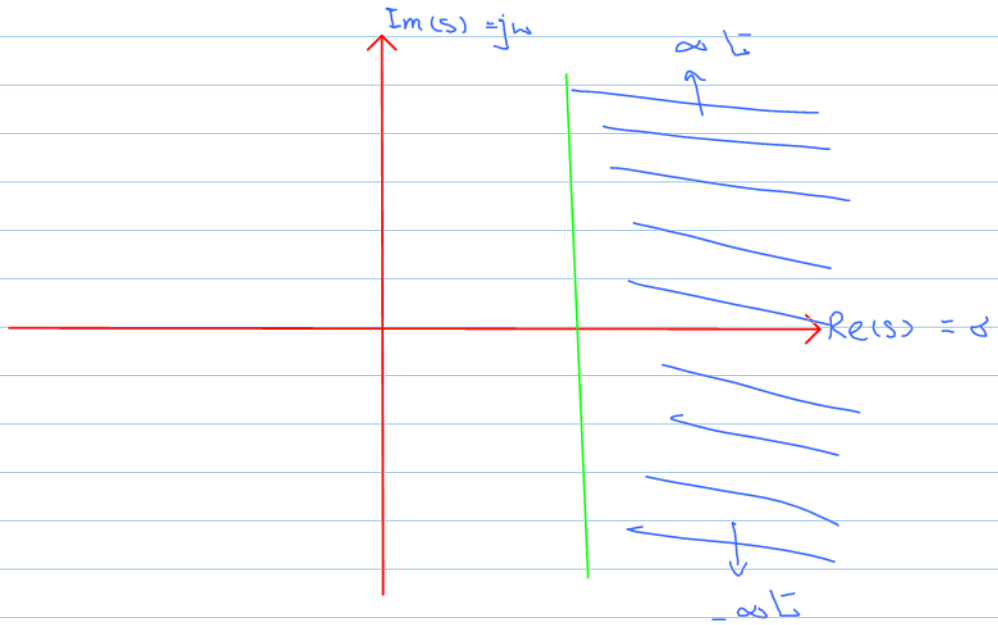
$x(t) = e^{at}u(t)$ $\longrightarrow$

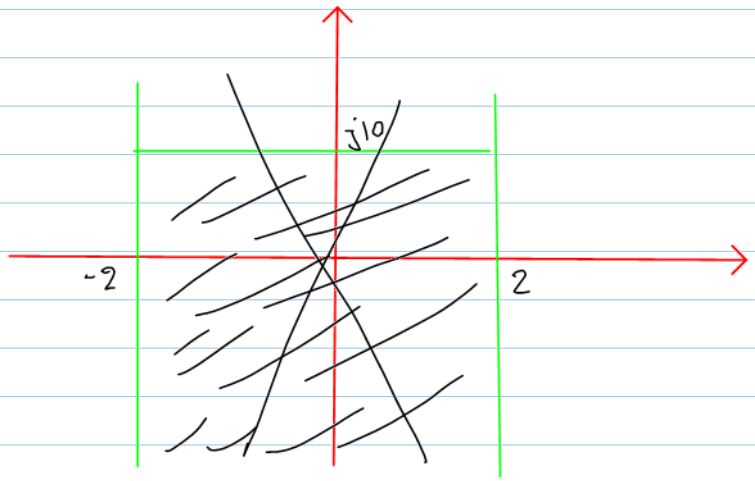
$e^{(a-s)\times\infty} = \begin{cases} \infty & ? \\ 0 & ? \end{cases}$

$e^{(Re(a)-Re(s))\infty}$ $e^{j(Im(a)-Im(s))\infty}$

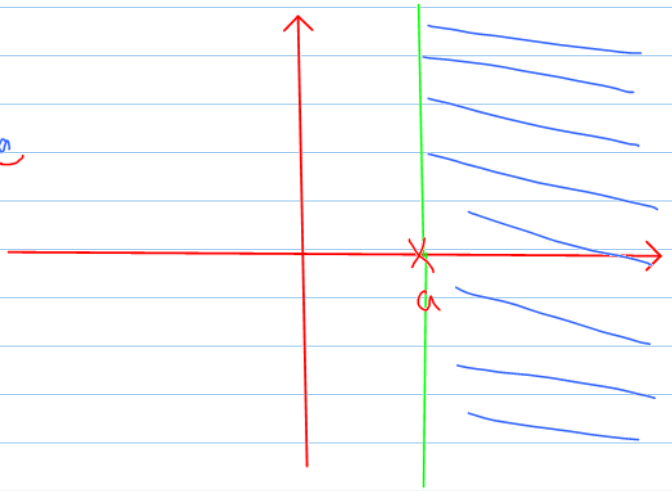
عبارت نوسانی

$Re(s) > 2\alpha$

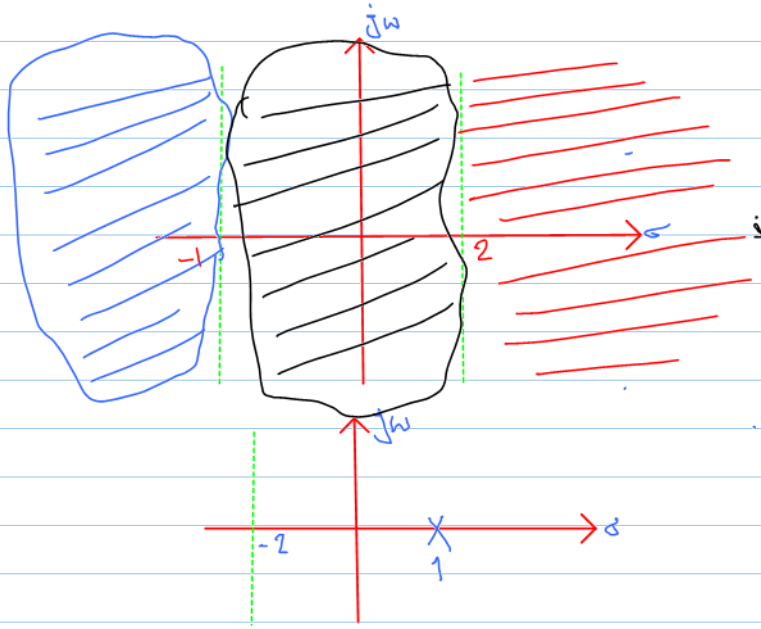




$x(t) = e^{at} u(t)$; $X(s) = \frac{1}{s-a}$, $ROC = Re(s) > a$



خواص ناحیه همگرایی: ROC



① ROC همواره یک نوار موازی محور jω است.

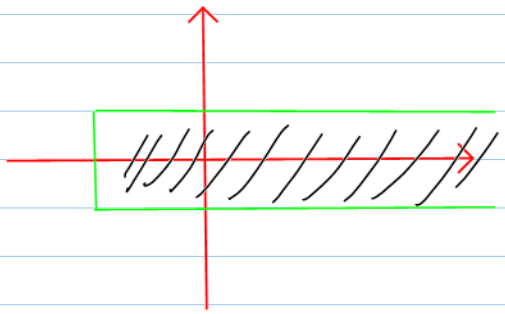
یعنی ROC یک تکه پیوسته از صفحه است و نمی‌تواند چند تکه باشد.

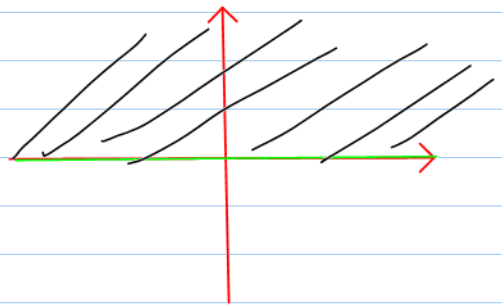
② ROC شامل هیچ قطبی از X(s) نمی‌شود.

چون در قطبها مقدار X(s) بینهایت می‌شود.

③ مرزهای ROC توسط خطوط عمودی روی قطبهای X(s) تعیین می‌شود.

④ مرزهای ROC به صورت خطوط عمودی است. یعنی شرط ROC روی $Re(s)$ است و روی جهت موهومی s (jω) محدودیت نداریم. ← ROC از بالا و پایین محدود نمی‌شود.





نحوه تعیین ROC:

① قطبهای X(s) را روی صفحه s مشخص کنید و روی هر قطب یک خط عمودی رسم کنید.

② اگر x(t) دست راستی باشد ROC سمت راست راست‌ترین خط است.

③ " " چپی " " " چپ چپ‌ترین " "

④ " " از هر دو طرف محدود باشد و $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt < \infty$ باشد، ROC کل صفحه است.

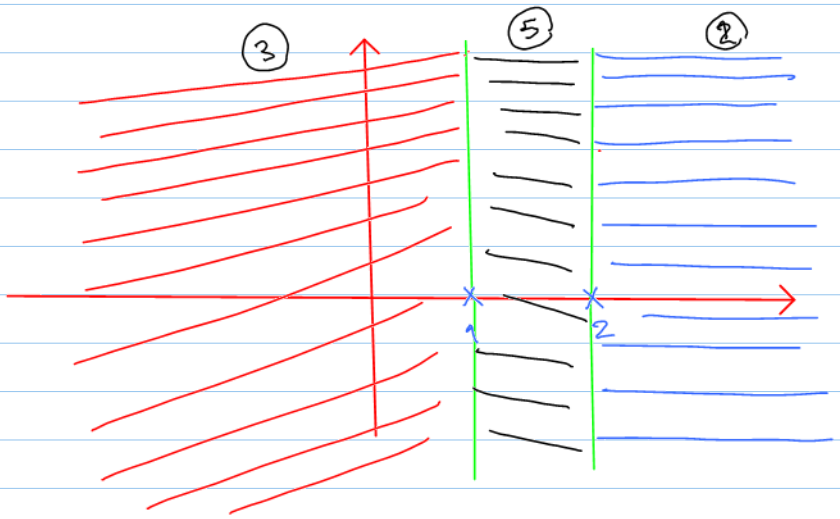
⑤ " " نامحدود باشد ROC بین دو خط است که توسط اطلاعات تکمیلی

داده شده درمسأله یقینی می‌شود.

توجه! در حالت ② ، ③ و ④ برای خود ∞ باید بررسی شود. یعنی اگر $X(+\infty)=\infty$ شود

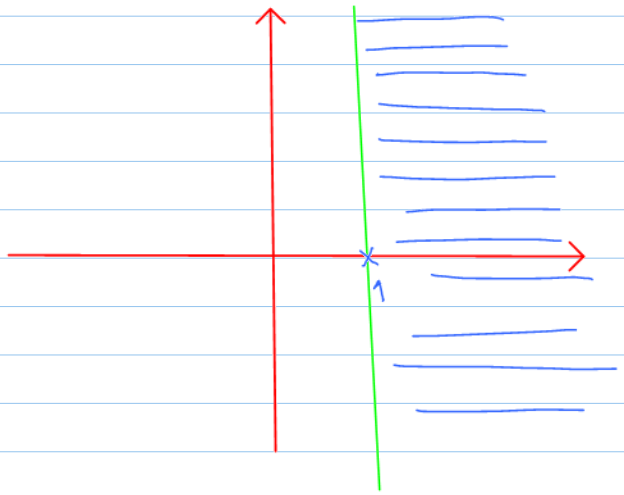
ROC شامل $\mathrm{Re}(s)=\pm\infty$ می‌شود یا نمی‌شود.

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}$$



$$X(s)=\frac{s^3}{s-1}$$ ، دست‌پایتی

$$ROC=\begin{cases}\cancel{\mathrm{Re}(s)>1}\\ \infty>\mathrm{Re}(s)>1\ \checkmark\end{cases}$$



یعنی ROC شامل خود ∞ نیست.

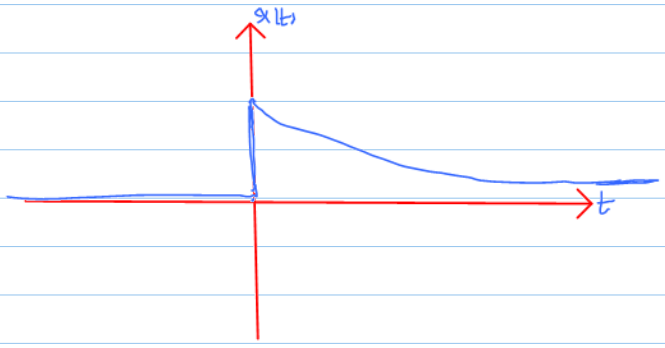
$X(\infty)=\infty^2=\infty \rightarrow \infty \notin ROC$

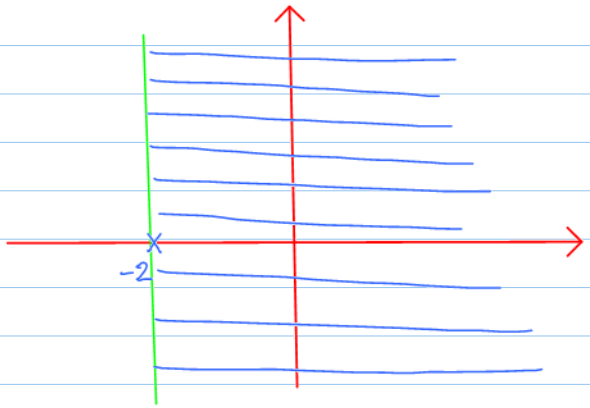
$-\infty < \mathrm{Re}(s) < -10 \rightarrow$ $-\infty$ نیست ROC شامل $\rightarrow X(-\infty)=-\infty$

مثال: RoC تبدیل لاپلاس سیگنالهای زیر را بیابید.

1) $x(t) = e^{-2t}u(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ → $\forall t<0 \rightarrow x(t)=0$ راست رو

$X(s) = \frac{1}{s-(-2)} = \frac{1}{s+2}$ $\quad s=-2 \rightarrow X(-2)=\infty$



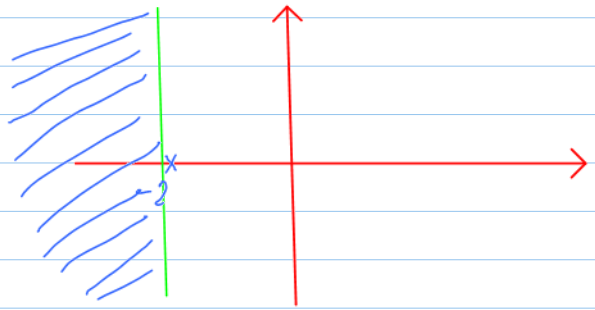


$RoC = \begin{cases} Re(s) > -2 \checkmark \\ \infty > Re(s) > -2 \end{cases}$

$X(\infty) = \frac{1}{\infty+2} = 0 \neq \infty \rightarrow \infty \notin RoC$

2) $x(t) = -e^{-2t}u(-t) = \begin{cases} 0 & t>0 \\ -e^{-2t} & t \leq 0 \end{cases}$ چپ رو

$X(s) = \frac{1}{s+2}$; $RoC = \begin{cases} Re(s) < -2 \checkmark \rightarrow -\infty \in RoC \checkmark \\ -\infty < Re(s) < -2 \rightarrow -\infty \notin RoC \end{cases}$

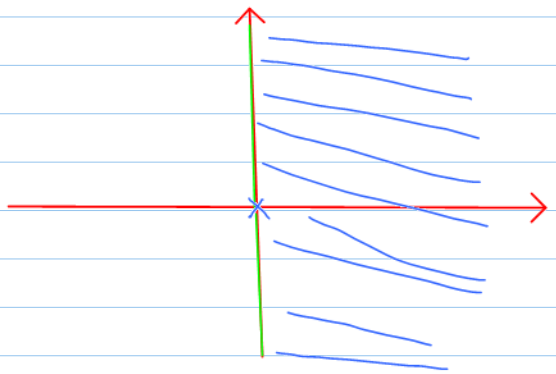


$X(-\infty) = \frac{1}{-\infty+2} = 0 \rightarrow -\infty \in RoC$

3) $x(t) = u(t)$ راست رو

$X(s) = \frac{1}{s}$

$RoC = 0 < Re(s) \checkmark$



$X(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \infty \in RoC$

4) $x(t) = \delta(t)$

$X(s) = 1$

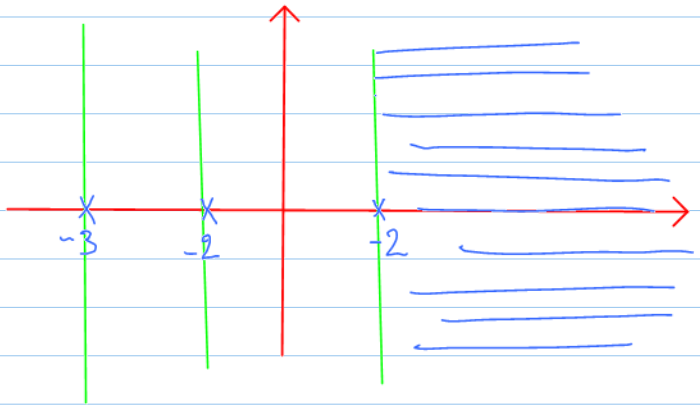
$X(\infty) = 1$

$X(-\infty) = 1$

دوره همدود

$$ROC = \begin{cases} \text{کل صفحه } s & \checkmark \\ \text{کل صفحه } s - (\infty) & \\ \sim - (\infty) & \\ \sim - (\pm\infty) & \end{cases}$$

مثال. سیگنال دست راستی $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $X(s) = \dfrac{s^2-1}{(s+3)(s^2-4)}$ مفروض است. ناحیه همگرایی آن را تعیین کنید.



$$ROC = \begin{cases} Re(s) > 2 & \checkmark \\ \infty > Re(s) > 2 & \text{(crossed out)} \end{cases}$$

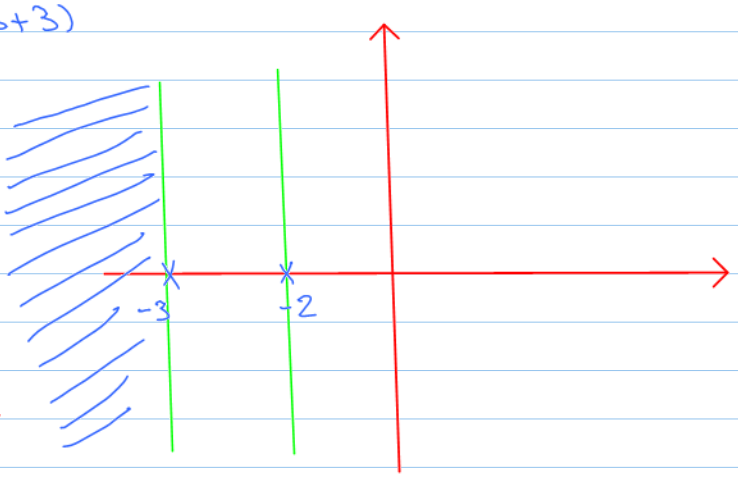
$$X(\infty) = \frac{\infty^2 - 1}{(\infty+3)(\infty^2-4)} = \frac{\infty^2}{\infty^3} = 0$$

مثال. سیگنال دست چپی $x(t)$ با $X(s) = \dfrac{(s+1)(s-1)}{s^3+6s^2+11s+6}$ داریم. ROC آن را تعیین کنید.

* اگر بتوان $X(s)$ را ساده کرد، اول ساده می‌کنیم.

$$X(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

$ROC = Re(s) < -3$ ✓



* اگر $X(s)$ شامل e^{as} یا e^{-as} باشد

* اگر درجه صورت $X(s)$ از درجه مخرج بزرگتر باشد ROC شامل $\pm\infty$ نمی‌شود.

" " " " کمتر " " " " " نمی‌شود.

یا مساوی

جلسه 54 سیگنال

محاسبه انتگرالی از $x(t)$:

هرگاه انتگرالی از $x(t)$ یا $x(t)e^{at}$ را بخواهیم که a هر عددی غیر از صفر باشد، تقریبا تبدیل لاپلاس یا فوریه و در اولویت عددی دهیم که فرمول دوم مطابق صورت سوال شود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{2t}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{at}\, dt = ?$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{at}\, dt = \begin{cases} X(s)\big|_{s=-a} & -a \in ROC_x \\ \infty & -a \notin ROC_x \end{cases}$$

مثال: حاصل انتگرالهای زیر را بیابید.

تبدیل لاپلاس $x(t)$ را بدست آورید ←

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(4t)u(t)}_{x(t)}\, e^{-3t}\, dt$$

$$B = \int_{0}^{\infty} e^{(2+j3)t}\, dt$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}\, e^{3t}\, dt$$

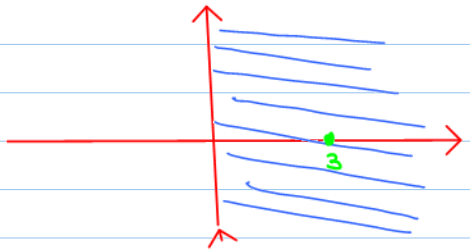
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos(4t)u(t) \\ X(s) = \dfrac{s}{s^2+16}\ ; \quad ROC = Re(s) > 0 \end{cases}$$

$$X(3) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(4t)\, u(t)\, e^{-3t}\, dt$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(4t)\, u(t)\, e^{-3t}\, dt = X(3)$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+16} \; ; \; ROC = Re(s) > 0 \rightarrow$$



$$3 \in ROC_x \rightarrow X(3) = \frac{3}{9+16} \checkmark$$

$$3 \notin ROC_x \rightarrow X(3) = \infty$$

$$B = \int_0^\infty \underbrace{1}_{x(t)} \times e^{\overbrace{(2+j3)}^{a} t} \, dt$$

$x(t)e^{at}$ و a هو جزء حقيقي بناء

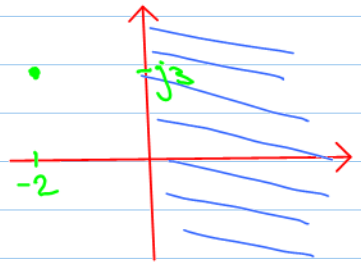
از تعریف تبدیل لاپلاس

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-st} \, dt$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, e^{(2+j3)t} \, dt = X(s)\Big|_{s=-(2+j3)}$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, e^{-(-(2+j3))t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, e^{(2+j3)t} \, dt$$

$x(t) = u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s} \; ; \; ROC = Re(s) > 0$



$$X(s) = \frac{1}{s} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, e^{-st} \, dt$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, e^{(2+j3)t} \, dt = X(s)\Big|_{s=-(2+j3)} = \infty$$

$-(2+j3) \notin ROC_x$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-2|t|}}_{x(t)} \underbrace{e^{3t}}_{e^{at}} dt$$

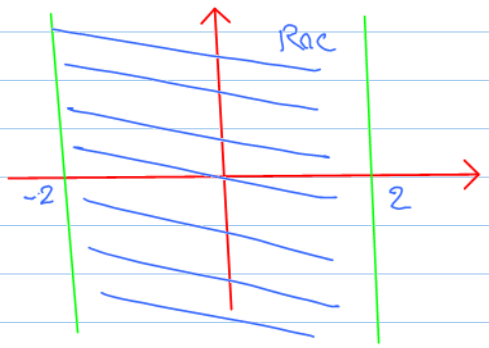
موجود $\Leftarrow a = 3$ موجود نیست ، $x(t) = e^{-2|t|}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$X(-3) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}\, e^{-(-3)t}\, dt = C \qquad C = X(-3)$$

$$x(t) = e^{-2|t|} \longrightarrow X(s) = \frac{-4}{s^2 - 4} \; ; \; ROC = -2 < Re(s) < +2$$

$-3 \notin ROC \longrightarrow X(-3) = \infty$



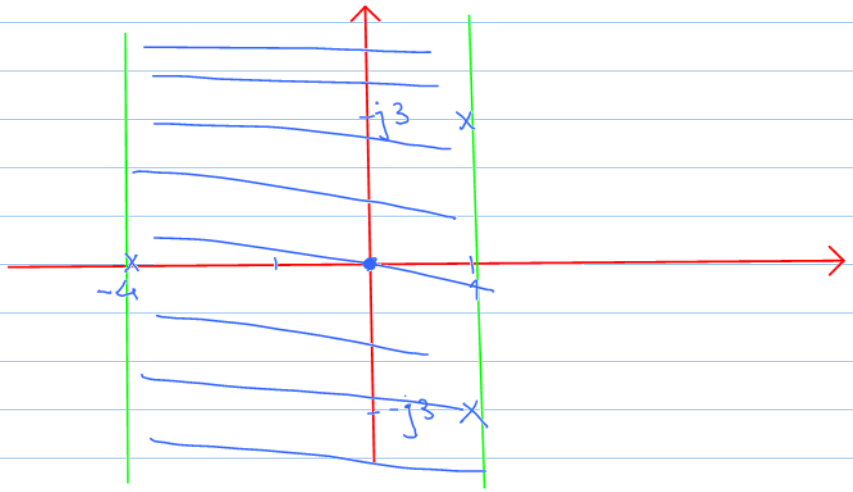
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{at}\, dt = X(s)\Big|_{s=-a} = \begin{cases} \text{موجود} & -a \in ROC_x \\ \infty & -a \notin ROC_x \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{at}\, dt = \begin{cases} \text{موجود نیست} \longrightarrow & -a \in ROC_x \\ \pm\infty \longrightarrow & -a \notin ROC_x \end{cases}$$

مثال. سیگنال $x(t)$ دوطرفه بوده و $X(s) = \frac{s^2-1}{(s+1)(s^2-2s+10)(s+4)}$ معلوم است.

اگر بدانیم که $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = \infty$ است، آن RoC را تعیین کنید. (آزاد ۷۲)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{(a)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{0t}\, dt = \infty \rightarrow \underbrace{0}_{\text{○}} \notin RoC_x$$



$0 \notin RoC_x$ ←

$$X(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s^2-2s+10)(s+4)} = \frac{s-1}{(s+4)(s^2-2s+10)}$$

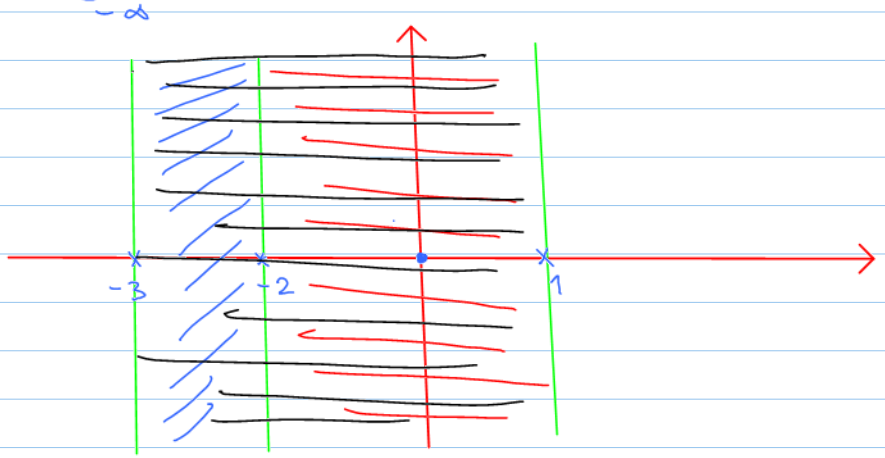
سیگنال دوطرفه ← RoC بین دو خط

متناقض داریم ← با توجه به اطلاعات مساله، RoC قابل تعیین نیست.

مثال: اگر $x(t)$ یک سیگنال دوطرفه با $X(s) = \frac{5}{(s+3)(s+2)(s-1)}$ باشد و بدانیم که $x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر است، ROC_x را تعیین کنید.

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt =$ عددی محدود

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{at}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{ct}\,dt =$ عددی محدود $\rightarrow \quad 0 \in ROC_x$

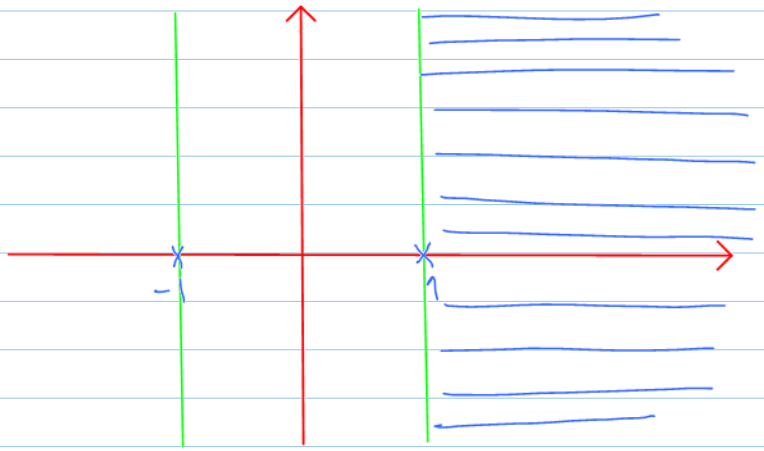


مشکی ناتوانباشد ← چون ناحیه مشکی شامل قطب $s=-2$ می‌شود.

$0 \in ROC_x \rightarrow$ ناحیه‌ورمز $= ROC_x$

مثال:

اگر $x(t)$ دست راستی بوده و $X(s) = \frac{1+e^{s}}{s^2-1}$ باشد، ROC آن را تعیین کنید.

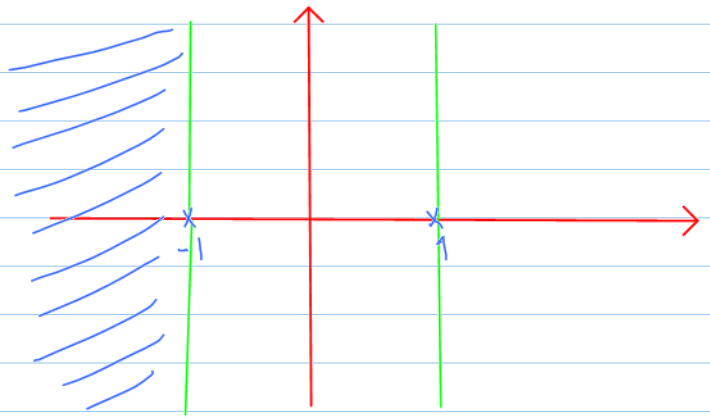


$$Re(s) > 1 \longrightarrow ROC = \begin{cases} Re(s) > 1 \ ? \\ \infty > Re(s) > 1 \ ? \end{cases}$$

$$X(\infty) = \frac{1+e^{\infty}}{\infty^2-1} = \frac{e^{\infty}}{\infty^2} = \infty \longrightarrow \infty \notin ROC_x$$

$$ROC_x = 1 < Re(s) < \infty$$

مثال: اگر $x(t)$ دست چپی بوده و $X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-1}$ باشد، RoC آن را بیابید.

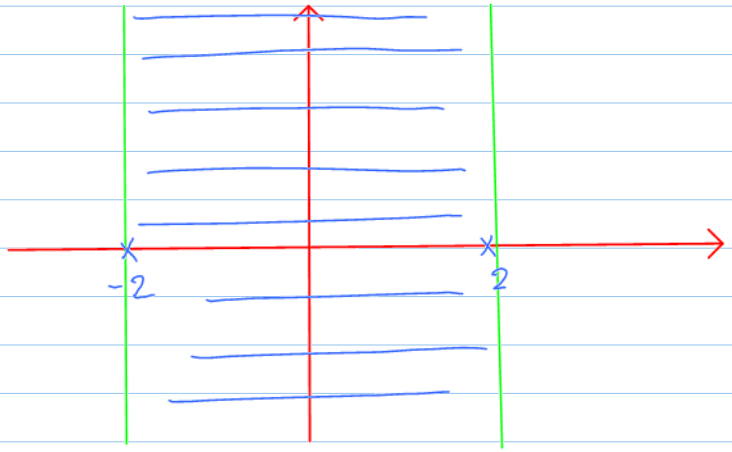


$$RoC = \begin{cases} Re(s) < -1 \ ? \\ -\infty < Re(s) < -1 \ ? \ \checkmark \end{cases}$$

$$X(-\infty) = \frac{e^{\infty}}{(-\infty)^2 - 1} = \infty \longrightarrow -\infty \notin RoC_x$$

$$RoC_x = -\infty < Re(s) < -1$$

مثال. اگر $x(t)$ دو سمتی بوده و $X(s) = \frac{e^{s} + e^{-s}}{s^2 - 4}$ باشد، ROC آن را تعیین کنید.



$$ROC = -2 < Re\{s\} < 2 \quad \checkmark$$

برق ۸۵

تبدیل لاپلاس $x(t)$ دارای یک قطب در $s=-2$ است. سیگنال $x_1(t)=e^{4t}x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر بوده و سیگنال $x_2(t)=e^{8t}x(t)$ مطلقاً انتگرال پذیر نیست. $x(t)$ چه نوع سیگنالی است؟

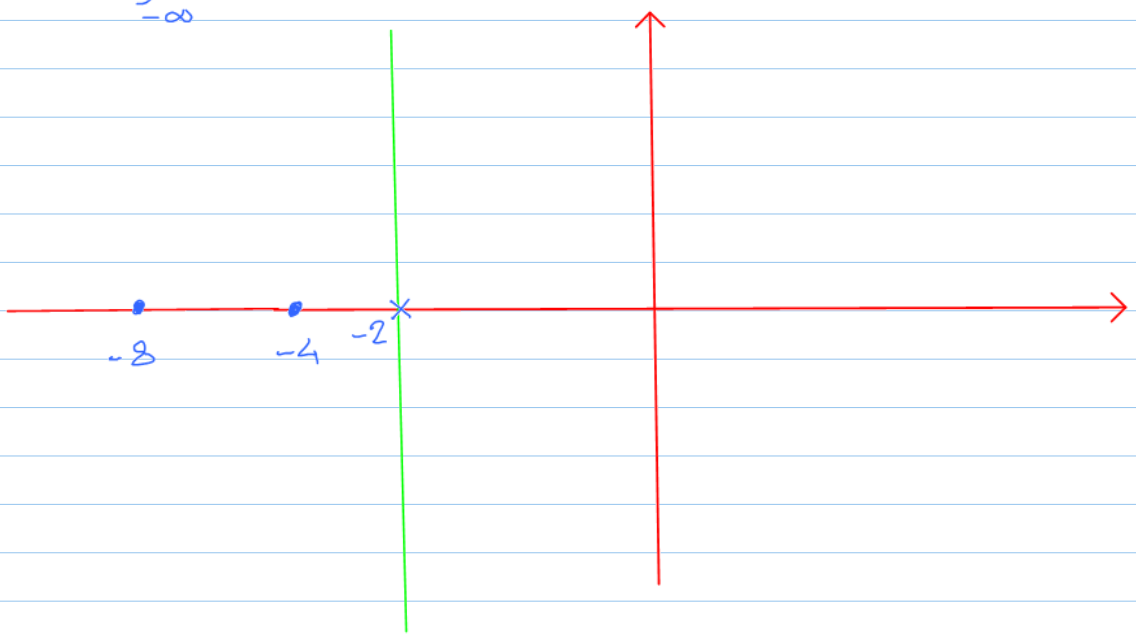
1) راست‌راست 2) چپ‌چپ 3) دو طرفه 4) دوره محدود

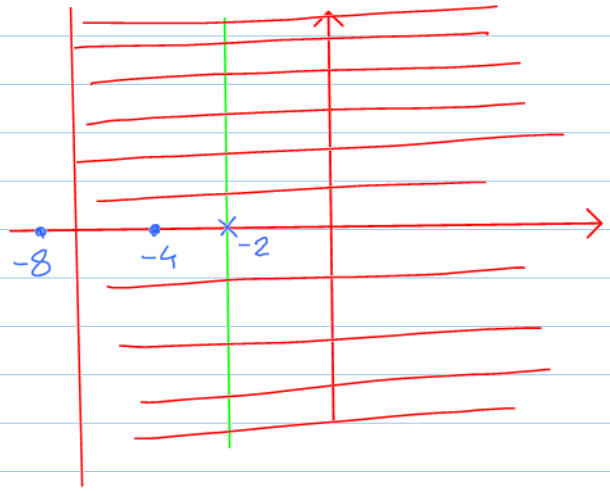
① $X(s)$ یک قطب در $s=-2$ دارد.

② $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-4t}\, dt$ = عددی محدود ⟶ $-4 \in ROC_x$

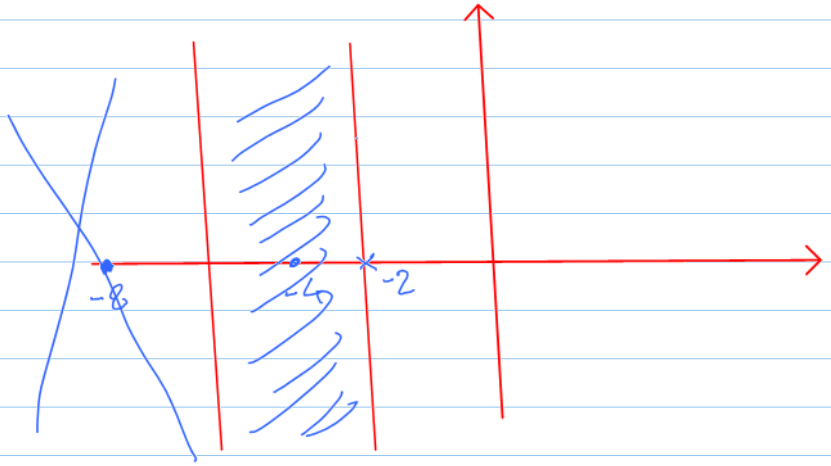
$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{at}\, dt$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{8t}\, dt = \infty$ ⟶ $-8 \notin ROC_x$





$Re(s) > -5$ ✗



$-5 < Re(s) < -2$ ✓

$x(t)$ از هر دو طرف محدود

۷۹ برای $X(s)$ تبدیل لاپلاس $x(t)$ بوده و می دانیم که الف) $X(0)=8$ ب) $x(t)e^{-2t}$ مطلقاً انتگرال پذیر است، ج) $X(s)$ یک قطب در $s=-1$ دارد. آنگاه $x(t)$ از چه نوعی است؟

۱) چپ سو ۲) دوطرفه ۳) راست سو ۴) دوره محدود

الف. $X(0)=8$

ب. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2t}dt =$ همگرا

ج) کدام یک از قطب‌های $X(s)$ زیر $-1+j$

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

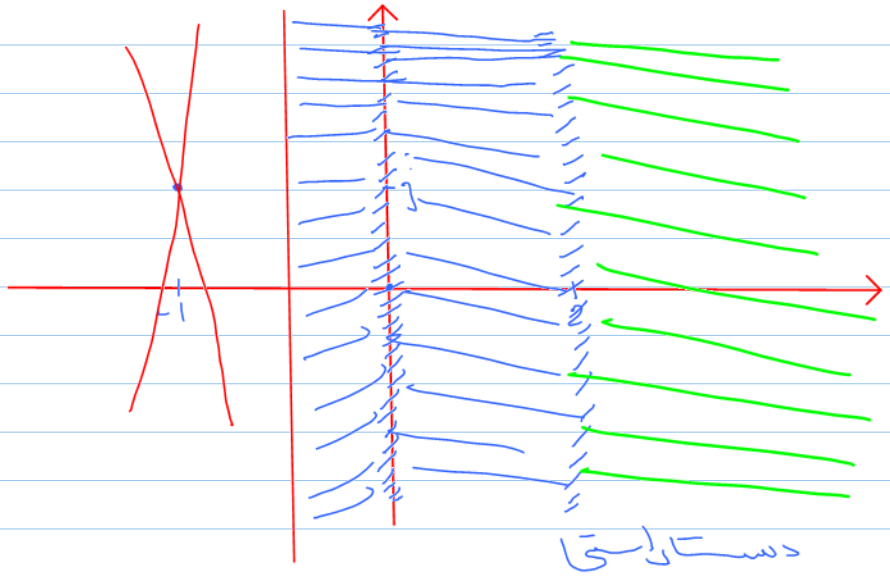
$$X(s=a)=\begin{cases} \text{همگرا} & a \in ROC \\ \infty & a \notin ROC \end{cases}$$

$X(s=0)=8 \rightarrow 0 \in ROC$

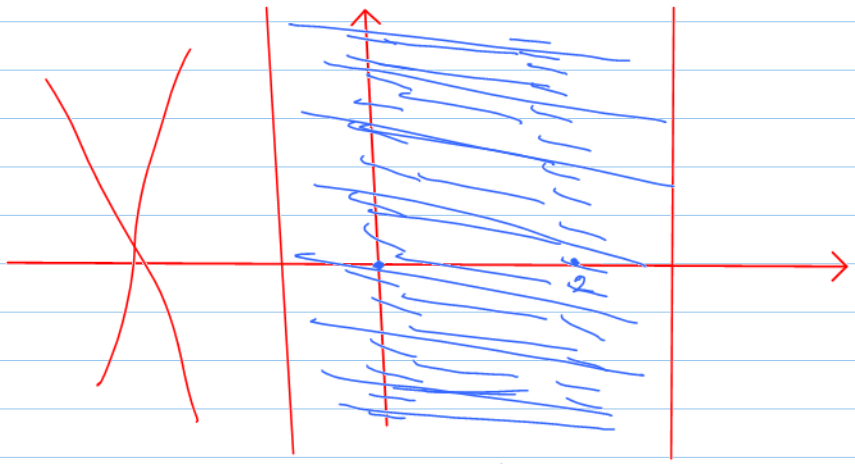
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{\overset{-2}{(+a)}t}\, dt = \text{همگرا} \longrightarrow -(-2) \in ROC$$

$-1+j \notin ROC$

① $0 \in ROC$ ② $2 \in ROC$ ③ $-1+j \notin ROC$



دستگاه پایدار



دو طرفه

آزاد ۵۸.

تبدیل لاپلاس $x(t)$ برابر $X(s)=\frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$ است. کدام گزینه‌ها می‌توانند ROC ، x باشد؟

1) $\mathrm{Re}(s)>-\frac{1}{2}$

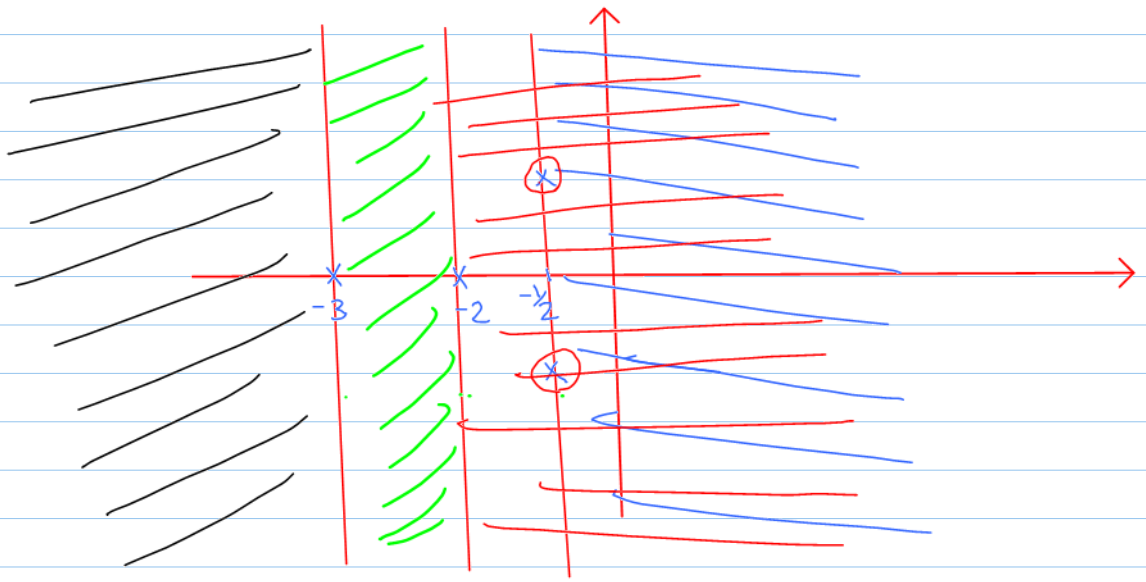
2) $\mathrm{Re}(s)<-3$

3) $-3<\mathrm{Re}(s)<-2$

4) $\mathrm{Re}(s)>-2$

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

$s^2+s+1=0 \longrightarrow -\frac{1}{2} \mp j\frac{\sqrt{3}}{2}$



✓ $Re\{s\} > -\frac{1}{2}$ = RoC ← راست‌گرا ، $x(t)$

✓ RoC = $Re\{s\} < -3$ ~ ~ چپ‌گرا ~

✓ RoC = $-2 < Re\{s\} < -3$ ~ دوطرفه ~

$-\frac{1}{2} \mp j\frac{\sqrt{3}}{2} \in (Re\{s\} > -2)$ ← می‌توانند باشند RoC

$\times\ Re\{s\} > -2$

آزاد 91

در مورد ناحیه همگرایی $X(s)=\frac{e^{-4s}-2e^{-2s}+1}{s^2}$ کدام گزینه صحیح است؟

1) کل صفحه مختلط 2) کل صفحه مختلط به جز $s=0$ 3) $Re(s)>0$ یا $Re(s)<0$

4) کل صفحه مختلط به جز $Re(s)=-\infty$

$$X(s) = \frac{e^{-4s} - 2e^{-2s} + 1}{s^2}$$

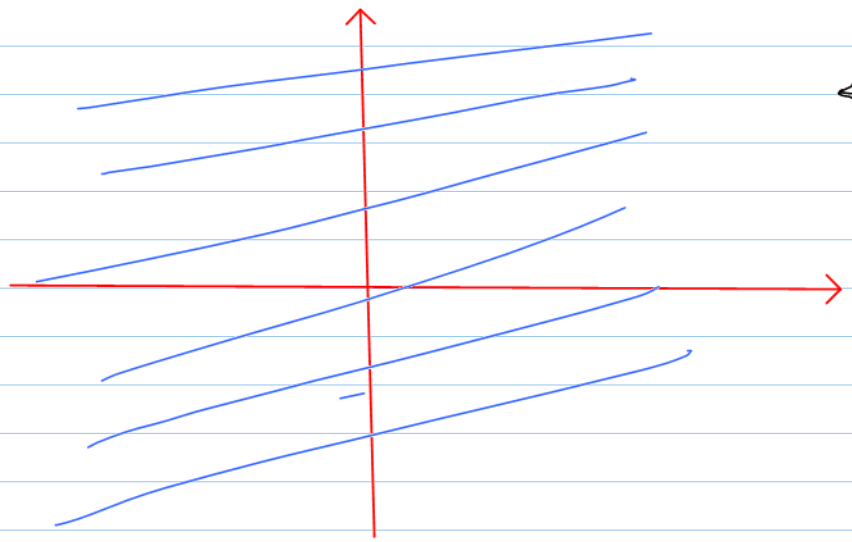
$s = 0$

$s = 0 \longrightarrow X(0) = \infty$

$$X(0) = \frac{e^{-4\times 0} - 2e^{-2\times 0} + 1}{0^2} = \frac{0}{0}$$ مبهم $\neq \infty$

$s = 0$ قطب ساده است.

$X(s)$ قطب ندارد ←



$X(-\infty) =$ { صفر → $-\infty \in ROC$; ∞ → $-\infty \notin ROC$ ✓ }

$$X(-\infty) = \frac{e^{\infty} - 2e^{\infty} + 1}{(-\infty)^2} = \frac{-e^{\infty}}{(-\infty)^2} = \infty$$

کل صفحه به $-\infty$ میل

$$X(\infty) = \frac{e^{-\infty} - 2e^{\infty} + 1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \longrightarrow \infty \in ROC$$

جلسه 54 سیگنال

ارتباط تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

فرق بین تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه ←

① تبدیل فوریه فقط زمانهای موهومی محض

~ لاپلاس ~ همه

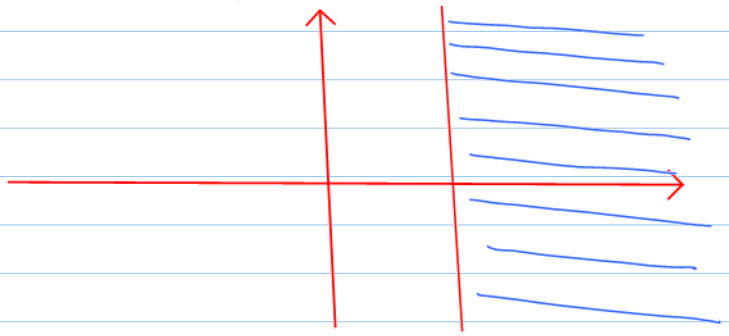
② $x(t) = e^{-at}u(t) \xrightarrow{Re(a)>0} \frac{1}{j\omega - a}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$x(t) = e^{-at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-a}$, $ROC = Re(s) > Re(a)$

$x(t) = e^{2t}u(t)$ ⟵ تبدیل فوریه ندارد

$\longrightarrow \frac{1}{s-2}$, $ROC = Re(s) > +2$



② تبدیل فوریه دو حالت دارد: یا وجود دارد و یا ندارد. (ربطی به زمانش ندارد)

~ لاپلاس برای برخی زمانش ها (ROC) وجود دارد و برای برخی زمانی

وجود ندارد.

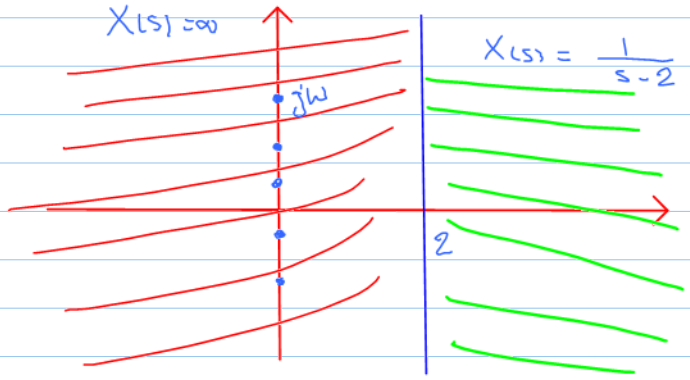
$$X(j\omega) \underset{\longleftarrow}{\overset{j\omega = s}{\longrightarrow}} X(s)$$

$x(t) = e^{2t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}$; $ROC = Re(s) > 2$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-2} & Re(s) > 2 \\ \infty & else \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس $\xrightarrow{s=j\omega}$ تبدیل فوریه

$e^{2t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2} \xrightarrow{s=j\omega} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega-2}$ ؟

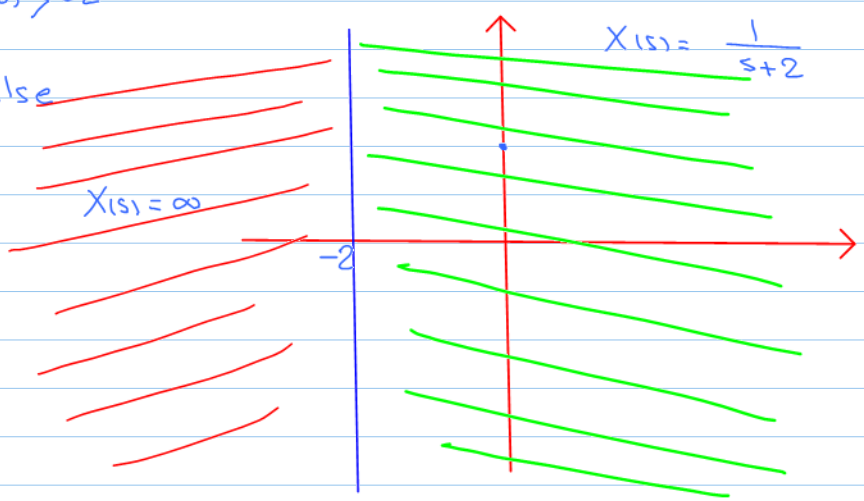


$s=j\omega \rightarrow$

$s=j\omega \longrightarrow X(s)\Big|_{s=j\omega} = \infty \longrightarrow X(j\omega)=\infty$ تبدیل فوریه ندارد

$x(t) = e^{-2t}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+2}$; $ROC = Re(s) > -2$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+2} & Re(s) > -2 \\ \infty & else \end{cases}$$



$s=j\omega \longrightarrow X(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+2}$ تبدیل فوریه وجود دارد

$a=-2$

$x(t) = e^{2t}u(t) \xrightarrow{F}$ وجود ندارد ✓

$x(t) = e^{-at}u(t) \xrightarrow{Re(s)>0} \frac{1}{j\omega+a}$

$a=2$

$x(t) = e^{-2t}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega+2}$ ✓

نکته:

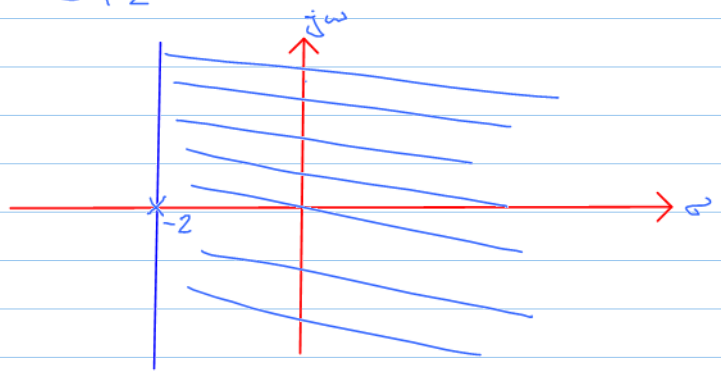
تبدیل لاپلاس را از روی تبدیل فوریه همواره می توان بدست آورد.

$X(j\omega) \xrightarrow{j\omega = s} X(s)$; فور موجود در ROC هست.

اگر بگوید سیگنالی دارای تبدیل فوریه $X(j\omega)$ است برای بدست آوردن $X(s)$، در $X(j\omega)$ به جای $j\omega$، s قرار می دهیم و همچنین نتیجه می گیریم که فور موجود در ROC_x قرار دارد.

$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2} \rightarrow X(s), ROC_x$ ؟

$X(s) = \frac{1}{s+2}$; فور موجود $\in ROC \rightarrow ROC = Re(s) > -2$



نکته!

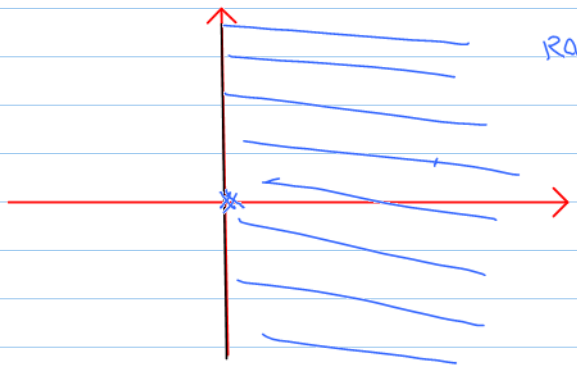
اگر $X(s)$ را بدهد و $X(j\omega)$ را بخواهد!

بررسی می کنیم که فور $j\omega$ در ROC_x هست یا نه!

$$X(j\omega) = \begin{cases} \text{وجود ندارد} & \text{فور } j\omega \notin ROC_x \\ X(s)\big|_{s=j\omega} & \text{فور } j\omega \in ROC_x \end{cases}$$

نکته مهم:

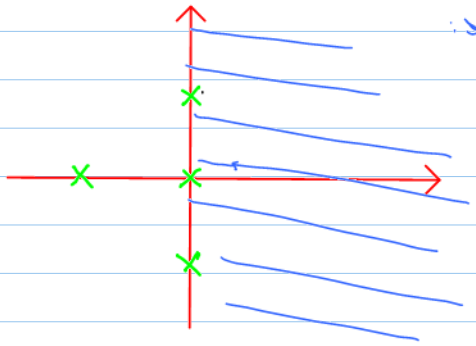
اگر فور $j\omega$ در ROC_x مبدأ ولی سایر فورها ROC_x باشد:



$ROC_X = Re(s) > 0$

$X(s) = \frac{1}{s^2}$

در این حالت اگر روی محور $j\omega$، قطب نداشته باشد $X(s)$ قرار داشته باشد آنگاه $X(j\omega)$ وجود دارد.



ولی اگر $X(s)$ روی محور $j\omega$ قطب نداشته باشد:

$X(j\omega)$ وجود دارد و $X(j\omega)$ را مطابق مثالهای ادامه درس یقین می‌کنیم.

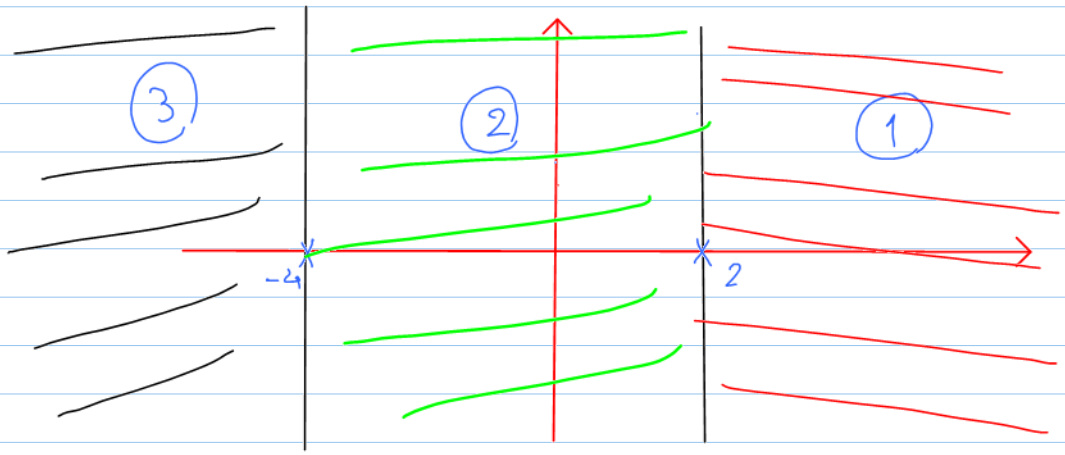
$X(s)$ و ROC_X

- $j\omega \in ROC_X$ محور $j\omega$: $X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$
- $j\omega \notin ROC_X$ و ROC_X شامل محور $j\omega$ نباشد: $X(j\omega)$ وجود ندارد
- $j\omega \notin ROC_X$ و ROC_X شامل محور $j\omega$ باشد و $X(s)$ قطب مضاعف روی محور $j\omega$ ندارد: $X(j\omega)$ وجود دارد
- $j\omega \notin ROC_X$ و ROC_X شامل محور $j\omega$ باشد و $X(s)$ قطب تکراری روی محور $j\omega$ دارد: $X(j\omega)$ وجود ندارد

سئوال. $x(t)$ یک سیگنال زمان پیوسته با تبدیل فوریه $X(jw) = \frac{1}{(jw-2)(jw+4)}$ می‌باشد. مناسب هگراپی $X(s)$ را تعیین کنید.

$$x(t) \xrightarrow{F} X(jw) = \frac{1}{(jw-2)(jw+4)}$$

$$X(jw) \xrightarrow{jw=s} X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+4)} \quad ; \quad jw \text{ روی } \in ROC_x$$



$$ROC_x = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$$

jw روی $\in$ (2) ROC_x

$$ROC_x = -4 < Re(s) < 2$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+4)} \quad ; \quad -4 < Re(s) < 2$$

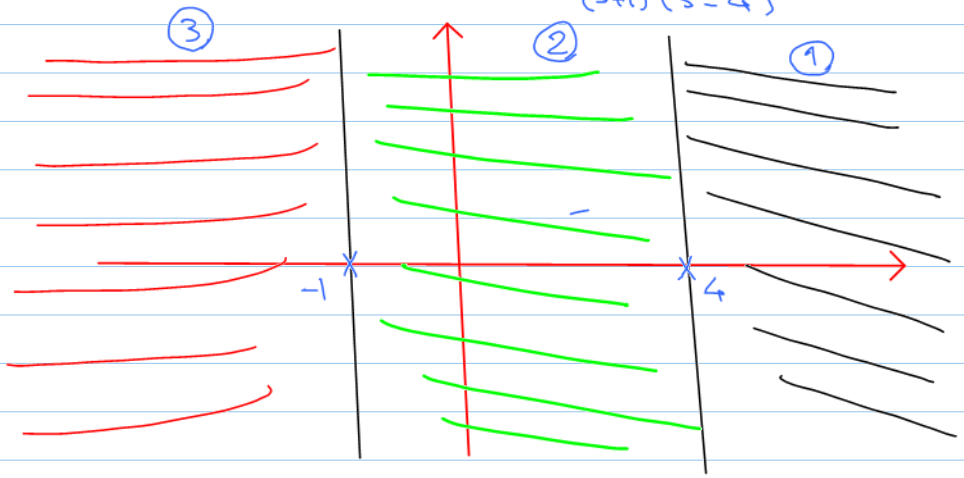
ROC بین دو خط $x(t)$ دو طرفه

مثال. $x(t)$ یک سیگنال و $X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-4)}$ تبدیل لاپلاس آن است.

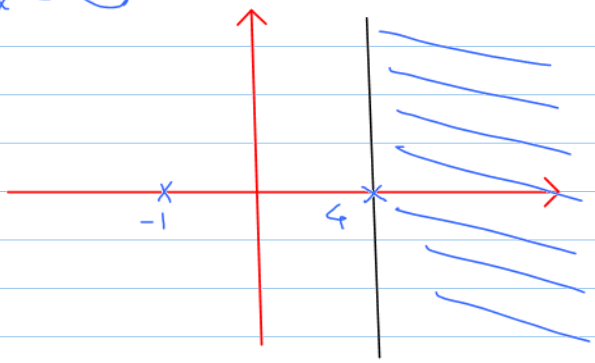
در هریک از حالتهای زیر تبدیل فوریه x را بدست آورید.

الف) $x(t)$ راست‌رو ب) $x(t)$ چپ‌رو ج) $x(t)$ دوطرفه

$X(s) \longrightarrow X(j\omega)$ $\qquad X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-4)}$



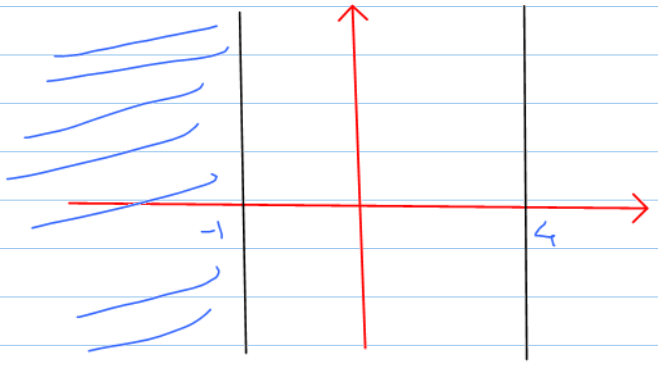
الف) $x(t)$ راست‌رو $\qquad ROC_x = (1)$



چون $j\omega$ مرزیست و $j\omega \notin ROC_x$ چون

$\Rightarrow X(j\omega)$ وجود ندارد

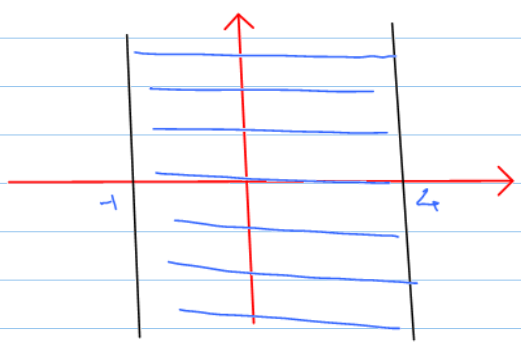
ب) $x(t)$ چپ‌رو



چون $j\omega$ لبه‌ی مرز است و $j\omega \notin ROC_x$

$X(j\omega)$ وجود ندارد.

ج) $x(t)$ دوطرفه



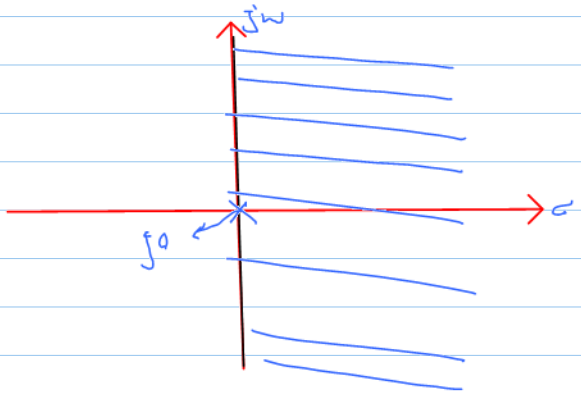
$\checkmark X(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{(j\omega+1)(j\omega-4)}$ $\qquad$ چون $j\omega \in ROC_x$

مثال: تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید.

1) $x(t) = u(t)$ 2) $x(t) = \cos(4t)\,u(t)$

1) $x(t) = u(t) \longrightarrow X(jw) = \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$

$x(t) = u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$; $ROC = Re(s) > 0$



$X(s) \longrightarrow X(jw) = ?$

jw روی jw تبدیل‌پذیر است و $jw \notin ROC_x$ و

$X(s)$ روی محور jw قطب مرتبه‌ی ندارد و

$X(jw)$ وجود دارد

در این حالت داریم:

$$X(jw) = X(s)\big|_{s=jw} + A_1\delta(w-a) + A_2\delta(w-b) + \dots$$

(a، b، ... قطبهای $X(s)$ روی محور jw هستند بدون ذوشته شوند)

$$X(jw) = \frac{1}{jw} + A_1\delta(w-0) = \frac{1}{jw} + A_1\delta(w)$$

برای یافتن اندازه A_1، A_2 و ... به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$x(t)$ را به صورت بدون u در نظر می‌گیریم:

$x(t) = 1 \times u(t) \longrightarrow x(t) = 1$

وزن سیگنال $x(t)$ بدون u را در مرکز a و b و ... حساب می‌کنیم.

$x(t) = 1$ وزن مرکز $0 = ?$

$x(t) = 1 \longrightarrow X(jw) = 2\pi\delta(w)$

وزن مرکز $0 = X(j0) = 2\pi\delta(0) = 2\pi$

A_1 برابر است با حاصل وزن مرکز دیتا 0 در سیگنال x بدون u

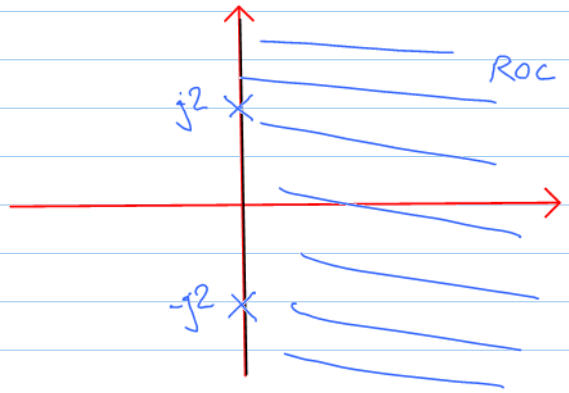
$$\frac{0}{2\pi}$$

$$A_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

---

2) $x(t) = \cos(2t)\,u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{s}{s^2+4}$; $ROC = Re(s) > 0$



$j\omega$: ω محور

$j\omega$ محور $\notin ROC_x$ ، ω ها نباشد $\rightarrow$ $X(j\omega)$ وجود ندارد

$X(s)$ روی محور $j\omega$ قطب تکراری ندارد

$X(s) = \frac{s}{s^2+4}$ ؛ قطب‌های روی محور $j\omega$ = $j2$ ✓ ، $j(-2)$ ✓

$$X(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2+4} + A_1\delta(\omega-2) + A_2\delta(\omega-(-2))$$

$A_1 = \frac{\text{وزن ضربه‌ای } X \text{ در } \omega=2}{2} = \bar{X}(j2)/2$

$A_2 = \frac{\text{" " " } \omega=-2 \text{ " "}}{2} = \bar{X}(-j2)/2$

$\bar{x}(t) = \cos(2t) \longrightarrow \bar{X}(j\omega) = \pi\delta(\omega-2) + \pi\delta(\omega+2)$

$\bar{X}(j2) = \pi\delta(0) + \pi\delta(4) = \pi \rightarrow A_1 = \frac{\pi}{2}$

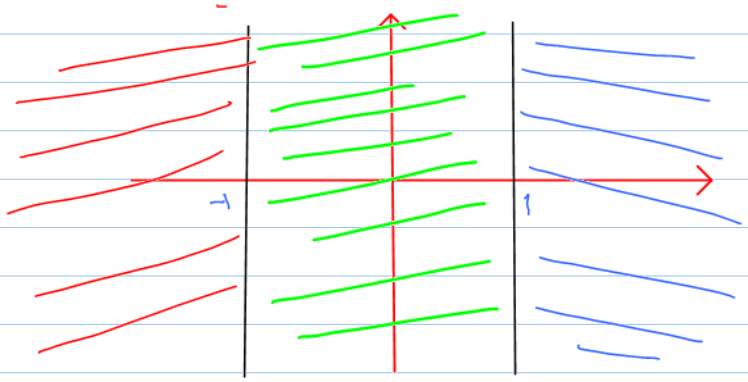
$\bar{X}(j(-2)) = \pi\delta(-4) + \pi\delta(0) = \pi \rightarrow A_2 = \pi/2$

جلسه 55 سیگنال

① همگرای ریاضی و ناحیه همگرایی:

$$X(s) = \frac{1}{s-1} \; ; \; ROC_x = Re(s) > 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \; ; \; ROC_y = Re(s) < -1$$



$$X(s) \times Y(s) = ?$$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & Re(s) > 1 \\ \infty & Re(s) < 1 \end{cases}$$

$$Y(s) = \begin{cases} \infty & Re(s) > -1 \\ \frac{1}{s+1} & Re(s) < -1 \end{cases}$$

$$X(s) \times Y(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-1} \times \infty & Re(s) > 1 \\ \infty \times \frac{1}{s+1} & Re(s) < -1 \\ \infty \times \infty & -1 < Re(s) < 1 \end{cases} = \infty \rightarrow$$

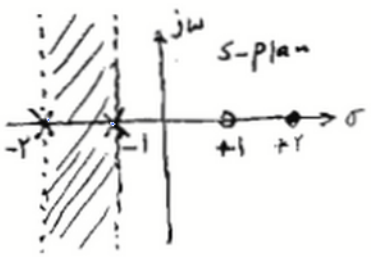
$X(s) \times Y(s)$ وجود ندارد.

نکته! هرگاه تبدیل لاپلاس دو سیگنال بخواهند در یک عملیات ریاضی شرکت کنند باید ROC آنها اشتراک داشته باشد وگرنه حاصل ∞ می شود.

اگر دو تبدیل لاپلاس در یک عملیات ریاضی شرکت کرده باشند یعنی ROC آنها باهم اشتراک دارد.

تست ۸۹

دیاگرام صفر و قطب یک سیستم LTI و ناحیهٔ همگرایی آن در شکل روبه‌رو با هاشور نشان داده شده است. $(H(s))$ کدام یک از موارد زیر ناحیه همگرایی سیستم معکوس (وارون) $\left(H_i(s) = \frac{1}{H(s)}\right)$ خواهد بود:



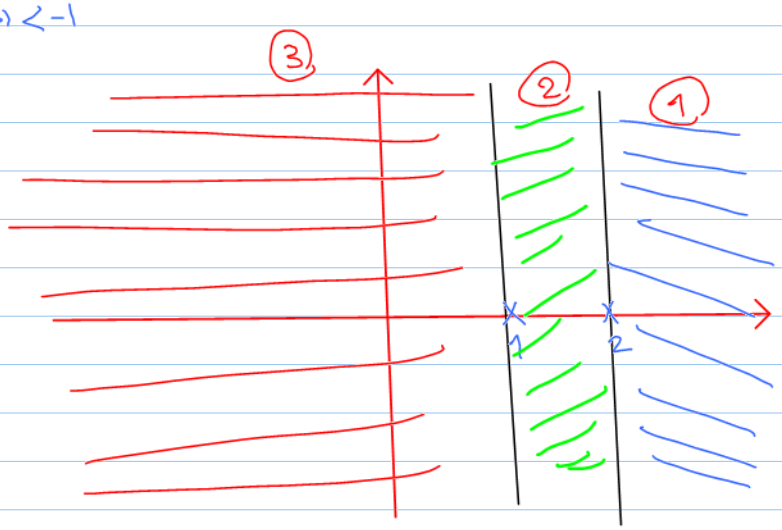
۱) $R_e(s) < 1$

۲) $R_e(s) > 2$

۳) $1 < R_e(s) < 2$

۴) هر سه جواب داده شده می‌تواند درست باشد.

$$H(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)} \quad ; \quad -2 < Re(s) < -1$$



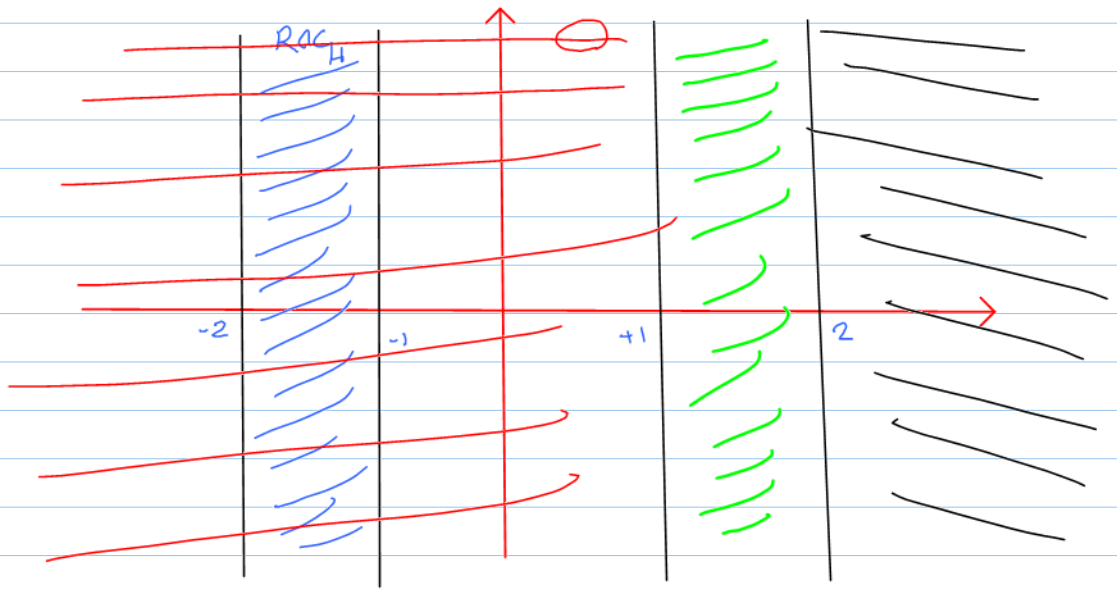
$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)} \longrightarrow ROC_{H_i} = ?$$

$$H_i(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)}$$

③، ②، ① می‌توانند ROC_{H_i} کدام از نواحی

باشد.

$H_i(s) \times H(s) = 1 \longrightarrow$ ناحیه‌ای که ROC_H و ROC_{H_i} با هم دارند.



$$ROC_{H_i} = Re(s) < +1 \checkmark$$

② خطی بودن: تبدیل لاپلاس خطی است.

$x(t) \longrightarrow X(s)$, ROC_x

$ax(t) \longrightarrow aX(s)$, ROC_x — a عدد ثابت

$y(t) \longrightarrow Y(s)$, ROC_y

$x(t) \mp y(t) \longrightarrow \begin{cases} X(s) \mp Y(s) & ; \text{ if } ROC_x \cap ROC_y \neq \Phi \\ \text{وجود ندارد} & \text{" " " " } = \Phi \end{cases}$

$z(t) = x(t) \mp y(t) \longrightarrow Z(s) = X(s) \mp Y(s)$ که $ROC_x \cap ROC_y \neq \Phi$

$ROC_x \cap ROC_y \subseteq ROC_z$

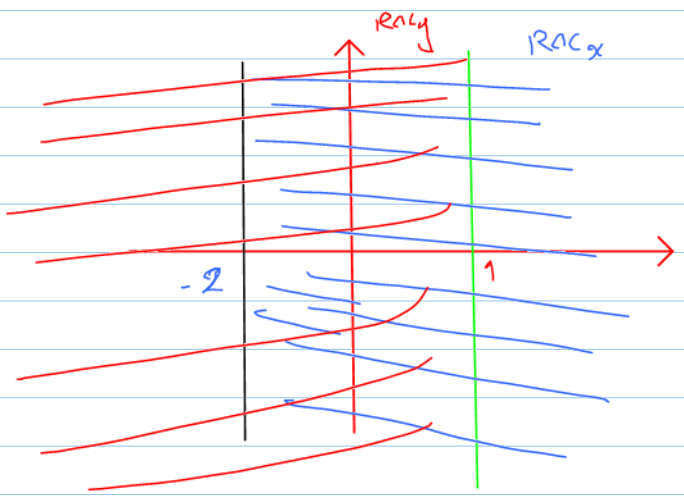
ROC_z برابر $ROC_x \cap ROC_y$ یا بزرگتر از آن خواهد بود. یعنی ROC_z حتماً شامل $ROC_x \cap ROC_y$ می‌شود.

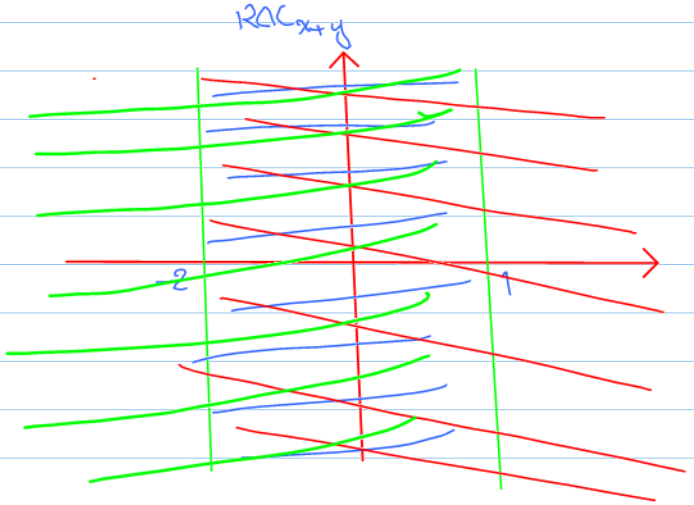
برای بدست آوردن ROC_z، $Z(s)$ را بدست آورید و اگر در $Z(s)$ حذف صفر و قطب نداشتیم باشیم $ROC_z = ROC_x \cap ROC_y$ و در غیر اینصورت $ROC_x \cap ROC_y \subset ROC_z$ خواهد بود.

مثال:

$x(t) = e^{-2|t|} \longrightarrow X(s) = ?$

$y(t) = e^{2|t|} \longrightarrow Y(s) = ?$





$$X(s) = \frac{1}{s-1} \quad ; \quad ROC = Re(s) > 1$$

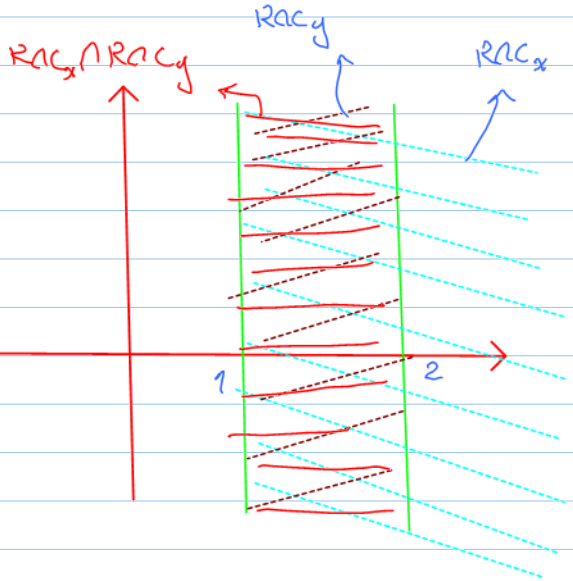
$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad ; \quad ROC = 1 < Re(s) < 2$$

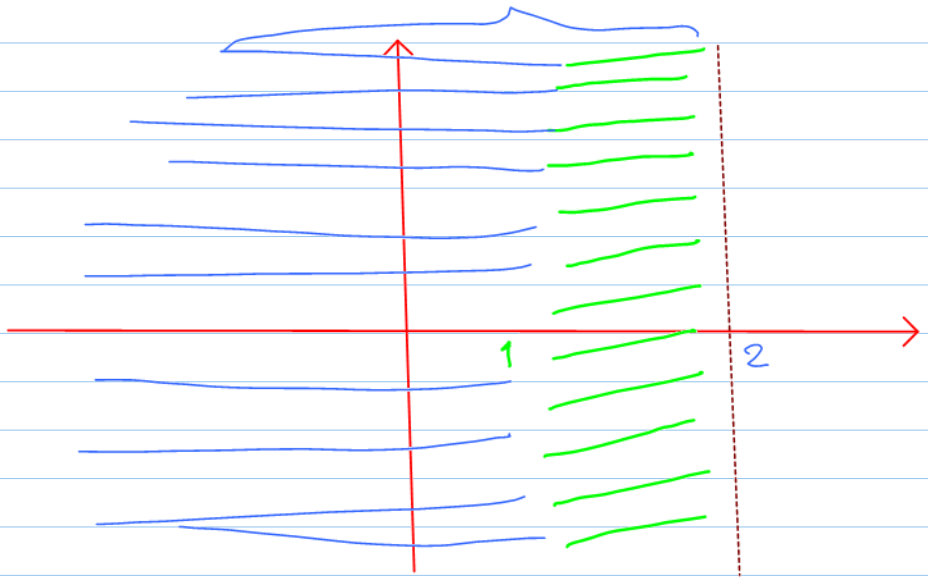
$X(s) + Y(s) \longrightarrow ?$

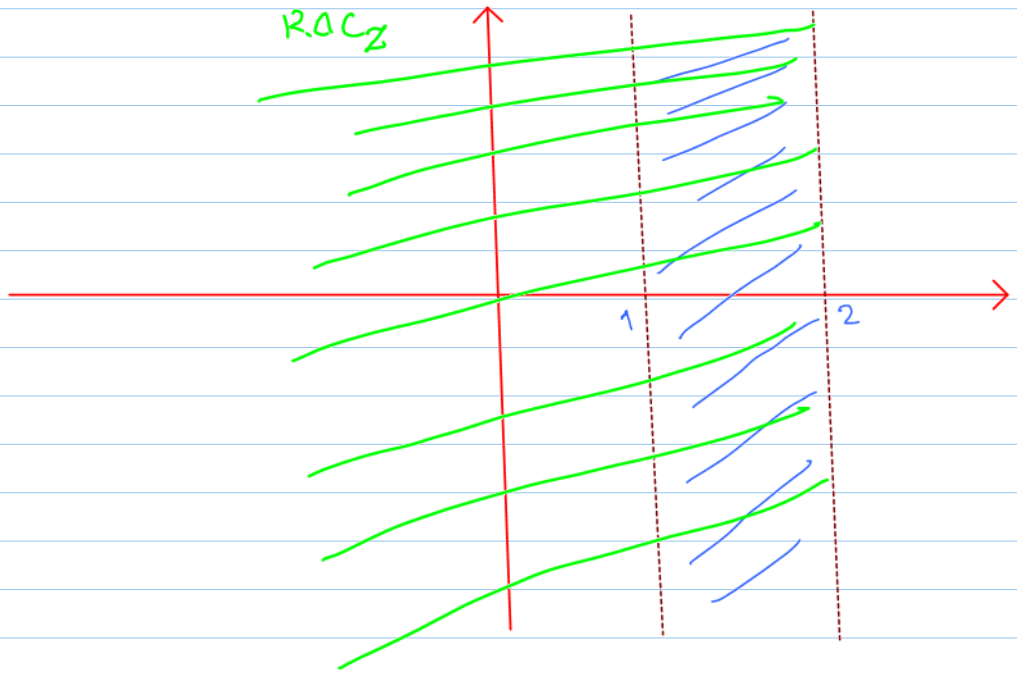
$$Z(s) = X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$Z(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} + \frac{1}{(s-1)(s-2)} =$$

$$Z(s) = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s-1)}(s-2)} = \frac{1}{s-2} \quad ; \quad Re(s) < 2$$







$x(t) = e^{-2|t|} \longrightarrow X(s) = ?$

$e^{at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-a}$; $Re(s) > Re(a)$

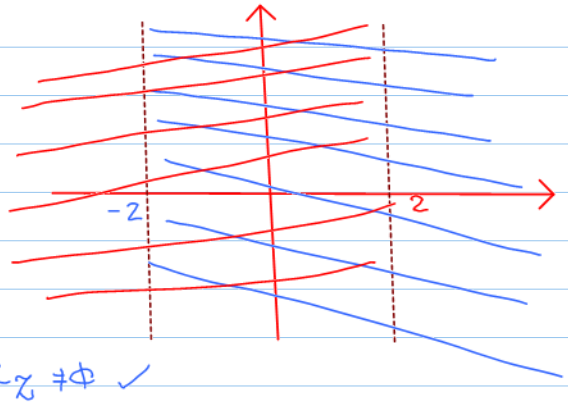
$-e^{at}u(-t) \longrightarrow \frac{1}{s-a}$; $Re(s) < Re(a)$

$$x(t) = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{-2t} & t>0 \\ e^{-2(-t)} & t<0 \end{cases} = e^{-2t}\underbrace{\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}}_{u(t)} + e^{2t}\underbrace{\begin{cases} 0 & t>0 \\ 1 & t\le 0 \end{cases}}_{u(-t)}$$

$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t) = e^{-2t}u(t) - (-e^{2t}u(-t))$

$y = \underset{a}{e^{-2t}}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+2}$; $Re(s) > -2$

$z = -\underset{a}{e^{2t}}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-2}$; $Re(s) < 2$



$y(t) - z(t) \longrightarrow \begin{cases} Y(s) - Z(s) & ROC_y \cap ROC_z \neq \Phi \checkmark \\ \text{yok} & \text{ise} \quad = \Phi \end{cases}$

$y(t) - z(t) \longrightarrow Y(s) - Z(s)$

$e^{-2t}u(t) - (-e^{2t}u(-t)) \longrightarrow \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = \frac{-4}{s^2-4}$; $ROC = ROC_y \cap ROC_z$

$= -2 < Re(s) < 2$

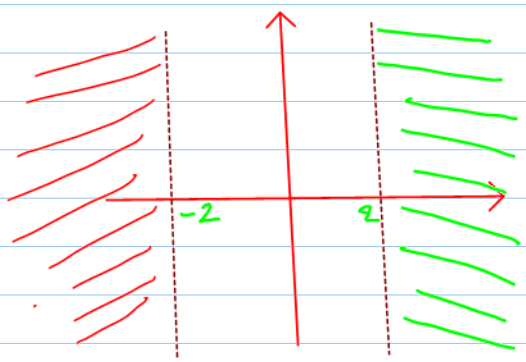
$e^{-2|t|} \longrightarrow \frac{-4}{s^2-4}$; $-2 < Re(s) < 2$

$x(t) = e^{2|t|} \xrightarrow{\mathcal{L}} ?$

$e^{2|t|} = e^{2t}u(t) + e^{-2t}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$

$e^{2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-2}\ ;\ Re(s) > 2 = ROC_1$

$-e^{-2t}u(-t) \longrightarrow \frac{1}{s+2}\ ;\ Re(s) < -2 = ROC_2$



$x(t) = e^{2t}u(t) - (-e^{-2t}u(-t)) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} \\ \text{وجود ندارد} \end{cases}$

$ROC_1 \cap ROC_2 \neq \phi$

$\sim\ \sim\ \sim = \phi$ ✓

$x(t) = e^{\overset{a}{(2)}|t|}$ $\xrightarrow{Re(2)>0}$ تبدیل لاپلاس ندارد

$x(t) = e^{\overset{a}{(-2)}|t|} \longrightarrow \frac{-4}{s^2-4}\ ;\ -2 < Re(s) < 2$

$e^{a|t|} \xrightarrow{Re(a)<0} \frac{2a}{s^2-a^2}\ ;\ +Re(a) < Re(s) < -Re(a)$

③ انتقال زمانی:

$x(t) \longrightarrow X(s)\ ,\ ROC_x$

$t \to t+b$ ↓ $\times e^{bs}$

$x(t+b) \longrightarrow e^{bs}X(s)\ ,\ ROC = ROC_x \pm \{s=\infty, s=-\infty\}$

با انتقال زمانی ناحیه همگرایی احتمالاً در $\infty \pm$ تغییر می‌کند که بایستی بررسی شود.

یا $e^{b(\infty)}X(-\infty)$ را بررسی کنیم.

اگر $Re(b) > 0$ ← $ROC = ROC_x - \{\infty\}$

$Re(b) < 0$ ← $ROC = ROC_x - \{-\infty\}$

$y(t) = e^{2t}\, u(t+1) \longrightarrow ?$

$e^{2t}\, u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-2}$; $Re(s) > 2$

$t \to t+1$ ↓ ; $\times e^{1s}$ ↓

$e^{2t+2}\, u(t+2) \longrightarrow \frac{1}{s-2} e^{1s}$; $ROC = Re(s) > 2 - \{+\infty\}$

$= 2 < Re(s) < \infty$

$e^{-2} \times$ ↓ ; $\times e^{-2}$ ↓

$e^{-2}\, e^{2t+2}\, u(t+1) \longrightarrow \frac{1}{s-2} e^{1s} \times e^{-2}$; $ROC = 2 < Re(s) < \infty$

$y(t) = e^{2t}\, u(t+1) \longrightarrow \frac{e^{s-2}}{s-2}$; $2 < Re(s) < \infty$

④ انتقال در کاسی:

$x(t) \longrightarrow X(s)$, $ROC = ROC_x$

$\times e^{-bt}$ ↓ ; $s \to s+b$ ↓

$e^{-bt}\, x(t) \longrightarrow X(s+b)$; $ROC =$ به $-Re(b)$ ↳ ROC_x حدود

$e^{-2t} \cos(3t)\, u(t) \longrightarrow ?$

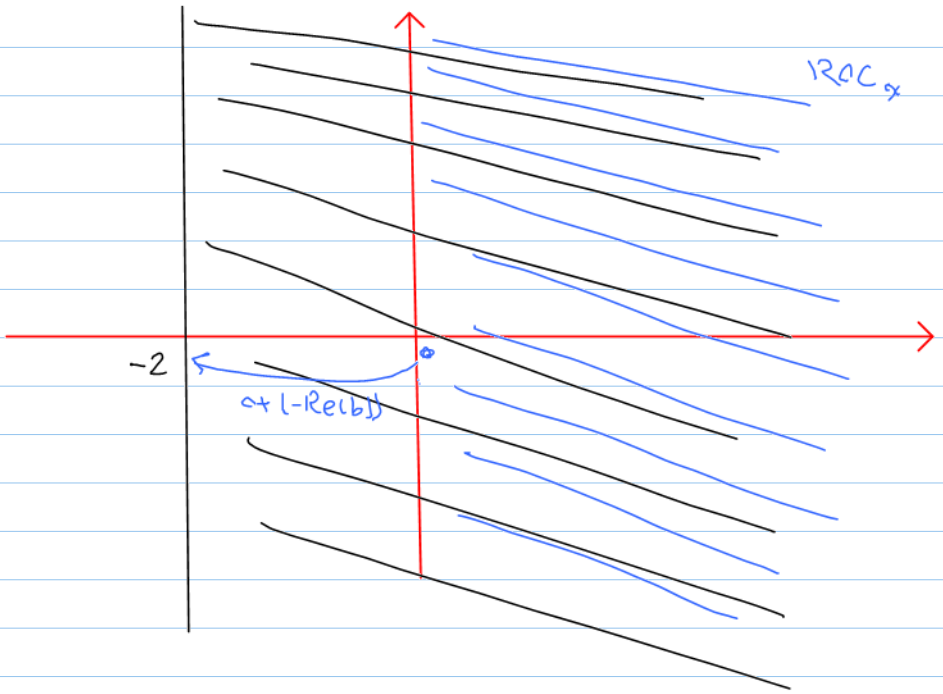
$\cos(3t)\, u(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+9}$; $Re(s) > 0$

$\cos(3t)\,u(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+9}$; $ROC = Re(s) > 0$

$\downarrow e^{-2t}$ $\qquad\qquad$ $\downarrow s+2$

$e^{-2t}\cos(3t)\,u(t) \longrightarrow \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$; $ROC = Re(s+2) > 0 = Re(s) > -2$

$Re(s+2) = Re(s) + 2 > 0 \rightarrow Re(s) > -2$



⑤ واروئی زمانی و فرکانسی:

$x(t) \longrightarrow X(s)$; ROC_x

$\downarrow t \to -t$ $\qquad\qquad$ $\downarrow s \to -s$

$x(-t) \longrightarrow X(-s)$, $ROC = -ROC_x$

$e^{3t}\ \sin(2t)\,u(-t) \longrightarrow\ ?$

$\sin(2t)\,u(t) \longrightarrow \dfrac{2}{s^2+4}$; $ROC = Re(s) > 0$

$t \to -t$ ↓ $s \to -s$ ↓

$\sin(-2t)\,u(-t) \longrightarrow \dfrac{2}{(-s)^2+4}$; $Re(-s) > 0$

$\times e^{3t}$ ↓ $s \to s-3$ ↓

$-e^{3t}\sin(2t)\,u(-t) \longrightarrow \dfrac{2}{(-(s-3))^2+4}$; $Re(-(s-3)) > 0$

$= \dfrac{2}{s^2-6s+13}$; $Re(s) < 3$

$Re(-s+3) = Re(-s)+3 = -Re(s)+3 > 0 \longrightarrow Re(s) < 3$

جلسه 56 سیگنال

مثال: تبدیل لاپلاس $x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ در $s = -\pi$ کدام است؟

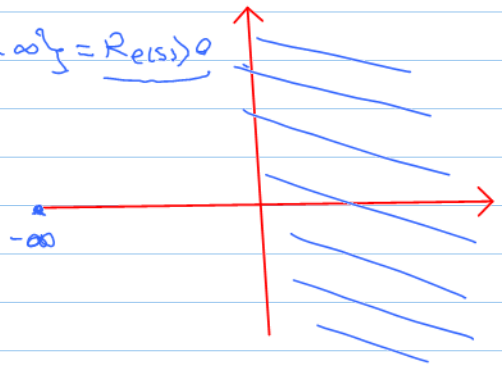
1) ∞ 2) $\frac{1+e^{-\pi}}{2\pi^2}$ 3) $\frac{e^{-\pi}}{2\pi}$ 4) $\frac{1+e^{+\pi}}{2\pi}$

$$x(t) = \sin(\pi t)\begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \sin(\pi t)\big(u(t) - u(t-1)\big)$$

$$\sin(\pi t)\,u(t) \longrightarrow \frac{\pi}{s^2+\pi^2} \qquad Re(s) > 0$$

$t \to t-1$ (b) ↓ ; $\times e^{-s}$ ↓

$$\sin(\pi(t-1))\,u(t-1) \longrightarrow \frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2} \; ; \; Re(s) > 0 - \{-\infty\} = Re(s) > 0$$



$$\sin(\pi t - \pi) = -\sin(\pi t)$$

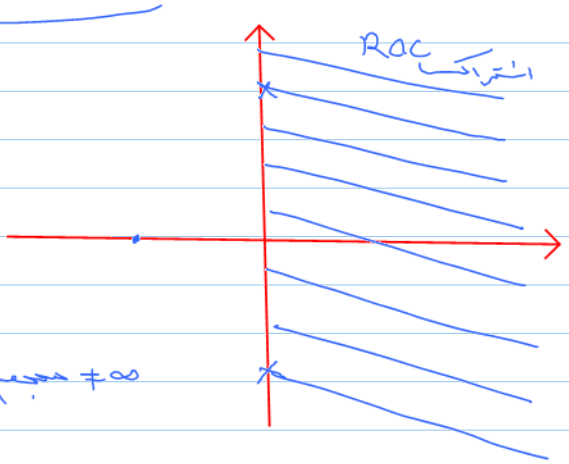
$$-\sin(\pi t)\,u(t-1) \longrightarrow \frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2} \; , \quad Re(s) > 0$$

$+$ $+$

$$\sin(\pi t)\,u(t) \longrightarrow \frac{\pi}{s^2+\pi^2} \; ; \; Re(s) > 0$$

$$x = \sin(\pi t)\,u(t) - \sin(\pi t)\,u(t-1) \longrightarrow \frac{\pi}{s^2+\pi^2} + \frac{\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2} \; ; \; ROC$$

$$X(s) = \frac{\pi + \pi e^{-s}}{s^2+\pi^2} \; ;$$



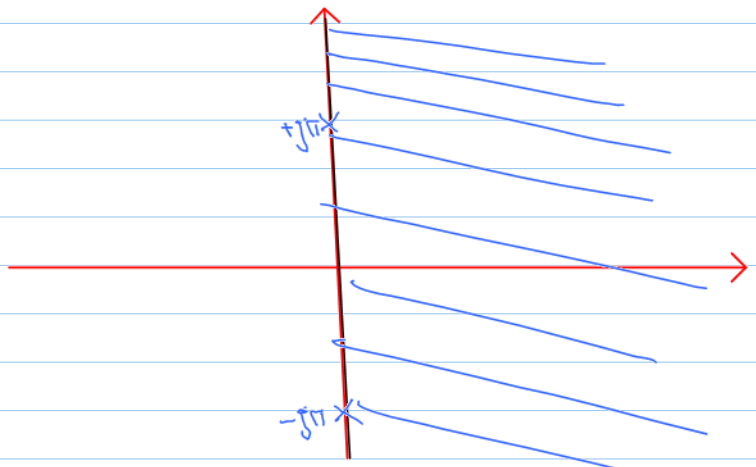
$s = \mp j\pi$

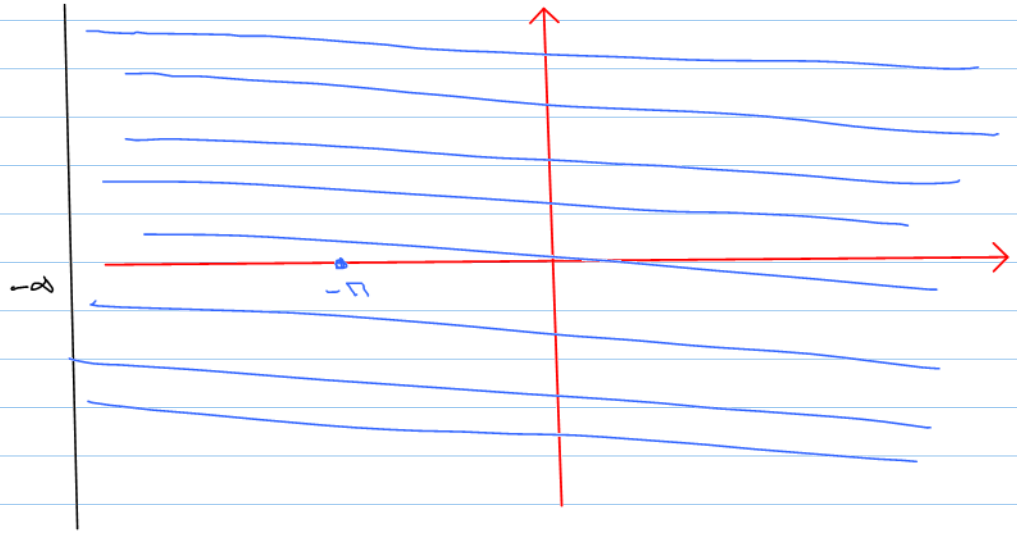
$$X(j\pi) = \frac{\pi + \pi e^{-j\pi}}{(j\pi)^2 + \pi^2} = \frac{\pi + \pi(-1)}{-\pi^2+\pi^2} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \neq \infty$$

$$X(-j\pi) = \frac{\pi + \pi e^{j\pi}}{-\pi^2+\pi^2} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \neq \infty$$

$X(s)$ قطب ندارد ← تنها قطب $X(s)$ در $-\infty$ است.

$$X(-\infty) = \frac{\pi + \pi e^{+\infty}}{(-\infty)^2 + \pi^2} = \infty \rightarrow \text{قطب} \quad s = -\infty$$





$$X(s) = \frac{\pi + \pi e^{-s}}{s^2 + \pi^2} \; ; \; Re(s) > -\infty$$

$$X(-\pi) = \frac{\pi + \pi e^{+\pi}}{(-\pi)^2 + \pi^2} = \frac{1 + e^{+\pi}}{2\pi} \checkmark$$

⑥ حاصیت زوج و فرد بودن:

اگر $x(t)$ زوج (فرد) باشد:

1- $X(s)$ زوج (فرد) است.

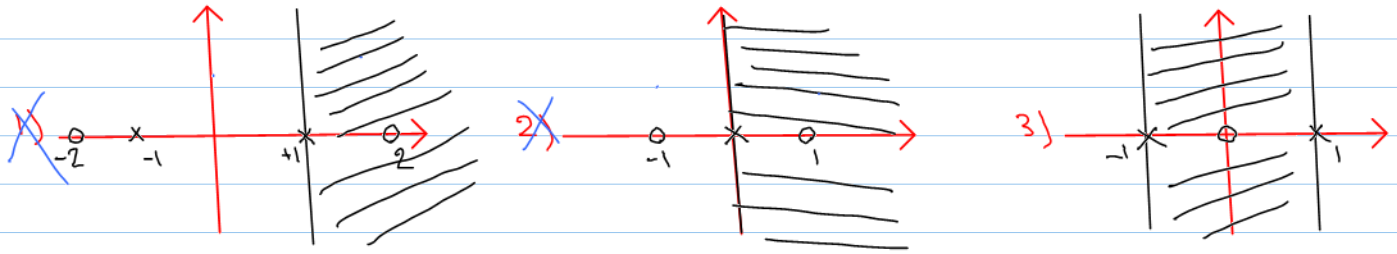
2- قطبها و صفرهای $X(s)$ قرینه اند. قطب $s=-a$ ← قطب $s=a$

صفر $s=-b$ ← صفر $s=b$

3- نامیم همگرایی بستاب هور نیز قرینه بوده و همان شکل آن می شود.

توجه! شرط 2 و 3 در مورد زوج یا فرد بودن فوق می کند. یعنی $x(t)$ زوج یا فرد باشد باید شرط 2 و 3 را داشته باشد.

مثال: کدام نمودار صفر و قطب و ROC مربوط به کلاس سیگنال زوج است؟



1) ✗

2) ✗

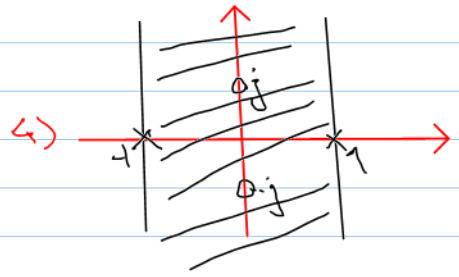
3) ✓

$s=1 \rightarrow s=-1$ ✓

$s=0 \rightarrow s=0$ ✓

$X(s) = \frac{s}{s^2-1}$

4) ✓



$s=-1 \rightarrow s=1$ ✓

$s=j \rightarrow s=j$ ✓

$X(s) = \frac{s^2+1}{s^2-1}$

مزون: $x(t)$ زوج ← $X(s)$ و ROC کدام است؟

3- ROC بستاب به صور نیز قرینه است و شکل صور نیز می باشد.

2- صفرها و قطبهای $X(s)$ قرینه اند.

1- $X(s)$ زوج ← $X(s) = X(-s)$

1) $\frac{s}{s^2-1} \stackrel{?}{=} \frac{-s}{(-s)^2-1}$

زوج نیست

$\frac{s}{s^2-1} \neq \frac{-s}{s^2-1}$

گزینه ۴) $\frac{s^2+1}{s^2-1} \overset{?}{=} \frac{(-s)^2+1}{(-s)^2-1} = \frac{s^2+1}{+s^2-1}$ ✓ درست است

⑦ مزدوجی:

$x(t) \longrightarrow X(s)\ ,\ ROC_x$

$x^*(t) \longrightarrow X^*(s^*)\ ,\ ROC_x$

* اگر $x(t)$ حقیقی باشد:

1) $X^*(s) = X(s^*)$

2) اگر $X(s)$ قطبی (صفری) در $s=a$ داشته باشد حتماً قطب (صفر) در $s=a^*$ خواهد داشت.

نکته! اگر در تبدیل لاپلاس $X(s)$ عادی ضرایب ثابت عدد حقیقی باشند، $x(t)$ حقیقی است.

$X(s) = \frac{1s^2+5s-5}{1s^2+4s+4} \longrightarrow x(t)$ حقیقی

$Y(s) = \frac{1+se^{j\pi/2}}{s^2+2s+5} \longrightarrow Y(s) = \frac{1+js}{s^2+2s+5} \longrightarrow y(t)$ حقیقی نیست

⑧ مقیاس دهی:

$x(t) \longrightarrow X(s)\ ,\ ROC_x$

$t \to \alpha t$ ↓ $\quad \frac{1}{|\alpha|} \times$ ↓ $s \to \frac{s}{\alpha}$

$x(\alpha t) \longrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X(s/\alpha)\ ;\ \alpha \times ROC_x$

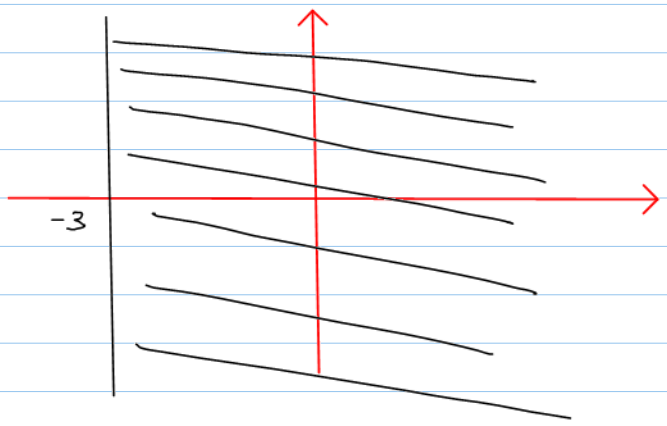
مثال برق ۸۳

اگر محدودهٔ $-3 < Real[s]$، منطقهٔ هم‌گرایی برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ باشد، منطقهٔ هم‌گرایی برای تبدیل لاپلاس سیگنال $x(\alpha t)$ که $-1 < \alpha < 0$ باشد، عبارت است از:

۱) $Real[s] > -3\alpha$ ۲) $Real[s] < \frac{-3}{\alpha}$ ۳) $Real[s] < -3\alpha$ ۴) $\frac{3}{\alpha} < Real[s] < \frac{-3}{\alpha}$

$x(t) \longrightarrow X(s), \quad ROC_x = Re(s) > -3$

$x(\alpha t) \xrightarrow{-b < \alpha < a} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{s}{\alpha}\right); \quad ROC = \alpha ROC_x \; i.e. \; s \to \frac{s}{\alpha}$



$x(t) \longrightarrow Re(s) > -3$

$\downarrow s \to \frac{s}{\alpha}$

$x(\alpha t) \longrightarrow ROC = Re\left(\frac{s}{\alpha}\right) > -3$

$Re\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \frac{\alpha Re(s)}{\alpha} \overset{<}{\not>} -3 \times \alpha \longrightarrow Re(s) < -3\alpha$

$-1 < \alpha < 0$

$x(t) \longrightarrow X(s), \quad -2 < Re(s) < 3$

$y(t) = x(-3t)\, e^{(1+j3)t} \longrightarrow Y(s), \quad ?$

$x(t) \longrightarrow X(s), \quad -2 < Re(s) < 3$

$t \to -3t \downarrow$ $\qquad \frac{1}{|-3|} \times \downarrow$ $\qquad s \to \frac{s}{-3}$

$x(-3t) \longrightarrow \frac{1}{3} X\left(-\frac{s}{3}\right); \quad -2 < Re\left(\frac{s}{-3}\right) < 3$

$e^{(-b)(1+j3)t} \times \downarrow$ $\qquad s \to s + -(1+j3)$

$g = e^{(1+j3t)}\, x(3t) \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{3} X\left(-\frac{1}{3}(s-(1+j3))\right)$; $-2 < Re\left(\frac{s-1-j3}{-3}\right) < 3$

$Re\left(\frac{s-1-j3}{-3}\right) = \frac{Re(s-1-j3)}{-3}$ $\qquad Re(\alpha s) = \alpha\, Re(s)$

$= \frac{Re(s) + Re(-1-j3)}{-3} = \frac{Re(s)-1}{-3}$

$-2 < \frac{Re(s)-1}{-3} < 3$

$6 > Re(s) - 1 > -9$

$7 > Re(s) > -8$

$ROC_g = -8 < Re(s) < 7$

جلسه 58 سیگنال

⑧ مشتق گیری: خاصیت متوازی

$$x(t) \longrightarrow X(s),\ ROC_x$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\downarrow \qquad \downarrow \times s^n$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow s^n X(s);\quad ROC = ROC_x - \{\pm\infty\}$$

اصلاً $\rightarrow$ باید بررسی کنیم $\leftarrow$ $?= x^{(n)}(\infty)$

$$x(t) \longrightarrow X(s),\ ROC_x$$

$$x(-t)\downarrow \qquad \downarrow \frac{d}{ds}$$

$$(-t)^n x(t) \longrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s),\ ROC_x$$

⑨ انتگرال گیری:

$$x(t) \longrightarrow X(s),\ ROC_x$$

$$\int_{-\infty}^{t}\downarrow \qquad \downarrow \times \frac{1}{s}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s}X(s),\quad ROC = ROC_x \cap \{Re(s)>0\}$$

حتماً از ROC_x کوچک‌تر است. / حتماً از ROC_x کوچک‌تر نیست.

مثال

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau \longrightarrow Y(s) = ?$$ بر حسب $X(s)$

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

$$t \to 2t \downarrow \qquad \downarrow \times \frac{1}{2},\ s \to \frac{s}{\alpha} = \frac{s}{2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{|2|}\,\frac{1}{\frac{s}{2}}\,X\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s}X\left(\frac{s}{2}\right) = Y(s)$$

$x(t) \longrightarrow X(s),\ ROC_x$

$y(t) \longrightarrow Y(s),\ ROC_y$

$$x(t) * y(t) \longrightarrow \begin{cases} X(s)\,Y(s) & ROC_x \cap ROC_y \neq \Phi \\ \text{وجود ندارد} & \text{" " " } = \Phi \end{cases}$$

ROC_{x*y}: $(ROC_x \cap ROC_y) \subseteq ROC_{x*y}$

کاربرد کانولوشن در سیستم های LTI:

محاسبه پاسخ سیستم LTI با تبدیل لاپلاس:

هرگاه در سوالی پاسخ سیستم LTI را بخواهد و $H(s)$ را داده باشد یا $h(t)$ به شکل سیگنالها جدول تبدیل لاپلاس باشد یا ورودی به فرم e^{at} (a عدد مختلط) باشد از تبدیل لاپلاس استفاده می‌نیم

* نکته اگر ورودی به فرم e^{at} یا عددثابت باشد و u نداشته باشد، خودمی هم u خواهد داشت.

محاسبه پاسخ سیستم LTI:

① $x(t) = b \longrightarrow y(t) = \begin{cases} bH(0) & 0 \in ROC_H \\ \infty & 0 \notin ROC_H \end{cases}$

② $x(t) = e^{at} \longrightarrow y(t) = \begin{cases} H(a)\,e^{at} & a \in ROC_H \\ \infty & a \notin ROC_H \end{cases}$

③ $x(t) \longrightarrow X(s),\ ROC_x \qquad y(t) = x(t) * h(t)$

$$Y(s) = \begin{cases} X(s)\,H(s) & ROC_x \cap ROC_H \neq \Phi \\ \infty & \text{" " " } = \Phi \end{cases}$$

برق ۸۹

معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته علّی به صورت زیر داده شده است:

$$y'' - y = x' + 2x$$

پاسخ این سیستم به ورودی‌های $x_1(t) = e^{2t}$ و $x_2(t) = e^{-2t}$ کدام مورد خواهد بود؟

۱) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$ و $y_2(t) = 0$

۲) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$ و $y_2(t) = \infty$

۳) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$ و $y_2(t) = \infty$

۴) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$ و $y_2(t) = 0$

معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته علّی به صورت زیر داده شده است:

$$y'' - y = x' + 2x$$

پاسخ این سیستم به ورودی‌های $x_1(t) = e^{2t}$ و $x_2(t) = e^{-2t}$ کدام مورد خواهد بود؟

۱) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$ و $y_2(t) = 0$

۲) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$ و $y_2(t) = \infty$

۳) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$ و $y_2(t) = \infty$

۴) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$ و $y_2(t) = 0$

$x_1(t) = e^{2t} = e^{at}$ → a: دوحدی‌ی‌ی → $j\times$ عدد → فوریه

a: مختلط → عدد $+ j\times$ عدد → لاپلاس

حقیقی → عدد

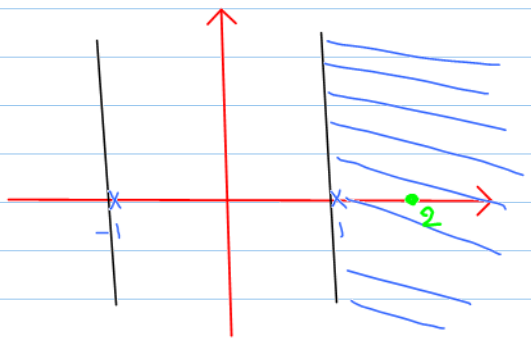
e^{at} → u (پله‌ی واحد)

$x_1(t) = e^{2t} \longrightarrow y_1(t) =$ u (پله‌ی واحد) $= \begin{cases} H(2)\,e^{2t} & 2 \in ROC_H \\ \infty & 2 \notin ROC_H \end{cases}$

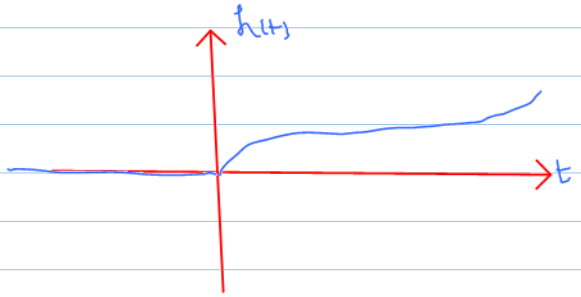
$y'' - y = x' + 2x$ → $Y(s) = H(s)X(s)$ → $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$s^2Y(s) - Y(s) = sX(s) + 2X(s) \longrightarrow (s^2-1)Y(s) = (s+2)X(s)$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2-1} \longrightarrow$ $\boxed{H(s) = \frac{s+2}{s^2-1}}$



علّی: $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$



دست‌راستی

$h(t)$: دست‌راستی → $ROC_H =$ خط عمودی سمت راست ترین

$y_1(t) = \begin{cases} H(2)\,e^{2t} & 2 \in ROC_H \checkmark \\ \infty & 2 \notin ROC_H \end{cases}$

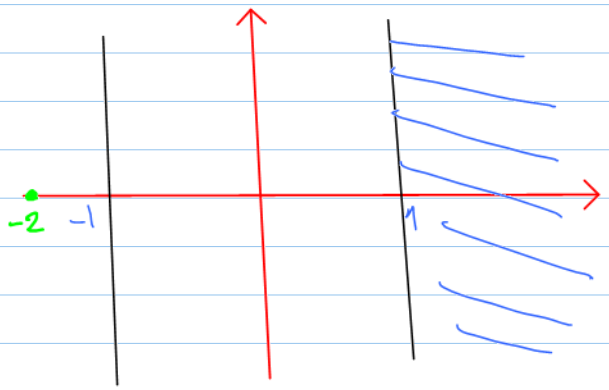
$= \frac{2+2}{4-1}e^{2t} = \frac{4}{3}e^{2t}$

$x_2(t) = e^{-2t} \longrightarrow y_2(t) = \begin{cases} H(-2)\, e^{-2t} & -2 \in ROC_H \\ \infty & -2 \notin ROC_H \end{cases}$

$= \infty$

$y_2(t) = H(-2)\, e^{-2t} = \frac{-2+2}{4-1} \times e^{-2t} = 0$

اشتباه معمول



اشتباه معمول: در حالتی که e^{at} ورودی سیستم LTI باشد، از رابطه $a \in ROC_H$ استفاده می‌شود.

برق ۹۴

پاسخ سیستم LTI علّی با تابع تبدیل $H(s)=\frac{s}{s+3}$ به ورودی $x(t)=e^{-2t}+u(t)$ ، کدام است؟

۱) $-2(e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$

۲) $e^{-2t}u(t)+e^{-3t}$

۳) $-2e^{-2t}+e^{-3t}u(t)$

۴) $(e^{-2t}+2e^{-3t})u(t)$

پاسخ سیستم LTI علّی با تابع تبدیل $H(s)=\frac{s}{s+3}$ به ورودی $x(t)=e^{-2t}+u(t)$ ، کدام است؟

۱) $-2(e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$

۲) $e^{-2t}u(t)+e^{-3t}$

۳) $-2e^{-2t}+e^{-3t}u(t)$ ✓

۴) $(e^{-2t}+2e^{-3t})u(t)$

e^{-2t} ⟶ y_1 ⟶ u ضرب ⟶ $e^{-2t}\times u$

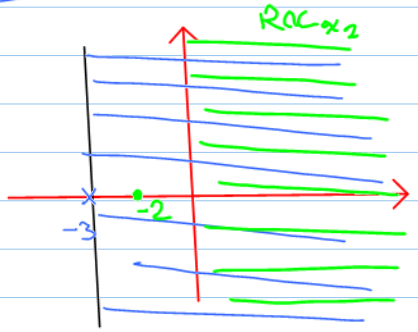
\+ ⟶ \+

$u(t)$ ⟶ y_2

$x(t)$ ⟶ y_1+y_2

$h(t)$ علّی ⟶ $H(s)=\frac{s}{s+3}$; $Re(s)>-3$

(راست‌رو / پایدار)



e^{-2t} ⟶ $y_1(t)=e^{-2t}H(-2)=e^{-2t}\times\frac{-2}{-2+3}=-2e^{-2t}$

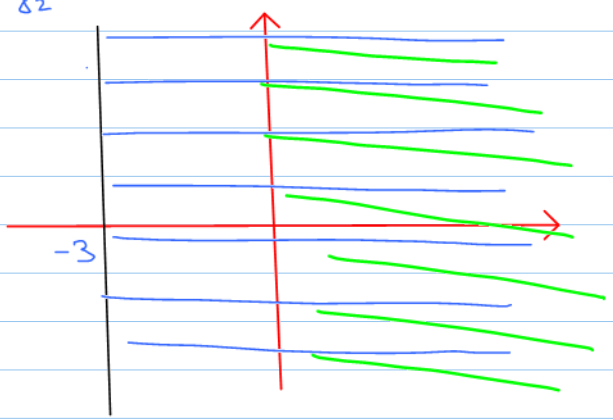
$x_2=u(t)$ ⟶ $y_2(t)=x_2(t)*h(t)$

$X_2(s)=\frac{1}{s}$; $Re(s)>0$

$Y_2(s)=\begin{cases} X_2(s)H(s) & ROC_{x_2}\cap ROC_H\neq\phi \ \checkmark \\ \cancel{\alpha} & \text{---}=\phi \end{cases}$

$Y_2(s)=\frac{1}{s}\times\frac{s}{s+3}=\frac{1}{s+3}$; $ROC_{y_2}=?\ Re(s)>-3$

$ROC_{x_2}\cap ROC_H\subseteq ROC_{y_2}$



$\frac{1}{s+a}$, $Re(s) > -a$ $\longrightarrow$ $e^{-at}u(t)$

$Y_2 = \frac{1}{s+3}$; $Re(s) > -3$ $\longrightarrow$ $e^{-3t}u(t) = y_2$

e^{-2t} $\longrightarrow$ $-2e^{-2t}$

$+$ $+$

$u(t)$ $\longrightarrow$ $e^{-3t}u(t)$

$x(t) = e^{-2t} + u(t)$ $\longrightarrow$ $y(t) = -2e^{-2t} + e^{-3t}u(t)$ ✓

یک سیستم زمان پیوسته پایدار به شکل $H(s)=\frac{۱}{s+۱}$ در اختیار می‌باشد، در صورتی که ورودی این سیستم به صورت $x(t)=\cos(۲t+۱)$ باشد، در این صورت خروجی سیستم کدام است؟

۱) $y(t)=\frac{۱}{۵}\cos(t+۱)-\frac{۲}{۵}\sin(t+۱)$

۲) $y(t)=\frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱)$

۳) $y(t)=-\frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$

۴) $y(t)=\frac{۱}{۵}\cos(۲t+۱)+\frac{۲}{۵}\sin(۲t+۱)$

$H(s) = \frac{1}{s+1}$ $j\omega$ در $\rightarrow H(j\omega)$

$x(t) = \cos(2t+1) \longrightarrow y(t) = ?$

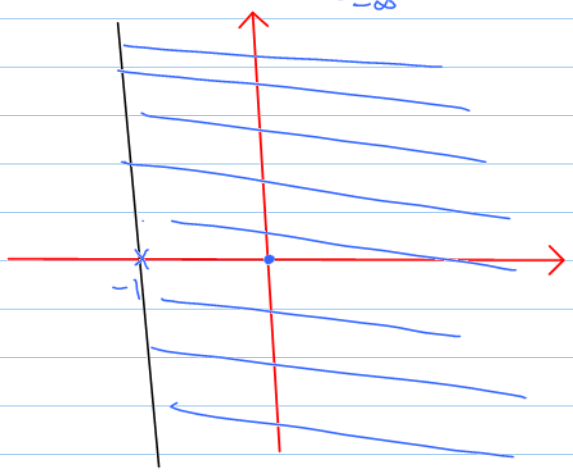
$\cos(at+b) \longrightarrow y(t) = |H(ja)| \cos(at+b+\angle H(ja))$:پاسخ پله

e^{at} , b , $x(t)$

$H(s) \xrightarrow{j\omega \in ROC_H} H(j\omega)$ $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)|x|dt < \infty$

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-\sigma t} dt < \infty \rightarrow \sigma \in ROC_H$

$0 \in ROC_H$



$j\omega$ در $\in ROC_H \longrightarrow H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+1}$

$\cos(2t+1)$

$y(t) = |H(j2)| \cos(2t+1+\angle H(j2))$

$H(j2) = \frac{1}{j2+1} \Rightarrow |H(j2)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\angle H(j2) = 0 - \tan^{-1}(\frac{2}{1}) = -\tan^{-1}(2)$

$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2t+1-\tan(2))$

$$A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha - \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)\right)$$

$$B\cos(2t+1) + A\sin(2t+1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(\underbrace{2t+1}_{\alpha} - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(2t+1 - \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right)\right)$$

$$A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\alpha - \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)\right)$$

($\sqrt{A^2+B^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha = 2t+1$, $\frac{A}{B} = \frac{2}{1}$)

$$A\sin(2t+1) + B\cos(2t+1) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(2t+1 - \tan^{-1}\left(A/B\right)\right)$$

برق ۸۱

۱۲

پاسخ ضربهٔ یک سیستم در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-2t}u(t) + bu(t)$$

که در آن $u(t)$ پلّهٔ واحد و b یک ثابت نامعین می‌باشد. خروجی سیستم به ورودی $x(t) = e^{2t}$ به ازای تمام زمانها برابر $y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}$ می‌باشد.

مقدار b کدام است؟

۱) $b = \frac{1}{12}$ ۲) $b = \frac{1}{3}$ ۳) $b = -\frac{1}{12}$ ۴) $b = -\frac{1}{3}$

پاسخ ضربه سیستم LTI در شکل مقابل کدام است؟

پاسخ ضربهٔ یک سیستم در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-2t}u(t) + bu(t)$$

که در آن $u(t)$ پلّهٔ واحد و b یک ثابت نامعین می‌باشد. خروجی سیستم به ورودی $x(t) = e^{2t}$ به ازای تمام زمانها برابر $y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}$ می‌باشد.

مقدار b کدام است؟

۱) $b = \frac{1}{12}$ ۲) $b = \frac{1}{3}$ ۳) $b = -\frac{1}{12}$ ۴) $b = -\frac{1}{3}$

پاسخ ضربه سیستم LTI در شکل مقابل کدام است؟

$e^{at} \longrightarrow \begin{cases} H(a)\,e^{at} & a \in ROC_H \checkmark \\ \not\infty & a \notin ROC_H \end{cases}$

$e^{\overset{a}{(2)}t} \longrightarrow \frac{1}{12}e^{2t} = H(2)\,e^{2t} \longrightarrow \underline{H(2) = \frac{1}{12}}$ $\quad H(s) = ?$

$\frac{dh}{dt} + 2h = e^{-2t}u(t) + bu(t)$

$sH(s) + 2H(s) = \frac{1}{s+2} + b\frac{1}{s}$

$(s+2)H(s) = \frac{s(b+1)+2b}{s(s+2)} \longrightarrow H(s) = \frac{(b+1)s+2b}{s(s+2)^2}$

$\frac{1}{12} = H(2) = \frac{(b+1)\times 2 + 2b}{2(2+2)^2} = \frac{4b+2}{32}$

$\frac{4b+2}{32} = \frac{1}{12} \longrightarrow b = (\frac{8}{3} - 2)/4 = \frac{2/3}{4} = \frac{1}{6}$

برق ۸۴

یک سیستم LTI پایدار توسط معادله دیفرانسیل $4y(t)-\frac{d^2y(t)}{dt^2}=x(t)$ توصیف می‌شود. پاسخ سیستم به کدام ورودی(های) $x_1(t)=e^{-t}$ ، $x_2(t)=e^{-2t}$ و $x_3(t)=e^{6t}$ کراندار است؟

۱) فقط $x_1(t)$ ۲) $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ۳) هر سه ۴) هیچ‌کدام

یک سیستم LTI پایدار توسط معادله دیفرانسیل $4y(t) - \frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t)$ توصیف می‌شود. پاسخ سیستم به کدام ورودی(های) $x_1(t) = e^{-t}$ ، $x_2(t) = e^{-2t}$ و $x_3(t) = e^{6t}$ کراندار است؟

۱) فقط $x_1(t)$ ۲) $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ۳) هر سه ۴) هیچ‌کدام

$$e^{at} \longrightarrow \begin{cases} H(a)\, e^{at} & a \in ROC_H \\ \infty & a \notin ROC_H \end{cases} \qquad ROC_{H(s)} = ?$$

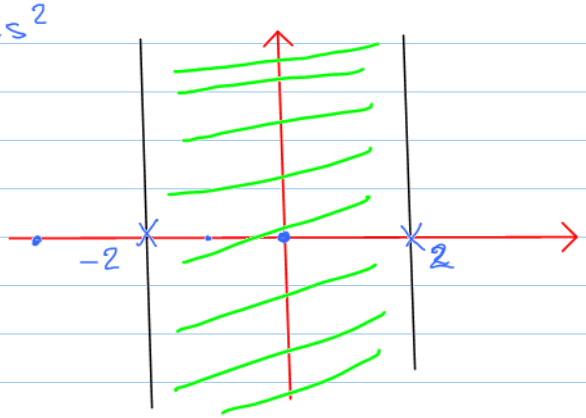
$x_1(t)$: $a = -1$ $\qquad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = ?$

$x_2(t)$: $a = -4$

$x_3(t)$: $a = 6$

$$4y(t) - \frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) \longrightarrow 4Y(s) - s^2 Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{4 - s^2} \longrightarrow H(s) = \frac{1}{4 - s^2}$$



$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt < \infty$ ← پایدار

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-at}\, dt < \infty \longrightarrow a \in ROC_H$

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt < \infty \longrightarrow 0 \in ROC_H$

$x_1(t)$: $e^{-t} \longrightarrow -1 \in ROC_H$ ✓ $\longrightarrow$ خروجی $= e^{-t} \times \frac{1}{4 - (-1)^2} = \frac{1}{3} e^{-t}$ ✓

$x_2(t) = e^{-4t} \longrightarrow -4 \notin ROC_H \longrightarrow$ خروجی $= \infty$

$x_3(t) = e^{6t} \longrightarrow 6 \notin ROC_H \longrightarrow y = \infty$

برق ۸۷

۰ در مورد ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI ، اطلاعات زیر موجود است:

$$\begin{Bmatrix} X(s) = \frac{s+1}{s+2} \\ x(t) = 0, t < 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow y(t) = \frac{2}{5}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{5}e^{2t}u(-t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی دو طرفهٔ $x(t) = e^t$ چه خواهد بود؟

۱) $y(t) = e^{2t} - e^t$ ۲) $y(t) = -e^t$ ۳) $y(t) = \frac{9}{5}e^t$ ۴) $y(t) = -e^t u(t)$

۰ در مورد ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI، اطلاعات زیر موجود است:

$$\left\{\begin{matrix} X(s)=\frac{s+1}{s+3} \\ x(t)=0, t<0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow y(t)=\frac{2}{5}e^{-3t}u(t)-\frac{3}{5}e^{3t}u(-t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی دو طرفهٔ $x(t)=e^{t}$ چه خواهد بود؟

۱) $y(t)=e^{3t}-e^{t}$ ~~$y(t)=e^{3t}-e^{t}$~~

۲) $y(t)=-e^{t}$ ✓

۳) $y(t)=\frac{9}{5}e^{t}$

۴) $y(t)=-e^{t}u(t)$ ~~$y(t)=-e^{t}u(t)$~~

$e^{1t} \longrightarrow$ | $H(1)\,e^{t}$ ~~∞~~ $\quad 1 \in ROC_H$ ~~$1 \notin ROC_H$~~ $= H(1)e^{t} \rightarrow H(s)$

$X(s)=\frac{s+1}{s+3}$; $\quad Y(s)=\frac{2}{5}\frac{1}{s+3}+\frac{3}{5}\frac{1}{s-2}$

$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{s+3}+\frac{3}{s-2}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{5s+5}{(s+3)(s-2)}\right)$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{s+1}{(s+3)(s-2)}}{\frac{s+1}{s+3}}=\frac{1}{s-2}$$

$e^{t} \longrightarrow H(1)\,e^{t}=\frac{1}{1-2}e^{t}=-1e^{t}$ ✓

تبدیل لاپلاس یک طرفه:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

نکته! هرگاه در سؤال درمورد شرایط اولیه ($x(0^+)$ ، $y(0^+)$ ، $x(0^-)$ ، $y(0^-)$) گفته نشده باشد باید از تبدیل لاپلاس یک طرفه و خاصیت مشتق‌گیری استفاده کنیم.

$$x(t) \longrightarrow X(s) \quad , \quad ROC_x$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s) - x(0^+) \quad , \quad ROC = ROC_x$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \qquad s^2X(s) - sx(0^+) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0^+} \quad ; ROC = ROC_x$$

مثال. برق ۹۷

اگر $r(t)$ پاسخ یک سیستم LTI باشد در این صورت پاسخ سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ با شرایط $x(0^+) = 0$ ، $t > 0^+$ کدام است؟

۱) $zp(z)r$ $\qquad$ ۲) $\int_{0^+}^{\infty} \frac{z^2p}{z^2}(z-t)x\, dz$ $\qquad$ ۳) $\int_{-\infty}^{\infty} zp(z-t)x(z)r\, dz$

۴) $\int_{0^+}^{\infty} \frac{zp}{z}(z)xr\, dz + zp(z-t)r$ $\qquad$ ۵) $r(t)x(0^+) + zp(z-t)r$ $\qquad$ ۶) $r(t)r(0^+) + zp(z-t)r(z)x\, dz$

تست ۹۱.

تابع تبدیل یک سیستم LTI برابر با $H(s)=\frac{2s-1}{s^2+3s+2}$ است. خروجی حالت صفر این سیستم به ازای یک ورودی معین $y_1(t)=-\frac{1}{2}+3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}$ است. اما با اعمال همان ورودی به ازای شرایط اولیه غیرصفر خروجی $y(t)=-\frac{1}{2}+5e^{-t}-\frac{9}{2}e^{-2t}$ می‌باشد. شرایط اولیه کدام است؟

1) $y(0^+)=2,\ y'(0^+)=-2$

2) $y(0^+)=2,\ y'(0^+)=0$

3) $y(0^+)=2,\ y'(0^+)=2$

4) $y(0^+)=0,\ y'(0^+)=2$

جلسه 59 سیگنال

ارتباط علّی و پایداری با ROC:

$x(t) \longrightarrow X(s)\ ,\ ROC_x$

$x(t)$ علّی $\longleftarrow$ ROC_x دست راستی و شامل ∞ و باشد.

درجه صورت $X(s) \geq$ درجه مخرج $X(s)$

ROC_x دست راستی و شامل ∞ $\longleftarrow$ $x(t)$ علّی

یعنی اگر ROC_x دست راستی و درجه صورت $X(s)$ کمتر یا مساوی درجه مخرج بوده و یا $X(\infty)$ عددی محدود شود یعنی $x(t)$ علّی است.

$x(t)$ ضد علّی $\longleftarrow$ ROC_x دست چپی و شامل $-\infty$

درجه صورت $\leq$ درجه مخرج $X(s)$

ROC_x دست چپی و شامل $-\infty$ $\longleftarrow$ $x(t)$ ضد علّی

$x(t)$ پایدار $\longleftarrow$ ROC_x شامل محور $j\omega$ $\longleftarrow$ تبدیل فوریه دارد.

ROC_x شامل محور $j\omega$ $\longleftarrow$ $x(t)$ پایدار

$x(t)$ علّی و پایدار $\longleftarrow$ ROC_x دست راستی، شامل ∞ و محور $j\omega$

تمام قطبهای $X(s)$ سمت چپ محور $j\omega$

ROC_x دست راستی و تمام قطبهای $X(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ $\longrightarrow$ $x(t)$ علّی و پایدار

هروقت دو خاصیت درکنار هم دیدیم دیدیم وقتی میتوانند خاصیت اول را فراهم کنند درست است و درستی خاصیت دوم را بررسی کنید.

$X(s)$ $\longrightarrow$ علّی و ناپایدار $\longrightarrow$ علّی است $\longrightarrow$ ROC $\longrightarrow$ پایدار؟

برق ۸۳

سیستم پیوسته LTI با معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x(t)$ را داریم. وارون این سیستم می‌تواند:

۱) علّی و ناپایدار باشد.

۲) علّی و پایدار باشد.

۳) ضدعلّی و پایدار باشد.

۴) گزینه‌ها همگی ناصحیح هستند.

سیستم پیوسته LTI با معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x(t)$ را داریم. وارون این سیستم می‌تواند:

۱) علّی و ناپایدار باشد.
۲) علّی و پایدار باشد.
۳) ضدعلّی و پایدار باشد.
۴) گزینه‌ها همگی ناصحیح هستند.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x$$ حالت علّی و پایداری ← تبدیل لاپلاس

$$s^2Y(s) + sY(s) - 6Y(s) = s^2X(s) - sX(s) - 2X(s) \qquad H(s) = ?$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = ? \qquad H = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - s - 2}{s^2 + s - 6}$$

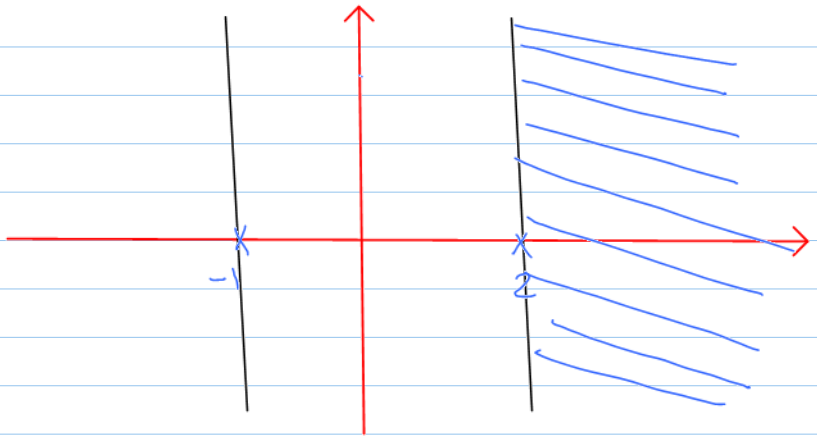
سیستم با $H(s) = \frac{s^2-s-2}{s^2+s-6}$ وارون ← معکوس رابطه سیستم

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s^2+s-6}{s^2-s-2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{s^2+s-6}{s^2-s-2}} \rightarrow \qquad s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2)$$

۱) وقتی گفتیم علّی است بود باتوجه به ROC پایداری را بررسی می‌کنیم.

علّی ← ROC دست راستی و تا بی نهایت



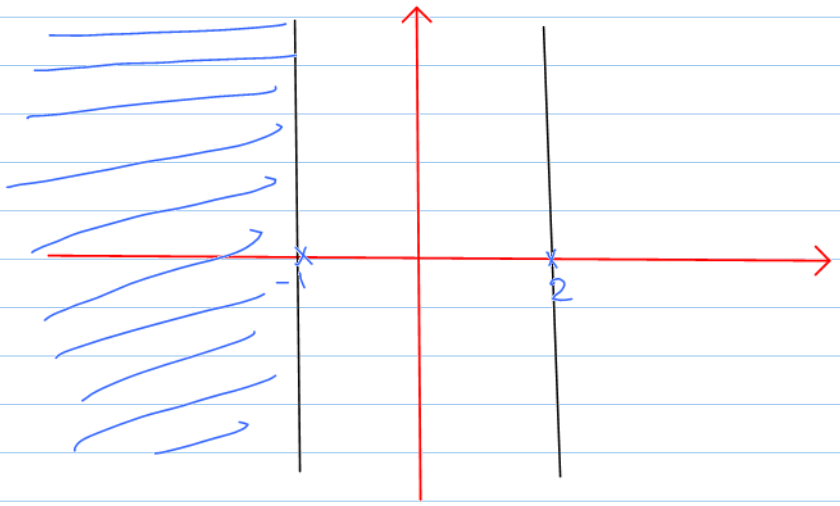
اگر علّی باشد ← $ROC = Re(s) > 2$

$j\omega$ خود $\notin ROC$

⇓

ناپایدار

~~نکته~~ نکته : سیستم هنوز علی است ← ROC دست چپی و شامل $\infty-$



ناپایدار ← ROC خود شامل ∞ نمی‌باشد

اگر سیستم هنوز علی باشد قطعاً ناپایدار است.

۸۹

معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته به صورت $y'' - y' - 2y = x$ داده شده است. این سیستم نمی‌تواند ..... باشد.

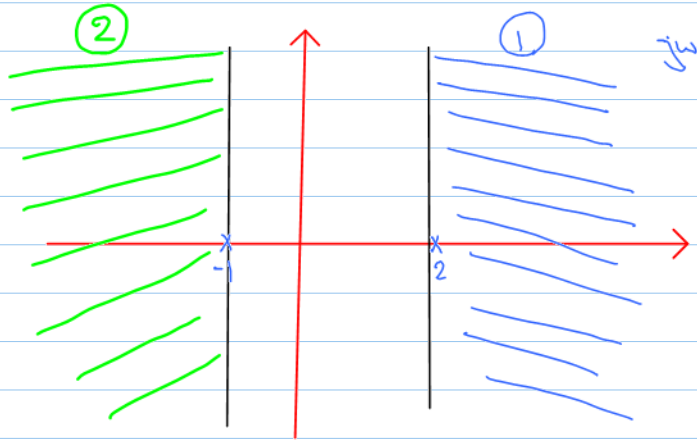
۱) ناپایدار و غیرعلّی ۲) ناپایدار و علّی ۳) پایدار و علّی ۴) پایدار و غیرعلّی

معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته به صورت $y'' - y' - 2y = x$ داده شده است. این سیستم نمی‌تواند ..... باشد.

۱) ناپایدار و غیرعلّی ۲) ناپایدار و علّی ۳) پایدار و علّی ۴) پایدار و غیرعلّی

$y'' - y' - 2y = x$ تبدیل لاپلاس $\rightarrow H(s)$

$s^2 Y(s) - s Y(s) - 2Y(s) = X(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$



۱) ناپایدار ← ROC_H شامل محور jω

ناپایدار ← ROC_H = ① یا ②

① ← دست راستی و شامل ∞ ← علّی

② ← سمت چپی و شامل ∞- ← هم علّی هم غیرعلّی

اگر ناپایدار باشد نمی‌تواند علّی یا هم علّی باشد.

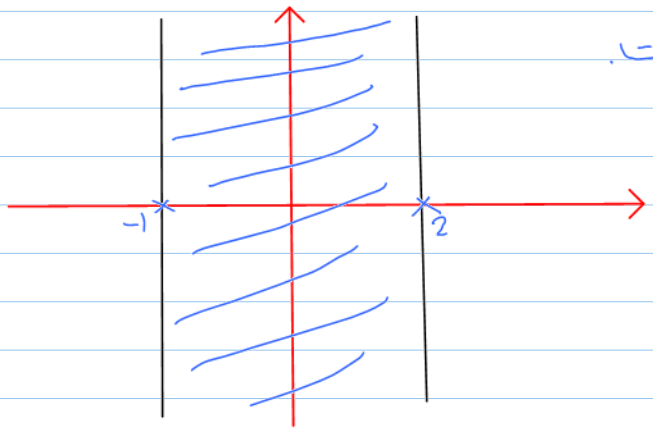
۳) اگر پایدار باشد ←

↓

ROC دست راستی است ← علّی است.

اگر پایدار باشد نمی‌تواند علّی باشد.

ROC_H شامل محور jω



سیستم را علی گوییم اگر $h(t) = 0 \quad \forall t<0$ ← $h(t)$ دست راستی ← ROC_H دست راستی و شامل ∞

" " ضد علی " " "

۹۲

اگر تابع سیستم یک سیستم خطی نامتغیر با زمان برابر $H(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ باشد، به طوریکه a و b و c اعداد حقیقی و $a<b<0<c$ و ناحیه همگرایی آن $b<Re\{s\}<c$ باشد، آن‌گاه در مورد علی بودن و پایداری آن چه می‌توان گفت؟

۱) سیستم علی و پایدار است.

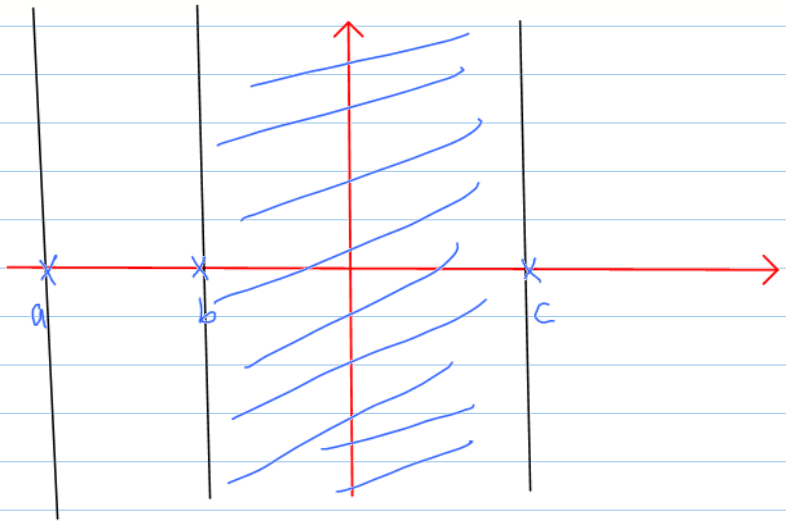
۲) سیستم غیرعلی و ناپایدار است.

۳) سیستم علی و ناپایدار است.

۴) سیستم غیرعلی و پایدار است.

اگر تابع سیستم یک سیستم خطی نامتغیر با زمان برابر $H(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ باشد، به طوریکه a و b و c اعداد حقیقی و $a<b<0<c$ و ناحیه همگرایی آن $b<Re\{s\}<c$ باشد، آن‌گاه در مورد علی بودن و پایداری آن چه می‌توان گفت؟

۱) سیستم علی و پایدار است.
۲) سیستم غیرعلی و ناپایدار است.
۳) سیستم علی و ناپایدار است.
۴) سیستم غیرعلی و پایدار است. ✓



ROC_H دست راستی سیستم غیرعلی

$\in ROC_H$ شود پس پایدار

۹۷

سیگنال غیرعلّی $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $x(s)=\frac{s+۲}{s-۲}$ ورودی یک سیستم LTI و پاسخ به این ورودی برابر $-\frac{۲}{۳}e^{۲t}u(-t)+\frac{۱}{۳}e^{-t}u(t)$ است. این سیستم:

($u(t)$ نشانگر تابع پلّه می‌باشد.)

۱) غیرعلّی و ناپایدار است.

۲) علّی و ناپایدار است.

۳) غیرعلّی و پایدار است.

۴) علّی و پایدار است.

سیگنال غیرعلّی $x(t)$ با تبدیل لاپلاس $x(s)=\frac{s+2}{s-2}$ ورودی یک سیستم LTI و پاسخ به این ورودی برابر $-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$ است. این سیستم:

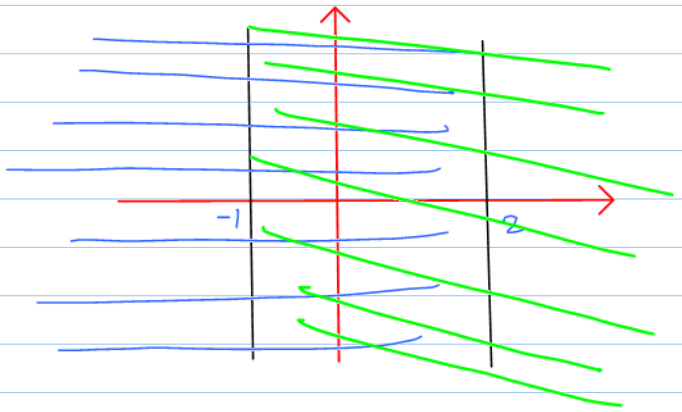
($u(t)$ نشانگر تابع پلّه می‌باشد.)

۱) غیرعلّی و ناپایدار است.
۲) علّی و ناپایدار است.
۳) غیرعلّی و پایدار است.
۴) علّی و پایدار است.

RoC_H ⟨ ۲ ، ۴

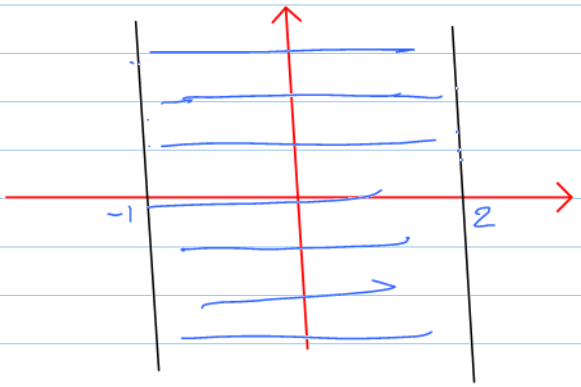
$H(s)=?$ $\quad H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ $\quad y(t)=+\frac{2}{3}(-e^{2t}u(-t))+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

$Y(s)=\frac{2}{3}\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{Re(s)<2}+\frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re(s)>-1}$



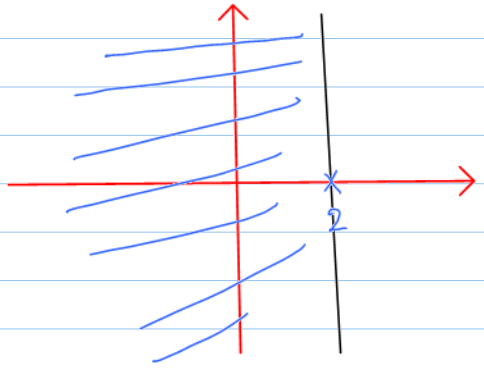
$Y(s)=\frac{1}{3}\frac{3s}{(s-2)(s+1)}=\frac{s}{(s-2)(s+1)}$

$RoC_y=-1<Re(s)<2$



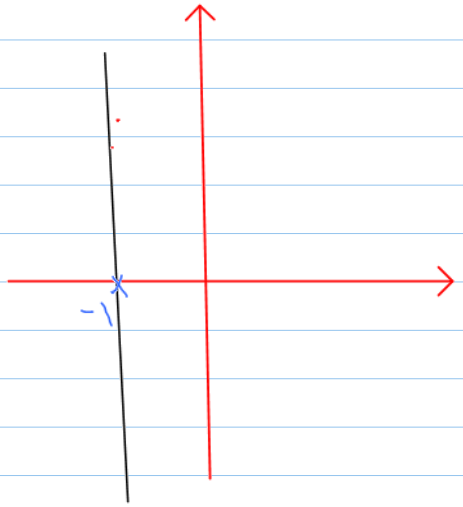
$X(s)=\frac{s+1}{s-2}$

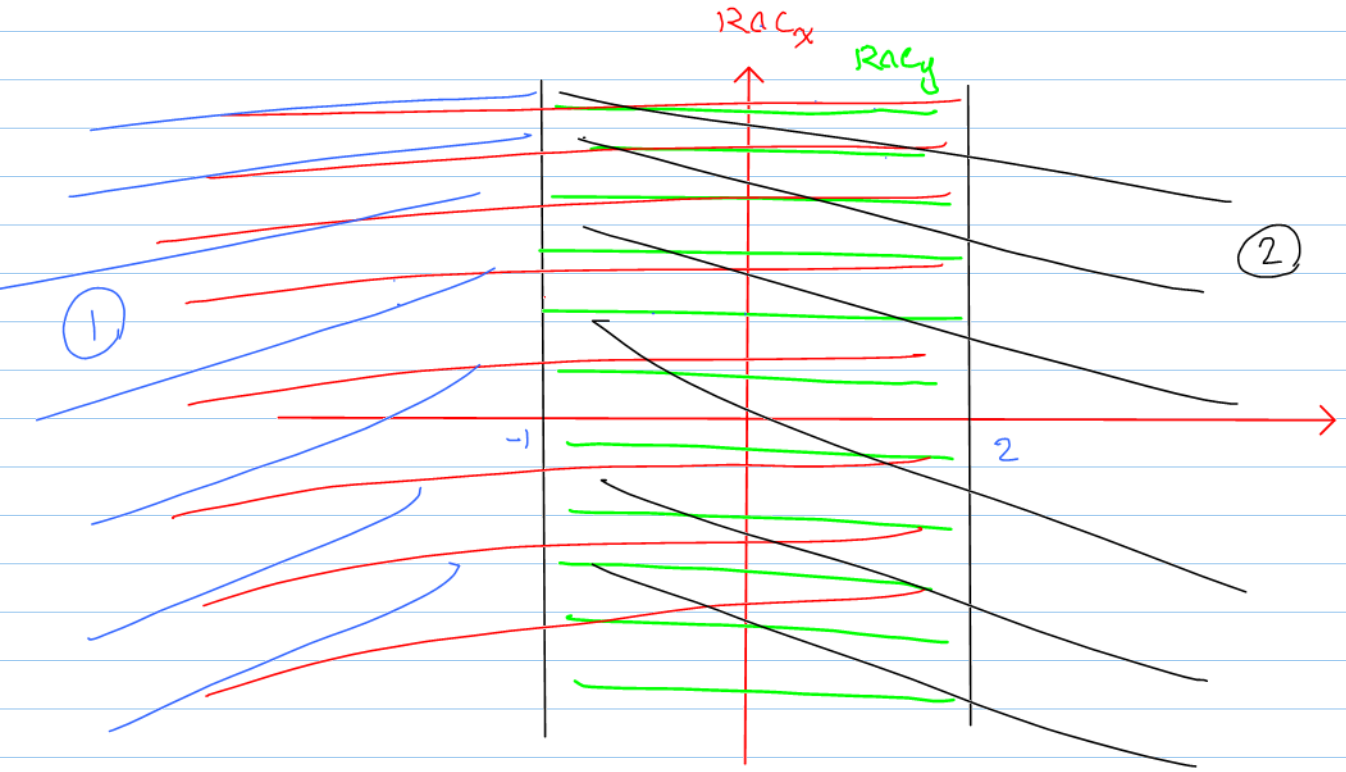
غیرعلّی ← RoC: سمت راست



$$\begin{cases} Y(s)=\frac{s}{(s-2)(s+1)} \quad ; \quad -1<Re(s)<2 \\ X(s)=\frac{s+1}{s-2} \quad ; \quad Re(s)<2 \end{cases}$$

$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s}{(s+1)^2}$; $RoC_H=?$





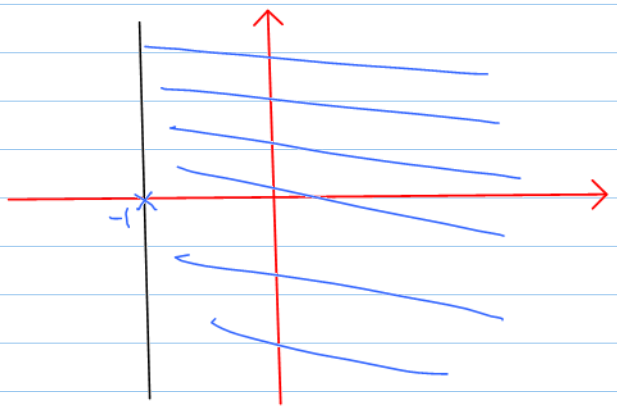
ROC_H می‌تواند ① یا ② باشد؟

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ← H و y و X در عملیات ریاضی تشکیل شده‌اند.

ROC_H با ROC_y و ROC_x حتماً یک دارند.

~~①~~ → $ROC_y \cap ROC_H = \phi$

② → $ROC_x \cap ROC_y \cap ROC_H \neq \phi$ ✓



$H(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$

ROC_H سمت راست و شامل ∞ ← علّی

ROC_H شامل $j\omega$ ← پایدار

جلسه ۶۵ سیگنال

قضیه مقدار اولیه و نهایی:

$X(s)$ و ROC_x را بدهد ← در مورد $x(t)$ در زمان 0 یا ∞ چه می‌توان گفت؟

$$X(s) = \frac{1}{s-2} \quad , \quad ROC = Re(s) > 2 \longrightarrow x(t) = e^{2t} u(t)$$

$x(0) = ?$ $\qquad$ $x(\infty) = ?$

$$t = 0 \longrightarrow x(0) = e^{0} \times u(0) = 1$$

$$t = \infty \longrightarrow x(\infty) = e^{2\times\infty} u(\infty) = \infty$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^3+3s^2+1} \quad ; \quad ROC = Re(s) > \tfrac{1}{2} \longrightarrow x(t) = ?$$

$x(0) = ?$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,X(s)$$ با شرایطی

$$x(\infty) = \lim s\,X(s)$$

اگر $X(s)$ را بدهد ← با شرایطی روی $x(t)$:

- $x(t) = 0 \quad t<0$
- $x(t) \neq f(\delta(t), \delta'(t), \dots)$ $\qquad x(t) = u(t) + \sin(t)\,\delta(t-1)$
- $x(t) \neq \cos(t)\,\delta(t)$

$$x(0^+) = \lim_{s\to 0} s\,X(s) \qquad x(t) = \sin(t) \qquad x(0^+) = 0$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^3+6s^2+11s+6} \quad ; \quad RAC_x = Re(s) > -1 \qquad x(0^+) = ?$$

① RAC_x راست‌رو ✓

$$\rightarrow \quad x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

② $1 \leq 3$ ✓

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+s}{s^3+6s^2+11s+6} = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^3} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} = 0$$

$$X(s) = 1 + \frac{1}{s} \quad ; \quad ROC = Re(s) > 0 \qquad x(0^+) = ?$$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\left(1+\frac{1}{s}\right) = \infty$$

$$x(t) = \delta(t) + u(t) \qquad x(0^+) = \overset{1}{\cancel{\delta(0)}} + \overset{1}{\cancel{u(0)}} = 2$$

① RAC_x راست‌رو

② $X(s) = \frac{s+1}{s^1}$; $1 \neq 1 \rightarrow$ ✗

$x(t) \longrightarrow X(s)$, ROC_x

قضیه مقدار اولیه :

هرگاه $X(s)$ را بدهد و $x(t)$ در لحظه $t=0$ را بخواهد داد :

اگر $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر بوده و در لحظه $t=0$ شامل ضربه یا مشتقات ضربه نباشد آنگاه $x(0^+) = \lim_{s \to +\infty} s X(s)$

* اگر ROC_x دست راستی بوده و درجه صورت $X(s)$ کمتر از درجه مخرج $X(s)$ باشد $x(0^+) = \lim_{s \to +\infty} s X(s)$ *

قضیه مقدار نهایی : اگر $x(t)$ یک سیگنال دست راستی بوده و عاری قطبهای مفرد $sX(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ باشد آنگاه $x(\infty) = \lim_{s \to 0} s X(s)$ و در غیر این صورت $x(\infty) = \infty$

اگر ROC_x دست راستی بوده و قطبهای $sX(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ باشد $x(\infty) = \lim_{s \to 0} s X(s)$

و در غیر اینصورت $x(\infty) = \infty$

برق ۹۲

اگر سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $x(s) = \frac{3s+7}{s^3+6s^2+11s+6}$ باشد و $y(t) = x(2t)$ و بدانیم $x(t)$ برای $t < 0$ صفر است. مقدار حد $A = \lim_{t \to 0^+} \frac{dy(t)}{dt}$، برابر کدام است؟

۱) صفر

۲) ۶

۳) ۳

۴) $\frac{7}{6}$

$x(t)$ دستگاه پایدار ①

$$X(s) = \frac{3s+7}{s^3+6s^2+11s+6}$$ ②

$$y(t) = x(2t)$$ ③

$$A = \lim_{t\to 0^+} \frac{dy}{dt} = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = ?$$

$f(t)$

$f(t) \longrightarrow F(s)$, ROC_f

$$f(t)|_{t=0^+} = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

مشتق اول

$\frac{dy}{dt} \longrightarrow sY(s)$

$f(t)$ $\quad F(s)$

مشتق اول

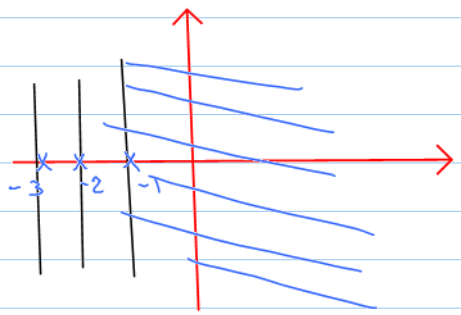
$$A = f(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,sY(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s)$$

$x(t) \longrightarrow X(s)$; ROC_x

$y = x(2t) \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right)}_{Y(s)}$;

$$Y(s) = \frac{1}{2}\,\frac{3\frac{s}{2}+7}{(\frac{s}{2})^3+6(s/2)^2+11(s/2)+6}$$; ROC_y

$$X(s) = \frac{3s+7}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



$ROC_x = Re(s) > -1$

$x(t) \longrightarrow X(s), \quad Re(s) > -1$

$x(2t) \longrightarrow \frac{1}{2} X(\frac{s}{2}), \quad Re(\frac{s}{2}) > -1 \quad Re(s) > -2$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2}s + 7}{\frac{1}{8}s^3 + \frac{6}{4}s^2 + \frac{11}{2}s + 6} \; ; \; ROC_y = Re(s) > -2$$

اشتباه رایج: ✓ (2) ✓ (1)

$\frac{dy}{dt} \longrightarrow sY(s)$

$f(t) \longrightarrow F(s), ROC_f$

$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

① ROC_f دست راستی

② درجه صورت $F(s)$ > درجه مخرج $F(s)$

① $ROC_{sY(s)}$ دست راستی ✓

② درجه صورت $sY(s)$ > درجه مخرج $sY(s)$

$ROC_y = ROC_{sY(s)}$ تنها محدوده‌ای که هر دو را شامل شود

$g(t) \longrightarrow Y(s), \quad Re(s) > -2$

$\frac{dy}{dt} \longrightarrow sY(s), \quad Re(s) > -2 - \{\pm\infty\}$

$$sY(s) = s\left(\frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2}s + 7}{\frac{1}{8}s^3 + \frac{6}{4}s^2 + \frac{11}{2}s + 6}\right) = \frac{\frac{3}{4}s^2 + 7s}{\frac{1}{8}s^3 + \frac{6}{4}s^2 + \frac{11}{2}s + 6}$$

$$A = \underbrace{f(0)}_{\frac{dy}{dt}} = \lim_{s \to \infty} s \underbrace{F(s)}_{sY(s)} = \lim_{s \to \infty} \frac{\frac{3}{4}s^3 + 7s^2}{\frac{1}{8}s^3 + \frac{6}{4}s^2 + \frac{11}{2}s + 6} = \frac{3/4}{1/8} = 6$$

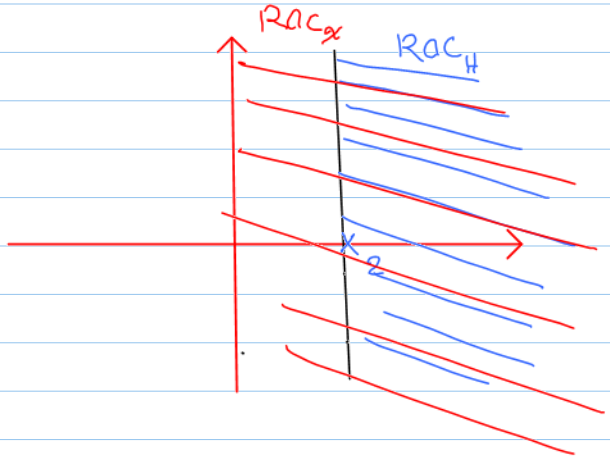
برق ۸۴

مقدار نهایی پاسخ زمانی سیستم LTI علّی باتابع تبدیل $H(s)=\frac{1}{s-2}$ به ورودی $x(t)=3u(t)$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{-3}{2}$ ۳) ۳ ۴) بی‌نهایت

① سیستم علی ② $H(s) = \frac{1}{s-2}$ ③ $x(t) = 3u(t) \rightarrow$

$$y(t)\Big|_{t=\infty} = y(\infty) = ?$$



$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$

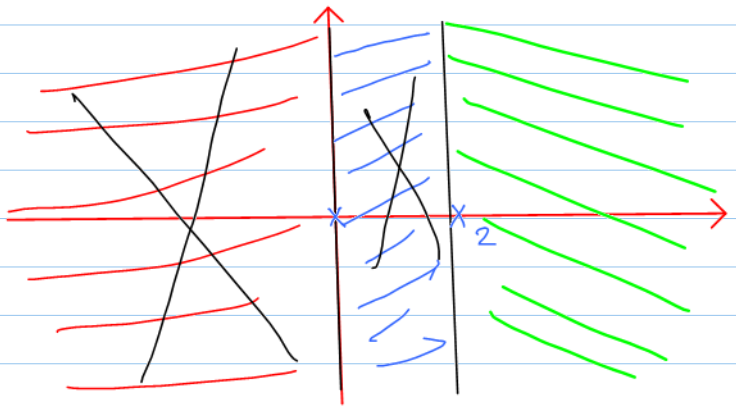
$$X(s) = \frac{3}{s} \; ; \; Re(s) > 0$$

$$H(s) = \frac{1}{s-2} \; ;$$

علی ← ROC دست راستی و
نزدیک ∞

$$Y(s) = \frac{3}{s} \times \frac{1}{s-2} = \frac{3}{s(s-2)}$$

$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$



Y ، X ، H در علی بودن ← $ROC_x \cap ROC_y \cap ROC_H \neq \Phi$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s-2)} \; , \quad ROC_y = Re(s) > 2$$

$y(\infty) = ?$

① ROC دست راستی ✓ ② قطبهای $sY(s)$ کدام چپ محور jw

$$sY(s) = \frac{3}{s-2} \rightarrow s=2 \rightarrow \text{کدام راست محور jw} \rightarrow y(\infty) = \infty$$

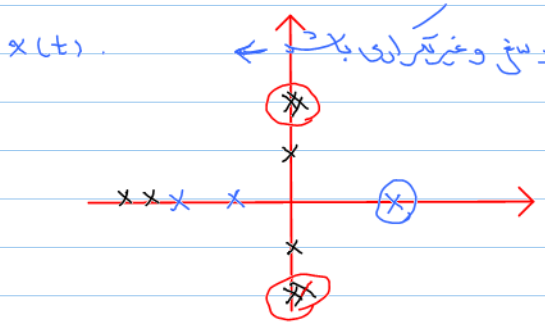
مقدار نهایی :

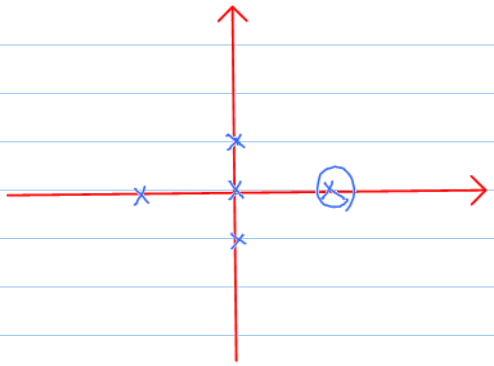
RoC نوع از دست راستی ← باید $x(t)$ را حساب کنیم و $x(\infty)$ را از روی $x(t)$ بدست آوریم.

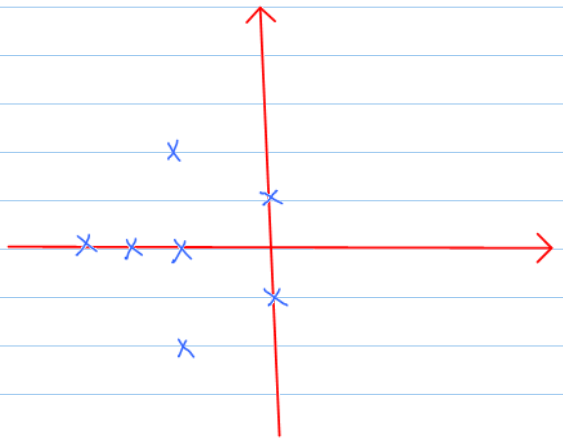
RoC دست راستی ← همه قطبهای $sX(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ ← $x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$

حداقل یک قطب $sX(s)$ سمت راست باشد یا قطب مکرری روی محور $j\omega$ داشته باشد $x(\infty) = \infty$

قطبهای $sX(s)$ سمت چپ باشد محور $j\omega$ و غیرتکراری باشد ← $x(t)$.







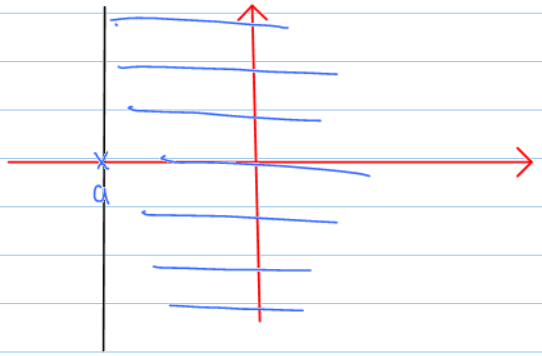
مقدار اولیه :

اگر RoC دست راستی باشد یا درجه صورت $X(s)$ بزرگتر مساوی درجه مخرج باشد

باید $x(t)$ را حساب کنیم

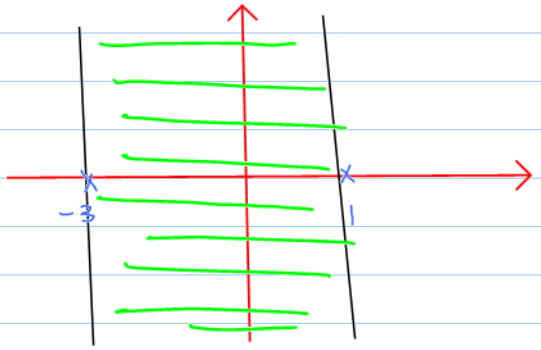
عکس تبدیل لاپلاس:

$X(s) = \frac{1}{s-2}$; ROC = $Re(s) > 2$ $\longrightarrow$ $x(t) = ?$



$e^{at}\,u(t)$

$X(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-1)}$ $\qquad$ $ROC = -3 < Re(s) < 1$

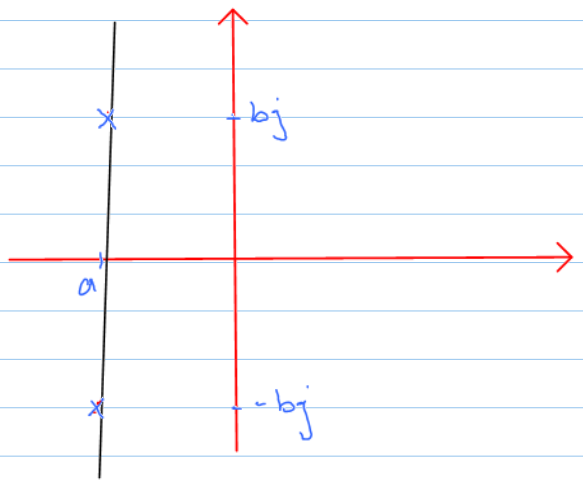


$x(t) = A\,e^{1t}u(t) + B\,e^{-3t}u(t)$

$x(t) = \frac{3}{4}e^{t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$

$$A = \lim_{s\to 1} (s-1)\,\frac{s+2}{(s+3)(s-1)} = \frac{3}{4}$$

$$B = \lim_{s\to -3} (s+3)\,\frac{s+2}{(s+3)(s-1)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$



$A\,e^{at}\sin(bt)\begin{cases} u(t) \\ u(-t) \end{cases}$

محاسبه عکس تبدیل لاپلاس:

برای محاسبه عکس تبدیل لاپلاس $X(s)$ ، ابتدا آن را به کسرهای جزئی ساده می‌کنیم و آنگاه داریم.

① $s=a$ قطب مرتبه اول بود و ROC_x در سمت راست خط $Re(s)=a$ قرار دارد:

یعنی عکس تبدیل لاپلاس این عامل $Ae^{at}u(t)$ است که A با قیافته $X(s)$ در $s=a$ است.

$$A = \lim_{s \to -a} (s+a)X(s)$$

② $s=a$ قطب مرتبه اول و ROC_x سمت چپ خط $Re(s)=a$ $\leftarrow$ $Be^{at}u(-t)$

$$B = \lim_{s \to -a} (s+a)X(s)$$

③ $s=a\mp bj$ قطب مرتبه اول و ROC_x سمت راست $Re(s)=a$

$Ae^{at}\sin(bt)u(t)$ یا $Ae^{at}\cos(bt)$

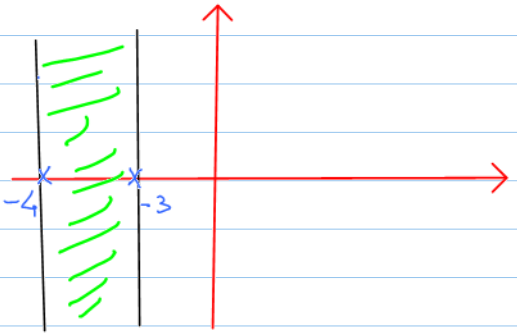
A: با قیافته $X(s)$ در قطب $s=a\mp bj$

④ $s=a\mp bj$ قطب مرتبه اول و ROC_x سمت چپ $Re(s)=a$

$Ae^{at}\sin(bt)u(-t)$ یا $Ae^{at}\cos(bt)u(-t)$

مثال:

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \qquad -4 < Re(s) < -3$$



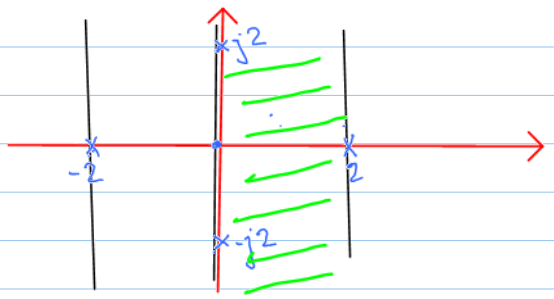
$$x(t) = Ae^{-3t}u(-t) + Be^{-4t}u(t)$$

$$A = \lim_{s \to -3} (s+3)X(s) = \frac{-1}{1} = -1$$

$$B = \lim_{s \to -4} (s-(-4))X(s) = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$x(t) = -e^{-3t}u(-t) + 2e^{-4t}u(t)$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4} - \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s-2} \qquad 0 < \mathrm{Re}\{s\} < 2$$



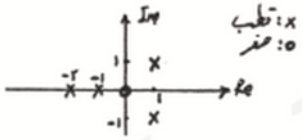
$$x(t) = A e^{-2t} u(t) + B e^{0t} \cos(2t) u(t) + C e^{2t} u(-t)$$

$$A = -5 \qquad B = 1 \qquad C = -1$$

برق ۸۲

آزاد

در سیستم با صفرها و قطب‌های نشان داده شده در شکل زیر به ازای ناحیه همگرایی $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$ پاسخ ضربه سیستم برابر است با:



۱) $h(t) = \left[e^{-2t} - e^{-t} + e^{t}\sin(t)\right] u(t)$

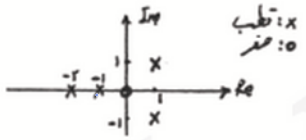
۲) $h(t) = \left[-e^{-2t} + e^{-t} - e^{t}\sin(t)\right] u(-t)$

۳) $h(t) = \left[e^{-2t}u(t) + [e^{-t} - e^{t}\sin(t)]\, u(-t)\right]$

۴) $h(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t) - e^{t}\sin(t)\, u(-t)$

آزمون ۷

در سیستم با صفرها و قطب‌های نشان داده شده در شکل زیر به ازای ناحیه همگرایی $-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$ پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

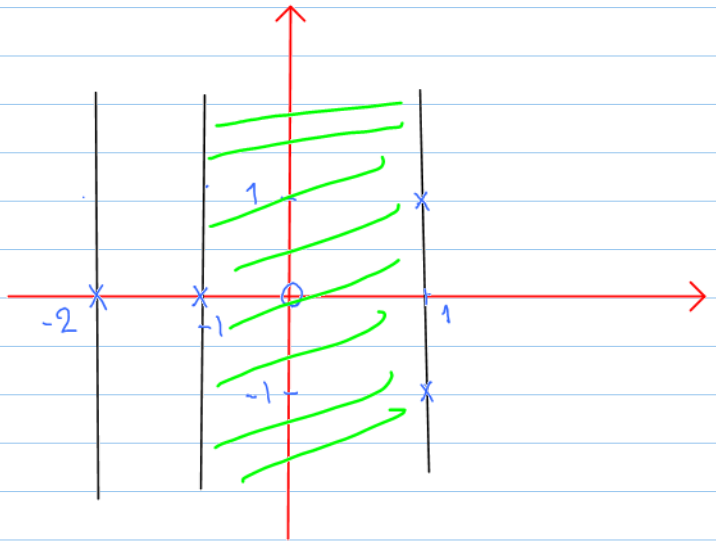


۱) $h(t) = \left[e^{-2t} - e^{-t} + e^{t}\sin(t)\right] u(t)$

۲) $h(t) = \left[-e^{-2t} + e^{-t} - e^{t}\sin(t)\right] u(-t)$

۳) $h(t) = \left[e^{-2t}u(t) + [e^{-t} - e^{t}\sin(t)]\, u(-t)\right]$

۴) $h(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t) - e^{t}\sin(t)\, u(-t)$ ✓



$h(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-t}u(t) + Ce^{t}\sin(t)u(-t)$

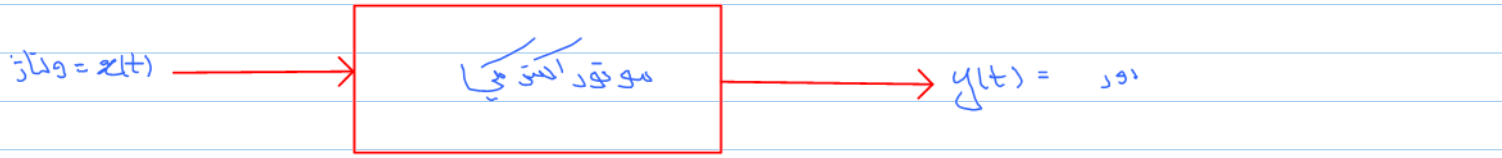
اعمال فصل تبدیل لاپلاس

جلسه ۱۱ سیگنال

« تبدیل Z »

مقدمه: $x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

هدف: انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس: فهمیدن مولفه‌های فرکانسی یک سیگنال



تابع موتور الکتریکی: $H(s) = \frac{s-20}{s(s+150)}$ → $s=20$ صفر — قطبها $s=0$ و $s=150$

$x(t)$: ولتاژ اعمالی

$y(t)$: دور موتور

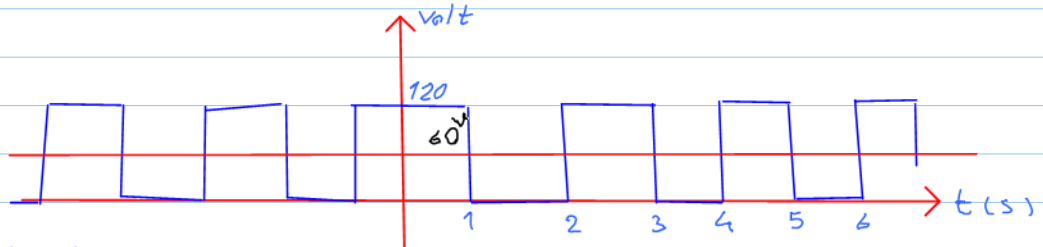
$s=20$

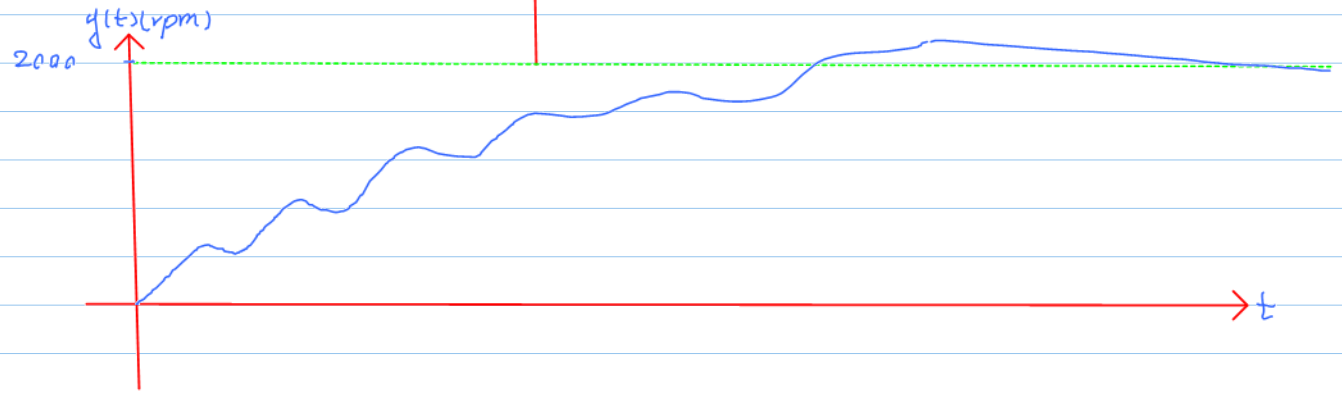
$x(t) = \frac{120}{=} \sin(20t) \longrightarrow y(t) = 0$

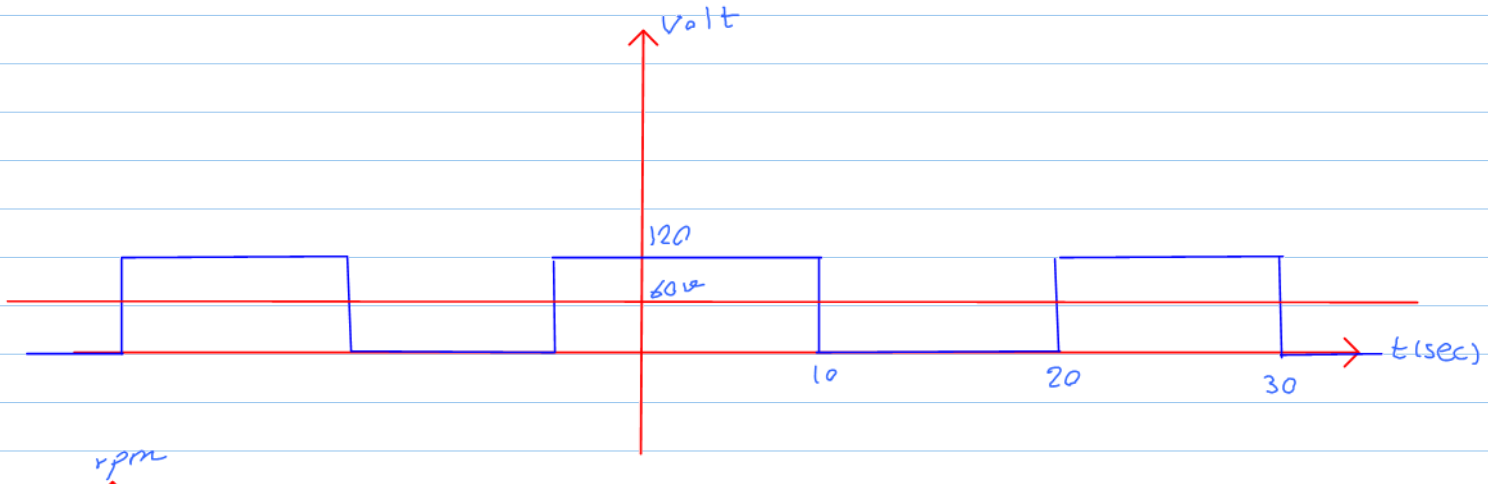
$s=150$

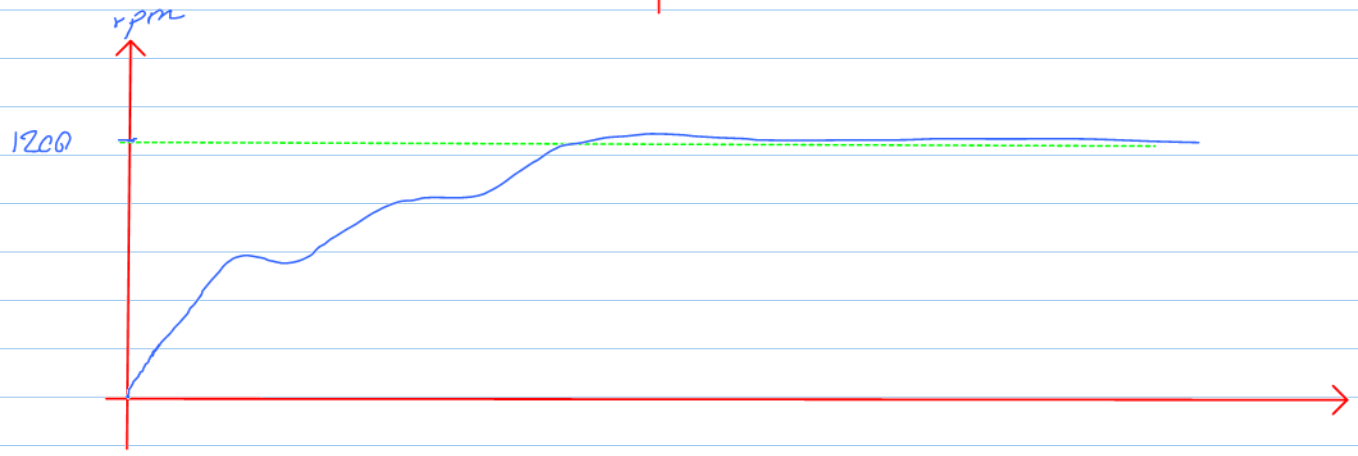
$x(t) = \frac{120}{=} \sin(150t) \longrightarrow y(t) = \infty$ → موتور منفجر می‌شود

$x(t) \Rightarrow$









$x_1(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/sec

$x_1(t)$: مثلثی فرکانسهای ضرب صحیح از π است.

$x_2(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ rad/sec . مثلثی فرکانسهای ضرب صحیح از $\frac{\pi}{10}$ است

تبدیل های مختلف:

$a_k \rightarrow (jk\omega_0)$

① سیگنالهای متناوب زمان گسسته و پیوسته ← سری فوریه : وزن فرکانسهای نوعی من

② " متناوب و نامتناوب " " " " " ← تبدیل فوریه : " " " " $X(j\omega)$

③ " " " پیوسته ← تبدیل لاپلاس : " " " مختلط $X(s)$ $s=\sigma+j\omega$

④ " " " گسسته ← تبدیل Z : " " " "

تبدیل Z : وزن فرکانسهای مختلط در سیگنال زمان گسسته $X(z)$

تبدیل لاپلاس: سنجش میزان شباهت سیگنال $x(t)$ با e^{st}

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

وزن وکتور $X(2+j1) = x(t), 2+j1$

میزان شباهت $x(t), e^{(2+j1)t}$

$$x(t) \xrightarrow{t \to n} x[n]$$

$$e^{st} \xrightarrow{t \to n} e^{sn}$$

تبدیل z: سنجش میزان شباهت $x[n]$ با $z^n = e^{sn}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

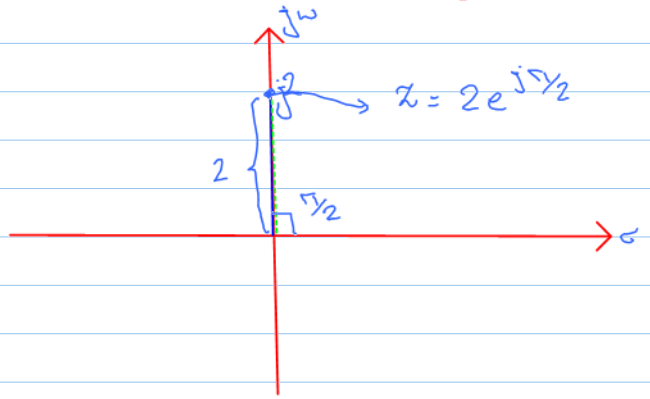
$$e^s \longrightarrow z$$

فرق لاپلاس و z

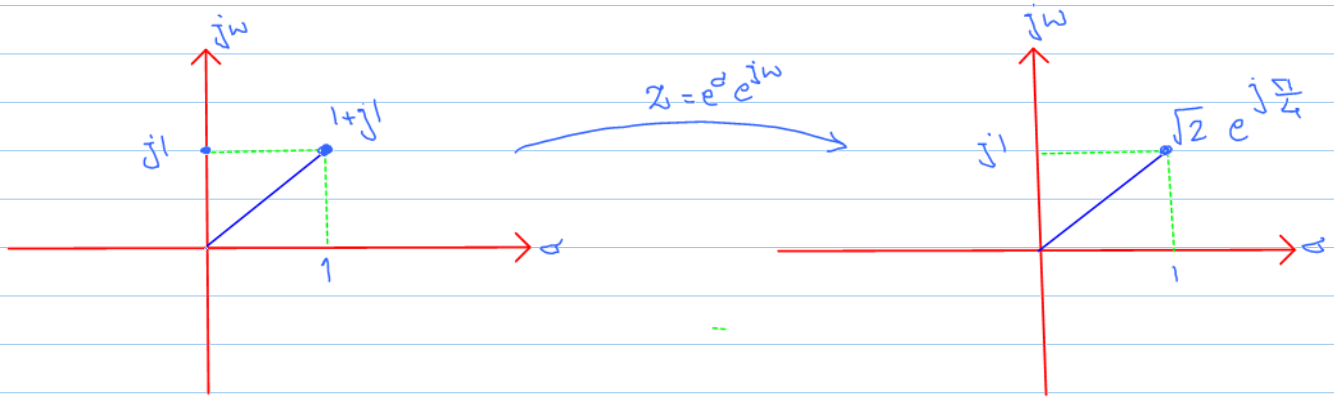
$$z = e^s = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} e^{j\omega} = r e^{j\omega}$$

$$z = r e^{j\omega}$$

z: عدد مختلط با اندازه r و فاز ω



$$z = 2e^{j\pi/2}$$

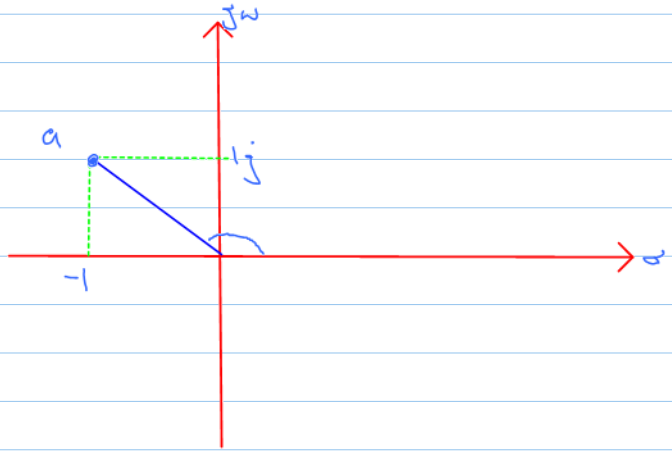


حوزه s

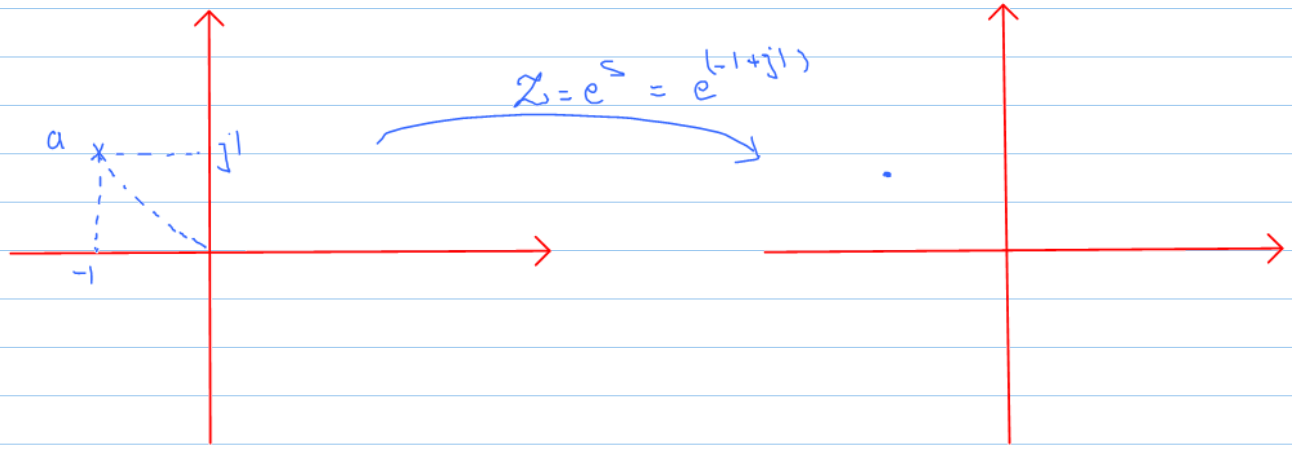
حوزه z

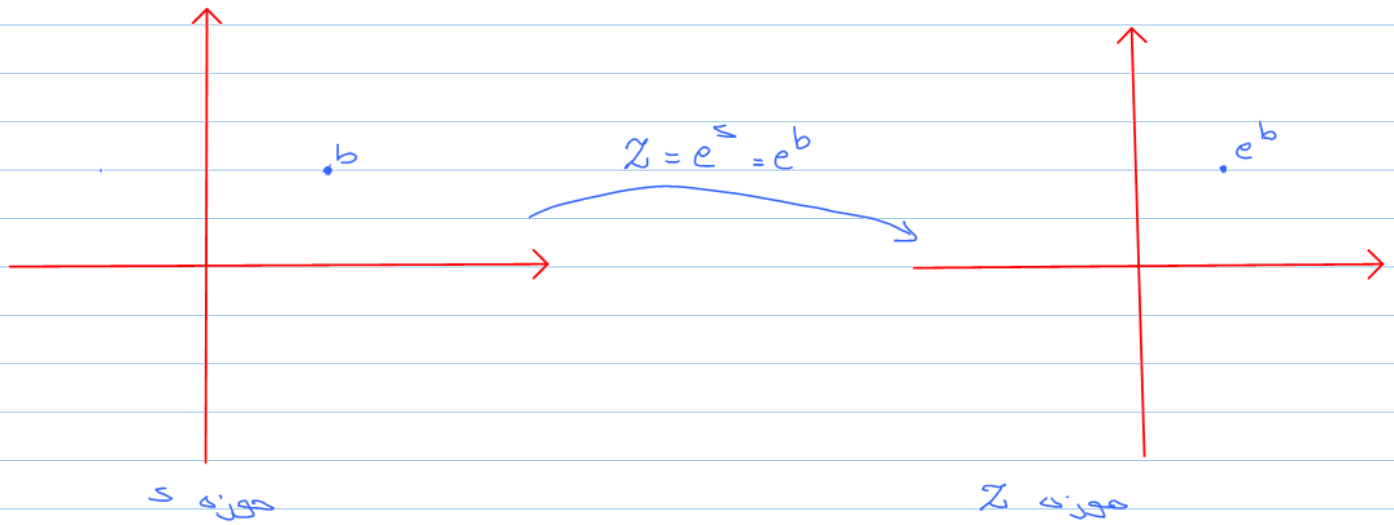
بیان قطبی $\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$ ← بیان کارتزین $1+j1$

حوزه z همان حوزه ای است که بالای قطبی بیان شده است.

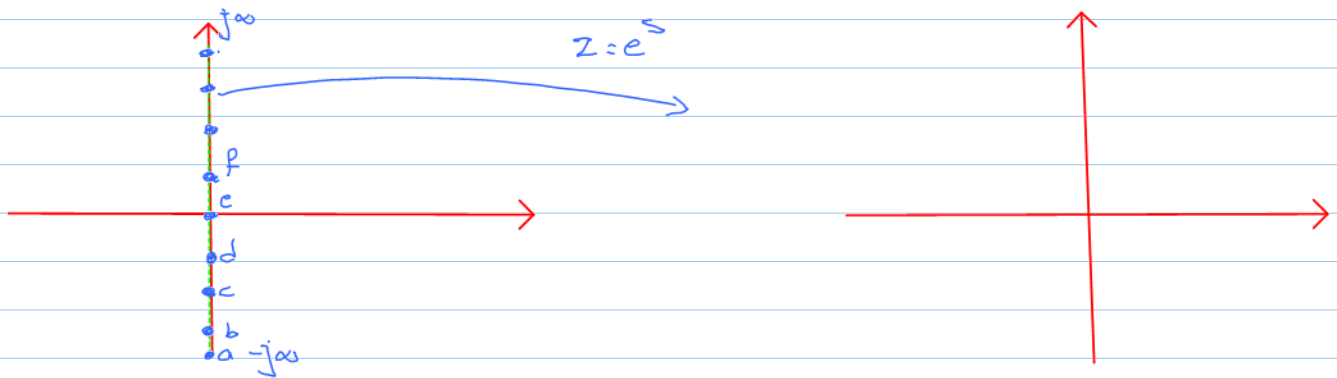


$$a = \begin{cases} -1+j1 \rightarrow & \text{حوزه } s \\ \sqrt{2}\, e^{j\frac{3\pi}{4}} \rightarrow & \text{حوزه } z \end{cases}$$





مثال: معادل خط موازی محور ω در حوزه s کدام خط در حوزه z خواهد بود.



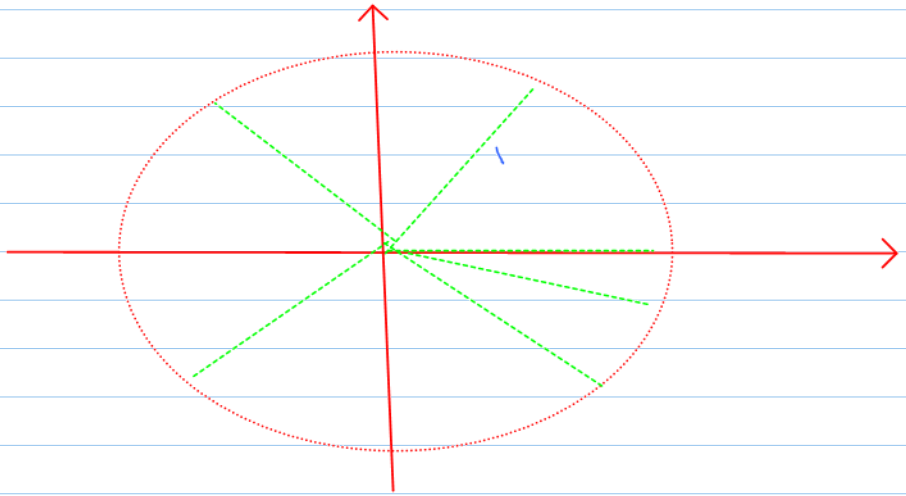
$e^a \quad e^b \quad e^c \quad \dots\dots$

$s = \sigma + j\omega$ $\qquad$ $s = j\omega$ = نقاط روی محور $j\omega$

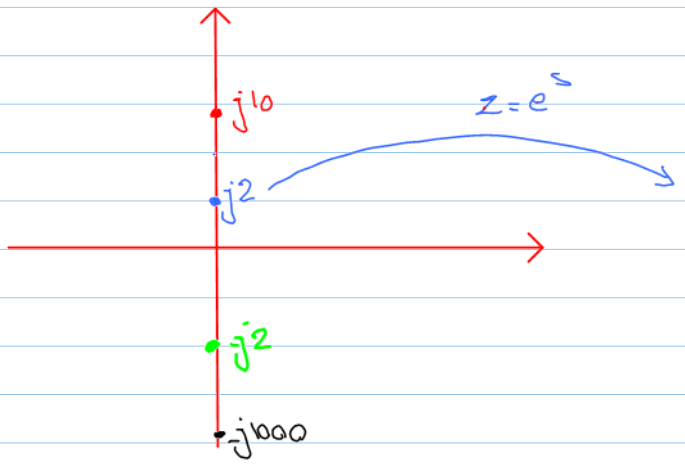
$z = e^s \longrightarrow$ $s = j\omega \;;\; \omega: -\infty \to \infty$ $\qquad$ محور $j\omega$

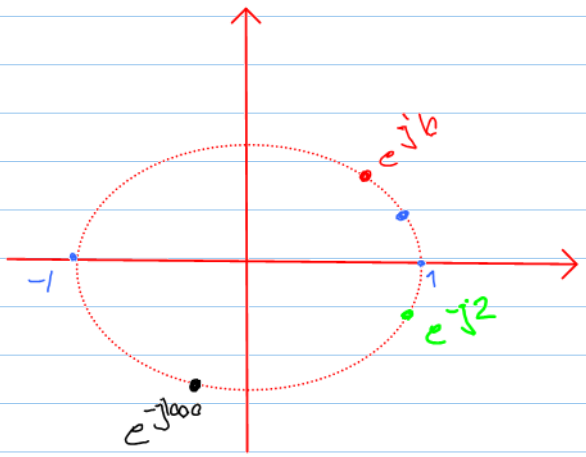
$z = 1e^{j\omega} \;;\; \omega: -\infty \to \infty$

z : اعداد مختلط با شعاع ۱ و فاز از $-\infty$ تا ∞

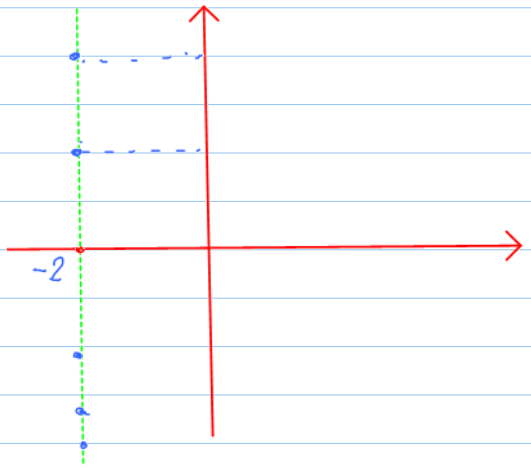


تصویر محور $j\omega$ بعد نگاشت $z = e^s$ ← یک دایره با شعاع ۱

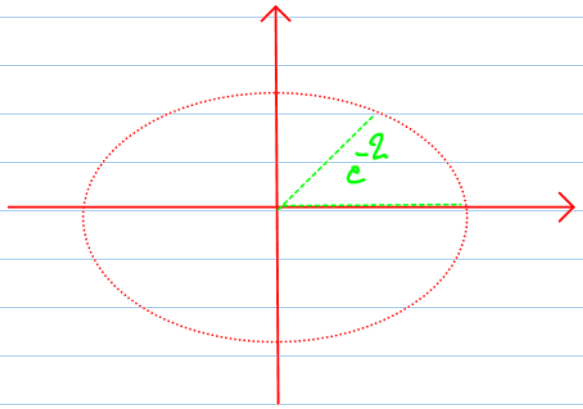




تصویر خط $Re(s) = -2$ تحت نگاشت $z = e^s$



$z = e^s$

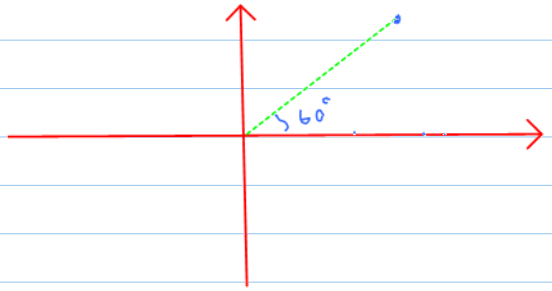


$s = -2 + jw$; $w: -\infty \to \infty$

$z = e^{(-2+jw)} = e^{-2} e^{jw}$; $w: -\infty \to \infty$

z : اعداد مختلط با اندازه e^{-2} و فاز w از $-\infty$ تا $+\infty$

فاز : هر عددی می‌تواند باشد ← $\theta \to 360^\circ$



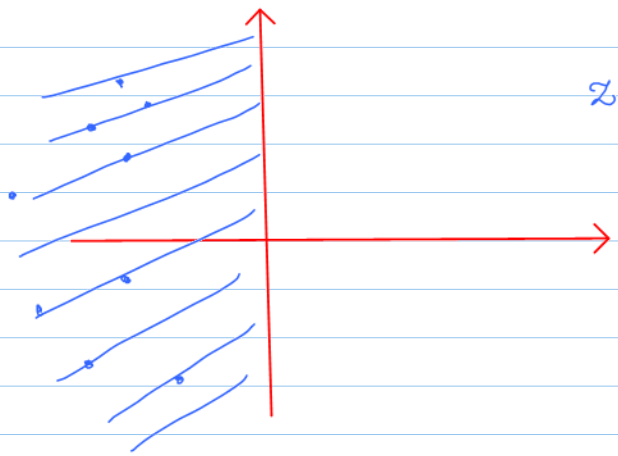
زاویه $= 60^\circ$

$360^\circ + 60^\circ$

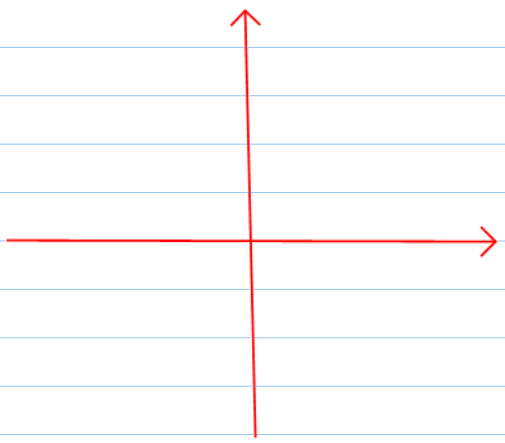
$360 \times 1000 + 60^\circ$

یک دایره کامل $\theta \to 360^\circ$ $\longrightarrow$ $-\infty \to \infty$: فاز

تصویر نامیه $Re(s) < 0$ تحت نگاشت z :



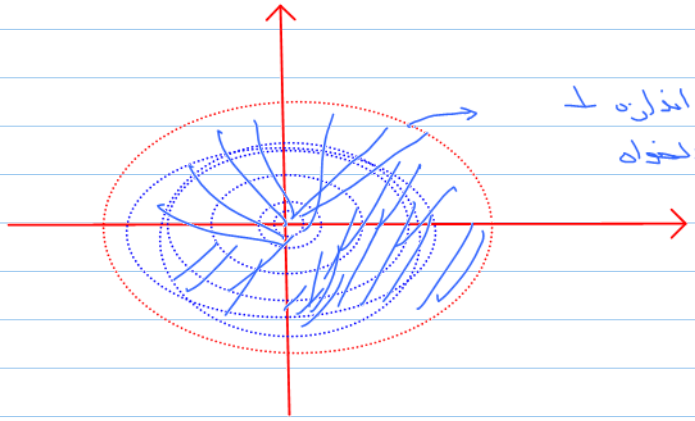
$z = e^s$



$\text{Re}(s) < 0 \rightarrow s = \sigma + j\omega$; $\sigma < 0$, $\omega: -\infty \rightarrow \infty$

$z = e^{\sigma} e^{j\omega}$ → $|z| < 1$ → $e^{\sigma} < 1$

بصورت نقاطی با اندازه کمتر از ۱ و خازن‌های متعدد داخل دایره



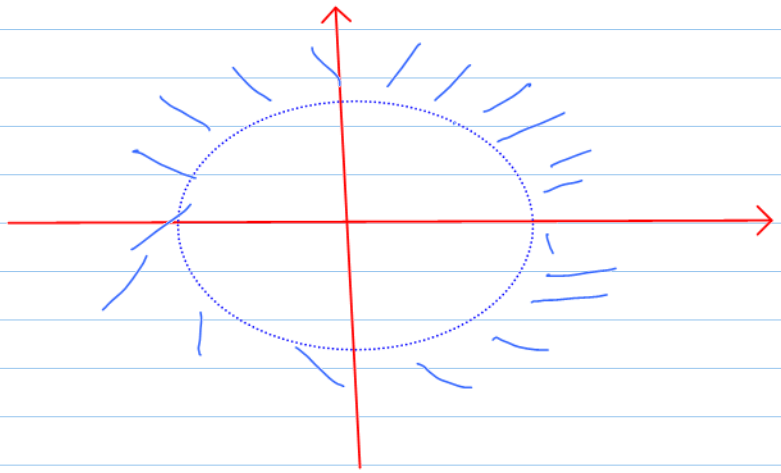
تصویر سمت چپ صفحه s ← نقاط داخل یک دایره با شعاع ۱

تصویر سمت راست صفحه s ←

$\text{Re}(s) > 0$
$\sigma > 0$

$z = e^{\sigma} e^{j\omega}$; $|z| > 1$ → $e^{\sigma} > 1$ → $\sigma > 0$

خازن داخل دایره → $\omega: -\infty \rightarrow \infty$



تنها فرق تبدیل لاپلاس و z در متوبر کردن Roc است.

* متوبر خط $Re(s)=a$ در حوزه s ⟵ دایره با شعاع e^a

" سمت چپ خط $Re(s)=a$ " ⟵ داخل دایره با شعاع e^a

" " راست " " " ⟵ بیرون " " " "

سمت راست ⟵ بیرون

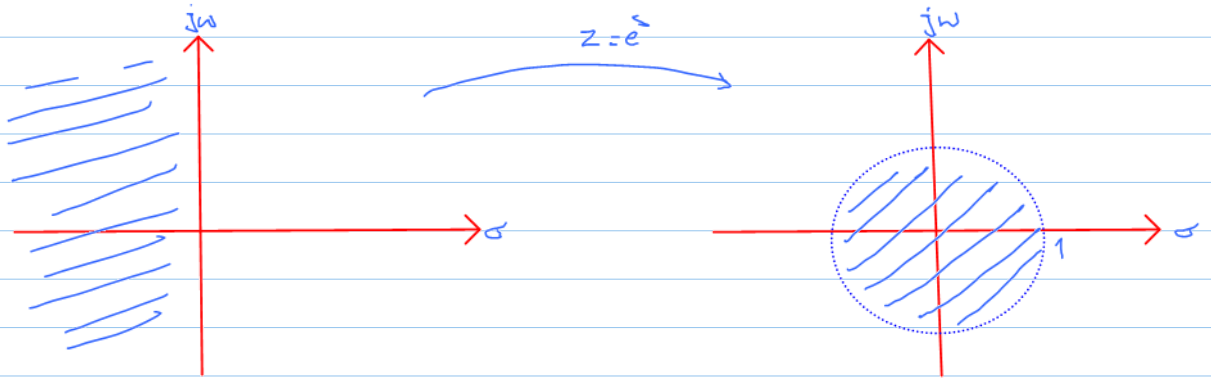
سمت چپ ⟵ داخل

خط ⟵ دایره

جلسه ۱۶ سیگنال

تبدیل z:

مناسبت بین تبدیل z و لاپلاس $z = e^{s}$



نیمه چپ صفحه jw ← داخل دایره واحد ← $|z|<1$

" راست " " ← بیرون دایره واحد $|z|>1$

" خط $Re(s)=a$ ← " " باشعاع e^{a} $|z|>e^{a}$

" چپ " " ← داخل " " " $|z|<e^{a}$

* نیمه راست ⟵ بیرون دایره

* " چپ ⟵ داخل دایره

x خط $Re(s)=a$ ⟵ دایره با شعاع $|z|=e^{a}$

محور jw ← بیرون دایره با شعاع $e^{0}=1$

$Re(s)=0$

تصویر $Re(s)=\infty$ تحت تبدیل $z=e^{s}$:

$z = e^{\infty+j\omega} = e^{\infty}\, e^{j\omega} = \infty\, e^{j\omega}$

تصویر $Re(s)=\infty$ ← دایره با شعاع ∞

تصویر $Re(s)=-\infty$ ← مبدأ مختصات $z = e^{-\infty+j\omega} = e^{-\infty} e^{j\omega} = 0$

تبدیل Z: یا همتی شباهت سیگنال $x[n]$ با z^{+n}

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \\ X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \end{cases} \qquad e^{s} = z \qquad e^{-s} = z^{-1}$$

مثال:

$$\begin{cases} x[n] = a^n\, u[n] \longrightarrow \\ x(t) = e^{at}\, u(t) \longrightarrow X(s) = \dfrac{1}{s-a} \;;\; Re(s) > a \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \underbrace{u[n]}_{n \geq 0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (z^{-1})^n$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{q^{n_0}}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & |q| \geq 1 \end{cases}$$

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{(az^{-1})^0}{1-az^{-1}} & |az^{-1}| < 1 \\ \infty & |az^{-1}| \geq 1 \end{cases} \qquad z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$|az^{-1}| = \left|\frac{a}{z}\right| = \frac{|a|}{|z|} < 1 \longrightarrow |a| < |z|$$

$$|az^{-1}| \geq 1 \longrightarrow |a| \geq |z|$$

$$X(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-az^{-1}} & |z| > |a| \\ \infty & |z| \leq |a| \end{cases}$$

$e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(s) > Re(a) \\ \infty & else \end{cases}$

$e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}$; $ROC = Re(s) > Re(a)$

$a^n u[n] \longrightarrow X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}} & |z| > |a| \\ \infty & |z| \leq |a| \end{cases}$

$a^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$; $ROC = |z| > |a|$

$ROC_x = \{ z \mid X(z) \neq \pm\infty \}$

$z \in ROC_x \longrightarrow X(z) \neq \pm\infty$

$z \notin ROC_x \longrightarrow X(z) = \infty$

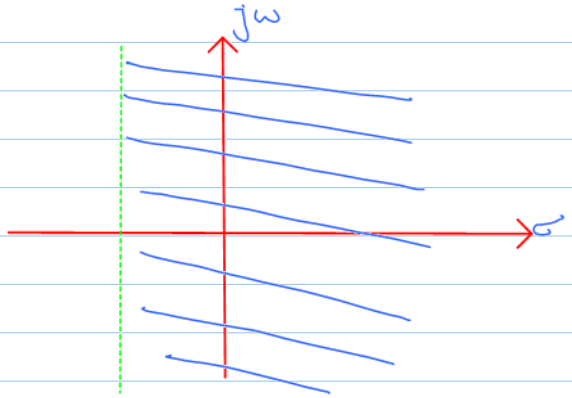
$X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}} & |z| > |a| \\ \infty & |z| \leq |a| \end{cases} = \frac{1}{1-az^{-1}}$; $ROC = |z| > |a|$

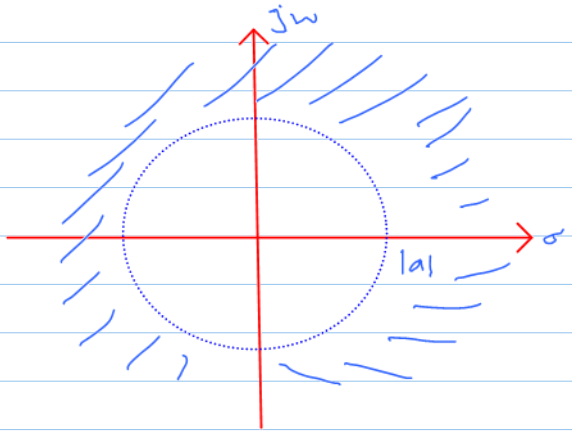
$z \in ROC_x \longrightarrow \begin{cases} |z| > |a| \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \\ |z| \leq |a| \longrightarrow X(z) = \infty \end{cases}$

$z \notin ROC_x \longrightarrow$

$x[n] = a^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$; $ROC = |z| > |a|$

$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}$; $ROC = Re(s) > Re(a)$





$x[n] = -a^n u[-n-1]$: مثال

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}$$

$n \leq -1$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=b}^{\infty} q^n \Rightarrow \quad n' = -n \rightarrow \begin{cases} n = -\infty & n' = \infty \\ n = -1 & n' = 1 \end{cases}$$

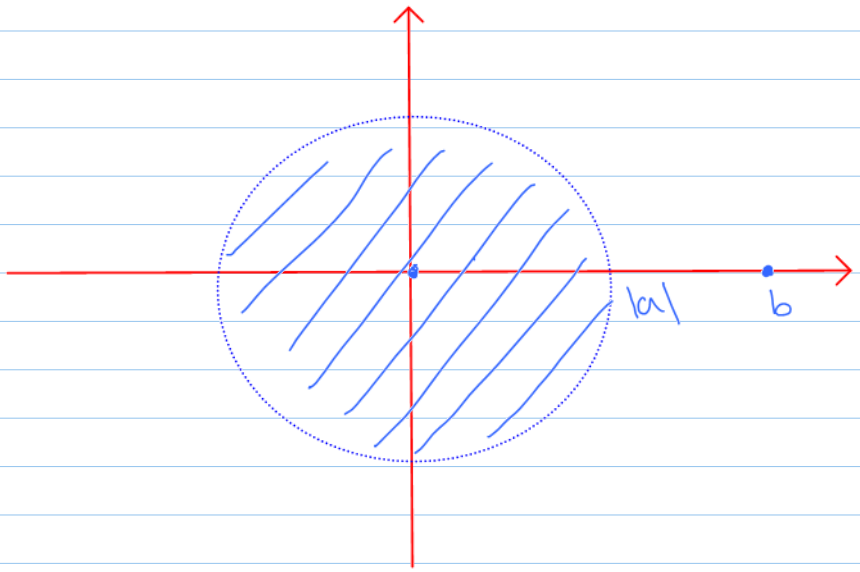
$$X(z) = -\sum_{n'=1}^{\infty} (az^{-1})^{(-n')} = -\sum_{n'=1}^{\infty} \underbrace{(a^{-1}z^1)^{n'}}_{q}$$

$$X(z) = \begin{cases} -\dfrac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} & |a^{-1}z^{+1}| < 1 \\ \infty & |a^{-1}z| \geq 1 \end{cases}$$

$$|a^{-1}z| < 1 \rightarrow \left|\frac{z}{a}\right| < 1 \rightarrow |z| < |a|$$

$$X(z) = \begin{cases} -\dfrac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} & |z| < |a| \\ \infty & |z| \geq |a| \end{cases}$$

$$-a^n u[-n-1] \longrightarrow X(z) = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \quad ; ROC = |z| < |a|$$



$$\begin{cases} X(b) = \infty \\ X(0) = -\dfrac{a^{-1}\times 0}{1-a^{-1}\times 0} = 0 \end{cases}$$

مثال:

$$x[n] = u[n]$$

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \quad ; ROC = |z| > |a|$$

$$u[n] = (1)^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ; \quad ROC = |z| > 1$$

یعنی دایره واحد بیرون

$$x[n] = -u[-n-1] \longrightarrow X(z) = ?$$

$$-a^n u[-n-1] \longrightarrow -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} \quad ; \quad ROC = |z| < |a|$$

$$-(1)^n u[-n-1] \longrightarrow -\frac{z}{1-z} \quad ; ROC = |z| < 1$$

هرگاه بخواهیم $X(z)$ را برحسب z^{-1} یا z بنویسیم:

بزرگترین توان z را در صورت و مخرج بدست می‌آوریم و صورت و مخرج را در عکس آن توان ضرب می‌کنیم یا برعکس.

$$X(z) = \frac{-z^{-1}}{1-z^{1}} \xrightarrow{\times z^{-1}} X(z) = -\frac{z^{0}}{z^{-1}-z^{1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ; \quad ROC = |z| > 1$$

$$-u[-n-1] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ; \quad ROC = |z| < 1$$

$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n]$	1	کل صفحه
$\delta[n+a]\ ; a>0$	z^a	$\lvert z\rvert < \infty$
$\delta[n+a]\ ; a<0$	z^a	$\lvert z\rvert > 0$
$\cos(an)u[n]$	$\frac{1-\cos(a)z^{-1}}{1-2\cos(a)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\cos(an)u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < 1$
$\sin(an)u[n]$	$\frac{\sin(a)z^{-1}}{1-2\cos(a)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\sin(an)u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < 1$

$x[n] = \delta[n+2]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+2] z^{-n} \quad (n=-2) \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-(-2)} \delta[n+2]$$

$$X(z) = z^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+2] = z^2 \cdot 1$$

$$\delta[n+2] \longrightarrow X(z) = z^2$$

$$ROC_x = \{ z \mid X(z) \neq \pm\infty \} \qquad z=\infty \rightarrow X(\infty) = \infty^2 = \infty$$

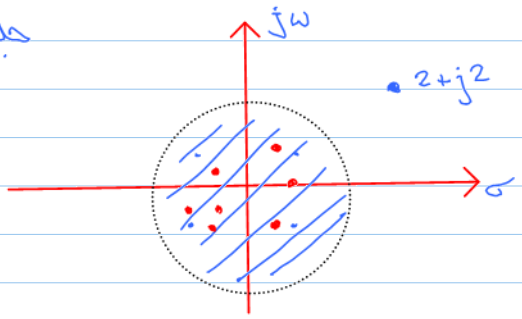
$$ROC_x = |z| < \infty = \text{صفحه } z - \{ |z| = \infty \}$$

$z = \infty$

جلسه 63 سیگنال

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

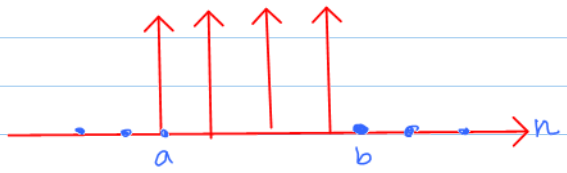
$$ROC_x = \{ z \mid X(z) \neq \pm\infty \}$$



مثال

$$x[n] = 3^n \left(u[n] - u[n-3] \right)$$

$$u[n-a] - u[n-b] = \begin{cases} 1 & a \leq n < b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$$u[n] - u[n-3] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 3 \rightarrow 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{2} 3^n \left(u[n] - u[n-3] \right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{2} 3^n z^{-n}$$

$$= 3^0 z^0 + 3^1 z^{-1} + 3^2 z^{-2} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2}$$

$$X(z) = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} = \frac{z^2 + 3z + 9}{z^2} \; ; \quad X(0) = \infty \rightarrow$$

$$ROC_x = \{ z \mid X(z) \neq \pm\infty \} = \{ z \mid z \neq 0 \} = |z| > 0$$

مثال:

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \underbrace{u[-n]}_{n \le 0} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} (2z^{-1})^n$$

$$\sum_{k=a}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{q^a}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & \text{else} \end{cases}$$

$$n' = -n \rightarrow \quad n: -\infty \rightarrow 0 \qquad n = -n'$$

$$n': \infty \rightarrow 0$$

$$X(z) = \sum_{n'=\infty}^{0} (2z^{-1})^{-n'} = \sum_{n'=0}^{\infty} \left((2z^{-1})^{-1}\right)^{n'} = \sum_{n'=0}^{\infty} (2^{-1} z^{1})^{n'}$$

$$X(z) = \sum_{n'=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{z}{2}\right)}_{q}^{n'} = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} & \left|\frac{z}{2}\right|<1 \\ \infty & \left|\frac{z}{2}\right| \ge 1 \end{cases}$$

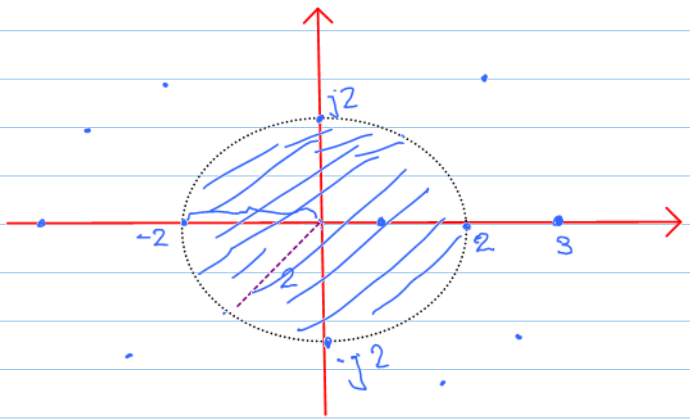
$$X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} & |z|<2 \\ \infty & |z| \ge 2 \end{cases}$$

$$ROC_x = \{ z \mid |z|<2 \} = |z|<2$$ داخل دایره با شعاع 2

$$X(3) = \infty$$

$$X(2) = \infty$$

$$X(1) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$



$$x[n] = a^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow$$

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \rightarrow$$ صفر ندارد

$1 - az^{-1} = 0 \rightarrow 1 = a/z \rightarrow z = a \rightarrow$ یک قطب

$$X(z) = \frac{z}{z - a} \rightarrow$$

- $z = 0$ یک صفر
- $z = a$ یک قطب

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} \rightarrow$$

~~$z = 0 \leftarrow$ صفر~~

$z = 1 \leftarrow$ قطب

$$X(z) = \frac{\frac{1}{z^2}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{\frac{1}{z^2}}{\frac{z - 1}{z}} = \frac{1}{z(z - 1)} \rightarrow$$

قطب $z = 0$

$z = 1$ ~

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z(z - 1)}$$

بیان $X(z)$ برحسب z یا z^{-1}:

* هرگاه بخواهیم قطبها و صفرهای $X(z)$ را حساب کنیم حتماً $X(z)$ را برحسب z می نویسیم.

* برای تبدیل توانهای منفی z به توانهای مثبت، بزرگترین توان صورت و مخرج را حساب کرده و صورت و مخرج را در توان منفی z ضرب می کنیم.

* برای تبدیل توان های مثبت z به توانهای منفی، مثبت ترین توان را یافته و صورت و مخرج را در منفی آن توان ضرب می کنیم.

$$X(z) = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-3}} \times \frac{z^3}{z^3} = \frac{z^2 - z^1}{z^3 - 2z^2 + 1}$$

$$X(z) = \frac{z+2}{z^3 + 2z^2 + z} \times \frac{z^{-3}}{z^{-3}} = \frac{z^{-2} + 2z^{-3}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}$$

صفرها و قطبهای $X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$ را حساب کنید.

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \rightarrow \times \quad 1 - 2z^{-1} = 0 \rightarrow 1 = \frac{2}{z} \rightarrow z = 2$$ قطب

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \times \frac{z^1}{z^1} = \frac{z^1}{z-2} \Rightarrow$$ صفر $z = 0$ ✓

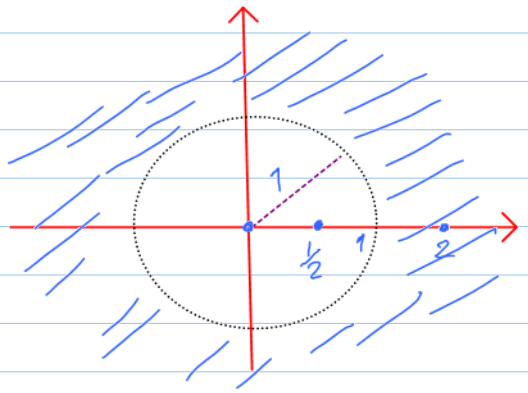
قطب $z = 2$

مفهوم ناحیه همگرایی: ROC یعنی مقادیری از z که حاصل تبدیل z برای آنها $\pm\infty$ نمی‌شود

یعنی تبدیل z همگراست.

مثال $x[n]$ دارای تبدیل $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ با ناحیه همگرایی $|z| > 1$ می‌باشد.

$X(2)$ و $X(\frac{1}{2})$ و $X(0)$ را حساب کنید.



$$X(a) = \begin{cases} X(z)\big|_{z=a} & a \in ROC \\ \infty & a \notin ROC \end{cases}$$

$$X(2) = \frac{1}{1-z^{-1}}\bigg|_{z=2} = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2$$

$$X(\tfrac{1}{2}) = \infty \qquad \tfrac{1}{2} \notin ROC$$

$$X(0) = \infty \qquad 0 \notin ROC$$

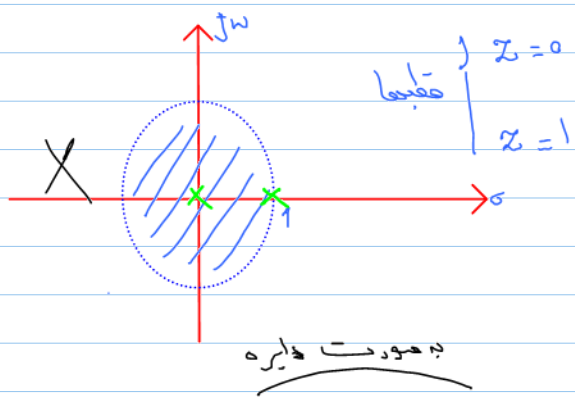
ویژگی‌های ROC_x :

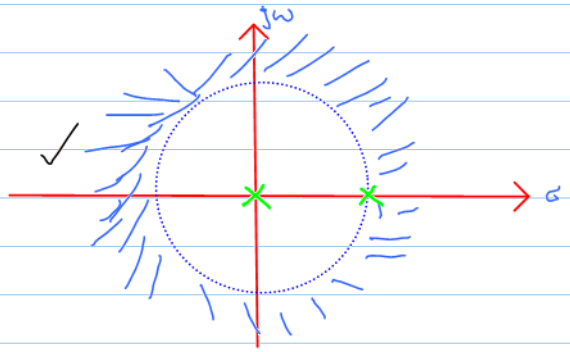
$x[n] \longrightarrow X(z)$ ، ROC_x

① ROC_x شامل قطب‌های $X(z)$ نمی‌شود.

مثال. ROC_x کدام‌یک از دو گزینه زیر می‌تواند باشد؟

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{1}{z^2 - z}$$



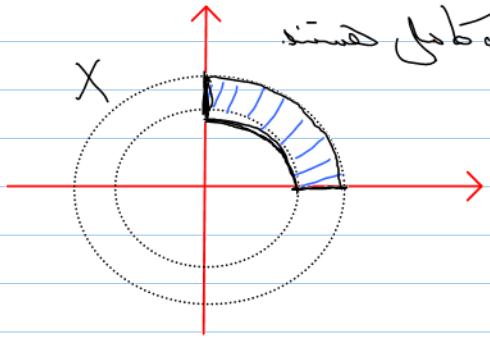


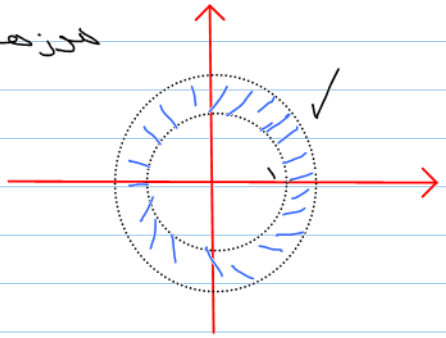
به صورت دایره

② ROC از نظر مرز محدودی نیست و مرزهای آن روی اندازه $|z|$ است.

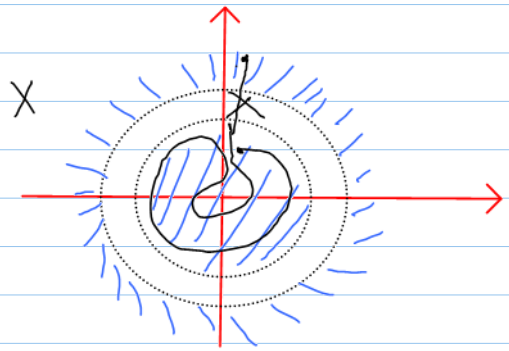
یعنی ROC کل دایره ($0 \to 360^\circ$) است و بیرون یا داخل دایره مرز آن است.

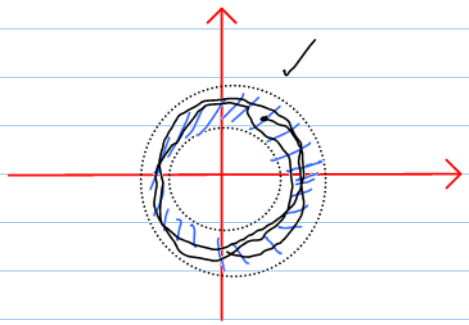
مرزها به صورت دایره کامل هستند

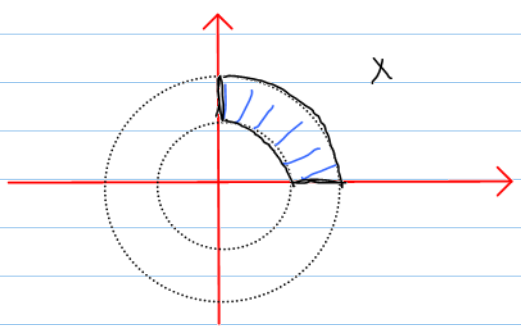


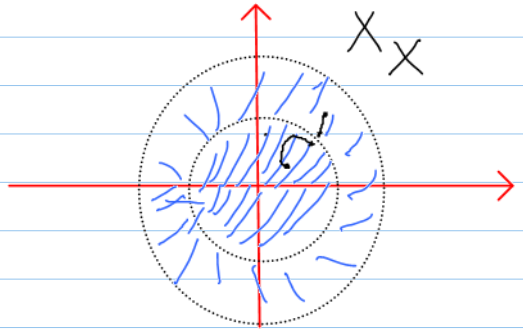


③ ROC یک مجموعه یک تکه است.









نحوه یافتن ROC_x:

1- $X(z)$ را به صورت توابعی مثبت از z نوشته و قطبهای $X(z)$ را یافتن کنید.

2- روی هر قطب $X(z)$ یک دایره به مرکز مبدأ رسم کنید.

3- اگر $x[n]$ دست راستی باشد، ROC بیرون بزرگترین دایره است (ROC دست راستی)

نکته! اگر درجه صورت $X(z)$ بزرگتر از درجه مخرج آن باشد ROC شامل ∞ نیز نبوده و

$ROC = a < |z| < \infty$ خواهد بود و در غیر این صورت $ROC = |z| > a$

4- اگر $x[n]$ دست چپی باشد ROC داخل کوچکترین دایره است. (ROC دست چپی)
شعاع کوچکترین دایره

نکته! اگر $z=0$ قطب $X(z)$ باشد، $ROC = 0 < |z| < b$ بوده و شامل مبدأ نیز نبوده در غیر این صورت $ROC = |z| < b$ خواهد بود.

5- اگر $x[n]$ دارای طول محدود باشد و به ازای $b < n < a$ مقدار داشته باشد آنگاه

5-1- $a,b>0$ ← $ROC = |z| > 0$ ← کل صفحه به جز مبدأ

5-2- $a,b<0$ ← $ROC = |z| < \infty$ ← " " " " " ∞

5-3- $a \times b < 0$ ← $ROC = 0 < |z| < \infty$ ← " " " " ∞ و مبدأ

6- اگر $x[n]$ دوطرفه باشد آنگاه ROC بین دو دایره خواهد بود.

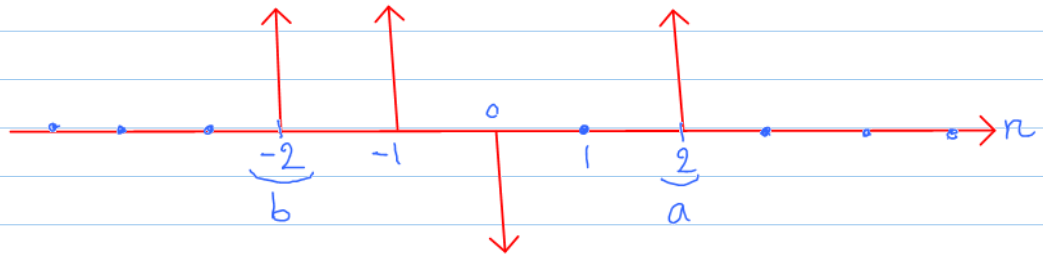
نکته!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, a^{+n} = \pm\infty \rightarrow \frac{1}{a} \notin ROC_x$$

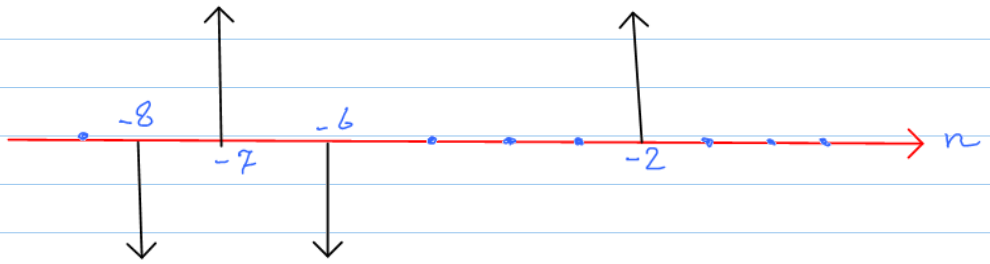
" " " $\neq \pm\infty \rightarrow \frac{1}{a} \in ROC_x$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](1)^n = \infty \rightarrow \frac{1}{1} \notin ROC_x$$

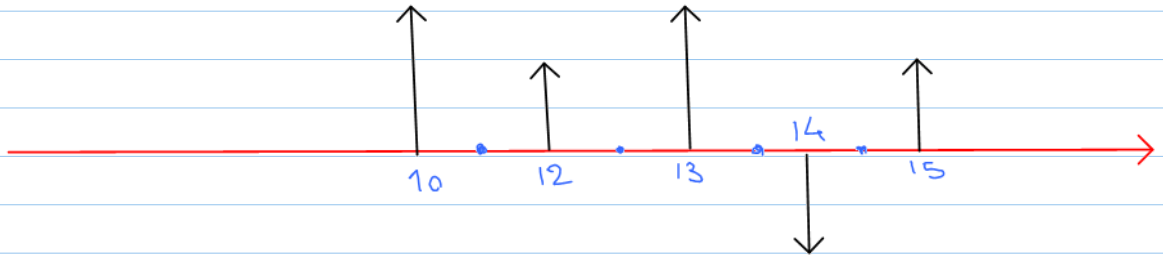
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-3)^n < \infty \rightarrow \frac{1}{-3} \in ROC_x$$



ROC = کل صفحه $- \{+\infty, 0\} = 0 < |z| < \infty$



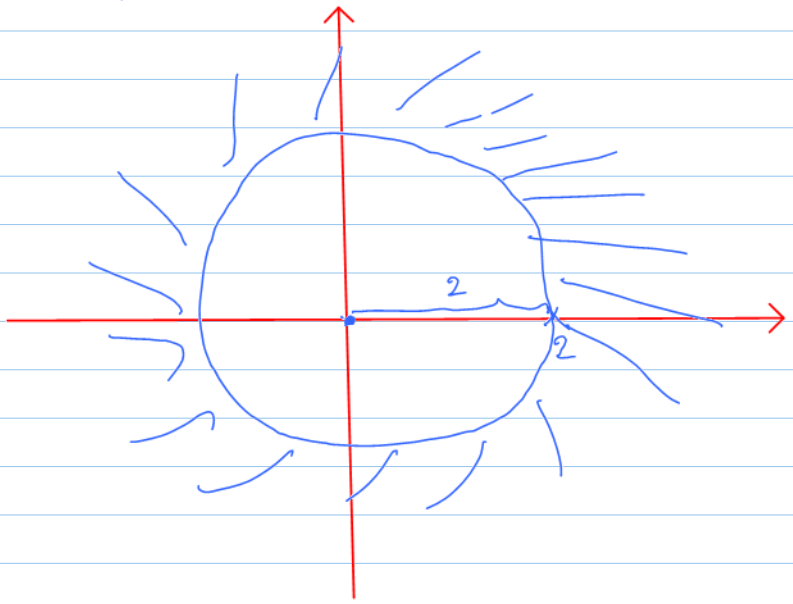
ROC = کل صفحه $- \{\infty\} = |z| < \infty$



ROC = کل صفحه $- \{0\} = 0 < |z|$

$x[n] = 2^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \times \frac{z^1}{z^1}$

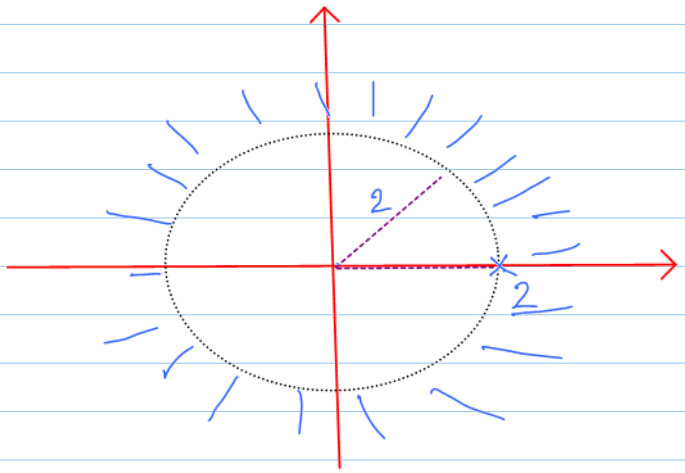
1) $X(z) = \frac{z^1}{z^1 - 2}$ ⟵ قطب $\Rightarrow z = 2$



$RoC = 2 < |z|$

$X(z) = \frac{z^2}{z-2}$; $x[n]$ سببي

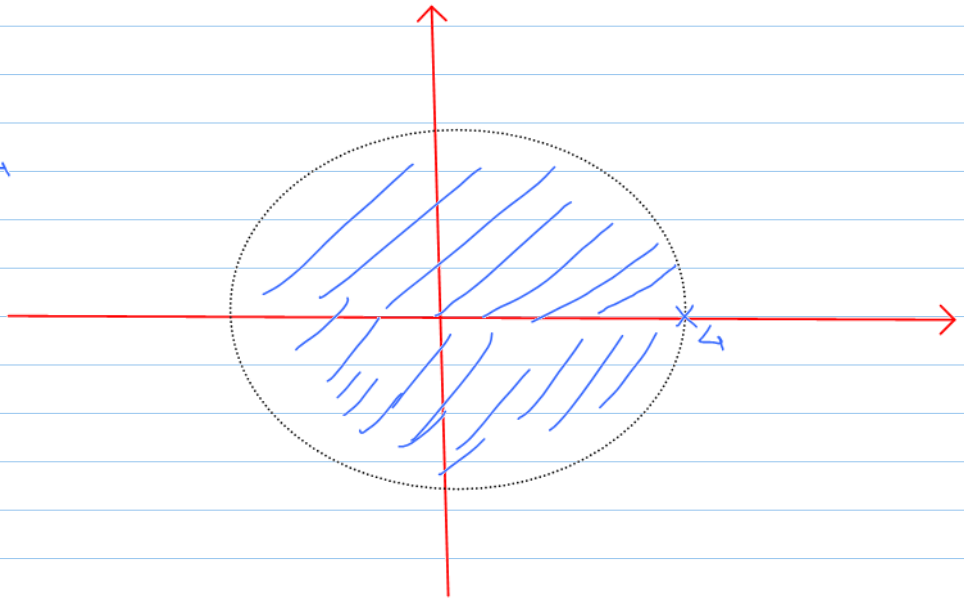
$RoC = 2 < |z| < \infty$



$x[n] = -4^n u[-n-1] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}}$;

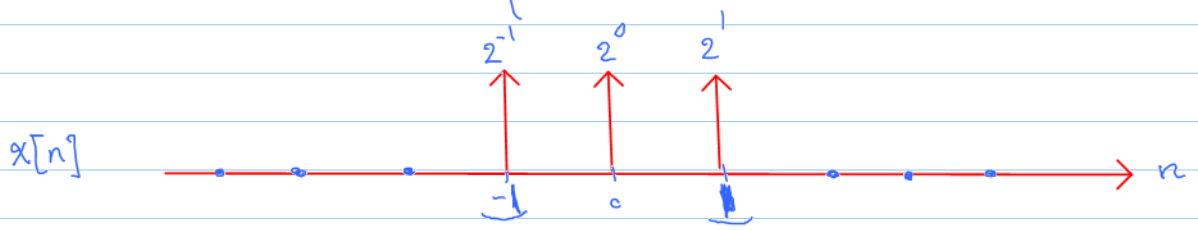
1) $X(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}} \times \frac{z^1}{z^1} = \frac{z^1}{z^1-4} \rightarrow$ قطب $= 4$

RAC = $|z|<4$



$$x[n] = 2^{n}\left(u[n+1] - u[n-2]\right)$$

$$u[n-(-1)] - u[n-2] = \begin{cases} 1 & -1 \le n \le (2-1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$$ROC = 0 < |z| < \infty$$

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} 2^{n}\left(u[n+1] - u[n-2]\right) z^{-n}$$

$$X(z) = 2^{-1} z^{1} + 2^{0} z^{0} + 2^{1} z^{-1} = \frac{1}{2} z + 1 + \frac{2}{z}$$

اگر $X(z) = \frac{z^{-2} - z^{-3}}{1 + 6z^{-1} + 11z^{-2} + 6z^{-3}}$ باشد و هریک از حالتهای زیر ROC_x را تعیین کنید.

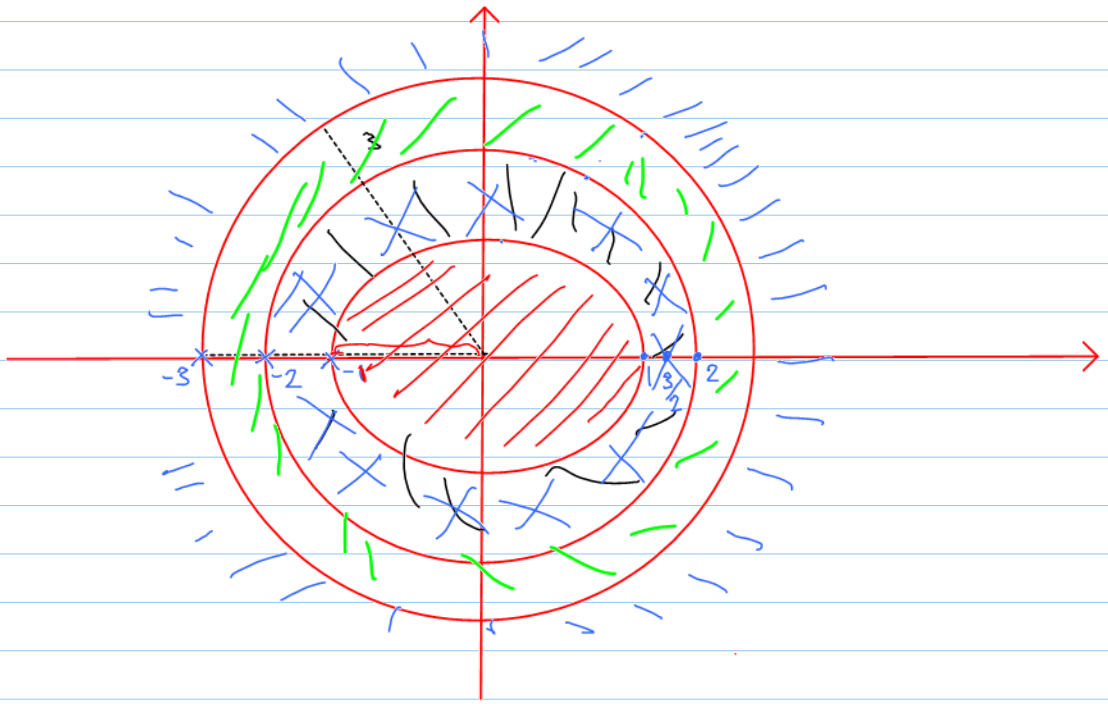
الف) $x[n]$ دست راستی ب) $x[n]$ دست چپی

ج) $x[n]$ دوطرفه و $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{2}{3}\right)^n = \infty$

1) $X(z) = \frac{z^{-2} - z^{-3}}{1 + 6z^{-1} + 11z^{-2} + 6z^{-3}} \times \frac{z^3}{z^3} = \frac{z - 1}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}$

$z^3 + 6z^2 + 11z + 6 = (z+1)(z+2)(z+3) = 0$

قطبها: $\begin{cases} z = -1 \\ z = -2 \\ z = -3 \end{cases}$



الف) $x[n]$ دست راستی

$ROC = 3 < |z|$

ب) " " چپی

$ROC = |z| < 1$

ج) " دوطرفه ← ROC بین دو تا دایره

$\begin{cases} 1 < |z| < 2 \\ 2 < |z| < 3 \checkmark \end{cases}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{2}{3}\right)^n = \infty \rightarrow \frac{1}{2/3} \notin ROC_x$

$\frac{3}{2} \notin ROC_x$

جلسه ۶۷ سیگنال

خواص تبدیل z

① اگر $X(z)$ و $Y(z)$ در یک عملیات ریاضی مشترک کنند قطعاً RoC آن‌ها هم اشتراک دارد و در غیر این صورت نمی‌توانند در یک عملیات مشترک شرکت کنند.

مثال: اگر $H(z)$ تبدیل z، پاسخ ضربه یک سیستم LTI با $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{(2-z^{-1})(3-z^{-1})}$ باشد، ناحیه همگرایی سیستم معکوس کدام گزینه می‌تواند باشد؟ ($h[n]$ سیگنال دوطرفه است)

۱) $|z|<1$ ۲) $|z|>2$ ۳) $0<|z|<1$ ۴) $|z|>1$ ۵) $1<|z|<\infty$

$h[n] \longrightarrow H(z)$; RoC_H

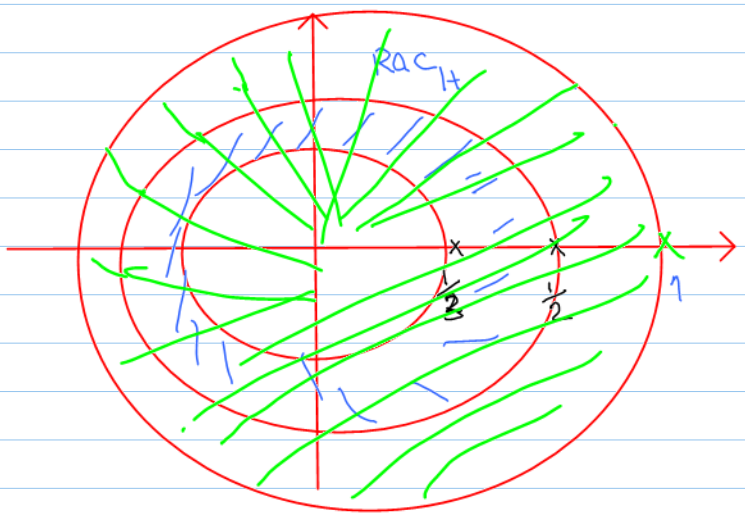
$H^{-1}(z)$; $RoC = ?$

$H(z).H^{-1}(z) = 1$

$h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]$

$H(z)\,H^{-1}(z) = 1 \longrightarrow \underbrace{RoC_H}_{?} \cap \underbrace{RoC_{H^{-1}}}_{?} \neq \phi$

$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{(2-z^{-1})(3-z^{-1})}$ $\quad H^{-1}(z) = \frac{(2-z^{-1})(3-z^{-1})}{1-z^{-1}}$



$RoC_{H^{-1}} = 0<|z|<1$ ✓

$H^{-1}(z) = \frac{(2z-1)(3z-1)}{z^2-z}$

$z = 0, 1$

② خطی بودن:

$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x$

$a\,y[n] \longrightarrow aY(z),\ ROC_y$

$$f[n]=x[n] \mp a\,y[n] \longrightarrow \begin{cases} F(z) = X(z) \mp a\,Y(z) & \text{if } ROC_x \cap ROC_y \neq \phi \\ F(z) = \text{وجود ندارد} & \text{if } \sim\ \sim\ \sim\ = \phi \end{cases}$$

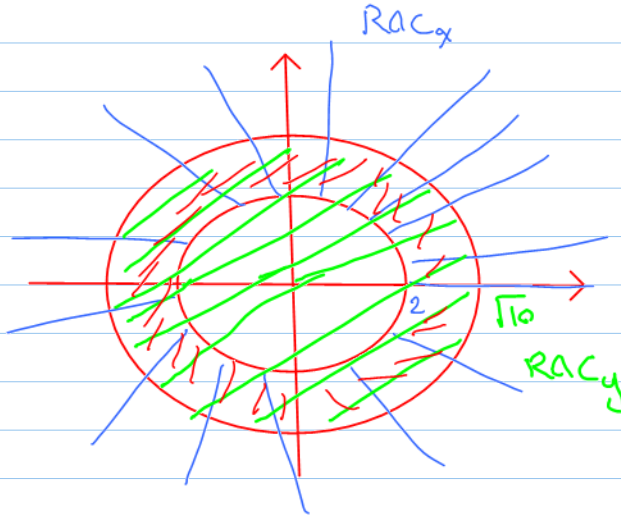
اگر $F(z)$ وجود داشته باشد ROC_f قطعاً شامل $ROC_x \cap ROC_y$ یا قسمتی از آن است:

۱) اگر قطبهای $F(z)$ روی مرزهای $ROC_x \cap ROC_y$ وجود نداشته باشد $ROC_f = ROC_x \cap ROC_y$

۲) اگر یکی یا دو تا از مرزهای $ROC_x \cap ROC_y$ نباشد، همواره مرزی حذف شده و ROC_f از آن سمت امتداد پیدا می‌کند.

$$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{z}{z-2} \qquad |z|>2$$

$$g[n] \longrightarrow Y(z) = \frac{z^2+10}{z^2-6z+10} \qquad |z|<\sqrt{10}$$



$$f[n] = g[n] - 6x[n] \longrightarrow ?$$

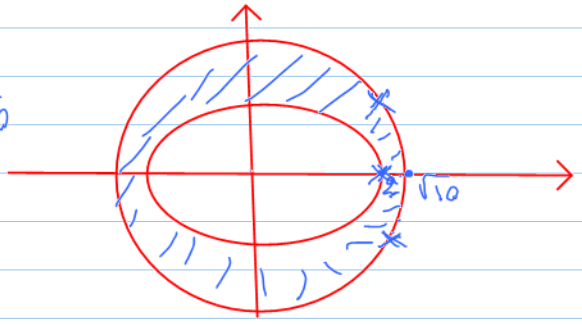
$$ROC_x \cap ROC_y = 2<|z|<\sqrt{10}$$

$$F(z) = Y(z) - 6X(z)$$

$$F(z) = \frac{z^2+10}{z^2-6z+10} - \frac{6z}{z-2}$$

$$F(z) = \frac{z^3+10z-2z^2-20-6z^3+36z^2-60z}{(z^2-6z+10)(z-2)} = \frac{-5z^3+34z^2-50z-20}{(z^2-6z+10)(z-2)}$$

$z = 2,\ +3 \pm j \qquad ROC_f = 2<|z|<\sqrt{10}$

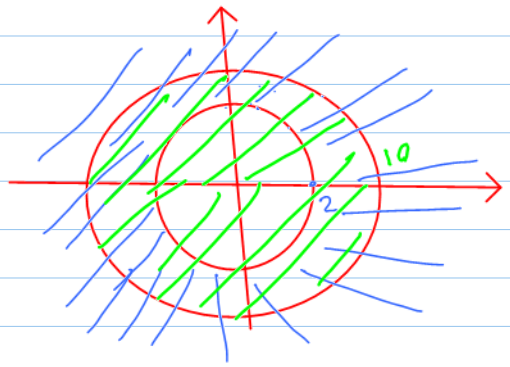


$$|3 \mp j| = \sqrt{10}$$

$$X(z) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-2} \qquad |z| > 2$$

$$f[n] = x[n] + y[n]$$

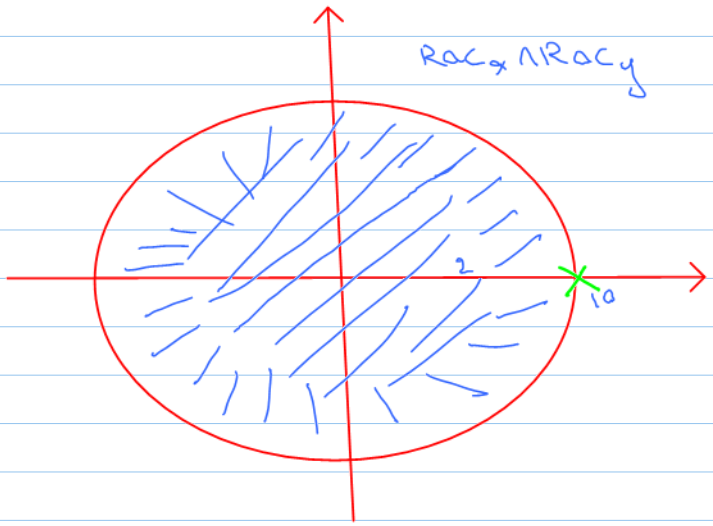
$$Y(z) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{z-10} \qquad |z| < 10$$



$$RAC_x \cap RAC_y = \quad 2 < |z| < 10$$

$$F(z) = X(z) + Y(z) = \frac{z-2}{(z-2)(z-10)}$$

$$F(z) = \frac{1}{z-10}$$



$$RAC_f = |z| < 10$$

$F(z)$; $RAC_x \cap RAC_y$;

$X(z) = \frac{a}{z-2}$ $|z| > 2$ $Y(z) = \frac{b}{z-1}$ $|z| > 1$

$\frac{(b+10)z - 2b - 10}{(z-2)(z-1)} = \frac{z-1}{\sim}$

$b + a = 1$

$-2b - a = -1$

$-b = 0 \quad b$

$\frac{a}{z-2} + \frac{b}{z-10}$

$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ -2b - 10a = -2 \end{cases}$

$-8a = 4 \quad \boxed{a = -\frac{1}{2}} \quad b = \frac{3}{2}$

$\frac{z}{z-1} + \frac{-1}{z-1}$ f_c

دکتری ۹۱. تبدیل z متناظر $x[n] = b^{|n|}$, $b>0$ کدام است؟

1) $\frac{b-1}{b} \quad \frac{z}{(z-b)^2}$; $b < |z| < \frac{1}{b}$

2) $\frac{b^2-1}{b} \quad \frac{(z-b)(z-b^{-1})}{z}$; $ROC_x =$ کل صفحه

3) $\frac{b}{b^2-1} \quad \frac{(z-b)(z-b^{-1})}{z}$; $\frac{1}{b} < z < b$ ~~$\frac{1}{b} < z < b$~~ شرط روی $|z|$

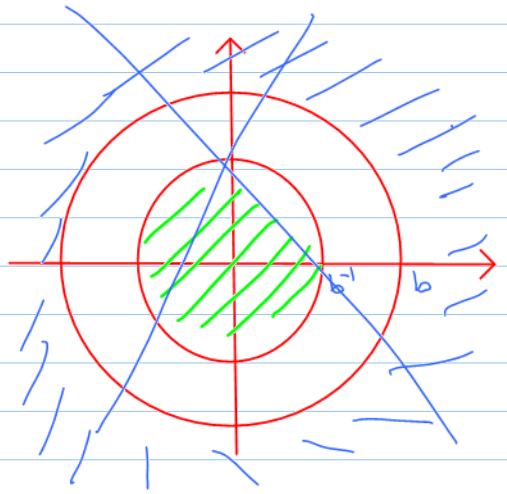
4) ✓ $\frac{b^2-1}{b} \quad \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}$; $b < |z| < \frac{1}{b}$

$x[n] = b^{|n|}$ دو طرفه $\longrightarrow$ $ROC_x =$ بین دو دایره.

$f = b^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-bz^{-1}}$; $|z| > b$

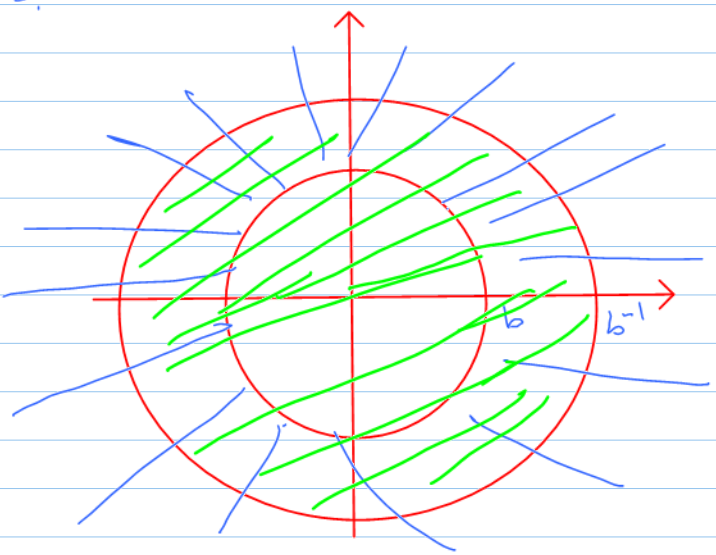
$b^{|n|} = b^n u[n] + b^{-n} u[-n]$

$g = (b^{-1})^n u[-n] \longrightarrow \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$; $|z| < b^{-1}$



$x[n] = f[n] + g[n] \longrightarrow X(z) = ?$

$0 < b < 1$ ✓



$$ROC_g \cap ROC_f = b < |z| < \frac{1}{b}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}} = \frac{2 - (b + b^{-1})z^{-1}}{(1 - bz^{-1})(1 - b^{-1}z^{-1})} \times \frac{z^2}{z^2}$$

$$X(z) = \frac{2z^2 - (b + b^{-1})z}{(z - b)(z - b^{-1})}$$

③ انتقال زمانی

$x[n] \longrightarrow X(z)$; ROC_x

$n \to n+n_0$

$y[n] = x[n+n_0] \longrightarrow Y = z^{n_0} X(z)$, $ROC_y = ROC_x \mp \{\infty, 0\}$

انتقال

پس از یافتن $Y(z)$ ، باید $Y(0)$ و $Y(\infty)$ را بررسی کنیم. یعنی:

if $z = 0 \to Y(0) = \infty \to$ حذف می‌شود از ROC_x $|z| = 0$

" $z = \infty \to Y(\infty) = \infty \to$ " " " $|z| = \infty$

$y[n] = 2^n u[n-3]$, $f(n) = 2^n u[-n+2]$

$2^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}}$; $|z| > 2$

$n \to n+(-3)$

$h = 2^{n-3} u[n-3] \longrightarrow H = z^{-3} \frac{1}{1-2z^{-1}}$; $ROC = 2 < |z| \overset{?}{\mp} \{\cancel{X}, \checkmark \infty\}$

$H(z) = \frac{z^4}{z-2}$; $H(\infty) = \frac{\infty^4}{\infty - 2} = \infty \to$

$ROC = 2 < |z| < \infty$

$2^3 \times 2^{n-3} u[n-3] \longrightarrow 2^3 \times \frac{z^{-3}}{1-2z^{-1}}$; $2 < |z| < \infty$

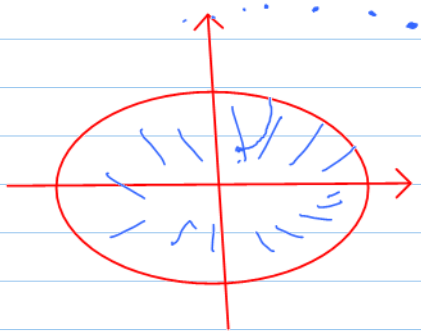
$y[n] = 2^n u[n-3] \longrightarrow 2^3 \frac{z^{-3}}{1-2z^{-1}}$; $2 < |z| < \infty$

$f[n] = 2^n\, u[-n+2]$

$2^n\, u[-n-1] \longrightarrow \dfrac{1}{1-2z^{-1}}$; $|z|<2$

$n \to n-3$ ↓ ; ↓ z^{-3}

$2^{n-3}\, u[-(n-3)-1] \longrightarrow \dfrac{z^{-3}}{1-2z^{-1}}$; RoC = $|z|<2 \overset{?}{-} \{\cancel{\infty}, 0\}$



~~$|z|<2 - \{\infty\}$~~

~~$|z|<2 - \{\infty\}$~~

$\dfrac{z^{-3}}{1-2z^{-1}} = \dfrac{1}{z^3-2z^2}$ $(z=0)$ $\dfrac{1}{0-2\times 0} = \infty \longrightarrow$ RoC = $0<|z|<2$

$2^3 \times 2^{n-3}\, u[-n+2] \longrightarrow 2^3 \times \dfrac{z^{-3}}{1-2z^{-1}}$ $\quad 0<|z|<2$

$2^n\, u[-n+2] \longrightarrow 8\,\dfrac{z^{-3}}{1-2z^{-1}}$; $\quad 0<|z|<2$

④ وارونگی زمانی: خیلی مهم

اشتباه بسیار بالا

$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x$

$\downarrow n \to -n \qquad \downarrow z \to z^{-1}$

$x[-n] \longrightarrow X(z^{-1}),\ ROC_x^{-1}$

~~$x[-n] \longrightarrow X(-z)$~~

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[-n]$

$x[n] \longrightarrow a_k \qquad x[n] \longrightarrow X(j\omega) \qquad x(t) \longrightarrow X(s)$

$x[-n] \longrightarrow a_{-k} \qquad x[-n] \longrightarrow X(-j\omega) \qquad x(-t) \longrightarrow X(-s)$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] \longrightarrow \frac{1 - \cos(\pi/4)\, z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) z^{-1} + z^{-2}}$; $ROC: |z| > 1$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}n\right) u[-n] \longrightarrow \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z^{-1}\right)^{-1}}{1 - \sqrt{2}\left(z^{-1}\right)^{-1} + \left(z^{-1}\right)^{-2}}$; $|z^{-1}| > 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[-n] \longrightarrow \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} z}{1 - \sqrt{2} z + z^2}$; $|z| < 1$

$\left|\frac{1}{z}\right| > 1 \longrightarrow \frac{1}{|z|} > 1 \longrightarrow 1 > |z|$

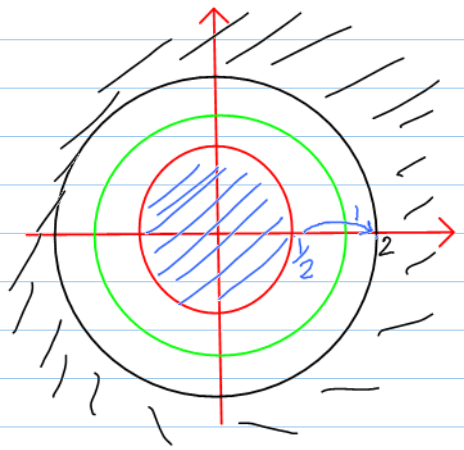
$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{2 - z^{-1}}$; $|z| < \frac{1}{2}$

$\downarrow z \to z^{-1}$

$x[-n] \longrightarrow \frac{1}{2 - (z^{-1})^{-1}}$; $|z^{-1}| < \frac{1}{2}$

$\rightarrow$

$\frac{1}{2 - z}$; $|z| > 2$



مرزها نسبت به دایره واحد قرینه

داخل $\rightleftharpoons$ بیرون

⑤ مثال دوم:

$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x$

$a^n \downarrow \qquad \downarrow z \to \frac{z}{a}$

$a^n x[n] \longrightarrow X(\frac{z}{a});\ ROC = |a| \times ROC_x$

یعنی شعاع همگرایی در ROC_x به اندازه $|a|$ ضرب می‌شود و داخل یا بیرون دایره‌ی همگرایی می‌رود.

$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x = |z| > \frac{1}{2}$

$y[n] = \underbrace{2^n x[n]}_{f(n)} - \underbrace{\cos(\pi n)\, x[-n]}_{h[n]}$

$x[n] \longrightarrow X(z),\quad |z| > \frac{1}{2}$

$2^n \downarrow \qquad \downarrow z \to \frac{z}{2}$

$f = 2^n x[n] \longrightarrow F = X(\frac{z}{2}),\ |\frac{z}{2}| > \frac{1}{2} \to |z| > 1 = ROC_f$

$(-1)^n$

$\cos(\pi n)\, x[-n] \longrightarrow$

$x[n] \longrightarrow X(z),\quad |z| > \frac{1}{2}$

$x[-n] \longrightarrow X(z^{-1});\ |z^{-1}| > \frac{1}{2}$

$(-1)^n \downarrow \qquad \downarrow z \to \frac{z}{-1}$

$(-1)^n x[-n] \longrightarrow X((\frac{z}{-1})^{-1});\ |(\frac{z}{-1})^{-1}| > \frac{1}{2}$

$h[n] \longrightarrow X(\frac{z^{-1}}{(-1)^{-1}});\ |\frac{z^{-1}}{(-1)^{-1}}| > \frac{1}{2}$

$h[n] \longrightarrow H = X(-z^{-1}),\ \frac{|z^{-1}|}{|-1|} > \frac{1}{2} \to |z| < 2 = ROC_H$

$|z^{-1}| > \frac{1}{2} \to \frac{1}{|z|} > \frac{1}{2} \to |z| < 2$

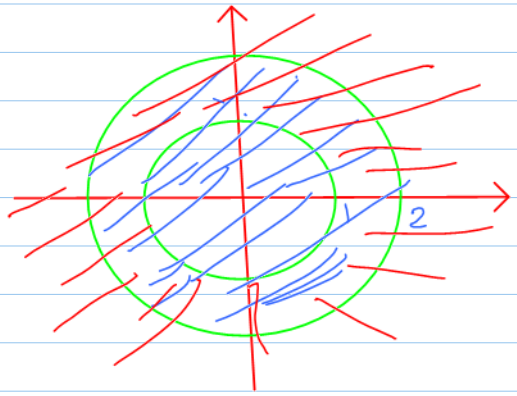
$x[n] \longrightarrow X(z), \quad |z| > \frac{1}{2}$

$y[n] = 2^n x[n] - \cos(\pi n) x[-n]$

$= f[n] - h[n]$

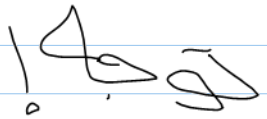
$2^n x[n] \longrightarrow X\left(\frac{z}{2}\right), \quad |z| > 1$

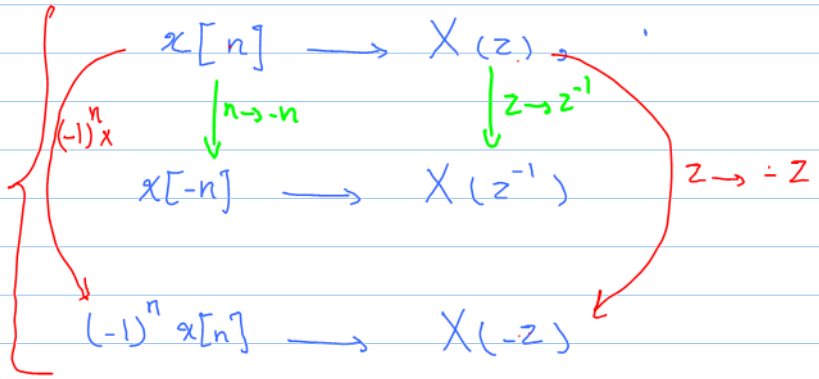
$\cos(\pi n) x[-n] \longrightarrow X(-z^{-1}); \quad |z| < 2$



$Y(z) = X\left(\frac{z}{2}\right) - X(-z^{-1})$

$ROC_y \supseteq 1 < |z| < 2$





$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x$

$\downarrow n \to \frac{n}{m}$ $\qquad$ $\downarrow z \to z^m$

$x_{(m)}[n] \longrightarrow X(z^m),\ ROC = (ROC_x)^{1/m}$

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n = m \times k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{z-1}{\frac{1}{2} - z^{-1}} \qquad \frac{1}{2} < |z| < \infty$

$\downarrow n \to \frac{n}{3}$ $\qquad$ $\downarrow z \to z^3$

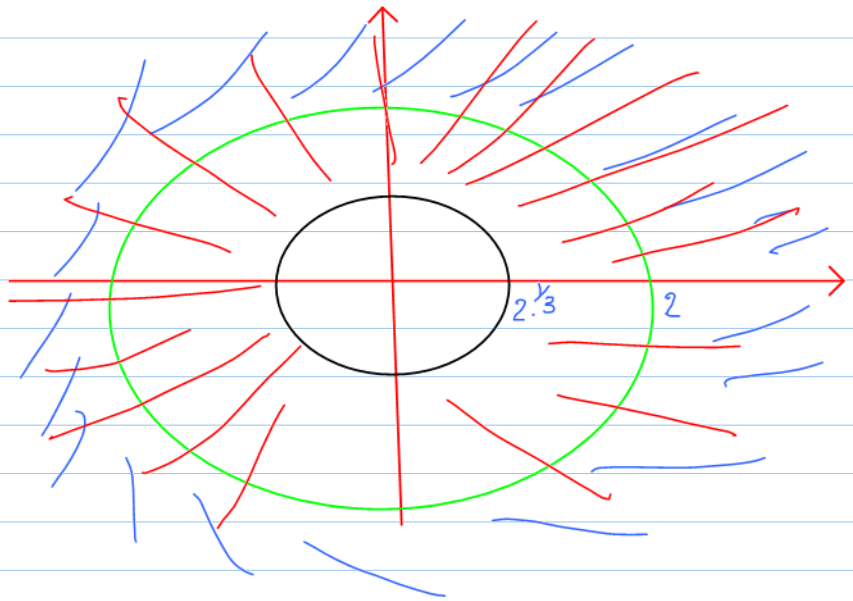
$x_{(3)}[n] \longrightarrow \frac{z^3 - 1}{\frac{1}{2} - (z^3)^{-1}} \quad ; \quad \frac{1}{2} < |z^3| < \infty$

$$\frac{z^3 - 1}{\frac{1}{2} - z^{-3}} \quad ; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < |z| < \sqrt[3]{\infty}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} < |z| < \infty$$

$n \to \frac{n}{3}$

$2 \to 2^{1/3}$



$n \to \frac{n}{3} \to$ شکل Rac چون کوچک می‌شود.

ولی اعدادی داریم با توان $\frac{1}{3}$ می‌رسد.

برق ۸۴

$h[n]$ دنباله‌ای با $H(z)$ دارای دو قطب در $\sqrt{۳}e^{\pm j\frac{\pi}{۸}}$ است. اگر $h_۱[n]\overset{\Delta}{=}h[n]\cos\frac{\pi n}{۴}$ باشد در حالت کلّی محل قطب‌های $H_۱(z)$ به فرم زیر است:

۱) $\sqrt{۳}e^{\pm j\frac{۳\pi}{۸}}$

۲) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}e^{\pm j\frac{۲\pi}{۸}}$

۳) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}e^{\pm j\frac{۳\pi}{۸}}$ و $\sqrt{\frac{۳}{۲}}e^{\pm j\frac{\pi}{۸}}$

۴) $\sqrt{۳}e^{\pm j\frac{۲\pi}{۸}}$ و $\sqrt{۳}e^{\pm j\frac{\pi}{۸}}$

$h[n] \longrightarrow H(z)$; $z = \sqrt{3}\, e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$

$\cos(\frac{\pi}{4}n)h[n] \longrightarrow F(z)$; ?

$$\left(\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n\right)h[n] \longrightarrow F(z)$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n h[n] + \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n h[n] \longrightarrow F(z)$$

$\frac{1}{2}h[n] \longrightarrow \frac{1}{2}H(z)$; $z = \sqrt{3}\, e^{\pm j\pi/8}$

$(e^{j\pi/4})^n$ ↓ $z \to \frac{z}{e^{j\pi/4}}$

$\frac{1}{2}\left(e^{j\pi/4}\right)^n h[n] \longrightarrow \frac{1}{2}H\left(\frac{z}{e^{j\pi/4}}\right)$; $\frac{z}{e^{j\pi/4}} = \sqrt{3}\, e^{\pm j\frac{\pi}{8}}$

$z = \sqrt{3}\, e^{j\pi/8} \times e^{j\pi/4} = \sqrt{3}\, e^{j\frac{3\pi}{8}}$

$z = \sqrt{3}\, e^{-j\frac{\pi}{8}} \times e^{j\pi/4} = \sqrt{3}\, e^{j\pi/8}$

$\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}n}h[n] \longrightarrow H\left(\frac{z}{e^{j\pi/4}}\right)$; $z = \sqrt{3}\, e^{j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{3}\, e^{j\pi/8}$

$\frac{1}{2}h[n] \longrightarrow \frac{1}{2}H(z)$, $z = \sqrt{3}\, e^{j\pi/8}, \sqrt{3}\, e^{-j\pi/8}$

$\left(e^{-j\pi/4}\right)^n$ ↓ $z \to z/e^{-j\pi/4}$

$\frac{1}{2}e^{-j\pi/4 n}h[n] \longrightarrow \frac{1}{2}H\left(\frac{z}{e^{-j\pi/4}}\right)$; $\frac{z}{e^{-j\pi/4}} = \sqrt{3}\, e^{\pm j\pi/8}$

$z = \sqrt{3}\, e^{-j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{3}\, e^{-j\pi/8}$

$x = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}n} h[n] \longrightarrow X = \frac{1}{2} H\left(\frac{z}{e^{j\pi/4}}\right)$; قطبها $= \sqrt{3} e^{j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{8}}$

$y = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4 n} h[n] \longrightarrow Y = \frac{1}{2} H\left(\frac{z}{e^{-j\pi/4}}\right)$; " $= \sqrt{3} e^{-j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{3} e^{-j\pi/8}$

$X(z) + Y(z) \longrightarrow$ کل قطبها ؟

$x[n] + y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) h[n] \longrightarrow X(z) + Y(z)$

در حالتی که بازمی آینه قطبی ساده نشود قطبهای $X + Y$ حال قطبهای $X(z)$ و $Y(z)$ است.

$Y(z) + X(z)$ قطبهای $= \begin{cases} \sqrt{3}\, e^{j\pi/8} \\ \sqrt{3}\, e^{-j\pi/8} \\ \sqrt{3}\, e^{j3\pi/8} \\ \sqrt{3}\, e^{-j3\pi/8} \end{cases}$

برق ۹۵

اگر $X(z)$, $|z|>\frac{۱}{۲}$ تبدیل Z سیگنال زمان گسسته $x[n]$ باشد تبدیل Z سیگنال $y[n]=x[n]+(-۱)^n x[n]$ کدام است؟

۱) $Y(z)=X(z)+X(\frac{۱}{z})$, $۲>|z|>\frac{۱}{۲}$

۲) $Y(z)=X(z)+X(-z)$, $|z|>\frac{۱}{۲}$

۳) $Y(z)=X(z)+X(-z)$, $۲>|z|>\frac{۱}{۲}$

۴) $Y(z)=X(z)+X(\frac{۱}{z})$, $|z|>\frac{۱}{۲}$

$x[n] \longrightarrow X(z)$; $|z| > \frac{1}{2} = Roc_x$ $\quad y[n] = x[n] + f[n]$

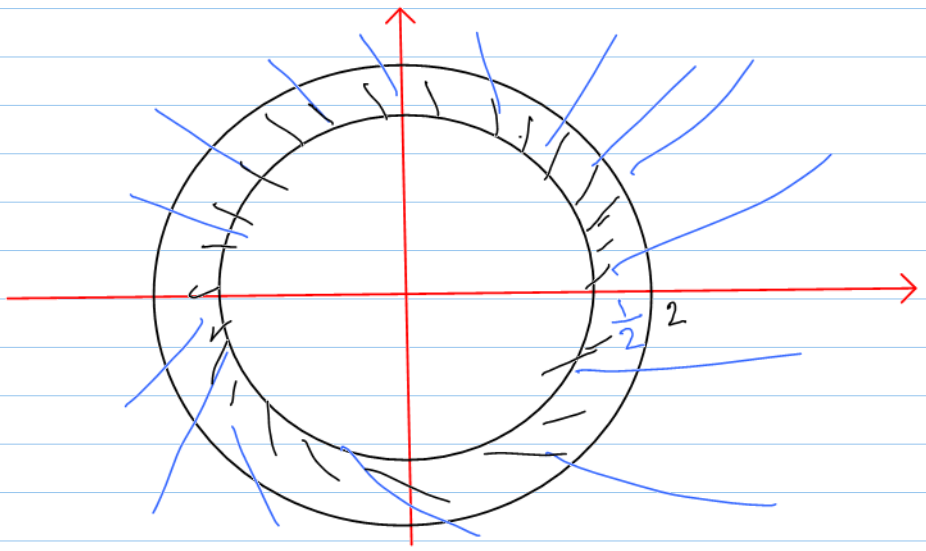
$f[n] = (-1)^n x[n]$

$(-1)^n x[n] \longrightarrow X(-z)$; $|-z| > \frac{1}{2} = Roc_f$

$y[n] = x[n] + f[n] \longrightarrow Y(z) = \begin{cases} X(z) + F(z) & Roc_x \cap Roc_f \neq \phi \\ \text{غیر مجاز} & " \quad " = \phi \end{cases}$

$Roc_x = |z| > \frac{1}{2}$ $\quad Roc_f = |-z| > \frac{1}{2} \longrightarrow |z| > \frac{1}{2}$

$Y(z) = X(z) + X(-z)$; $Roc_y \supseteq \{|z| > \frac{1}{2}\}$



$\frac{1}{2} < |z| < 2 \not\supseteq |z| > \frac{1}{2}$

$Roc_y \supseteq$ "

۹۶ دکتری

اگر داشته باشیم $Y(z) = X(a^{-1}z) + X(2a^{-1}z) + X(4a^{-1}z) + X(8a^{-1}z) + \cdots$ ، حاصل $y[1]y[2]$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}x[1]x[2]a^3$

۲) $\frac{16}{9}x[1]x[2]a^3$

۳) $\frac{8}{3}x[1]x[2]a^3$

۴) $\frac{4}{3}x[1]x[2]a^3$

$2a^{-1}z = \frac{2z}{a} = \frac{z}{\frac{a}{2}}$

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$y[n] \longrightarrow Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right) + X\left(2a^{-1}z\right) + X\left(4a^{-1}z\right) + \cdots$

$a^n x[n] \longrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$

$+$

$\left(\frac{a}{2}\right)^n x[n] \longrightarrow X\left(\frac{z}{\frac{a}{2}}\right)$

$+$

$\left(\frac{a}{4}\right)^n x[n] \longrightarrow X\left(\frac{z}{\frac{a}{4}}\right)$

$+$

$\vdots$

$y[n] \longrightarrow Y(z)$

$y[n] = a^n x[n] + \left(\frac{a}{2}\right)^n x[n] + \left(\frac{a}{4}\right)^n x[n] + \cdots$

$y[n] = a^n x[n]\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n + \cdots\right)$

$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n + \cdots = ?$

$y[1] = a^1 x[1] \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)}_{2}$

$y[2] = a^2 x[2] \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right)}_{4/3}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}$

$y[1]\, y[2] = 2a\, x[1] \times a^2 x[2] \times 4/3 = \frac{16}{3} a^3 x[1] x[2]$

تستی ۹۵.

تبدیل z ، $y[n]$ برحسب $X(z)$ کدام است؟

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

۱) $z^{-1} X(z^2)$

۲) $z^2 X(z)$

۳) $z^{-2} X(z)$

۴) $z X(z^2)$

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$y[n] \longrightarrow ?$

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$x_{(m)}[n-1] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{m}\right] & n-1 = m \times k \\ 0 & n-1 \neq m \times k \end{cases}$$

$$x_{(2)}[n-1] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n-1 = 2k \rightarrow n = 2k+1 \quad \text{فرد} \\ 0 & n-1 \neq 2k \quad n \neq 2k+1 \quad \text{زوج} \end{cases}$$

$$y = x_{(2)}[n-1] = \begin{cases} x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n = \text{فرد} \\ 0 & n = \text{زوج} \end{cases}$$

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$x[n-1] \longrightarrow z^{-1} X(z)$

$n \rightarrow \frac{n}{2}$ ، $z \rightarrow z^2$

$x_{(2)}[n-1] \longrightarrow (z^2)^{-2} X(z^2) = z^{-2} X(z^2)$

در $x_{(m)}[n-a]$ اول عقب می‌افتد

بعد انتقال زمانی

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$x_{(2)}[n-1]$

$n \rightarrow \frac{n}{2}$ ، $z \rightarrow z^2$

$x_{(2)}[n] \longrightarrow X(z^2)$

$n \rightarrow n-1$ ، z^{-1}

$y = x_{(2)}[n-1] \longrightarrow z^{-1} X(z^2) = Y(z)$

جلسه 65 سیگنال

⑥ زوج و فرد:

اگر $x[n]$ زوج (فرد) باشد:

الف) ROC_x نسبت به دایره واحد متقارن بوده و شامل آن می‌شود $\left(\frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha\right)$

ب) قطبها و صفرهای $X(z)$ عکس هم می‌باشند یعنی a قطب ← $\frac{1}{a}$ هم قطب

b صفر ← $\frac{1}{b}$ هم صفر

ج) $X(z) = X(z^{-1})$ $\left(X(z) = -X(z^{-1})\right)$

$x[n] = (\frac{1}{2})^{2n} u[n]$ → $x[n] \overset{?}{=} x[-n]$ → زوج

$x[n] \overset{?}{=} -x[-n]$ → فرد

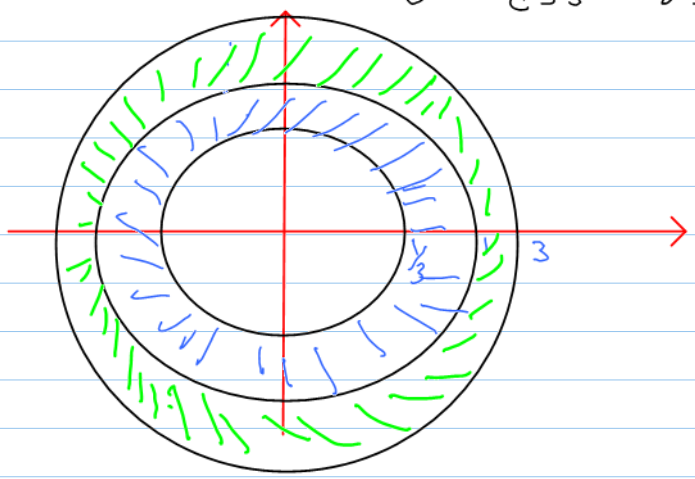
$x[-n] = (\frac{1}{2})^{-2n} u[-n]$ $x[n] \neq x[-n]$ زوج نیست

$x[n] \neq -x[-n]$ فرد نیست

$$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{(z-2)(z-\frac{1}{2})}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} \; ; \; ROC_x = \frac{1}{3} < |z| < 3$$

اگر بخواهد زوج یا فرد باشد ← شرط اضافه دیگر را داشته باشد.

اگر شرط اضافه یا دیگر را نداشته ← $x[n]$ نه زوج نه فرد

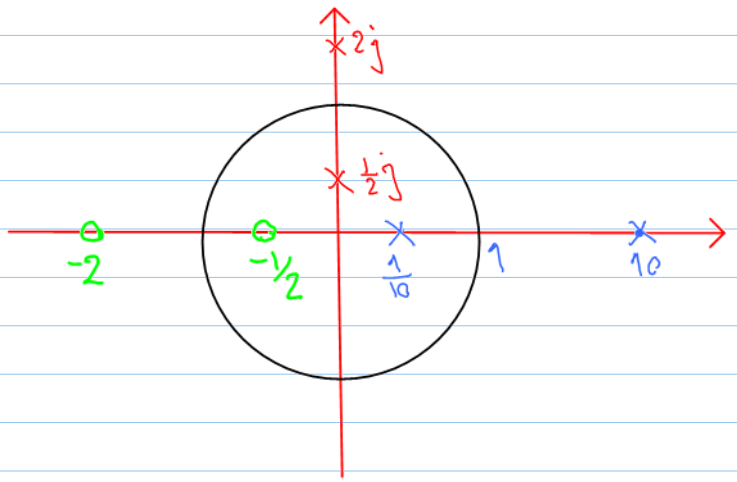


ROC_x نسبت به دایره واحد متقارن

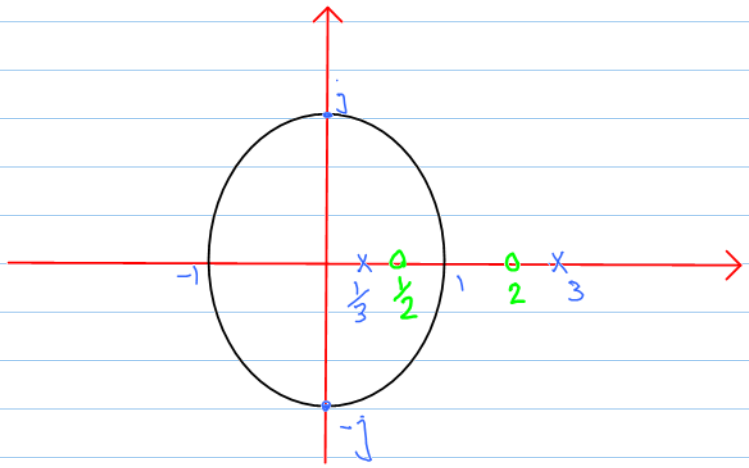
شرط اضافه:

$ROC_x = \frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha$

$ROC_x = \frac{1}{3} < |z| < 3$



سؤال ب:



سؤال ب ✓

سؤال الف و ب را دارد ← سؤالهای لازم برای زوج یا فرد بودن را دارد.

یعنی میتوانند زوج یا فرد باشد.

$$X(z) \longrightarrow X(z^{-1})$$

$$X(z) = \frac{(z-2)(z-\frac{1}{2})}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} \stackrel{?}{=} X(z^{-1}) = \frac{(z^{-1}-2)(z^{-1}-\frac{1}{2})}{(z^{-1}-3)(z^{-1}-\frac{1}{3})}$$

$$X(z^{-1}) = \frac{(z^{-1}-2)(z^{-1}-\frac{1}{2})}{(z^{-1}-3)(z^{-1}-\frac{1}{3})} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{(1-2z)(1-\frac{1}{2}z)}{(1-3z)(1-\frac{1}{3}z)}$$

$$X(z) \stackrel{?}{=} X(z^{-1})$$

$$\frac{z^2-2.5z+1}{z^2-\frac{10}{3}z+1} = \frac{1-2.5z+z^2}{1-\frac{10}{3}z+z^2} \checkmark \rightarrow$$

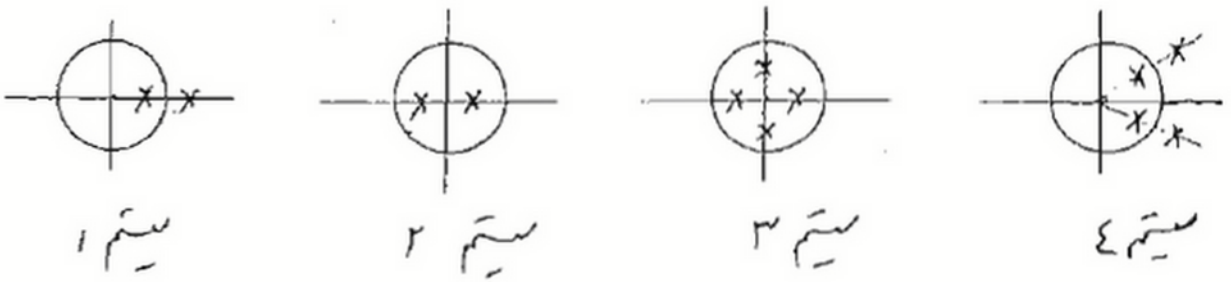
سؤال الف و ب ✓

$X(z) = X(z^{-1})$ ← زوج ✓

$X(z) = -X(z^{-1})$ ← فرد

برق ۸۸

محل قطب‌های چهار سیستم زمان گسسته در صفحه Z در شکل زیر نشان داده شده است (صفرها نشان داده نشده است). شعاع دایره‌ها نیز برابر با واحد است. پاسخ ضربه کدام یک از سیستم‌ها می‌تواند تقارن زوج داشته باشد؟



سیستم ۱ سیستم ۲ سیستم ۳ سیستم ۴

۱) ۲ و ۳
۲) ۱ و ۴
۳) ۳ و ۴
۴) ۱ و ۲

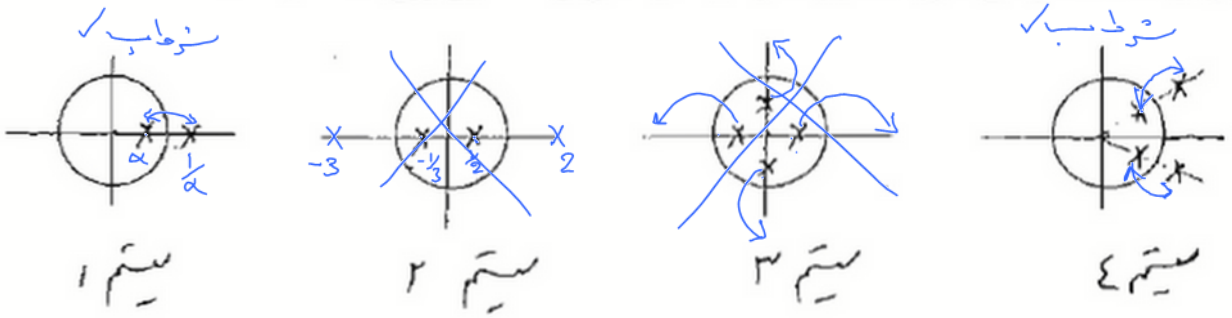
شرط الف و ب ← می‌تواند زوج یا فرد باشد.

شرط الف : $\frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha$

شرط ب : $a \longrightarrow \frac{1}{a}$

$b \longrightarrow \frac{1}{b}$

محل قطب‌های چهار سیستم زمان گسسته در صفحه Z در شکل زیر نشان داده شده است (صفرها نشان داده نشده است). شعاع دایره‌ها نیز برابر با واحد است. پاسخ ضربه کدام یک از سیستم‌ها می‌تواند تقارن زوج داشته باشد؟



۱) ۲ و ۳
۲) ۱ و ۴
۳) ۳ و ۴
۴) ۱ و ۲

⑦ مرتبط بـ :

$x^*[n] \longrightarrow X^*(z^*)$, $ROC = ROC_x$

$x[n] \longrightarrow X(z)$, $|z| < 2$

$y[n] = x^*[-n] \longrightarrow ?$

$x[n] \longrightarrow X(z)$; $|z| < 2$

$x^*[n] \longrightarrow X^*(z^*)$; $|z| < 2$

$n \to -n$ ↓ , $z \to z^{-1}$ ↓

$y = x^*[-n] \longrightarrow Y = X^*((z^{-1})^*)$, $|z^{-1}| < 2 \to |z| > 1/2$

$|\frac{1}{2}| < 2 \to \frac{1}{|z|} < 2 \to 1 < 2|z|$

$\frac{1}{2} < |z|$ ✓

⑧ جمع و انباشتگی:

$$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z),\quad ROC \supseteq ROC_x \cap \{|z|>1\}$$

$$x[n] \longrightarrow X(z)$$

$$nx[n] \longrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} = z^{-1}\frac{dX(z^{-1})}{dz^{-1}}$$

⑨ کانولوشن:

$$x[n] * y[n] \longrightarrow \begin{cases} X(z)\,Y(z) & ROC \supseteq R_x \cap R_y \\ \text{وجود ندارد} & R_x \cap R_y = \Phi \end{cases}$$

$$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$nx[n] \longrightarrow ?\quad z^{-1}\frac{dX}{dz^{-1}} = -z\frac{dX}{dz}$$

$$n\,x[n] \longrightarrow z^{-1}\left(\frac{0\times(1-z^{-1}) - (-1)\times 1}{(1-z^{-1})^2}\right) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

برق ۹۴

$x[n]$ یک سیگنال علّی با تبدیل z ، $X(z)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-3})^2}$ می‌باشد. $x[n]$ ، کدام است؟

۱) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}-1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}}u[\frac{n}{3}-1] & n \text{ مضرب } 3\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

۲) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}-1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}-1}u[\frac{n}{3}-1] & n \text{ مضرب } 3\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

۳) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}+1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}}u[\frac{n}{3}+1] & n \text{ مضرب } 3\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

۴) $x[n]=\begin{cases}(\frac{n}{3}+1)(-\frac{1}{2})^{\frac{n}{3}+1}u[\frac{n}{3}+1] & n \text{ مضرب } 3\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$

$$x[n] \longrightarrow \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-3})^2}$$

علی ← دست راستی

* شبیه ترین $X(z)$ به صورت سوال را از جدول تبدیل z پیدا کنید و سعی کنید با خواص تبدیل z به صورت سوال برسید.

$$a^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$f(n) = (\frac{1}{2})^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = f(z) \qquad nx[n] \longrightarrow z^{-1}\frac{dX}{dz^{-1}}$$

$$\frac{df(z)}{dz^{-1}} = \frac{+1/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$$f(n) \longrightarrow f(z)$$

$$nf(n) \longrightarrow z^{-1}\frac{df}{dz^{-1}}$$

$$n(\frac{1}{2})^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-3})^2}$$

$$2n(\frac{1}{2})^n u[n] \longrightarrow z^{-1}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$n \to n+1$ ↓ $\times z^1$

$$x[n] \longrightarrow X(z)$$
$$\downarrow n \to n+a \qquad \downarrow z^a$$
$$x[n+a] \longrightarrow z^a X(z)$$

$$Y = 2(n+1)(\frac{1}{2})^{n+1} u[n+1] \longrightarrow \frac{1}{(1-\frac{1}{2}(z)^{-1})^2}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-3})^2}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2}(z^3)^{-1})^2}$$

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$x_{(3)}[n] \longrightarrow X(z^3)$

$y[n] = 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \longrightarrow \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$

$y_{(3)}[n]$ ↓ , $z \to z^3$ ↓

$y_{(3)}[n] = x[n] \longrightarrow \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-3}\right)^2} = X(z)$

$$x[n] = y_{(3)}[n] = \begin{cases} y\left[\frac{n}{3}\right] & n = 3k \\ 0 & n \neq 3k \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 2\left(\frac{n}{3}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n/3+1} u\left[\frac{n}{3}+1\right] & n = 3k \\ 0 & n \neq 3k \end{cases}$$

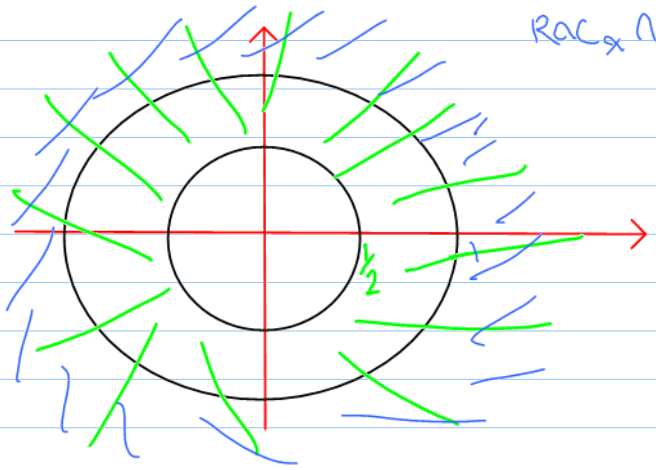
$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}+1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3}$

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{n}{3}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n/3} u\left[\frac{n}{3}+1\right] & n = 3k \\ 0 & n \neq 3k \end{cases}$$

$x[n] \longrightarrow \frac{1}{(2-z^{-1})}$; $|z| > \frac{1}{2} = RoC_x$: ابتدا تنگی

$\frac{1}{1-z^{-1}}$

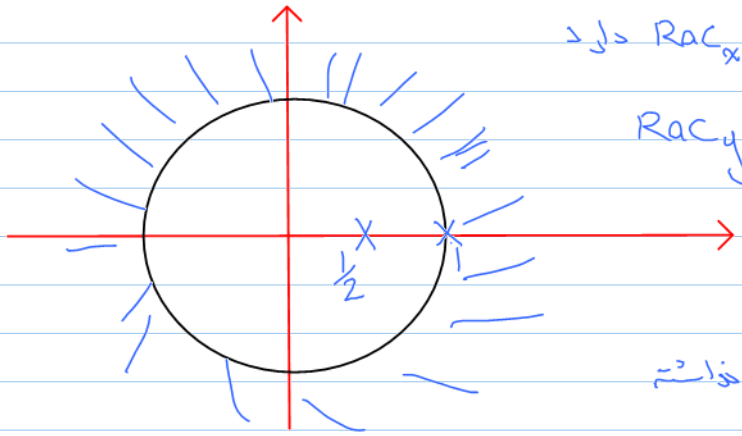
$y = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow Y(z) = \frac{1}{(2-z^{-1})(1-z^{-1})}$; $RoC \supseteq (RoC_x \cap \{|z|>1\})$



$RoC_x \cap \{|z|>1\}$ -1 $\leftarrow RoC_y$

$RoC_x \cap \{|z|>1\} = |z|>1$

2- قطبهای $Y(z)$ را تعیین کنید.



3- اگر قطب روی $RoC_x \cap \{|z|>1\}$ باشد

$RoC_y = RoC_x \cap \{|z|>1\}$

4- اگر روی مرز اشتراک قطب نباشد

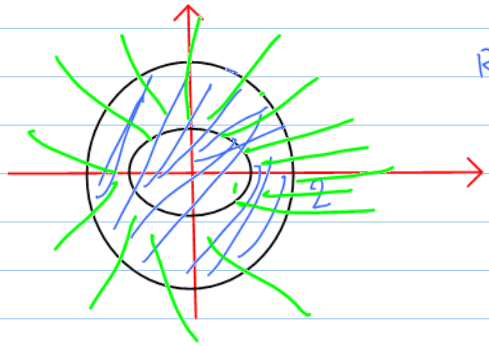
باشد RoC مثل آبادان بزرگتری شود.

$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-2z^{-1})}$; $|z| < 2$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \longrightarrow Y(z) = ?$

$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$; $RoC \supseteq \{RoC_x \cap \{|z|>1\}\}$

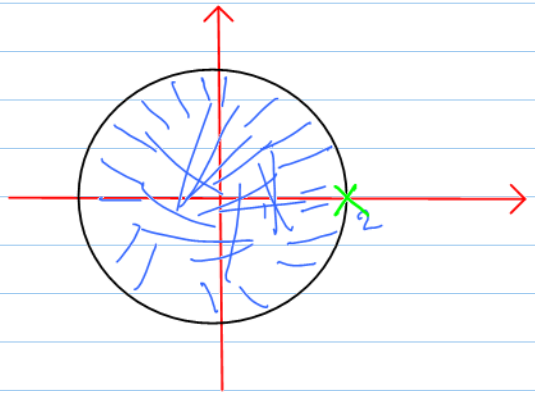
$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \frac{1}{(1-2z^{-1})}$;



$RoC_x = |z| < 2$: RoC_f

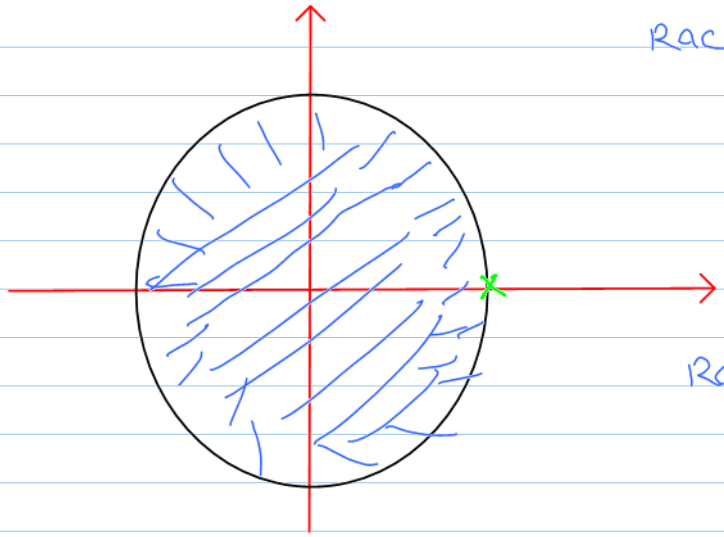
$1 < |z| < 2 = RoC_x \cap \{|z| > 1\}$ (1

-2



$$f(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$RoC_f = |z| < 2$$



$RoC_x \cap \{|z| > 1\}$

$$f(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$RoC_f = |z| < 2$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow \frac{1}{1-2z^{-1}} \; ; \quad |z| < 2$$

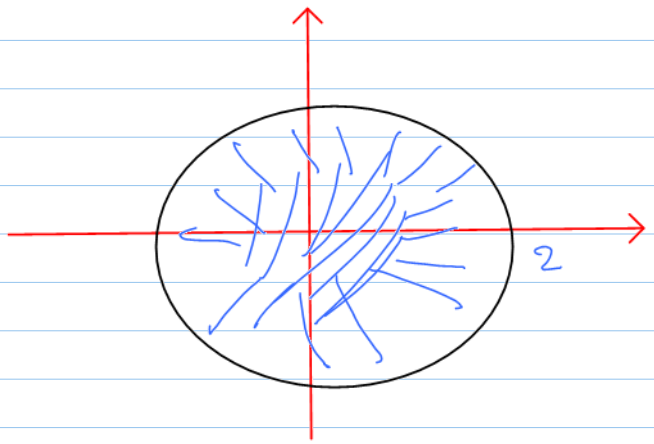
$n \to n-1$ $\qquad$ $\times z^{-1}$

$$\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \longrightarrow Y = \frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} \; ; \quad RoC_y = \{|z| < 2\} \overset{?}{\pm} \{+\infty, 0\}$$

$Y(0) = \infty \longrightarrow$

$Y(a) \neq \infty \longrightarrow$

$Y(a) = \dfrac{(a)^{-1}}{1 - 2(a^{-1})} = ?$



$Y(z) = \dfrac{1}{z-2}$ $\qquad Y(a) = \dfrac{1}{a-2} = -\frac{1}{2} \neq \infty \qquad a \in ROC_y$

$\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \longrightarrow \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$; $\qquad |z| < 2$

$x[n] \longrightarrow X(z)$, ROC_x

$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longrightarrow Y(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} X(z)$, ROC_y :

برای تعیین ROC_y داریم:

1- استوک ROC_x با بیرون دایره واحد را تعیین کنید.

2- قطبهای $Y(z)$ را تعیین کنید.

حالت اول: اگر روی سرنمای ناحیه مرجع ۱ ، $Y(z)$ قطب دارد : ناحیه مرجع ۱ = ROC_y

حالت دوم: روی هرکدام از سرنمای ناحیه ۱ که $Y(z)$ صفر ندارد ، آن سر حذف می‌شود و ROC مثل آبشاری از آن سر ادامه پیدا می‌کند.

⑮ ارتباط تبدیل فوریه و z:

$x[n]$ به شرطی تبدیل فوریه دارد که پایدار باشد.

شرط پایداری ⟵ مطلقاً انتگرال پذیر ⟵ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$

* اگر $x[n]$ تبدیل فوریه داشته باشد ($X(j\omega)$) آنگاه می‌توان گفت که $x[n]$ دارای تبدیل z بوده و با جایگذاری $z = e^{j\omega}$ در $X(j\omega)$ ، تبدیل z بدست می‌آید.

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](1)^n < \infty$$

یا به عبارتی:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, a^n < \infty \Rightarrow |z| = \frac{1}{a} \in ROC_x$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](1)^n < \infty \Rightarrow |z| = \frac{1}{1} = 1 \in ROC_x$$

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega) \xrightarrow{e^{j\omega} = z} X(z), \quad |z| = 1 \in ROC_x$$

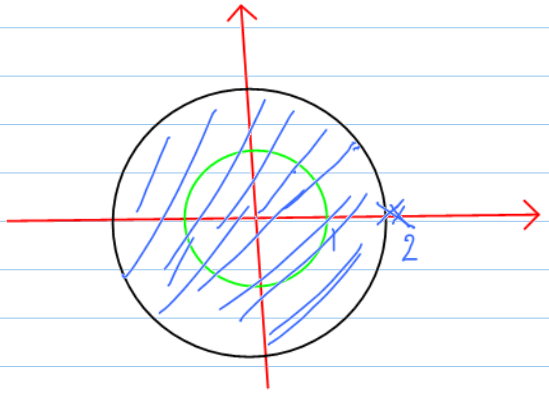
مثال: $X(j\omega) = \frac{1}{1 - 2e^{j\omega}}$ است. ROC_x را بدست آورید.

اگر سیگنال x دارای تبدیل فوریه باشد یعنی $|z| = 1 \in ROC_x$ است.

$$X(j\omega) = \frac{1}{1 - 2(e^{j\omega})^{-1}} \longrightarrow X(z) = ?$$

$$e^{j\omega} = z \;,\; |z| = 1 \in ROC_x$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \;;\; |z| < 2$$



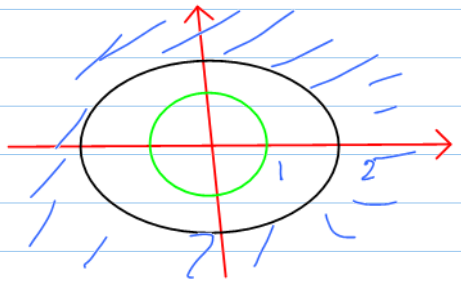
اگر $x[n]$ دارای تبدیل z باشد به شرطی که دایره واحد در ROC_x باشد، تبدیل فوریه دارد.

$$x[n] \longrightarrow X(z) \ , \ ROC_x \longrightarrow \begin{cases} |z|=1 \notin ROC_x \Rightarrow X(j\omega) \text{ وجود ندارد} \\ |z|=1 \in ROC_x \Rightarrow X(j\omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریه $x[n] = 2^n u[n]$ را بدست آورید.

" " " $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ " " "

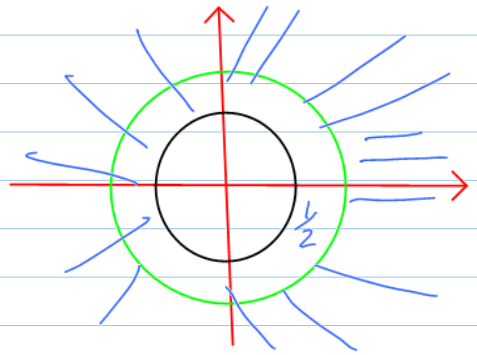
$$x[n] = 2^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \ ; \ |z| > 2$$



$X(j\omega) = ?$ $\quad |z|=1 \in ROC_x \longrightarrow X(j\omega)$ وجود ندارد

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(e^{j\omega})^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$



$$X(j\omega) \xrightarrow{e^{j\omega}=z} X(z) \ ; \quad |z|=1 \in ROC_x$$

$$X(z) \longrightarrow \begin{cases} |z|=1 \in ROC_x \longrightarrow X(j\omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \\ " \ " \ " \notin ROC_x \longrightarrow " \ " \ " = \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

کامپیوتر ۹۶

کدام عبارت در خصوص تبدیل فوریه دنباله $x[n] = 3^n u[n-1] + 4^n u[-n]$، درست است؟

۱) تبدیل فوریه وجود ندارد.

۲) تبدیل فوریه همواره وجود دارد.

۳) تبدیل فوریه به ازاء $n \geq 1$ وجود دارد.

۴) تبدیل فوریه فقط به ازاء $|Z| > 1$ وجود دارد.

$x[n] = 3^n u[n-1] + 4^n u[-n] \longrightarrow X(j\omega) = ?$

* چگاه بخواهیم تبدیل فوریه وجود دارد یا نه؟

1- سیگنال پیوسته ← تبدیل لاپلاس $X(s)$ را حساب کنید و

- اگر $j\omega \in ROC_x$ ← وجود دارد
- اگر $j\omega \notin ROC_x$ ← ندارد

2- سیگنال گسسته ← $X(z)$ را حساب کنید و

- اگر $|z|=1 \in ROC_x$ ← وجود دارد
- اگر $|z|=1 \notin ROC_x$ ← ندارد

$x[n] \longrightarrow X(z)$, $ROC_x \longrightarrow$

- $|z|=1 \in ROC_x$ ← تبدیل فوریه دارد
- $|z|=1 \notin ROC_x$ ← تبدیل فوریه ندارد

$\underbrace{3^n u[n-1]}_{f[n]} + \underbrace{4^n u[-n]}_{g[n]} \longrightarrow X(z) = ?$

$3^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-3z^{-1}} \quad ; \quad |z|>3$

$n \to n-1$ ↓ , $\times z^{-1}$ ↓

$3 \times 3^{n-1} u[n-1] \longrightarrow 3 \times \frac{z^{-1}}{1-3z^{-1}} \quad ; \quad |z|>3 \quad \overset{?}{\pm}\{\infty, a\}$

$f[n] \longrightarrow \frac{3z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad ; \quad ROC_f = |z|>3 \pm\{\infty, \cancel{a}\}$

$F(z) = \frac{3}{z-1} \longrightarrow a<1 \longrightarrow ROC_f = |z|>3$

$f(n) \longrightarrow \frac{3}{z-1} \quad ; \quad |z|>3$

$4^n u[-n] \longrightarrow ?$

$-1\left(-4^n u[-n-1]\right) \longrightarrow -1 \times \frac{1}{1-4z^{-1}}$; $|z|<4$

$n \to n-1$; $\times z^{-1}$

$4^1 \times 4^{n-1} u[-(n-1)-1] \longrightarrow 4 \times \frac{-z^{-1}}{1-4z^{-1}}$; $|z|<4 \pm \{\infty, 0\}$

$g = 4^n u[-n] \longrightarrow G = \frac{-4z^{-1}}{1-4z^{-1}}$; $|z|<4 \overset{?}{\pm} \{\cancel{\infty}, 0\}$

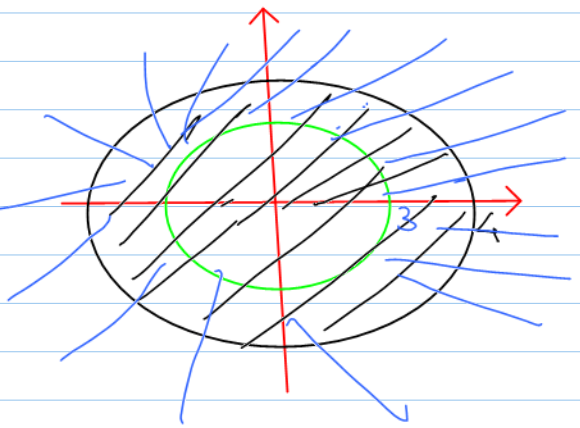
$G(z) = \frac{-4}{z-4}$; $G(\infty) = 1 \longrightarrow 0 \in ROC_G$

$g[n] \longrightarrow \frac{-4}{z-4}$; $ROC_G = |z|<4$

$f[n] \longrightarrow \frac{3}{z-3}$; $ROC_f = |z|>3$

$x[n] = f[n] + g[n] \longrightarrow X(z) = ?$

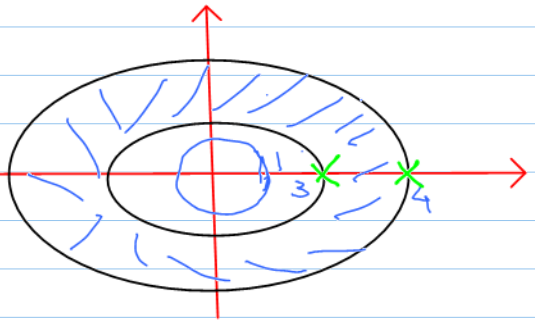
$ROC_f \cap ROC_g \neq \phi \longrightarrow X(z) = F(z) + G(z)$



$X(z) = \frac{3}{z-3} - \frac{4}{z-4} = \frac{-z}{(z-3)(z-4)}$

$ROC_X = 3<|z|<4$

$X(jw) \Rightarrow |z|=1 \notin ROC_X \longrightarrow X(jw) = \cancel{\text{jiss gg g}}$



دکتری ۹۸

تبدیل z سیگنال گسسته $x[n]$ روی دایرهٔ $z = 2e^{j\omega}$ به‌صورت زیر است:

$$X(2e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

سیگنال $x[n]$، کدام است؟

۱) $x[n] = 6^n u[n]$

۲) $x[n] = (\frac{2}{3})^n u[n]$

۳) $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$

۴) $x[n] = (\frac{1}{6})^n u[n]$

$x[n] \longrightarrow X(z)$

$X(z=2e^{j\omega}) \longrightarrow X(2e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

$?=X(z) \xrightarrow{z=2e^{j\omega}} \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}(e^{j\omega})^{-1}}$

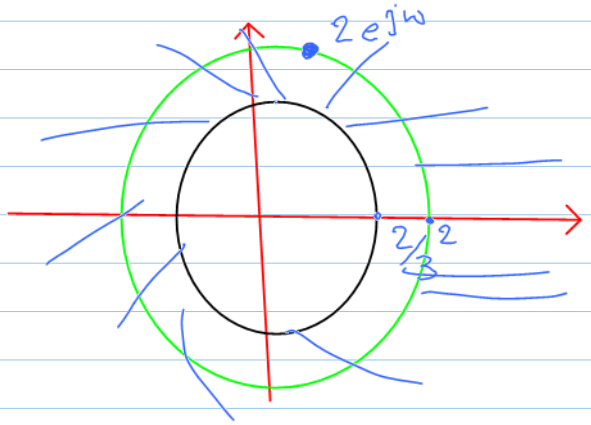
$e^{j\omega} = \frac{z}{2}$

$X(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}(\frac{z}{2})^{-1}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}\times z^{-1}\times 2} = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$

$X(z) = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \longrightarrow x[n] = \begin{cases} (\frac{2}{3})^n u[n] & ? \ ① \ \checkmark \\ -(\frac{2}{3})^n u[-n-1] & ? \ ② \end{cases}$

① $\longrightarrow$ $ROC_x = |z| > \frac{2}{3}$ ✓

② $\longrightarrow$ $ROC_x = |z| < 2/3$



$X(z) \longrightarrow \underline{z=2e^{j\omega}}$ $\quad X(2e^{j\omega}) \neq \infty$

$\longrightarrow \underline{z=2e^{j\omega}} \in ROC_x$

$z = 2e^{j\omega}$ $\quad |z|=2 \in ROC_x$

$h[n] = u[n] \longrightarrow$ $h[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ بازای تمام n های مثبت IIR

∞

$n : 0 \longrightarrow \infty$

$h[n] = \delta[n-100] + -10\delta[n+10^6] + \delta[n-1]$

$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 1000 \\ 1 & n = 1 \\ -10 & n = -10^6 \\ 0 & else \end{cases}$

تا 3 نقطه FIR

$h[n] \longrightarrow$ FIR یا IIR

$H(z) \longrightarrow$ ؟

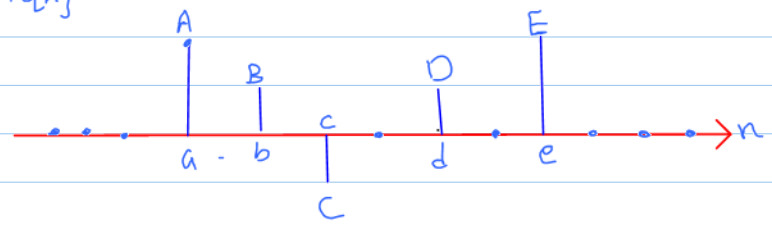
جلسه 66 سیگنال

سیستم FIR و IIR:

تعداد نقاطی که $h[n] \neq 0$ محدود است

FIR: (finite impulse response) سیستمی که طول پاسخ ضربه آن ($h[n]$) محدود است.

تشخیص FIR بودن از روی $H(z)$



$$h[n] = A\,\delta[n-a] + B\,\delta[n-b] + C\,\delta[n-c] + D\,\delta[n-d] + E\,\delta[n-e] \quad \text{FIR}$$

$H(z) = ?$

$$A\,\delta[n-n_0] \longrightarrow A z^{-n_0} \qquad \delta[n-a] \longrightarrow z^{-a}$$

$$H(z) = A z^{-a} + B z^{-b} + C z^{-c} + D z^{-d} + E z^{-e} \qquad m = \max\{a,b,c,d,e\}$$

$$H(z) = \frac{A}{z^a} + \frac{B}{z^b} + \frac{C}{z^c} + \frac{D}{z^d} + \frac{E}{z^e} \rightarrow H(z) = \frac{f(z)}{z^m} \rightarrow z^m = 0 \rightarrow z = 0$$

* یک سیستم با پاسخ ضربه $h[n]$ را FIR گوییم اگر تمام قطبهای $H(z)$ در مبدأ باشند. *

IIR: (infinite impulse response) اگر $H(z)$ قطبی در غیر از مبدأ داشته باشد IIR گوییم.

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow \text{قطب } z=1 \qquad H(z) = \frac{z-1}{z^3(z-10)} \rightarrow z = 0, 10$$

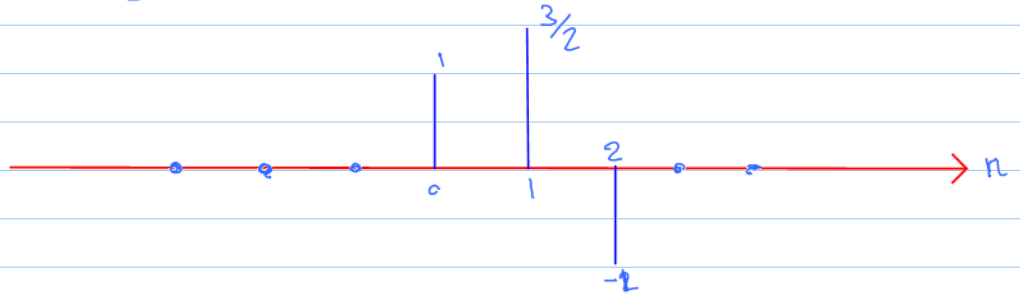
برگ ۸۴

سیستم گسسته ـ زمان LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[-n+2]$ مفروض است. وارون علّی این سیستم ...

۱) وجود ندارد.
۲) IIR و پایدار است.
۳) FIR (Finite Impulse Response) است.
۴) IIR (Infinite Impulse Response) و ناپایدار است.

$$\delta(a f(t)) = \frac{1}{|a|}\,\delta(f(t)) \qquad \delta[a f(n)] = \delta[f(n)]$$

$$h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[-n+2] \longrightarrow \text{FIR?}$$



$h[n]$ ، FIR هست.

$$h[n] * h^{-1}[n] = I$$

سینتکس؟

$$H(z)\ H^{-1}(z) = 1$$

$\leftarrow h^{-1}[n]$

$\leftarrow H^{-1}(z)$

$$h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$\delta[-n+2] = \delta[-1(n-2)] = \delta[n-2]$$

$$\delta[n-2] \rightarrow z^{-2}$$

$$\delta[-n+2] \rightarrow ?$$

$$H(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2} = 1 + \frac{3}{2z} - \frac{1}{z^2} = \frac{2z^2+3z-1}{2z^2}$$

ریشه‌های $H(z)$ $\leftarrow$ $2z^2 = 0 \rightarrow z = 0$ $\leftarrow$ FIR

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{2z^2}{2z^2+3z-1}$$

ریشه‌های $H^{-1}(z)$ $\rightarrow$ $2z^2 + 3z - 1 = 0 \rightarrow z^m \neq 0$ عبارت غیراز $\rightarrow$ IIR

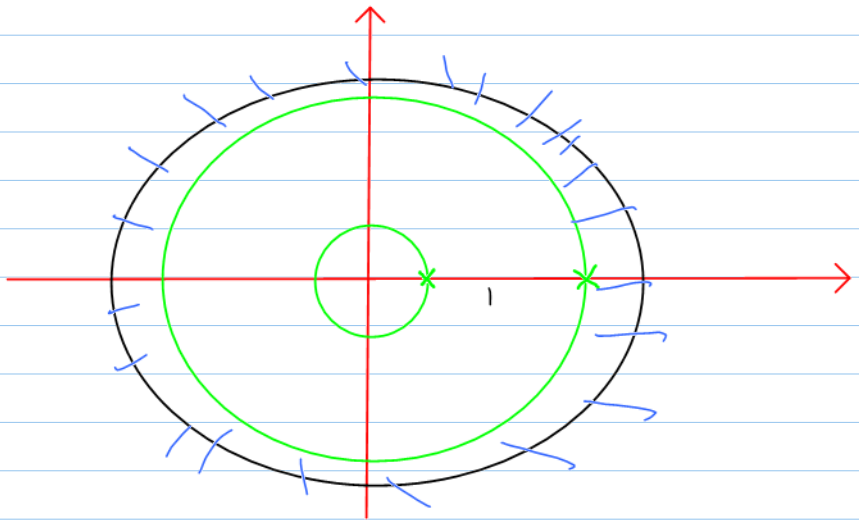
سینتکس IIR

عدد $z^{\text{عدد}}$ ضرب عدد

* اگر خروج تبدیل z یک سیگنال متشکل از یک توان z باشد $\leftarrow$ FIR

" " " " " عبارتی غیراز متشکل یک توان z باشد $\leftarrow$ IIR

علّی ← ROC_x دست راستی



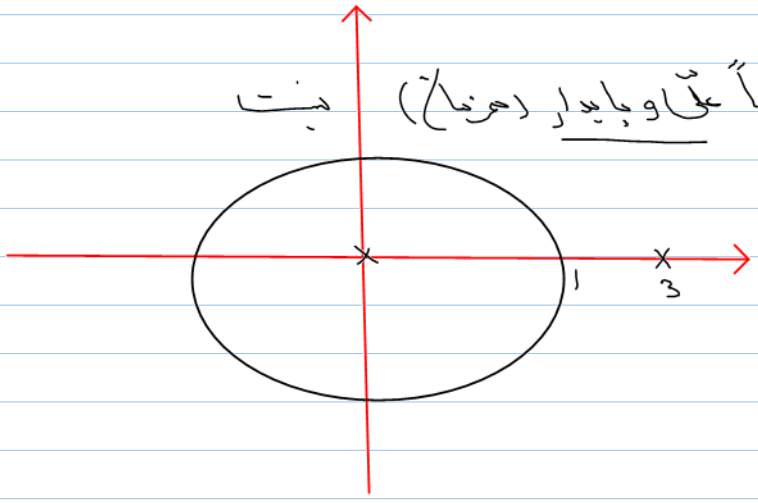
ROC_x = بیرون بزرگترین دایره‌روی قطبها

دایره واحد در ROC_x ← دایره واحد بیرون بزرگترین دایره روی قطبها =

تمام قطبها داخل دایره واحد ←

ROC_x دست راستی + تمام قطبها داخل دایره واحد ← $|z|=1 \subset ROC_x$

قطعاً علّی و پایدار (هردو) نیست



ارتباط ROC با خواص علّی و پایداری:

① علّی بودن

$x[n] \longrightarrow X(z),\ ROC_x$

اگر $x[n]$ علّی باشد آنگاه ROC_x دست راستی و شامل ∞ ($|z|>\alpha$) است یعنی درجه صورت $X(z)$ کمتر یا مساوی درجه مخرج $X(z)$ است.

$x[n]$ علّی $\Longleftrightarrow$ ROC_x دست‌راستی و شامل ∞

" هم‌علّی $\Longleftarrow$ " " چپی

ROC_x دست‌راستی $\not\Longleftarrow$ علّی $\quad X(z)=\frac{z^2}{z-1}\quad |z|>1 \rightarrow$ غیرعلّی

" " و شامل ∞ $\Longleftarrow$ علّی

② پایداری:

$x[n]$ پایدار $\Longleftrightarrow$ ROC_x شامل دایره واحد $\quad |z|=1 \in ROC_x$

③ علّی و پایدار:

$|z|=1 \in ROC_x$

$x[n]$ علّی و پایدار $\Longleftrightarrow$ ROC_x دست راستی و تمام قطب‌های $X(z)$ داخل دایره‌واحد و ROC_x شامل ∞

برق ۹۸

ROC دست راستی

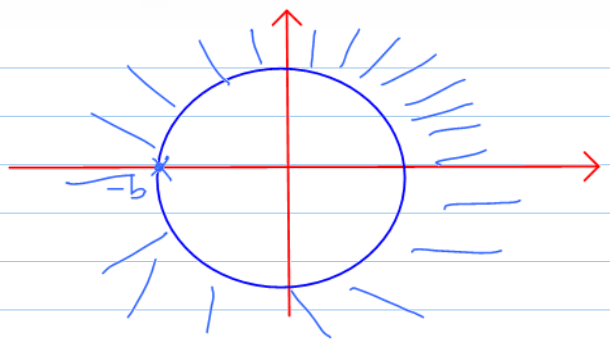
یک سیستم زمان گسسته LTI علّی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$h[0]=1\ ,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]=4\ ,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n h[n]=0$$

محل صفر z_0 و قطب p_0 آن را مشخص کنید؟

۱) $p_0=\frac{1}{2}\ ,\ z_0=1$ ۲) $p_0=\frac{1}{3}\ ,\ z_0=1$ ۳) $p_0=\frac{1}{2}\ ,\ z_0=-1$ ۴) $p_0=\frac{1}{3}\ ,\ z_0=-1$

$H(z)=\frac{z+a}{z+b}\quad |z_0|>|-b|$



$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] = 4 = H(1)$ $\quad h[0] = 1$ $\quad 1^{-n} = 1$ ②

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n](-1)^n = 0 = H(-1)$

$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] 1^{-n}$

$H(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] (z^{-1})^n = \sum h[n] (-1)^n$

$z^{-1} = -1 \rightarrow \boxed{z = -1}$

$\frac{1}{z} = -1$

$H(z) = \frac{z+a}{z+b}$; $H(1) = 4$, $H(-1) = 0$

$\frac{-1+a}{-1+b} = 0 \longrightarrow -1+a = 0 \rightarrow a = 1$

$H(z) = \frac{z+1}{z+b}$ $\quad \frac{1+1}{1+b} = 4 \rightarrow 1+b = \frac{2}{4}$

$b = -\frac{1}{2}$

$H(z) = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}} \longrightarrow$ صفر : -1

قطب : $\frac{1}{2}$

۸۵

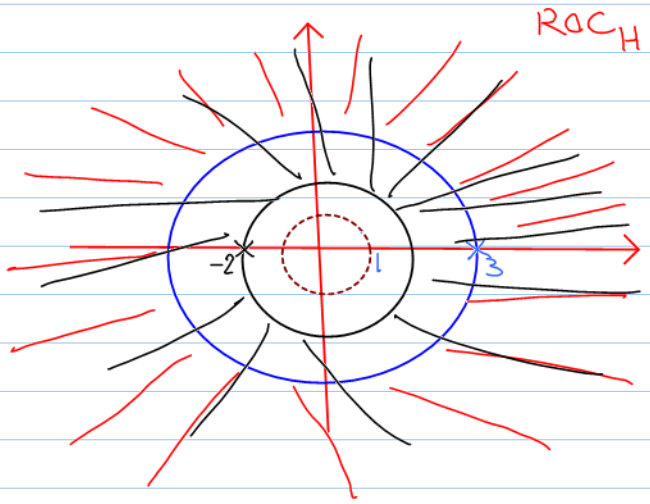
کدام یک از دو گزاره زیر صحیح است؟

(الف) سیستم LTI زمان گسسته علی با تابع تبدیل $\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}}$ دارای معکوس پایدار است.

(ب) سیستم با ورودی $x(t)=3\sin(2xt)$ و خروجی $y(t)=5\sin^2(\pi t)-2/5$ می‌تواند یک سیستم LTI باشد.

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}} \times \frac{z^1}{z^1}$$; علی ← $H^{-1}(z)$: پایدار



$$H(z) = \frac{z+2}{z-3}$$

$$H^{-1}(z) = \frac{z-3}{z+2}$$; $ROC_{H^{-1}}$: ?

$$H^{-1}(z) \times H(z) = 1 \longrightarrow ROC_{H^{-1}} \cap ROC_H \neq \phi$$

$$H^{-1}(z) = \frac{z-3}{z+2} \quad ; \quad |z| > 2$$

$|z|=1 \notin ROC_{H^{-1}}$ ← ناپایدار

می‌توانند LTI ← سیستم LTI مرکب جدید تولید کنند.

$x(t) = 3\sin(2\pi t)$; $y(t) = 5\sin^2(\pi t) - 2.5 = 2.5\cos(2\pi t)$

2π ; 2π

$$2\sin^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta)$$

$$2.5(2\sin^2(\pi t) - 1) = 2.5\cos(2\pi t)$$

مرکب جدید تولید شده LTI باشد.

سیستم با تابع تبدیل $H(z)=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-3}}$ را در بگیرید. این

سیستم:

۱) اگر پایدار باشد، علی است.

۲) تحت هیچ شرایط علی نیست.

۳) می‌تواند پایدار نباشد و علی باشد.

۴) ناحیه همگرایی آن حتماً دایره واحد را در برمی‌گیرد.

سیستم با تابع تبدیل $H(z)=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-3}}$ را در بگیرید. این

سیستم:

۱) اگر پایدار باشد، علی است. ← هنگام علی و پایدار

۲) تحت هیچ شرایط علی نیست.

۳) می‌تواند پایدار نباشد و علی باشد. علی و ناپایدار

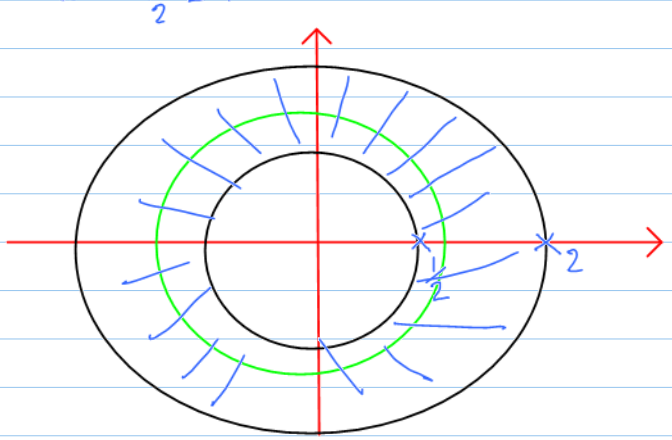
۴) ناحیه همگرایی آن حتماً دایره واحد را در برمی‌گیرد. پایدار

فرض اول را درست بگیرید و درستی

قسمت دوم را بررسی کنید.

$$H(z)=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-3}}\times\frac{z^3}{z^3}=\frac{z^3}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

$z=2,\ \frac{1}{2}$



$$H(z)=\frac{z^3}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

ROC_x

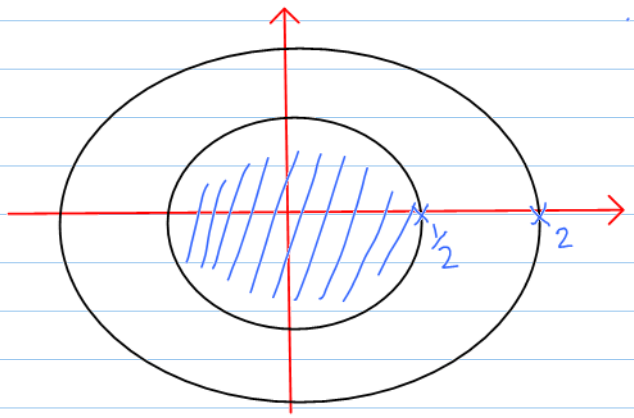
پایدار هست ← علی؟

۱) اگر پایدار باشد ← علی

نه لزوماً هنگام علی و پایدار باشد.

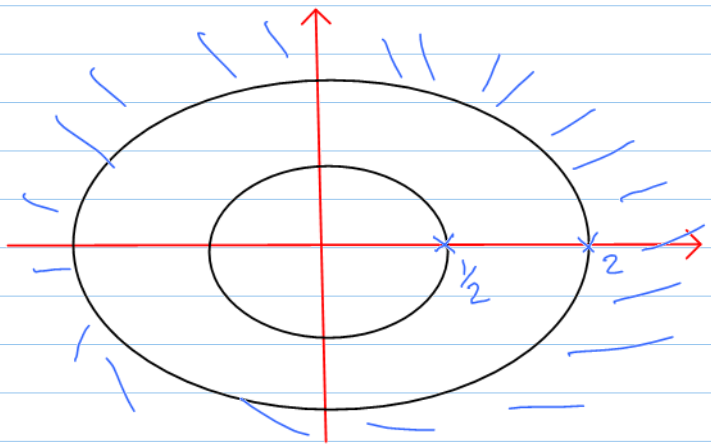
۲) حتماً ~~پایدار~~ است.

اگر مثلاً $h[n]$ راست‌رو باشد و پایدار است



۳) و لزوماً ناپایدار و علی باشد.

فرض: ناپایدار ← علی؟

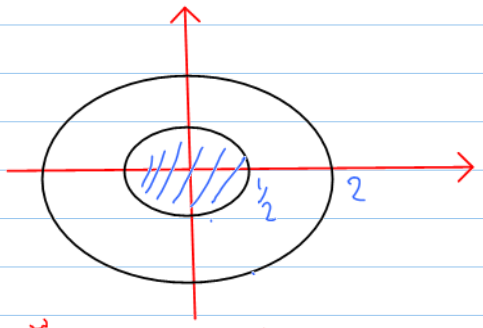


ناپایدار

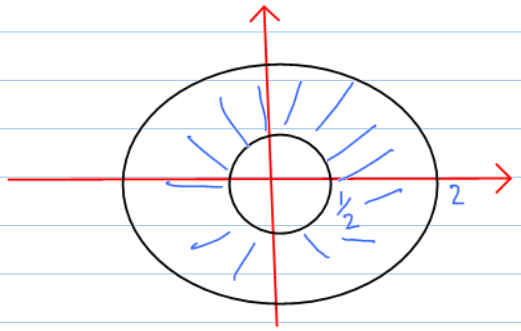
ROC دست راستی ← ✗ ← علی

" " و ناپایدار ∞ ✗ ← علی

$$H(z) = \frac{z^3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

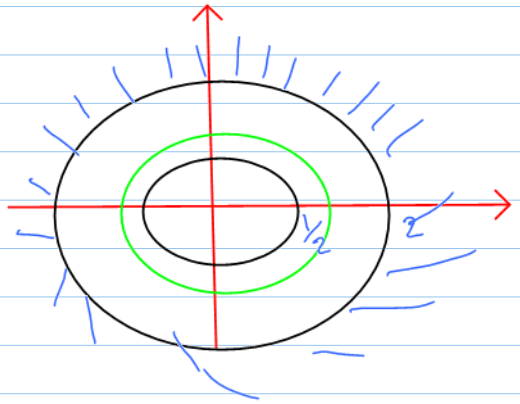


ناپایدار و غیرعلی



پایدار و غیرعلی

ناپایدار و علی ؟



ناپایدار و غیرعلی ؟

گزینه 2 ✓

$$H(z) = \frac{z^3}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

RAC دست راستی و ناپایدار ∞ ← ✗ علی

دکتری ۹۴

در مورد سیستم روبه‌رو، کدام گزینه صحیح است؟ $H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}{z^{-1}(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{3}{8}z^{-1})}$

۱) اگر سیستم پایدار باشد، غیرعلّی است.

۲) اگر سیستم ناپایدار باشد، علّی است.

۳) اگر سیستم پایدار باشد، علّی است.

۴) سیستم همواره پایدار است.

در مورد سیستم روبه‌رو، کدام گزینه صحیح است؟

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}{2\times z^{-1}\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)}\times\frac{z^3}{z^3}$$

۱) اگر سیستم پایدار باشد، غیرعلّی است.

۲) اگر سیستم ناپایدار باشد، علّی است.

~~۳) اگر سیستم پایدار باشد، علّی است.~~

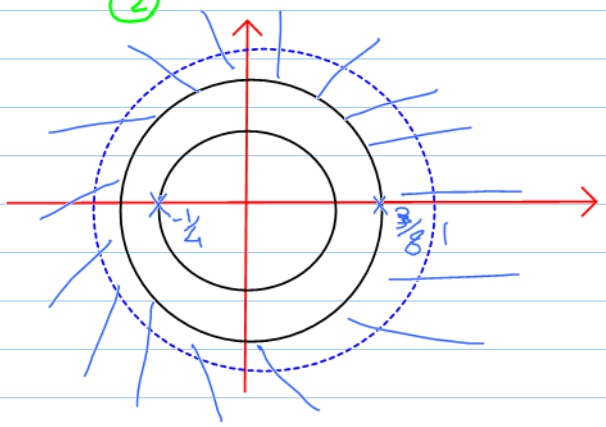
۴) سیستم همواره پایدار است.

$$H(z)=\frac{z^3+\frac{1}{2}z^2-\frac{3}{8}z}{1\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{8}\right)}$$

$$\frac{z\times z^{-1}\times z\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\times z\times\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)}{z^3}$$

$$H(z)=\frac{z^3+\frac{1}{2}z^2-\frac{3}{8}z}{\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{8}\right)}$$

(2)



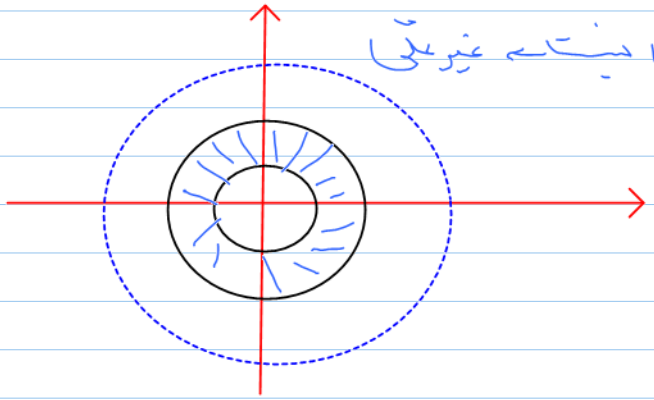
۱) پایدار ← غیرعلّی

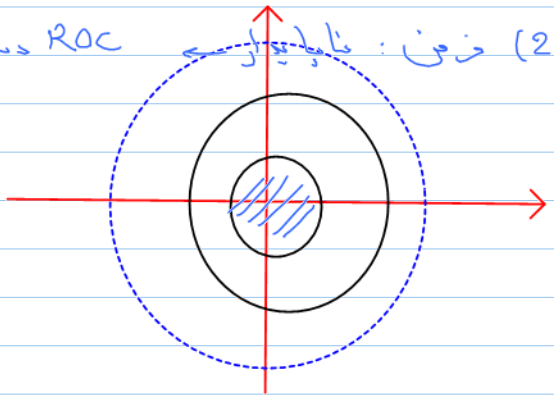
ROC دست‌راستی و شامل ∞ ← علّی

اگر پایدار باشد ROC دست‌راستی هست ولی

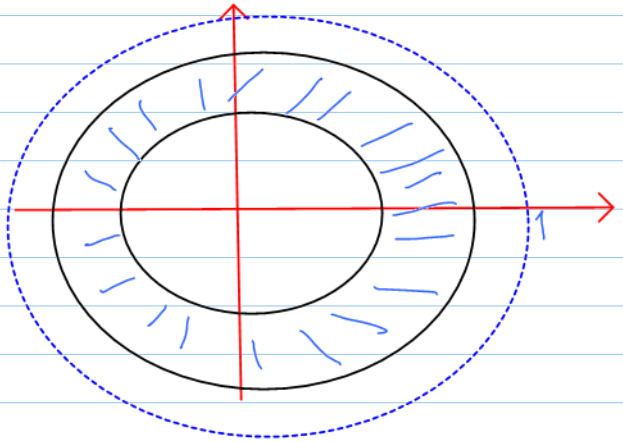
چون شامل ∞ نباشد پس سبب غیرعلّی است.

2) فرض: پایدار ← ROC دست‌راستی بیشتر غیرعلّی





۳) پایدار ✗



سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\delta[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\delta[n-5]$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه، می‌تواند پاسخ ضربهٔ سیستم معکوس پایدار سیستم فوق باشد؟

۱) $h_I[n]=2^{5n}\ u[n]$

۲) $h_I[n]=-2^{-5n}\ u[-n-1]$

۳) $h_I[n]=\begin{cases}-2^n\ u[n] & n=5r\\ 0 & n\neq 5r\end{cases}$ برای $r\in z$

۴) $h_I[n]=\begin{cases}-2^n\ u[-\frac{n}{5}-1] & n=5r\\ 0 & n\neq 5r\end{cases}$ برای $r\in z$

$h[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \delta[n-5]$ ($n=5$)

$h^{-1}[n] = ?$

! h^{-1} وجود دارد

$H(z)$

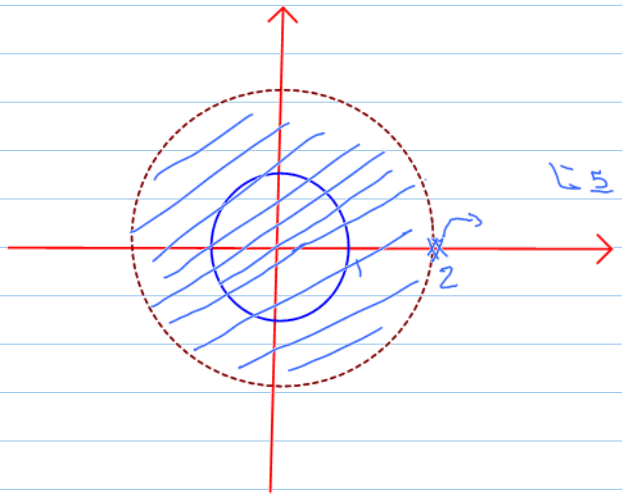
$H^{-1}(z) \rightarrow h^{-1}[n]$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(2^{-1}\right)^{-5} = 2^5 = 32$

$h[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \delta[n-5] = \delta[n] - 32\delta[n-5]$

$H(z) = 1 - 32z^{-5}$

$H^{-1}(z) = \frac{1}{1-32z^{-5}}$;



$H^{-1}(z) = \frac{z^5}{z^5-32}$

$|z|=1 \in ROC_{H^{-1}}$ ← علی ← $h^{-1}[n]$ علی ← $ROC_{H^{-1}}$

$u[-n+\dots]$

$H^{-1}(z) = \frac{1}{1-32z^{-5}}$; $|z|<2$

$-32^n u[-n-1] \longrightarrow \frac{1}{1-32z^{-1}}$; $|z|<32$

$n \rightarrow \frac{n}{5}$

$z \rightarrow z^5$

$h^{-1}[n] = \begin{cases} -(32)^{n/5} u\left[-\frac{n}{5}-1\right] & n=5k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$\frac{1}{1-32z^{-5}}$; $|z^5|<32$

$|z|<2$

$32^{n/5} = (2^5)^{n/5} = 2^n$

$\frac{1}{1-32z^{-5}}$; $|z|<2$

محاسبه پاسخ سیستم LTI: $x[n] = 2^n$ $\quad y[n] - y[n-1] = x[n-1]$

هرگاه ترکیب سیستم LTI، معادله تفاضلی بدهد از تبدیل Z استفاده می‌کنیم.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)\,H(z) \qquad ROC_y \supseteq ROC_x \cap ROC_h$$

الف) $x[n]$ به فرم a^n باشد ←

$$\begin{cases} a \in ROC_H \rightarrow y[n] = a^n H(a) \\ a \notin ROC_H \rightarrow y[n] = \infty \end{cases}$$

ب) $h[n]$ به فرم a^n باشد ←

$$\begin{cases} a \in ROC_x \rightarrow y[n] = a^n X(a) \\ a \notin ROC_x \rightarrow y[n] = \infty \end{cases}$$

ج) غیر از حالت فوق باشد ← $Y(z)$ را حساب کرده و از آن عکس تبدیل Z می‌گیریم.

$$Y(z) = X(z)\,H(z) \longrightarrow y[n]$$

برق ۸۵

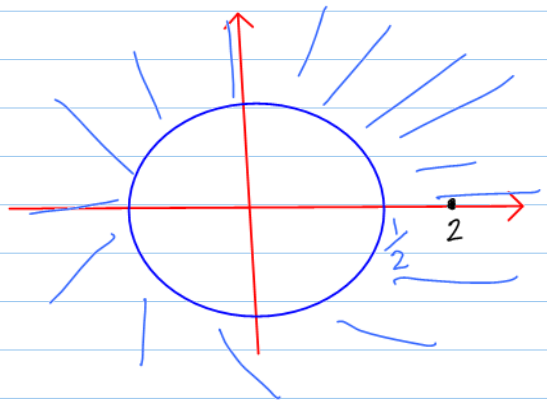
پاسخ یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n]=(\frac{1}{2})^n u(n)$ به ورودی $x[n]=2^n$ در $n=0$ کدام مورد خواهد بود؟

$y[0] = ?$

۱) نامحدود ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{2}{3}$

$h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$, $x[n] = 2^n$ $\quad y[n] = ?$

1) $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$; $|z| > \frac{1}{2}$



$x[n] = \underbrace{2}_{a}^n$

$2 \in ROC_H \rightarrow y[n] = 2^n H(2)$

$$= 2^n \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(2)^{-1}} = \frac{2^n}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \times 2^n$$

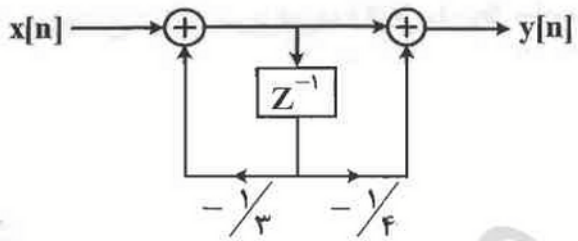
$$y[n] = \frac{4}{3} \times 2^n \rightarrow y[0] = \frac{4}{3} \times 2^0 = \frac{4}{3} \checkmark$$

اگر $x[n] = a^n$ یا $h[n] = a^n$ جایی خروجی فقط u میدهد.

$$y[n] = \begin{cases} \infty \\ A\,a^n \end{cases}$$

۶۴

در سیستم علی داده شده به ازای $x[n]=(\frac{۲}{۳})^n$ ، $y[n]$ کدام است؟



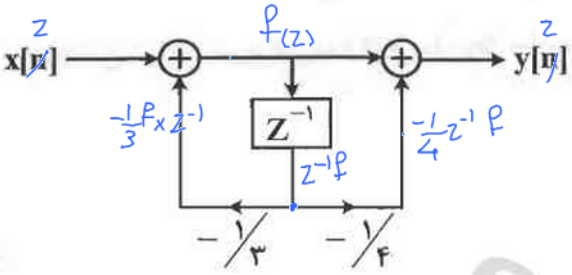
۱) $y[n]=\frac{۱۲}{۵}(\frac{۲}{۳})^n u(n)$

۲) $y[n]=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n$

۳) $y[n]=\frac{۱۲}{۵}(\frac{۲}{۳})^n$

۴) $y[n]=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n u(n)$

در سیستم علی داده شده به ازای $x[n]=(\frac{۲}{۳})^n$ ، $y[n]$ کدام است؟



۱) $y[n]=\frac{۱۲}{۵}(\frac{۲}{۳})^n u(n)$

۲) $y[n]=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n$

۳) $y[n]=\frac{۱۲}{۵}(\frac{۲}{۳})^n$

۴) $y[n]=\frac{۵}{۱۲}(\frac{۲}{۳})^n u(n)$

$x[n]=(\frac{2}{3})^n \longrightarrow H(z)=?$ $\quad Y(z)=X(z)H(z) \rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

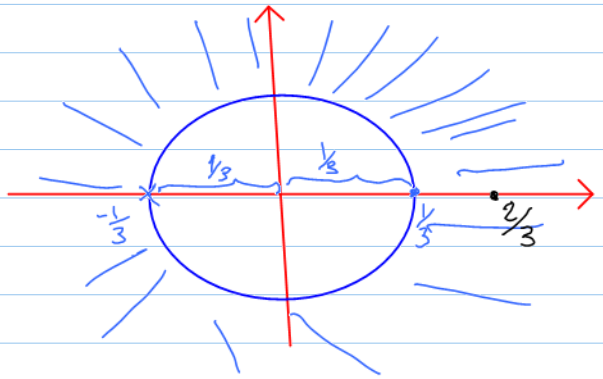
$Y(z)=F-\frac{1}{4}z^{-1}F$

$F=X(z)-\frac{1}{3}z^{-1}F \longrightarrow (1+\frac{1}{3}z^{-1})F=X(z) \rightarrow F=\frac{X(z)}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

$Y(z)=(1-\frac{1}{4}z^{-1})F \longrightarrow Y(z)=(1-\frac{1}{4}z^{-1})\frac{X(z)}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \longrightarrow H(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\times\frac{z^1}{z^1}$; ROC=?

$H(z)=\frac{z-\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{3}}$;



$x[n]=(\frac{2}{3})^n$

$y[n]=\begin{cases}(\frac{2}{3})^n H(\frac{2}{3}) & \frac{2}{3}\in ROC_H \checkmark \\ \infty & \frac{2}{3}\notin ROC_H\end{cases}$

$y[n]=(\frac{2}{3})^2 \quad \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{5}{12}\times(\frac{2}{3})^n$

۹۵

یک سیستم LTI زمان گسستهٔ علّی با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود.

$$y[n]+\frac{۱}{۲}y[n-۱]=x[n]-x[n-۱]$$

به ازای ورودی $x[n]=\begin{cases}۳ & n \text{ زوج} \\ ۲ & n \text{ فرد}\end{cases}$، توان متوسط خروجی این سیستم، $y[n]$، برابر کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

$$x[n] = \begin{cases} 3 & n = \text{زوج} \\ 2 & n = \text{فرد} \end{cases} = \frac{3+2}{2} + \frac{3-2}{2}(-1)^n = 2.5 + \frac{1}{2}(-1)^n$$

$$x[n] = 2.5\,(1)^n + \frac{1}{2}(-1)^n$$

* حرکه در معادله تفاضلی x دارای علامت بود آن را در $(1)^n$ علامت ضرب می‌کنیم.

$$2.5\,(1)^n \longrightarrow 2.5\,y_1[n]$$

$$+ \qquad +$$

$$\frac{1}{2}(-1)^n \longrightarrow \frac{1}{2}\,y_2[n]$$

$$x[n] \longrightarrow 2.5\,y_1[n] + \frac{1}{2}\,y_2[n]$$

$$y_1[n] = \begin{cases} (1)^n H(1) & 1 \in ROC_H \\ \infty & 1 \notin ROC_H \end{cases}$$

$H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = ?$

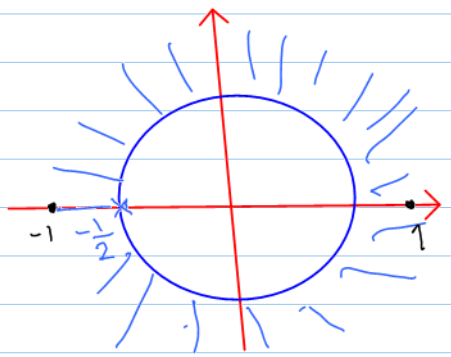
$$y[n] + \frac{1}{2}\,y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

$$Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z)\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{z^1}{z^1} \longrightarrow H(z) = \frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}$$



$$(1)^n \longrightarrow y_1[n] = (1)^n \times \frac{1-1}{1+\frac{1}{2}} = 0$$

$$(-1)^n \longrightarrow y_2[n] = (-1)^n \frac{-1-1}{-1+\frac{1}{2}} = 4\,(-1)^n$$

$2.5\,(1)^n \longrightarrow y_1 = 0 \times 2.5 = 0$

$+$

$\frac{1}{2}(-1)^n \longrightarrow \frac{1}{2} y_2[n] = 4\,(-1)^n \times \frac{1}{2} = 2(-1)^n$ $+$

$x = 2.5\,(1)^n + \frac{1}{2}(-1)^n \longrightarrow 0 + 2(-1)^n = y[n]$

$y[n] = 2(-1)^n \longrightarrow P_y = ?$ $\quad y[n] = 2\,e^{j\pi n}$

$A\,e^{j\theta n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{A^2}{2} & \theta = k\pi \ \checkmark \\ A^2 & \theta \neq k\pi \end{cases}$

$P_y = \frac{4}{2} = 2$

۹۷

معادلهٔ تفاضلی یک سیستم **LTI** زمان گسسته به‌صورت زیر داده شده است:

$$y[n]-\frac{۱}{۲}y[n-۲]+\frac{۱}{۱۶}y[n-۴]=x[n]+x[n-۱]$$

خروجی سیستم به ورودی $x[n]=۳\cos \pi n$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}\sin \pi n$

۲) $\frac{۳}{۸}\cos \pi n$

۳) $۳\sin \pi n$

۴) صفر

معادلهٔ تفاضلی یک سیستم LTI زمان گسسته به‌صورت زیر داده شده است:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-2]+\frac{1}{16}y[n-4]=x[n]+x[n-1]$$

خروجی سیستم به ورودی $x[n]=3\cos\pi n$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}\sin\pi n$

۲) $\frac{3}{8}\cos\pi n$

۳) ~~$3\sin\pi n$~~ ∞

۴) صفر ✓

$$x[n]=3\cos(\pi n)=3(-1)^n \longrightarrow y[n]=\begin{cases} 3(-1)^n\ H(-1) & -1\in ROC_H \\ \infty & \cancel{-1\notin ROC_H} \end{cases}$$

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-2}Y(z)+\frac{1}{16}z^{-4}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{16}z^{-4}}=H(z)\longrightarrow$$

$$(-1)^{-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

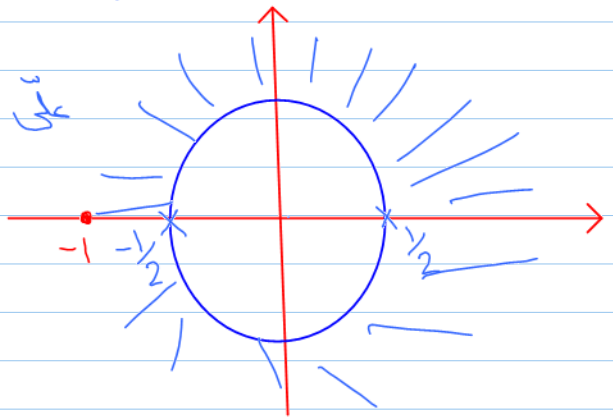
$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{16}z^{-4}}\times\frac{z^4}{z^4} \qquad H(-1)=\frac{1+(-1)^{-1}}{1-\frac{1}{2}(-1)^{-2}+\frac{1}{16}(-1)^{-4}}=0$$

$$y[n]=3(-1)^n\times 0=0$$

$$H(z)=\frac{z^4+z^3}{z^4-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{16}}=\frac{z^4+z^3}{(z^2-\frac{1}{4})^2} \qquad z=\pm\frac{1}{2}$$

$y[n]=\frac{1}{2}y[n-2]-\frac{1}{16}y[n-4]+x[n]+x[n-1]$ علی

علی: خروجی در لحظه n به ورودی و خروجی در لحظه n یا قبل از n وابسته باشد.



$$-1\in ROC_H \longrightarrow y[n]=3(-1)^n H(-1)=0$$

$y[n]=\frac{1}{2}y[n+2]+x[n]+x[n-1]$ غیر علی

- رابطه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y[n]-\frac{۱}{۴}y[n-۲]=x(n)$$

اگر ورودی سیستم $x(n)=۱$ به‌ازای تمامی مقادیر n باشد، مقدار $y[۲]$ کدام است؟

۱) $+\infty$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

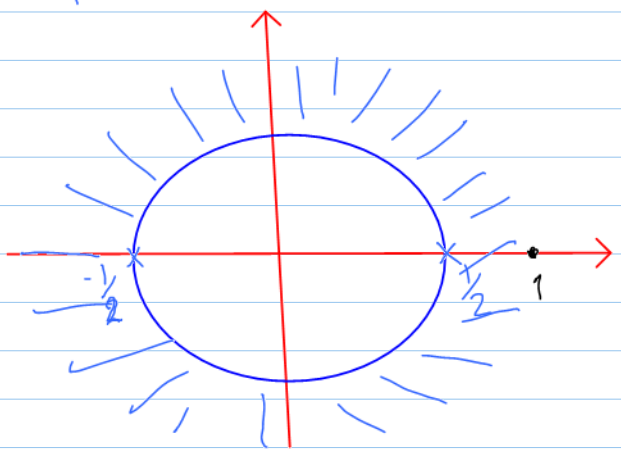
$x[n] = 1 = 1(1)^n = (1)^n \longrightarrow y[n] = \begin{cases} \infty & 1 \notin ROC_H \\ (1)^n H(1) & 1 \in ROC_H \end{cases}$

$y[n] - \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] \longrightarrow y[n] = \frac{1}{4} y[n-2] + x[n]$ ☺

$Y(z) - \frac{1}{4} z^{-2} Y(z) = X(z) \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}}$

$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-2}} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{4}}$; $z = \pm \frac{1}{2}$

$y[n] = \begin{cases} (1)^n H(1) & 1 \in ROC_H \\ \infty & 1 \notin ROC_H \end{cases}$



$y[n] = (1)^n \frac{1^2}{1^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(1)^n$ ✓

$y[2] = \frac{4}{3}(1)^2 = \frac{4}{3}$

کنکوری ۹۶

پاسخ ضربهٔ یک سیستم **LTI** با توصیف $y[n]=ay[n-1]+x[n]$, $|a|<1$، برابر کدام است؟

۱) a^n

۲) $|a|^n u[n]$

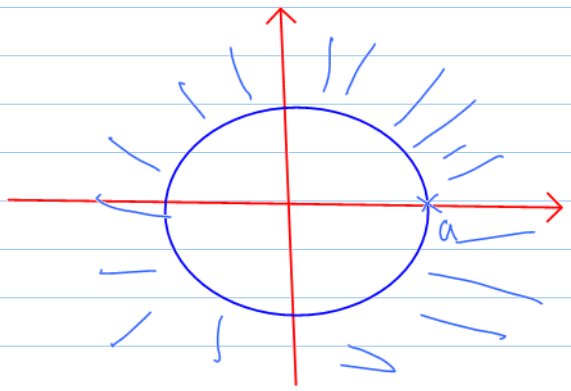
۳) $a^n u[n]$

۴) $|a|^n$

$y[n] = a\,y[n-1] + x[n]$ ی $h[n] = ?$

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z) \rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \rightarrow \begin{cases} a^n u[n] & |z| > a \checkmark \\ -a^n u[-n-1] & |z| < a \end{cases}$$

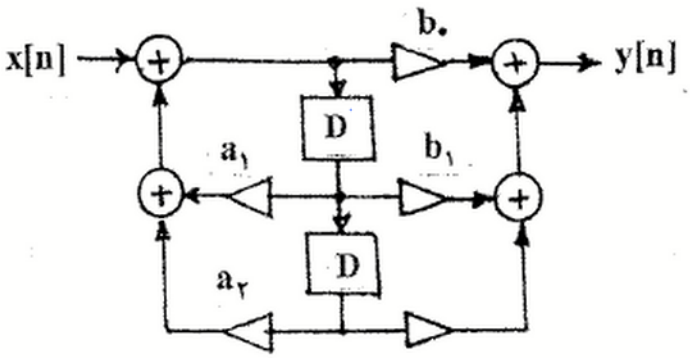


۲π ۲π

پاسخ ضربه‌ی یک سیستم LTI زمان گسسته و علّی به صورت زیر داده شده است:

$$h[n]=\begin{cases}۴ & \text{برای } n\text{های نامنفی و زوج}\\ ۶ & \text{برای } n\text{های نامنفی و فرد}\end{cases}$$

در دیاگرام بلوکی این سیستم (شکل مقابل) مقادیر $a_۲$ و $b_۱$ کدامند؟ (تأخیر به میزان یک نمونه: D)



۱) $\begin{cases}a_{۲۰}=۱\\ b_۱=۶\end{cases}$

۲) $\begin{cases}a_۲=۱\\ b_۱=۴\end{cases}$

۳) $\begin{cases}a_۲=-۱\\ b_۱=۶\end{cases}$

۴) $\begin{cases}a_۲=-۱\\ b_۱=۴\end{cases}$

$$\bar{h}[n] = \begin{cases} 4 & n = \text{زوجي} \\ 6 & n = \text{فردي} \end{cases} = \frac{4+6}{2} + \frac{4-6}{2}(-1)^n = 5 - (-1)^n$$

$H(z) =$

$$h[n] = \begin{cases} 4 & n = \text{زوجي} \\ 6 & n = \text{فردي} \\ 0 & n = \text{سالب} \end{cases} = \begin{cases} \bar{h}[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$h[n] = \bar{h}[n]\,u[n] = (5 - (-1)^n)\,u[n] \longrightarrow$$

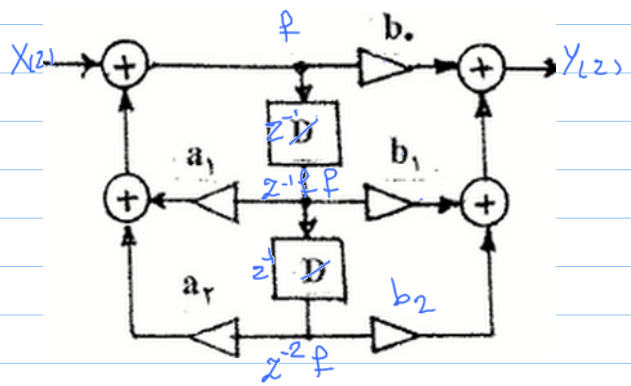
$$h[n] = 5\,u[n] - (-1)^n\,u[n]$$

$$5\,u[n] \longrightarrow 5\,\frac{1}{1-z^{-1}} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$(-1)^n\,u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-(-1)z^{-1}} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$h[n] \longrightarrow \frac{5}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{4+6z^{-1}}{1-z^{-2}} \quad ; \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \frac{4+6z^{-1}}{1-z^{-2}} \quad ; \quad |z| > 1$$



$$Y = b_0 f + b_1 z^{-1} f + b_2 z^{-2} f$$

$$f = X + a_1 z^{-1} f + a_2 z^{-2} f$$

$$f = \frac{X}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$Y = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}\,X(z) \longrightarrow H(z) = \frac{\cancel{b_0}^{4} + \cancel{b_1}^{6} z^{-1} + \cancel{b_2}^{0} z^{-2}}{1 - \cancel{a_1}^{0} z^{-1} - \cancel{a_2}^{1} z^{-2}} = \frac{4+6z^{-1}}{1-z^{-2}}$$

یک سیستم زمان گسسته LTI و علّی و پایدار با پاسخ ضربه $h[n]$ در نظر بگیرید. اگر تبدیل Z پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=h[-n]$ به صورت $Y(z)=\frac{9z}{(3z-1)(3-z)}$ باشد مقادیر $A=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$ و $B=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n]$ چقدر خواهد بود؟

۱) $A=\frac{3}{2}$, $B=\frac{9}{8}$

۲) $A=\frac{9}{4}$, $B=\frac{13}{4}$

۳) $A=\frac{3}{2}$, $B=\frac{9}{4}$

۴) $A=\frac{9}{4}$, $B=\frac{11}{4}$

یک سیستم زمان گسسته LTI و علّی و پایدار با پاسخ ضربه $h[n]$ در نظر بگیرید. اگر تبدیل Z پاسخ این سیستم به ورودی $x[n]=h[-n]$ به صورت $Y(z)=\frac{9z}{(3z-1)(3-z)}$ باشد مقادیر $A=\sum_{n=0}^{\infty} h[n]$ و $B=\sum_{n=0}^{\infty} h^2[n]$ چقدر خواهد بود؟

۱) $A=\frac{3}{2}$, $B=\frac{9}{8}$ ✓

۲) $A=\frac{9}{4}$, $B=\frac{13}{4}$

۳) $A=\frac{3}{2}$, $B=\frac{9}{4}$

۴) $A=\frac{9}{4}$, $B=\frac{11}{4}$



$y[n]=h[-n]*h[n]$

$h[n] \longrightarrow H(z)$

$h[-n] \longrightarrow H(z^{-1})$

$Y(z) = H(z^{-1}) \times H(z)$

$H(z^{-1})H(z) = \frac{9z}{(3z-1)(3-z)} = \frac{9z}{z(3-z^{-1})(3-z)} = \frac{9}{(3-z^{-1})(3-z)}$

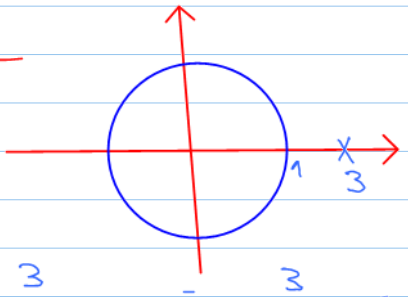
$H(z^{-1})H(z) = \frac{3}{3-z^{-1}} \times \frac{3}{3-z}$

$H(z^{-1}) = \frac{3}{3-z^{-1}}$, $H(z) = \frac{3}{3-z}$ ← انتخاب درست

علّی و پایدار ← ROC_H دست‌راستی و شامل ∞ و قطبهای $H(z)$ داخل دایره‌واحد

$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ $\quad X(z^{-1}) = \frac{1}{1-z}$

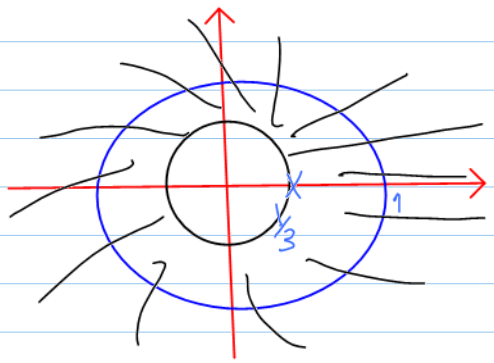
$H(z^{-1}) = \frac{3}{3-z^{-1}}$



✓ $H(z) = \frac{3}{3-z^{-1}}$ $\quad H(z^{-1}) = \frac{3}{3-(z^{-1})^{-1}} = \frac{3}{3-z}$

$H(z)H(z^{-1}) = \frac{9}{(3-z^{-1})(3-z)}$ ✓

$H(z) = \frac{3}{3-z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$; $|z|>\frac{1}{3}$



$h[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$

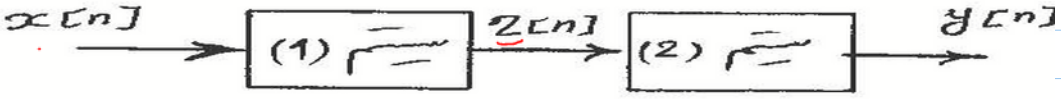
$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \underbrace{u[n]}_{n \geq 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

۹۳

مطابق با شکل، سیستمی را که شامل اتصال متوالی دو سیستم LTI است در نظر بگیرید. سیستم ۱ دارای معادله تفاضلی $z[n] = \frac{1}{2}x[n-1] + 2x[n]$ و پاسخ ضربه سیستم ۲ برابر با $h_2[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$ می‌باشد. تابع انتقال سیستم معادل کدام است؟

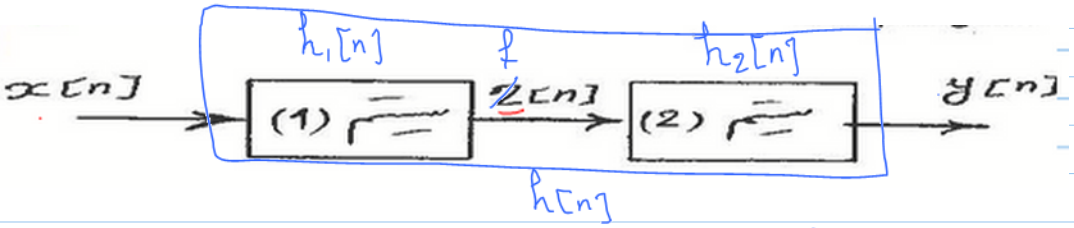


۱) $\frac{1}{1+\frac{1}{2}Z^{-1}} + 1$

۲) $\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}} + 1$

۳) $\frac{1}{1+\frac{1}{2}Z^{-1}} - 1$

۴) $\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}} - 1$



$$H(z) = H_1(z)\,H_2(z) \qquad h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$h_2[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longrightarrow H_2(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \; ; \; |z| > \frac{1}{2}$$

$$f[n] = \frac{1}{2}x[n-1] + 2x[n] \qquad H_1(z) = \frac{F(z)}{X(z)}$$

$$F(z) = \frac{1}{2}z^{-1}X(z) + 2X(z) \longrightarrow H_1(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + 2$$

$$H(z) = \left(2+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right) = \frac{1+\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} =$$

$$H(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + 1$$

جلسه 68 سیگنال

تعیین نوع فیلتر ← مثال 4.5

* $z = 2 + j2 = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \rightarrow z = re^{j\omega}$ $\quad \omega = \frac{\pi}{4}$

تعیین نوع فیلتر پاس ω است.

* تبدیل z ← گسسته ←

زمان گسسته: خطی بایس ← $\omega = 2k\pi$ ← $\omega = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

" با $\omega = (2k+1)\pi$ ← $\omega = \pi, 3\pi, \dots$

" بیایی: $\omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad \omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \dots$

$H(j\omega)$ ← ① $|H(j\omega)|$ ② $|H(j\pi)|$ ③ $|H(j\frac{\pi}{2})|$

* هرگاه تبدیل z بدهد یا معادله تفاضلی و نوع فیلتر را بخواهد:

$H(z) \longrightarrow z = e^{j\omega} \rightarrow H(j\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

۸۸

یک سیستم LTI زمان گسسته و علّی، با معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$y[n]+\frac{۱}{۴}y[n-۱]-\frac{۳}{۸}y[n-۲]=۴x[n-۲]+x[n-۱]-\frac{۳}{۲}x[n]$$

این سیستم چه نوع فیلتری است؟

۱) میان گذر ۲) میان نگذر ۳) تمام گذر ۴) پایین گذر

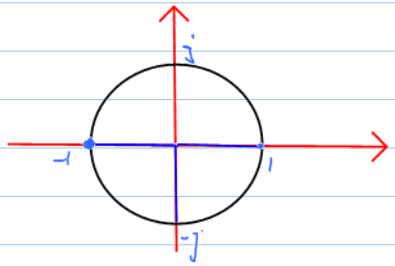
* هرگاه معادله تفاضلی یا تبدیل z بدهد و نوع فیلتر را بخواهد ←

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{3}{8}y[n-2]=4x[n-2]+x[n-1]-\frac{3}{2}x[n]$$

$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)$ بدست می‌آید ①

$$Y(z)+\frac{1}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{3}{8}z^{-2}Y(z)=4z^{-2}X(z)+z^{-1}X(z)-\frac{3}{2}X(z)$$

$$Y(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right)=X(z)\left(4z^{-2}+z^{-1}-\frac{3}{2}\right)$$



$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{4z^{-2}+z^{-1}-3/2}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}$$

$z=e^{j\omega}$

$$H(j\omega)=\frac{4(e^{j\omega})^{-2}+(e^{j\omega})^{-1}-3/2}{1+\frac{1}{4}(e^{j\omega})^{-1}-\frac{3}{8}(e^{j\omega})^{-2}}=\frac{-\frac{3}{2}+e^{-j\omega}+4e^{-j2\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{3}{8}e^{-j2\omega}}$$ $H(j\omega)$ ②

$$H(j0)=\frac{-3/2+1+4\times1}{1+\frac{1}{4}\times1-\frac{3}{8}\times1}=\frac{5-3/2}{\frac{7}{8}}=\frac{7/2}{7/8}=4\rightarrow|H(j0)|=|4|=4$$ ③

$$H(j\pi)=\frac{-\frac{3}{2}+(-1)+4(1)}{1+\frac{1}{4}(-1)-\frac{3}{8}(1)}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{8}}=4\rightarrow$$

$$|H(j\pi)|=4$$

$$e^{-j2\times\frac{\pi}{2}}=e^{-j\pi}=-1$$

$$H(j\frac{\pi}{2})=\frac{-3/2+(-j)+4(-1)}{1+\frac{1}{4}(-j)-\frac{3}{8}(-1)}=\frac{-j-5.5}{-\frac{1}{4}j+\frac{11}{8}}$$

$$|H(j\frac{\pi}{2})|=\frac{\sqrt{1+(5.5)^2}}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{121}{64}}}\simeq4$$

$\omega=0\rightarrow|H|=4$ پایین گذر

$\omega=\pi\rightarrow|H|=4$ بالا گذر

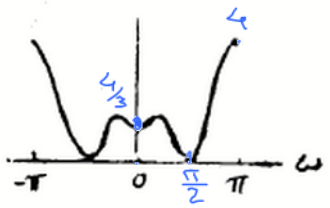
$\omega=\frac{\pi}{2}\rightarrow|H|=4$ میان گذر

$\rightarrow$ همه گذر

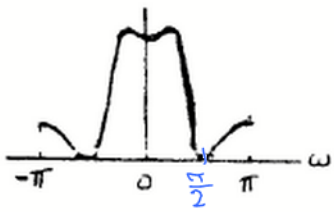
۹۹

تابع تبدیل یک سیستم زمان گسسته LTI به صورت $H(z)=\frac{1+z^{-2}}{0/5+z^{-3}}$ مفروض است. کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند اندازه پاسخ فرکانس این سیستم باشد؟

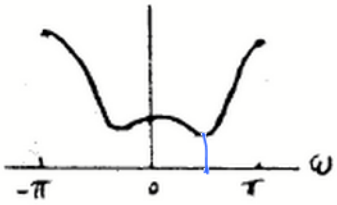
۱)



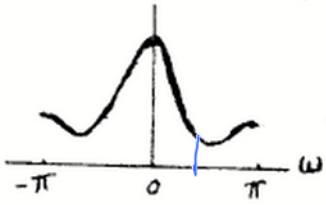
۲)



۳)

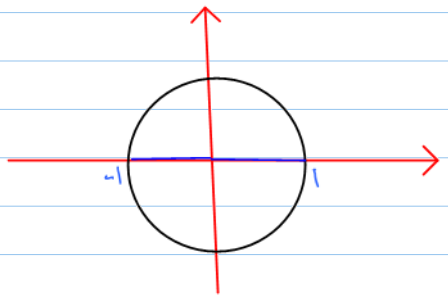


۴)



$$H(z) = \frac{1+z^2}{0.5+z^3} \qquad H(j\omega) = \frac{1+(e^{j\omega})^2}{0.5+(e^{j\omega})^3} = \frac{1+e^{j2\omega}}{0.5+e^{j3\omega}}$$

$$H(j0) = \frac{1+1}{0.5+1} = \frac{4}{3} \qquad |H(j\omega)| = \frac{4}{3}$$



$$H(j\pi) = \frac{1+e^{j2\pi}}{0.5+e^{j3\pi}} = \frac{1+1}{0.5-1} = -4 \qquad |H(j\pi)| = 4$$

$$H(j\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1+e^{j\pi}}{0.5+e^{j3\frac{\pi}{2}}} = \frac{1+(-1)}{0.5+(-j)} = 0 \qquad |H(j\tfrac{\pi}{2})| = 0$$

اگر $G(z)$ و $H(z)$ به ترتیب تبدیل z یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$ و یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$ باشد، پاسخ فرکانسی سیستمی که در شکل زیر نشان داده شده، کدام است؟



۱) فیلتر بالاگذر که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را عبور می‌دهد.

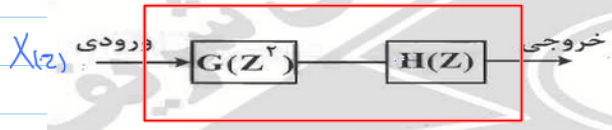
۲) فیلتر میان‌گذر که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$ را عبور می‌دهد.

۳) فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$

۴) فیلتر بالاگذر که بین $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ را عبور می‌دهد.

متناوب با 2π : $G(jw)$

اگر $G(z)$ و $H(z)$ به ترتیب تبدیل z یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$ و یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{2}$ باشد، پاسخ فرکانسی سیستمی که در شکل زیر نشان داده شده، کدام است؟



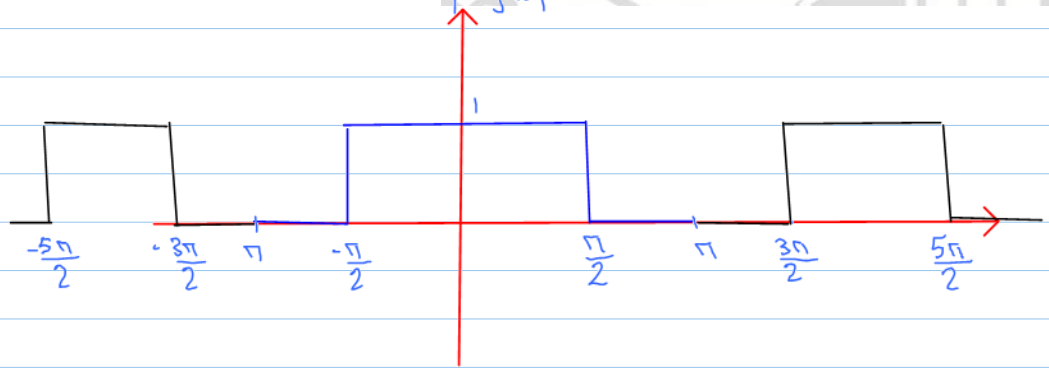
۱) فیلتر بالاگذر که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را عبور می‌دهد.

۲) فیلتر میان‌گذر که بین $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{4}$ را عبور می‌دهد.

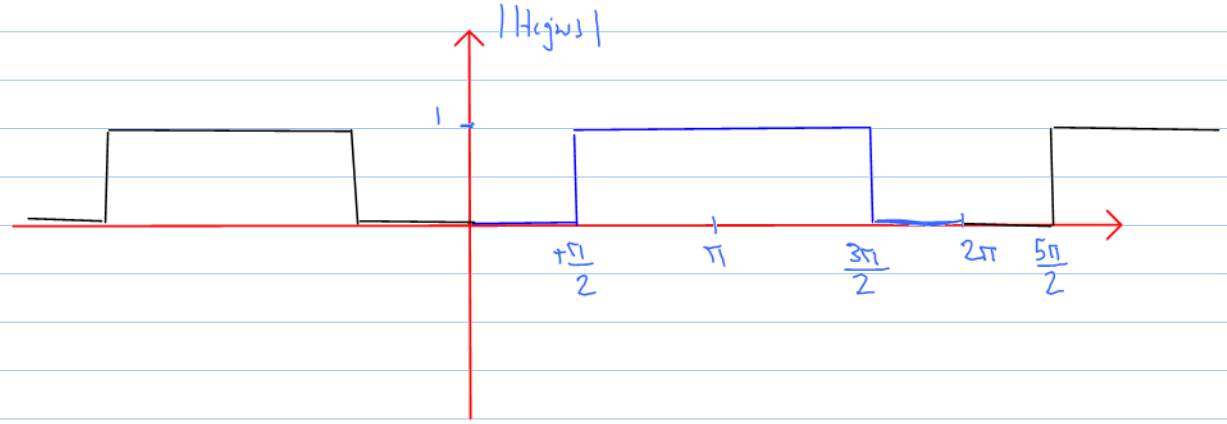
۳) فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$

۴) فیلتر بالاگذر که بین $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ را عبور می‌دهد.

$|G(jw)|$



$|H(jw)|$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z^2)H(z) = F(z) \longrightarrow F(jw) = ?$$

$G(jw)$, $H(jw)$

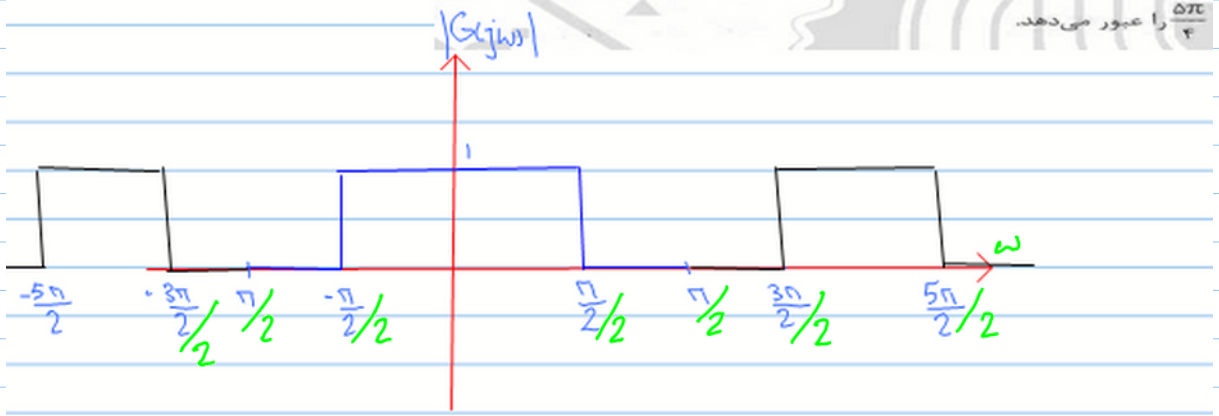
$$g[n] \longrightarrow G(z)$$
$$n \to \frac{n}{2} \quad \downarrow \quad z \to z^2$$
$$g_{(2)}[n] \longrightarrow G(z^2)$$

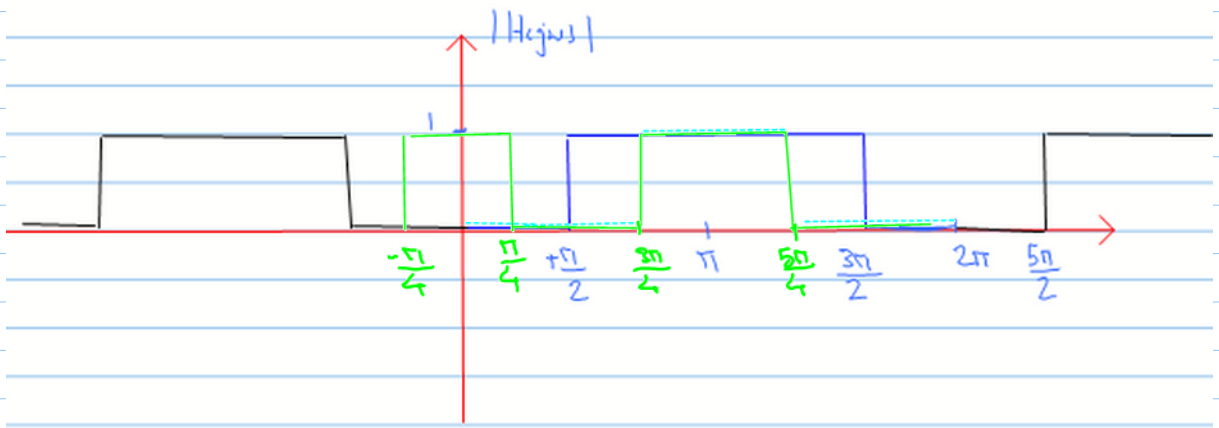
$$g[n] \longrightarrow G(jw)$$
$$n \to n/2 \quad \downarrow \quad w \to 2w$$
$$g_{(2)}[n] \longrightarrow G(j2w)$$

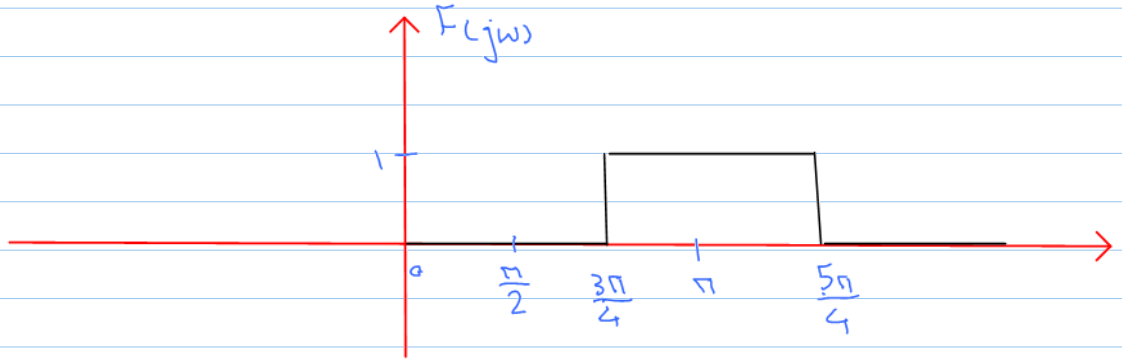
$$F(jw) = G(j2w)\,H(jw)$$

را عبور می‌دهد. $\frac{5\pi}{4}$

$G(jw) \rightarrow G(j2w)$

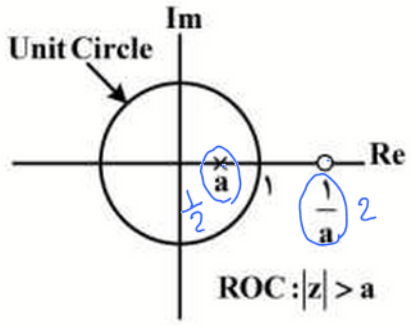






کنکور ۹۸

نمایش موقعیت صفر و قطب یک سیستم زمان گسسته به‌صورت شکل زیر است. این سیستم بیانگر چه نوع فیلتری است؟



۱) فیلتر پایین‌گذر
۲) فیلتر میان‌گذر
۳) فیلتر بالاگذر
۴) فیلتر تمام‌گذر

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{a}}{z - a} \rightarrow H(j\omega) = \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{a}}{e^{j\omega} - a}$$

$$H(j0) = \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 - a} = \frac{1 - 2}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \rightarrow |H(j0)| = 2$$

$$H(j\pi) = \frac{-1 - \frac{1}{a}}{-1 - a} = \frac{-1 - 2}{-1 - \frac{1}{2}} = 2 \rightarrow |H(j\pi)| = 2$$

بنابراین

$$H(j\frac{\pi}{2}) = \frac{j - \frac{1}{a}}{j - a} = \frac{j - 2}{j - \frac{1}{2}} \Rightarrow |H(j\frac{\pi}{2})| = 2$$

$$|H(j\frac{\pi}{2})| = \frac{\sqrt{1^2 + 4}}{\sqrt{1^2 + \frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{5}{5/4}} = \sqrt{4} = 2$$

* اگر $H(z)$ دارای صفرها و قطب‌های متقارن نسبت به دایره واحد باشد حتماً تمام‌گذر است.

a قطب ← $\frac{1}{a}$ صفر

b صفر ← $\frac{1}{b}$ قطب

جلسه ۶۹ سیگنال

عکس تبدیل z

محاسبه عکس تبدیل z:

$$X(z), ROC_x \longrightarrow x[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-10z^{-1}} \quad ; \quad |z| < 10 \longrightarrow x[n] = -10^n u[-n-1]$$

$$\downarrow z \to z^2 \qquad\qquad \downarrow n \to \frac{n}{2}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-10z^{-2}} \quad ; \quad |z| < \sqrt{10} \qquad x[n] = \begin{cases} -10^{n/2}\, u[-\frac{n}{2}-1] & n=2k \\ 0 & n \neq 2k \end{cases}$$

* برای محاسبه عکس تبدیل یک سیگنال اول سعی میکنیم از جدول تبدیل z آن را پیدا کنیم.

* اگر تبدیل z داده شده در جدول موجود نباشد باید ببینیم آیا می توان با استفاده از خواص تبدیل z و سیگنال های موجود در جدول به آن رسید؟

* در عین از دو حالت فوق از روش های زیر استفاده می کنیم:

① روش سری توان: هرگاه تبدیل z داده شده به صورت سری توان از z باشد از روش سری توان استفاده می کنیم.

سری توان بودن یعنی به صورت حاصل جمع توانهای z یا به عبارتی عام فقط از توان های مثبت z باشد (FIR).

$$X(z) = z^2 + 2z + 3 + 10z^{-100} + 20z^{-200}$$

$$X(z) = 1 + 2z^{1}$$

$$X(z) = \frac{z^3 + 10z^2 + 1}{z^3}$$

هر جمله $X(z)$ به صورت Ax^n باشد

$$X(z) = 1z^{3} + 2z^{0} + 3z^{-2}$$

$$x[n] = 1\delta[n+3] + 2\delta[n+0] + 3\delta[n+(-2)]$$

$$X(z) = \frac{z^2+1}{z^{-2}} = \frac{z^2}{z^{-2}} + \frac{1}{z^{-2}} = 1z^{4} + 1z^{2}$$

$$x[n] = 1\delta[n+4] + 1\delta[n+2]$$

برو ۳۳

فرض کنید $X(z)$ تبدیل Z سیگنال زمان گسسته $x[n]$ است. صفرهای تابع $X(z)$ در $z = \pm 2$ و قطبهای آن در $z = 0$ می‌باشد. اگر $y[n] = x^2[n]$ باشد صفرهای تابع $Y(z)$ (یعنی تبدیل Z سیگنال $y[n]$) در کجا قرار خواهد داشت؟

۱) $z = \pm 2$

۲) $z = \pm j4$

۳) $z = \pm 2$ و بصورت مضاعف

۴) $z = 4$ و بصورت مضاعف

$$x[n] \longrightarrow X(z) = \frac{z^2 - 4}{z^m} = \frac{z^2}{z^m} - \frac{4}{z^m}$$

$$g[n] = x^2[n] \longrightarrow Y(z)$$

$$X(z) = 1z^{2-m} - 4z^{-m}$$

$$x[n] = 1\delta[n+2-m] - 4\delta[n+(-m)]$$

$$y[n] = (\delta[n+2-m] - 4\delta[n-m])(\delta[n+2-m] - 4\delta[n-m])$$

$$(\delta[n-a])^2 = \delta[n-a] \qquad \delta[n-a]\delta[n-b] = c \qquad a \neq b$$

$$y[n] = (\delta[n+2-m])^2 - 8\,\delta[n-m]\,\delta[n+2-m] + 16(\delta[n-m])^2$$

($\delta[n-m]$: a; $\delta[n+2-m]$: b; $c = 0$)

$$y[n] = \delta[n+2-m] + 16\,\delta[n-m] \longrightarrow Y(z) = ?$$

$$Y(z) = z^{2-m} + 16z^{-m} = \frac{z^2}{z^m} + \frac{16}{z^m} = \frac{z^2 + 16}{z^m}$$

Logo: $z^2 + 16 = 0 \longrightarrow z = \pm j4$

برق ۹۲

فرض کنید $X(z)$ تبدیل z سیگنال گسسته $x[n]$ است. صفرهای $X(z)$ در $z=\pm 4$ و دو قطب در $z=0$ می‌باشد. اگر $y[n]=x^2[n]$ باشد، صفرهای تابع $y(z)$ کدام است؟

۱) $z=\pm j8$

۲) $z=\pm 4$

۳) $z=\pm 4$، به صورت مضاعف

۴) $z=\pm j16$

تمرین: کاملاً مشابه سؤال قبل حل کنید $m=2$

برق ۹۲

سیگنال زمان ـ گسسته‌ی $x[n]$ با تبدیل z برابر $X(z)$ و تبدیل فوریهٔ زمان ـ گسسته‌ی $X(e^{j\omega})$ به صورت زیر مفروض است:

$$X(e^{j\omega}) = ۲ + \cos\omega$$

اگر تبدیل z سیگنال زمان ـ گسسته‌ی $y[n]$ به صورت $Y(z) \overset{\Delta}{=} X(z^{۲})$ تعریف شود، در این صورت مقدار عبارت $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^{۲}[n]$ چقدر است؟

۱) ۴٫۵ ۲) ۴

۳) ۳٫۵ ۴) ۳

$x[n] \longrightarrow X(z)$ $\qquad X(j\omega) = 2 + \cos(\omega) = 2 + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$

$y[n] \longrightarrow Y(z) = X(z^2)$ $\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n] = ?$

$x[n] \longrightarrow X(z)$:

$X(j\omega) \xrightarrow{e^{j\omega} = z} X(j\omega) = 2 + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}(e^{j\omega})^{-1}$

$$X(z) = 2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1}$$

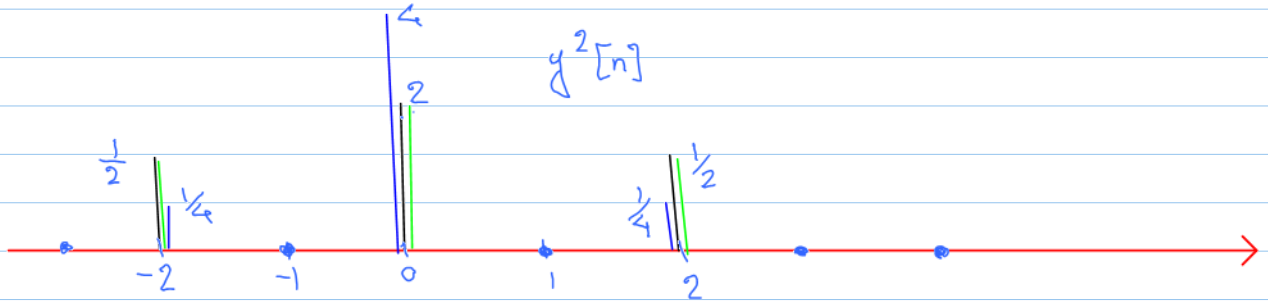
$x[n] \longrightarrow X(z)$

$n \to \frac{n}{2}$ $\qquad z \to z^2$

$y[n] \longrightarrow Y(z) = X(z^2) = 2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^{-2}$

$$Y(z) = 2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$y[n] = 2\delta[n+0] + \frac{1}{2}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n+(-2)] = 2\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n] = \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4} = 4.5 \checkmark$$

② تقسیم متوالی: هرگاه $X(z)$ به صورت کسر گویا باشد و مقدار $x[n]$ در یک لحظه‌ای را بخواهد از تقسیم متوالی استفاده می‌کنیم.

ورودی کنید $X(z)$ را داده و مقدار $x[n]$ در $n=a$ را خواسته.

(I) اگر ROC_x دست راستی باشد صورت و مخرج $X(z)$ را از بزرگترین توان به کوچکترین مرتب می‌کنیم.

و اگر ROC_x دست چپی باشد از کوچکترین به بزرگترین مرتب می‌کنیم.

(II) صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا توان z^{-a} در خارج قسمت ظاهر شود.

(III) ضریب z^{-a} در خارج قسمت برابر $x[a]$ خواهد بود.

$x[2]=?$; $x[n]$ علّی $\leftarrow ROC_x$ راستی ; $X(z)=\dfrac{z^4+z^3+1}{3z^2+z^5+10}$

z^{-2}

$$X(z)=\frac{z^4+z^3+1}{z^5+3z^2+10}$$

$$\frac{z^4}{z^5}=z^{-1}$$

$$\begin{array}{r|l} z^4+z^3+1 & z^5+3z^2+10 \\ \hline -z^4+3z+10z^{-1} & z^{-1}+1z^{-2} \\ \hline z^3-3z+1-10z^{-1} & \end{array}$$

$x[2]=1$

$x[0]$, $x[1]$, $x[-1]$

$$X(z)=\frac{10+z^1+z^4+z^{-1}}{3z^4+4z^2+z^{-1}-z^{-2}},\ |z|>\alpha$$

$$X(z)=\frac{z^4+z^1+10+z^{-1}}{3z^4+4z^2+z^{-1}-z^{-2}}$$

عددشان ۱

$x[0]$ ← ضریب z^0 در خارج قسمت $=x[0]=\frac{1}{3}$

$x[1]$ ← ″ ″ ″ ″ z^{-1} ″ ″ ″ $=x[1]=$

$x[-1]$ ← ″ ″ ″ ″ z^{1} ″ ″ ″ $=x[-1]=$

$$z^4 + z^1 + 10 + z^{-1} \quad \Big| \quad 3z^4 + 4z^2 + z^{-1} - z^{-2}$$

$$-z^4 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} \quad \Big| \quad \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3} + \dots$$

$$-\frac{4}{3}z^2 + z^1 + 10 + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$-\frac{4}{3}z^2 - \frac{16}{9} - \frac{4}{9}z^{-3} + \frac{4}{9}z^{-4}$$

$$z^1 + \frac{106}{9} + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{4}{9}z^{-3} - \frac{4}{9}z^{-4}$$

z^1 $\quad x[-1] = ?$

$x[-1] = 0$

z^{-1} $\quad x[1] = 0$

$$z^4 + z^1 + 10 + z^{-1} \quad \Big| \quad 3z^4 + 4z^2 + z^{-1} - z^{-2}$$

$$\frac{1}{3}z^0 - \frac{4}{9}z^{-2}$$

در تقسیم متوالی هرگاه دنبال مخرج z^{-a} ($x[a]$) باشیم:

۱- هرچه در خارج قسمت z^{-a} ظاهر شد یعنی ضریب آن = $x[a]$

۲- ... ... توان z ظاهر شده کمتر از توان z^{-a} باشد $\Rightarrow x[a] = 0$

برق دکتری ۹۶

تبدیل z سیگنال $x[n]$ و ناحیهٔ همگرایی آن به صورت زیر است:

$$X(z)=\frac{z^{8}+2z^{4}}{z^{4}-2} \quad , \quad |z|>2$$

مقدار $x[n]$ در $n=4$ برابر کدام است؟

۱) ۰

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

$$X(z) = \frac{z^8 + 2z^4}{z^4 - 2} \qquad |z| > 2$$

ضریب z^{-4} در خارج قسمت $\quad x[4] = \quad \downarrow \; z^{-4}$

$$\begin{array}{r|l} z^8 + 2z^4 & z^4 - 2 \\ \hline z^8 - 2z^4 & z^4 + 4 + 8z^{-4} \\ \hline 4z^4 & \\ 4z^4 - 8 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\frac{8}{z^4} = 8z^{-4}$$

$$x[4] = 8$$

مقدار $x[n]$ در $n=3$ را پیدا کنید؟

* اگر بزرگترین همنوم علیه مشترک عامل توانهای z در $X(z)$ برابر m باشد آنگاه $x[n]$ فقط در مضارب m مقدار دارد و بقیه جاها صفر است.

$$X(z) = \frac{z^8 + z^4}{z^4 - 2z^0} \qquad m = \{8, 4, 0\} = 4$$

$x[\pm 4]$, $x[\pm 8]$, $x[\pm 12]$, ... غیر صفر هستند باشد

$x[3] = 0$ $\quad x[1] = 0$ $\quad x[2] = 0$ $\quad x[6] = 0$

برق ۹۶

سیستمی با رابطهٔ ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]=2x[n]+3x[n-1]-y[n-2]$ مفروض است. اگر سیستم در شرایط آرامش اولیه (**initial rest condition**) باشد. پاسخ پلهٔ سیستم در $n=53$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۵

③ تجزیه به کسرهای جزئی ساده:

اگر $X(z)$ را بدهند و $x[n]$ را بخواهند و $X(z)$ به صورت IIR باشد (قطب غیرصفر) ابتدا $\frac{X(z)}{z}$ را

مبدأ داشته باشد) از تجزیه به کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم.

(I) قطب‌های $X(z)$ را بدست آورید. و ROC_x را هم بدست آورید.

(II)

قطب ساده مرتبه اول در $z=\alpha$:

بازای هر قطب ساده مرتبه اول در $x[n]$ یک α^n خواهیم.

$z=\alpha \longrightarrow \alpha^n$

- $A\alpha^n u[n]$ ← ROC_x بیرون دایره‌ی α
- $A\alpha^n u[-n-1]$ ← α ″ ″ داخل ″ → $A\alpha^n u[-n]$

قطب مثلا دوی $z=\alpha \mp \beta j \leftarrow z = r e^{\mp j\omega_0}$

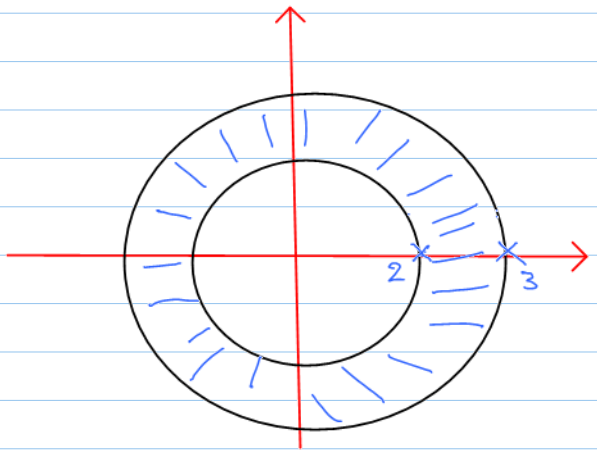
$z = r e^{\mp j\omega_0}$

- $A r^n (\cos(\omega_0 n) + \sin(\omega_0 n)) u[n]$ ← ROC_x بیرون دایره به شعاع r
- $A r^n (\cos(\omega_0 n) + \sin(\omega_0 n)) u[-n-1]$ ← ROC_x داخل دایره به شعاع r

$$X(z) = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} \qquad 2 < |z| < 3$$

$z = 2$

$z = 3$



① قطبهای $X(z)$ را پیدا می‌کنیم ② روی هر قطب یک دایره رسم می‌کنیم.

③ ROC_x را روی شکل مشخص می‌کنیم. ④

$z = 2 \rightarrow \quad x[n] = A(2)^n u[n] + B\,3^n u[-n-1]$

$z = 3$

اگر با شکل کلی دنبال گزینه‌ای را بگردید این کار را اینجا می‌دهیم.

⑤ تعیین A و B ←

$X(z)$ را برحسب z^{-1} می‌نویسیم.

$$A = \lim_{z \to 2} (1 - 2z^{-1})\, X(z)$$

$$B = \lim (1 - 3z^{-1})\, X(z)$$

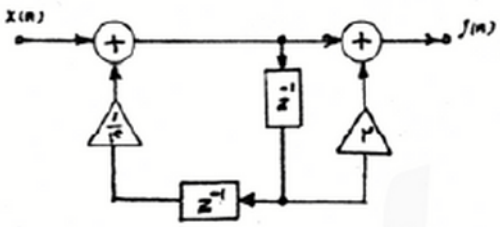
$$X(z) = \frac{z-1}{z^2 - 5z + 6} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 5z^{-1} - 6z^{-2}} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}$$

$$A = \lim_{z \to 2} \cancel{(1-2z^{-1})} \frac{z^{-1} - z^{-2}}{\cancel{(1-2z^{-1})}(1-3z^{-1})} = \frac{2^{-1} - 2^{-2}}{1 - 3 \times 2^{-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z \to 3} \cancel{(1-3z^{-1})} \frac{z^{-1} - z^{-2}}{\cancel{(1-3z^{-1})}(1-2z^{-1})} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

برق ۸۲

پاسخ ضربهٔ سیستم نشان داده شده در شکل زیر با فرض علّی بودن سیستم کدام است؟ ($u_{-1}(n)$ معرف دنباله پله واحد می‌باشد)

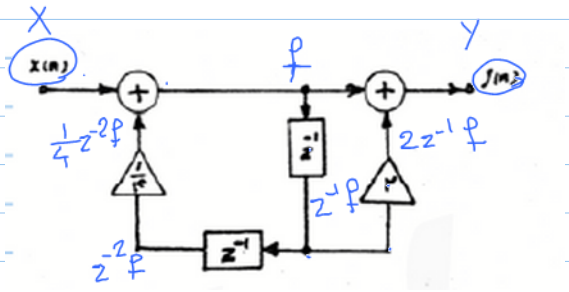


۱) $h(n) = \left[\frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n\right] u_{-1}(n)$

۲) $h(n) = \left[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n - \frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n\right] u_{-1}(n)$

۳) $h(n) = \left[\frac{5}{2}(\frac{1}{2})^n - \frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^n\right] u_{-1}(n)$

۴) $h(n) = \left[\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n - \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^n\right] u_{-1}(n)$



$H(z) \longrightarrow h[n]$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y = f + 2z^{-1}f = (1+2z^{-1})f$$

$$f = X + \frac{1}{4}z^{-2}f \longrightarrow f = \frac{X}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

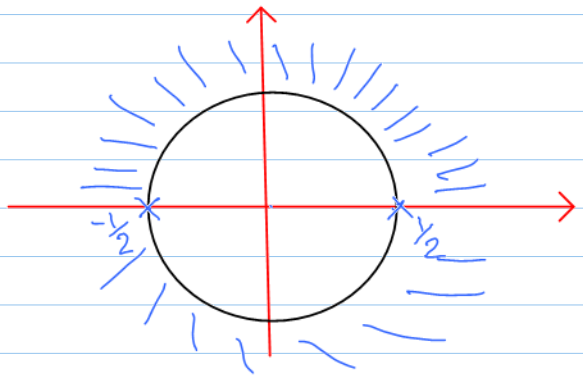
$$Y = (1+2z^{-1})\frac{X}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \longrightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad ; \quad \text{ای} \longrightarrow \text{سمت راست و نامتناهی} \infty \text{، } ROC_H$$

① مقادیر مختلف ROC_H را بیابید:

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{4}}$$

$$z^2 = \frac{1}{4} \longrightarrow z = \pm\frac{1}{2}$$



② $z = \frac{1}{2}$

$z = -\frac{1}{2}$

$$\longrightarrow h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

③ $H(z)$ برحسب توانهای منفی z:

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1+2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$A = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (1-\tfrac{1}{2}z^{-1}) \frac{1+2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1+4}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$B = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) z^{-1}\right) \cdot \frac{1 + 2z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \frac{1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \frac{-3}{2}$$

$$h[n] = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

کامپیوتر ۹۷

به یک سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n]=u[n]$ ورودی $x[n]=2^n u[-n]$ اعمال می‌شود. کدام مورد خروجی سیستم است؟

۱) $2^n u[-n]+u[n]$

۲) $2^{n+1}u[-n]+u[n]$

۳) $2^n u[-n-1]+2u[n]$

۴) $2^{n+1}u[-n-1]+2u[n]$ ✓

$2^n u[-n]$ → [$u[n]$] → $y[n]$

$y[n] = \underbrace{2^n u[-n]}_{x[n]} * \underbrace{u[n]}_{h[n]} \rightarrow Y(z) = X(z) \times H(z)$

$h[n] = u[n] \longrightarrow H(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$

$2^n u[-n-1] \longrightarrow \dfrac{-1}{1-2z^{-1}} \quad |z|<2$

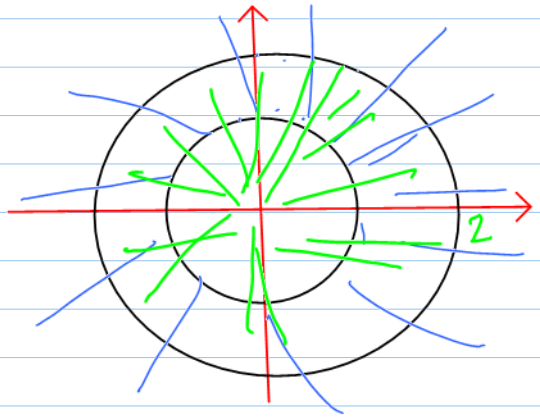
$n \rightarrow n-1$ ↓ , $\times z^{-1}$ ↓

$2^1 \times 2^{n-1} u[-n] \longrightarrow \dfrac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad ; \quad |z|<2$

$2^n u[-n] \longrightarrow \dfrac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad ; \quad |z|<2$

$H(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$

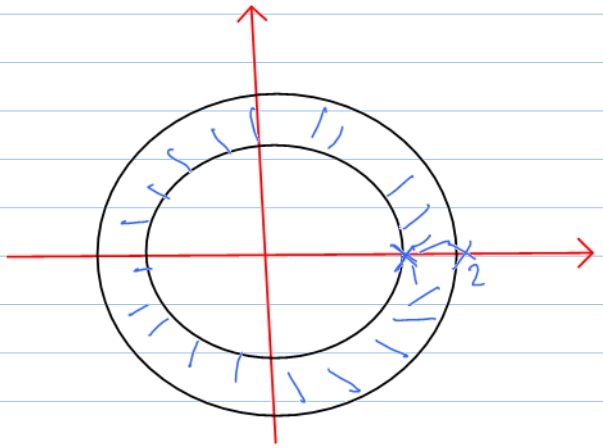
$X(z) = \dfrac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad |z|<2$



$Y(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \times \dfrac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad ; \quad ROC_y$

$ROC_y \supseteq ROC_x \cap ROC_H$

$Y(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z-2)} \quad , ROC_y = 1<|z|<2$



$$Y(z) = \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad 1 < |z| < 2$$

$z = 1$

$z = 2$

$$\rightarrow \quad y[n] = A(1)^n u[n] + B(2)^n u[-n-1]$$

$$A = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{2}{1-2} = -2$$

$$B = \lim_{z \to 2} (1-2z^{-1}) \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$y[n] = -2(1)^n u[n] + 2(2)^n u[-n-1]$$

$$y[n] = -2u[n] + 2^{n+1} u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \times \frac{2}{1-z^{-2}} \qquad |z| > 1 \quad ; \qquad x[0] \neq x[\infty]$$

$x[n] \longrightarrow n = 0 \text{ to } \infty$

قضیه مقدار اولیه: جلسه 20 سیگنال

اگر $x[n]$ علّی باشد (ROC_x دست راستی و درجه صورت $X(z)$ کمتر یا مساوی درجه مخرج آن)

آنگاه داریم:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

$$X(z) = \frac{z^1 - 1}{z^1 + 1} \quad ; \quad |z| > 1 \qquad x[0] = ?$$

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z-1}{z+1} = 1$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 1}{z + 2} \quad ; \quad |z| < 1 \quad ; \quad x[n] = 0 \quad \forall n > 0$$

هرگاه شرایط قضیه مقدار اولیه برقرار نباشد، از تعریف $X(z)$ استفاده می‌کنیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[-\infty] z^{\infty} + \dots + x[-1] z^1 + x[0] z^0 + x[1] z^{-1} + \dots$$

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z^2 - 1}{z + 2} = \infty \qquad x[0] = \infty$$

$$X(z) = x[-\infty] z^{+\infty} + \dots + x[-2] z^{+2} + x[-1] z^{+1} + x[0]$$

$$\frac{z^2 - 1}{z + 2} = x[-\infty] \times 0 + \dots + x[-2] \times 0^2 + x[-1] \times 0 + x[0]$$

$$\boxed{\frac{-1}{2} = x[0]}$$

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1}(z+2)} \quad ; \quad x[n] = 0 \quad \forall n > 0 \qquad x[0] = ?$$

$x[n]$: دست چپی ← ROC_x دست چپی ← جایز به استفاده از قضیه مقدار اولیه نیستیم.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}(z+2)} = x[-\infty]z^{\infty} + \cdots + x[-1]z^{1} + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots + x[\infty]z^{-\infty}$$

$X(z)$

$$\left.\frac{1-2z^{-1}}{1+2z^{-1}}\right|_{z=0} = x[-\infty]z^{\infty} + \cdots + x[-1]z + x[0] = x[0]$$

$$\frac{1-2(0)^{-1}}{1+2(0)^{-1}} = x[0]$$

تعريف مشتقه $0^{-1} = \frac{1}{0}$

$$\left.\frac{z-2}{z+2}\right|_{z=0} = x[0] \longrightarrow \underline{-1 = x[0]}$$

قضیه مقدار نهایی: اگر $x[n]$ یک سیگنال علی و پایدار باشد $x[\infty] = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) X(z)$

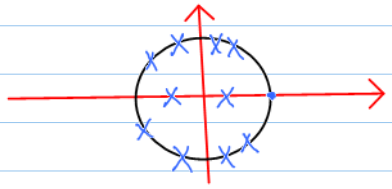
بیان دوم:

* اگر ROC_x دست راستی بوده و درجه صورت $X(z)$ ≥ درجه مخرج $X(z)$:

حالت اول: اگر تمام قطبهای $(1-z^{-1}) X(z)$ داخل دایره واحد باشد

$x[\infty] = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) X(z)$ = عددی محدود و مخالف صفر

حالت دوم: اگر $(1-z^{-1}) X(z)$ قطب بیرون دایره واحد نداشته باشد و روی دایره واحد هم قطب روی $z=1$ یا قطب تکراری نداشته باشد:



$x[\infty]$ = متناهی و معلوم

حالت سوم: غیر از دو حالت فوق $x[\infty] = \infty$

۱۳

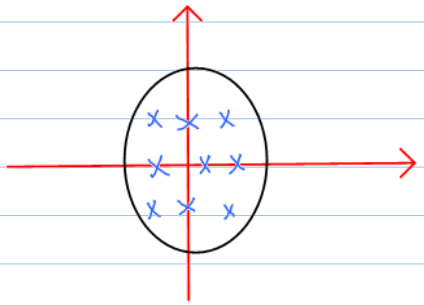
① ROC_x دست راستی و شامل ∞

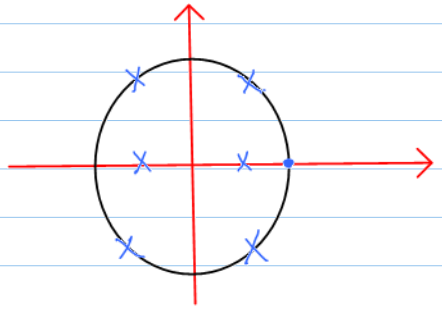
$x[\infty] = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) X(z)$ (I)

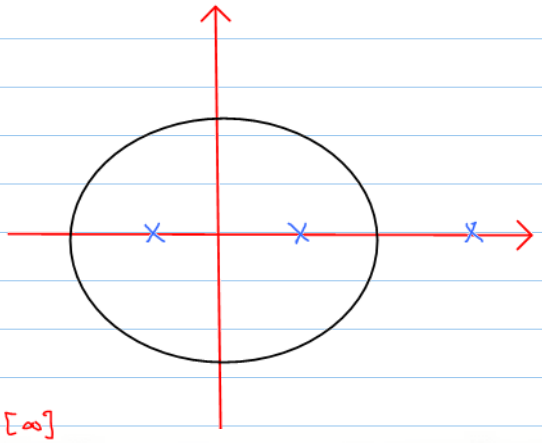
$(1-z^{-1}) X(z)$ ←

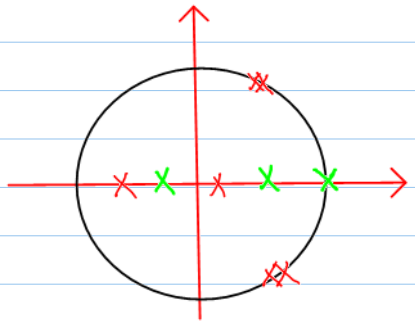
(II)

$x[\infty]$ = نامعلوم و غیر صفر









$y[\infty]$

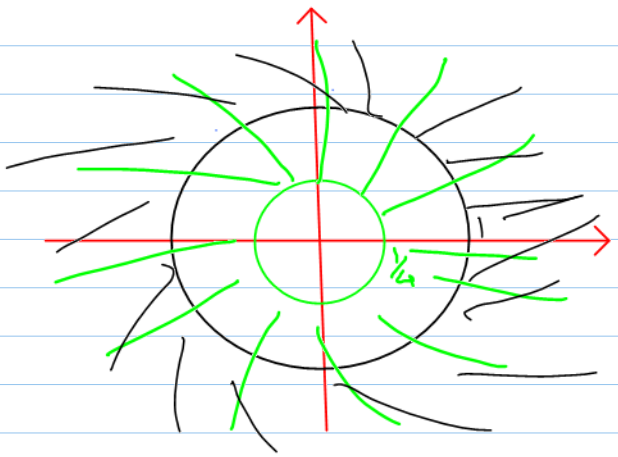
برق ۹۸

۸ اگر پاسخ ضربهٔ واحد یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $(\frac{1}{4})^n u[n]$ باشد، خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی پله به اندازهٔ ۳، برابر است با:

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۳

$h[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ $\quad x[n] = 3u[n]$

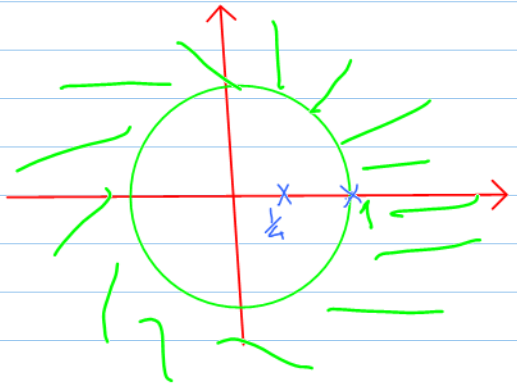
$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$; $|z| > \frac{1}{4}$ $\quad X(z) = \frac{3}{1-z^{-1}}$; $|z| > 1$



$ROC_{gc} \cap ROC_H = |z| > 1$

$Y(z) = H(z)\, X(z)$

$Y(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$; ROC_y



$ROC_y = |z| > 1$

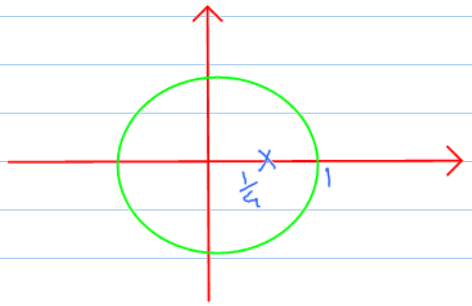
$Y(z) = \frac{3}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$; $|z| > 1$

$y[\infty] = ?$

① ROC دست راست ✓ و درجه صورت $Y(z)$ $\geq$ درجه مخرج $Y(z)$ ✓

$$Y(z) = \frac{3z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{4})}$$

$$(1-z^{-1})\,Y(z) = (1-z^{-1})\,\frac{3}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \times \frac{z^1}{z^1} = \frac{3z}{z-\frac{1}{4}}$$



$$y[\infty] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\,Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{3z}{z-\frac{1}{4}} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4 \checkmark$$

حالت (I)

برق ۹۳

در یک سیستم گسسته LTI علی با پاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ پله $S[n]$ به‌صورت $S[n] = \delta[n] + ah[n-1]$ به‌دست می‌آید که در آن a یک عدد ثابت و مثبت است. برای مقادیری از a که سیستم پایدار است مقدار $h[0]$ و $h[\infty]$ عبارتست از:

۱) $h[\infty] = 1$ ، $h[0] = a$

۲) $h[\infty] = 0$ ، $h[0] = 1$

۳) $h[\infty] = 1$ ، $h[0] = 2$

۴) با توجه به نداشتن a قابل تعیین نیست.

$s[n] = \delta[n] + a\,h[n-1]$ $h[n]$: پاسخ ضربه

$h[0]$, $h[\infty]$

$$h[0] = \lim_{z \to \infty} H(z) \quad ; \quad h[\infty] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, H(z)$$

$$s[n] - s[n-1] = h[n]$$

$$\delta[n] + a\,h[n-1] - (\delta[n-1] + a\,h[n-2]) = h[n]$$

$$\delta[n] - \delta[n-1] = h[n] + a\,h[n-2] - a\,h[n-1]$$

$$1 - z^{-1} = H(z) + a z^{-2} H(z) - a z^{-1} H(z)$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + a z^{-2} - a z^{-1}}$$

$$h[0] = \lim_{z \to \infty} H(z) = \lim \frac{1 - \infty^{-1}}{1 + a\infty^{-2} - a\infty^{-1}} = 1$$

$$h[\infty] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, H(z) = \lim_{z \to 1} \frac{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1})}{1 + a z^{-2} - a z^{-1}} = 0$$

برق ۹۶-

در یک سیستم LTI و علّی زمان ـ گسسته با پاسخ ضربه به طول محدود و حقیقی $h[n]$، به ازای ورودی $x[n]=(1+\cos\frac{\pi n}{3})u[n]$، پاسخ حالت دائمی برابر $y[n]=2$ می‌شود؟ با فرض حداقل طول ممکن برای $h[n]$ و این که $h[0]\neq 0$ است، $h[1]$ چقدر است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) +۲

۴) +۱

اطلاعات مسأله

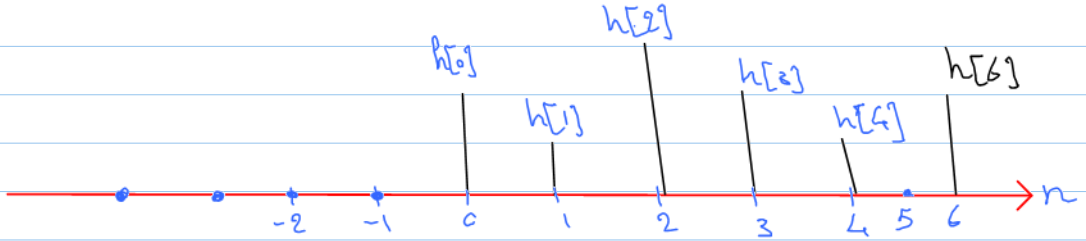
① علّی ② طول $h[n]$ محدود ③ $h[n]$ حقیقی ④ $x[n] \rightarrow y[\infty]=2$

⑤ طول $h[n]$ متناهی ⑥ $h[0]\neq 0$

معادل سازی اطلاعات مسأله در حوزه z

① $h[n]$ علّی: $h[n]=0 \quad \forall n<0$ ← ROC_H بیرونی و شامل ∞

② طول $h[n]$ محدود ← FIR ← تمام قطب‌های $H(z)$ در مبدأ است. ($H(z)$ چند جمله‌ای از z^m هاست)



$$h[n]=h[0]\delta[n]+h[1]\delta[n-1]+h[2]\delta[n-2]+h[3]\delta[n-3]+h[4]\delta[n-4]+h[6]\delta[n-6]$$

$$H(z)=h[0]\times 1+h[1]z^{-1}+h[2]z^{-2}+h[3]z^{-3}+h[4]z^{-4}+h[6]z^{-6}$$

طول $h[n]$ = تعداد توان‌های منفی z

③ $h[n]$ حقیقی ←

$$h[n]=h^*[n]$$

$$H(z)=H^*(z^*)$$

مثال

⑤ طول $h[n]$ متناهی ← تعداد توابعای z ها داخل باشد.

⑥ $h[0] \neq 0$ ← در $H(z)$ ضریب عدد ثابت خواهیم داشت.

④ $x[n] = u[n] + \cos(\frac{\pi}{3}n)u[n] \rightarrow y[\infty] = 2 =$ عدد محدود و غیر صفر

$y[n] \longrightarrow Y(z) \rightarrow y[\infty] =$ مقدار نهایی

↓

حالت اول وقتی مقدار نهایی

↓

$F(z) = (1-z^{-1})Y(z)$ ← تابع مختلط داخل دایره واحد

$Y(z) = X(z)H(z) \rightarrow$

$$X(z) = \underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}_{|z|>1} + \underbrace{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{3})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{\pi}{3})z^{-1}+z^{-1}}}_{|z|>1} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}} \quad ; |z|>1$$

$$Y(z) = \underbrace{\left(\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right)}_{|z|>1} \underbrace{H(z)}_{|z|>\alpha}$$

$$\underbrace{(1-z^{-1})Y(z)}_{\downarrow F(z)} = \left(1 + \frac{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1-z^{-1}+z^{-2}}\right)H(z)$$

$$F(z) = H(z) + \frac{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1-z^{-1}+z^{-2}}H(z)$$

تابع مختلط $H(z)$ روی مبدأ است.

قطبهای $F(z)$ ← قطبهای $H(z)$ ← $z=0$

$z^2 - z + 1 = 0$ ← $z = \frac{1}{2} \mp j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(z) = H(z) + \frac{(z-1)(z-\frac{1}{2})}{z^2 - z + 1} H(z)$$

$z = a \mp bj \rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

- $=1$ روی دایره واحد
- >1 بیرون ~ ~
- <1 داخل ~ ~

$z = \frac{1}{2} \mp j\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \rightarrow$ روی دایره واحد

$$f(z) = (1-z^{-1})Y(z) = H(z) + \frac{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1 - z^{-1} + z^{-2}} H(z)$$

$f(z)$ قطبهای $\rightarrow$

- $z = 0$
- $z = \frac{1}{2} \mp j\frac{\sqrt{3}}{2}$ روی دایره واحد $\rightarrow$ X

$\therefore$ نوی حذف نمی شود

عبارت $z^{-2} + z^{-1} - 1$ باید از صورت f حذف شود.

$H(z)$ باید در صورت خود $(z^{-2} + z^{-1} - 1)$ داشته باشد.

$$H(z) = (1 - z^{-1} + z^{-2}) M(z)$$

$$(1-z^{-1}) Y(z) = (1 - z^{-1} + z^{-2}) M(z) + (1-z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) M(z)$$

$$H(z) = (1 - z^{-1} + z^{-2}) M(z)$$

$M = Az^m \rightarrow H(z) = Az^m - Az^{m-1} + Az^{m-2}$ طول $h[n] \leftarrow 3$

$M = (Az^m + Bz^n) \rightarrow H(z) = Az^m + Az^{m-2} - Az^{m-1} + Bz^n - Bz^{n-1} + Bz^{n-2}$

طول $h[n] \leftarrow 6$

$$H(z) = A z^{m} - A z^{m-1} + A z^{m-2}$$

$A = ?$ ، $m = ?$

$h[0] \neq 0$ ← یعنی ، $H(z)$ ، توان z ، صفر باشد.

$m = 2 \rightarrow H(z) = A z^{2} - A z^{1} + A = \frac{A z^{2} + A z + A}{1}$ ✗

$m = 1 \rightarrow H(z) = A z^{1} - A + A z^{-1} = A z - A + \frac{A}{z} = \frac{A z^{2} - A z + A}{z^{1}}$ ✗

$m = 0 \rightarrow H(z) = A - A z^{-1} + A z^{-2} = \frac{A z^{2} - A z + A}{z^{2}}$ ✓

① ← درجه صورت $\geq$ درجه مخرج و ROC شامل دایره

$$H(z) = A - A z^{-1} + A z^{-2} = A(1 - z^{-1} + z^{-2})$$

$$y[\infty] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \lim_{z \to 1} \left(A(1 - z^{-1} + z^{-2}) + \frac{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \times A(1 - z^{-1} + z^{-2}) \right)$$

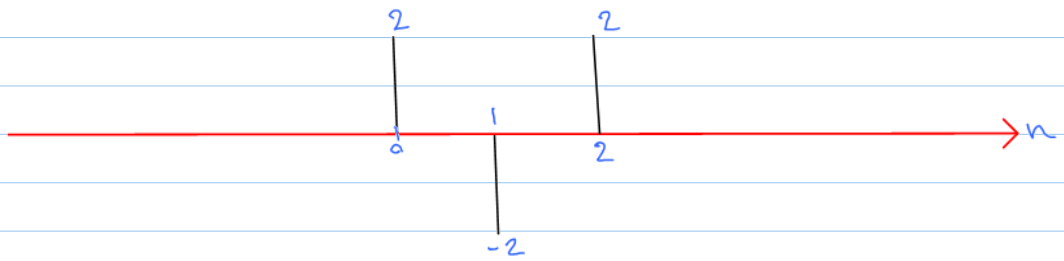
$$y[\infty] = A(1 - 1 + 1) + (1^{\circ})(1 - \tfrac{1}{2}) A = A$$

$$y[\infty] = 2 \rightarrow A = 2$$

$$H(z) = 2 - 2 z^{-1} + 2 z^{-2}$$

$h[1] = ?$ کمی تبدیل z ← $H(z)$ ← FIR ← سی توان

$$h[n] = 2\delta[n+0] - 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$



$h[1] = -2$ ✓

جلسه ۱۲ سیگنال

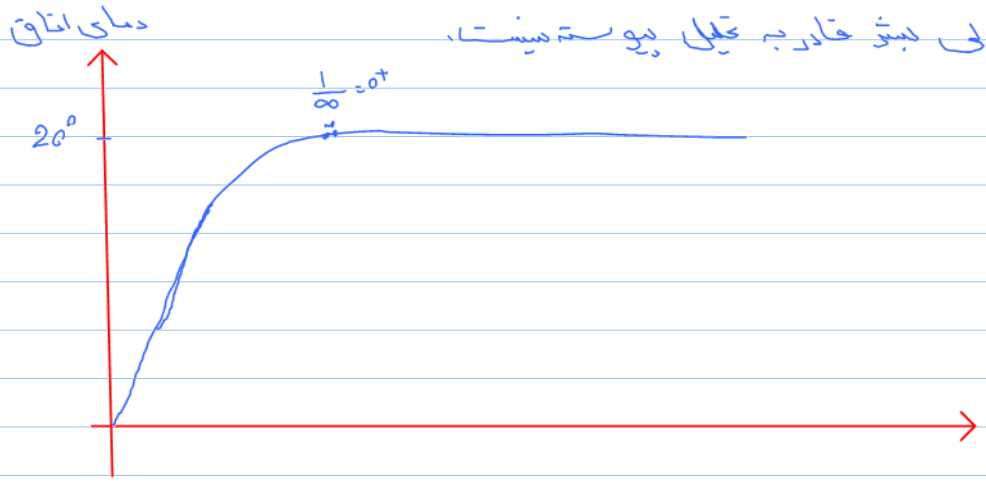
«نمونه برداری»

چرا باید نمونه برداری کنیم؟

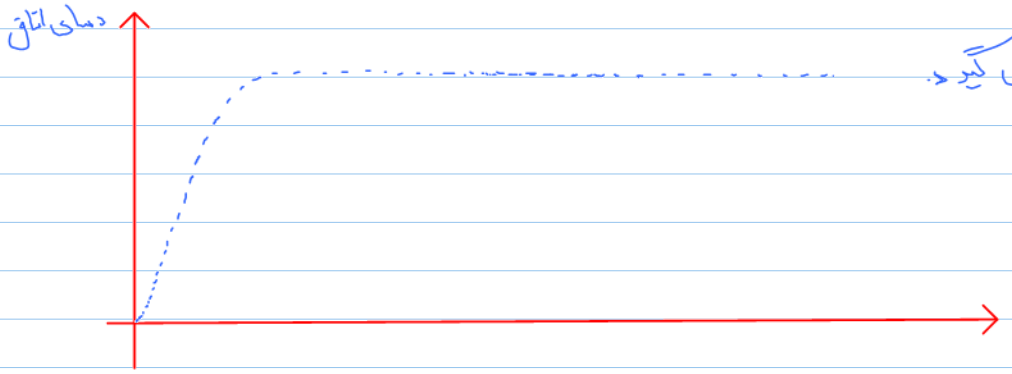
چگونه نمونه برداری کنیم؟

در عمل به چه دردی می خورد؟

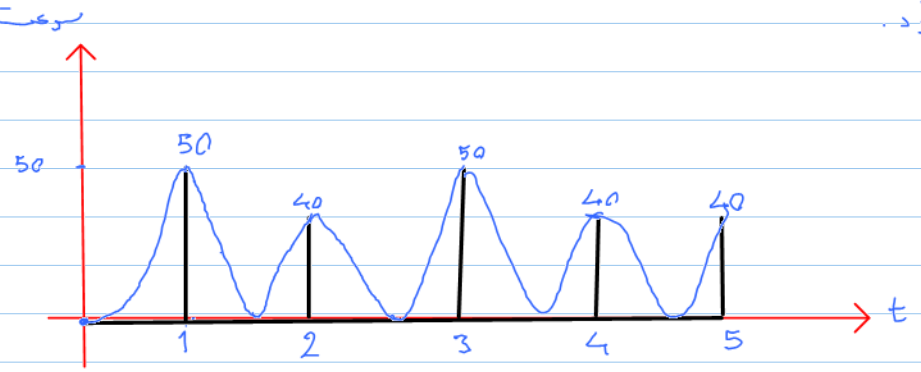
ذات طبیعت پیوسته است و ما قادر به تحلیل پیوسته نیستیم.

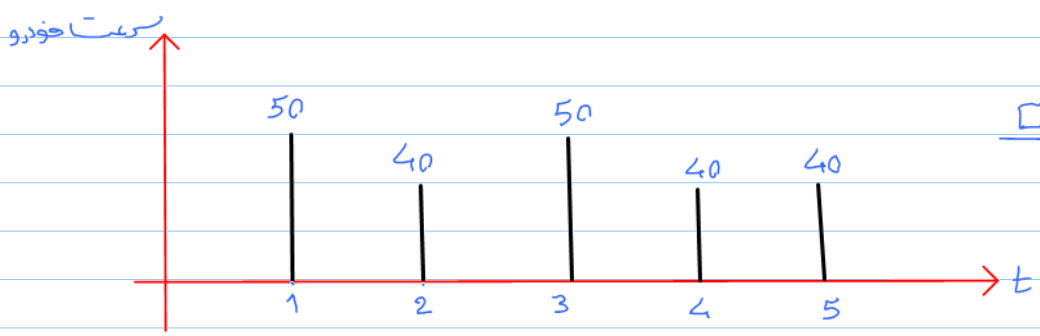


دماسنج هر ۰.۵۵ ثانیه اندازه می گیرد.



هر سیگنال خواه و ناخواه وجود دارد.

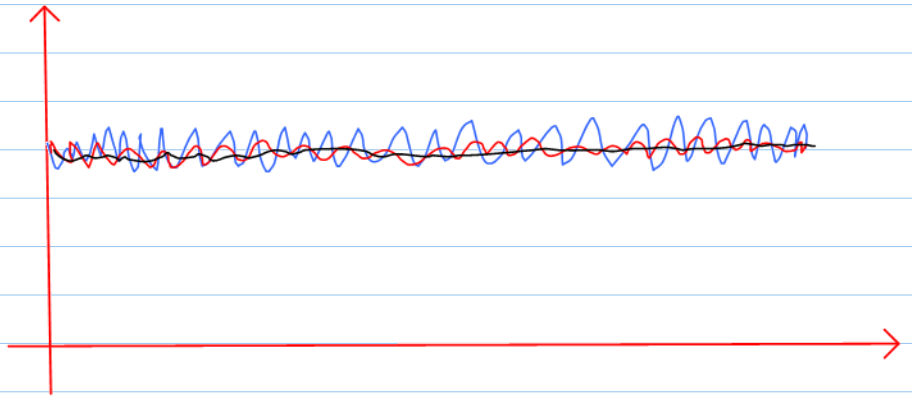






کامپیوترهای گسسته ← با یک فاصله زمانی کار می‌کنند ←

مثال.



و خواهیم یک فیلتر طراحی کنیم؟ ← ۱۵ تا هارمونی + ۱۵ تا سینوس + ...

20 ~ + ~ ~ 20 ~ ~ + ...

ابزارهای اندازه‌گیری معمولاً گسسته هستند ← برای وارد کردن به کامپیوتر باید گسسته شوند.

مثال ← 20 کیلو برنج بخرم ← 3 تا هشت بری دارم.

چطور نمونه‌برداری کنیم؟

مثال 1. یک سنگ را در اتاق در دمای -20° قرار دهیم و خواهیم ببینیم شکل سنگ در طول زمان بررسی کنیم ← (معمولاً در 3 سال سنگ تغییر شکل می‌دهد)

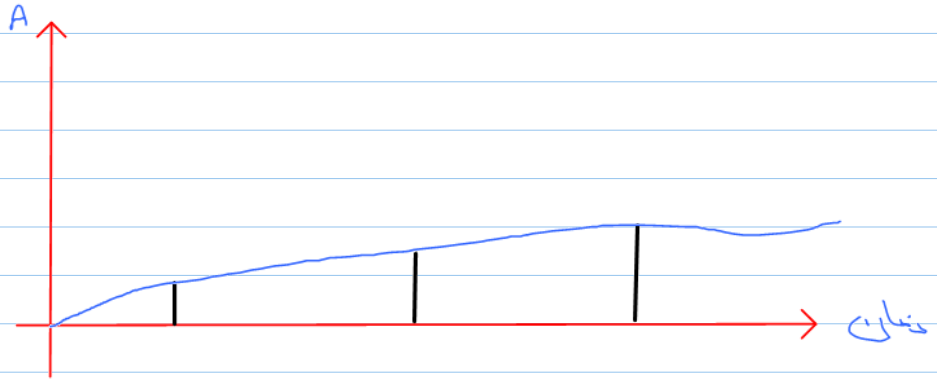
مثال 2. وآیند عکرد موشک را که کل زمان پرواز آن 3 دقیقه است را بررسی کنیم.

در مثال 1 شکل سنگ را با چه فاصله زمانی بررسی کنیم؟

A ← هر 1 ثانیه ✗ B ← هر سال ✗ C ← هر یک ماه ✓

در مثال 2 ←

A ← هر ۰.۰۰۱ ثانیه ✗ B ← هر یک دقیقه ✗ C ← هر ۰.۱ ثانیه ✓

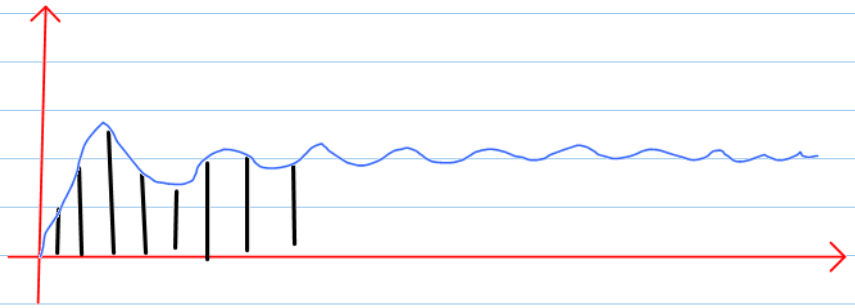


دمای اتاق A , B

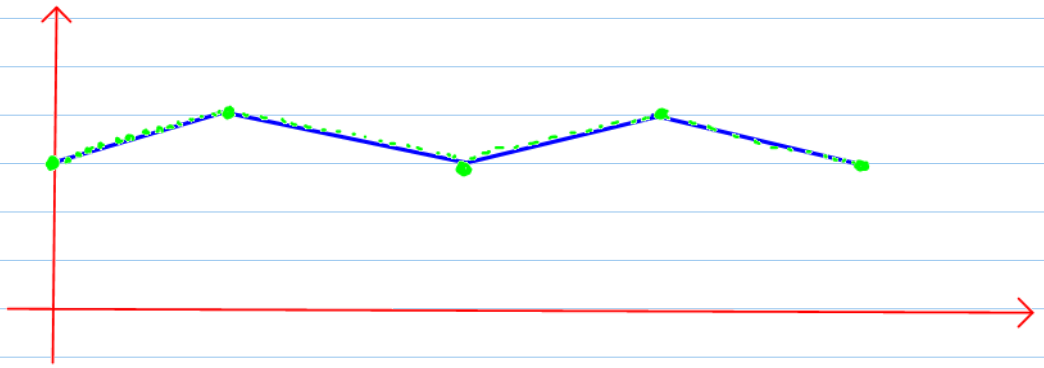
اتاق A ← $1km^2$

" B ← $10m^2$

وسیله گرمایش یکسان



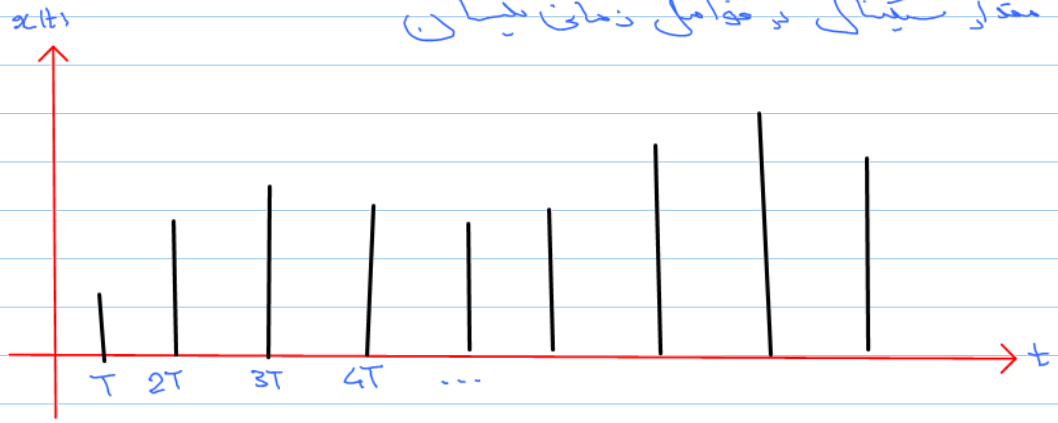
اتاق C



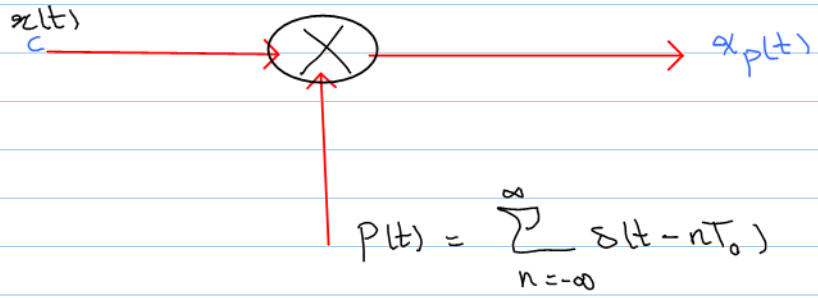
در نمونه برداری طوری عمل کنیم که پدیده و اتفاق از روی نمونه ها قابل تشخیص باشد.

زمان نمونه برداری باید نه آنقدر کم باشد که پدیده و اتفاق را توصیف نکند و نه آنقدر سریع باشد که حجم داده ها آنقدر زیاد شود که نتوان در کامپیوتر آن را بررسی کرد.

نمونه برداری: ثبت مقدار سیگنال در فواصل زمانی یکسان

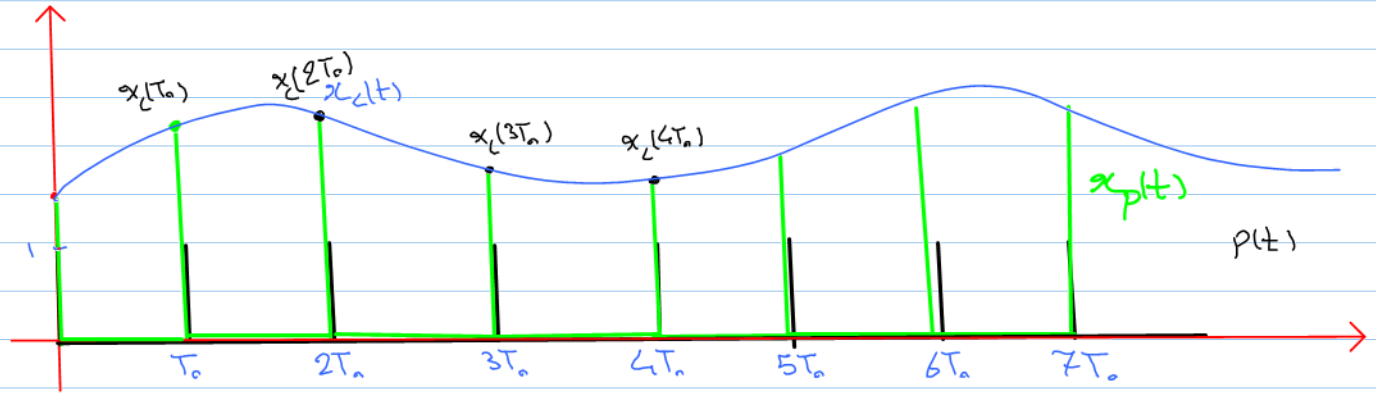


یکی از روشهای نمونه‌برداری استفاده از قطار ضربه است.



$$x_p(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_0)\,\delta(t - nT_0)$$

$$= x(0)\,\delta(t) + x(T_0)\,\delta(t - T_0) + \cdots$$



$x_p(t)$ نمونه‌برداری شده ولی هنوز پیوسته است.

بررسی فرآیند تبدیل $x_c(t)$ به $x_p(t)$ در حوزه فرکانس:

$$x_p(t) = x_c(t) \times p(t) \quad ; \quad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

هدف: معیاری برای تعیین مقدار مناسب T_0 به طوری که از روی نمونه‌های x_p بتوان x_c را تشخیص داد.

یعنی بتوانیم از روی نمونه‌های x_p دوباره فرآیند x_c را بسازیم.

$$X_p(w) = \frac{1}{2\pi} X_c(w) * P(w)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \longrightarrow a_k = \frac{1}{T_0} \;,\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_0}\right)$$

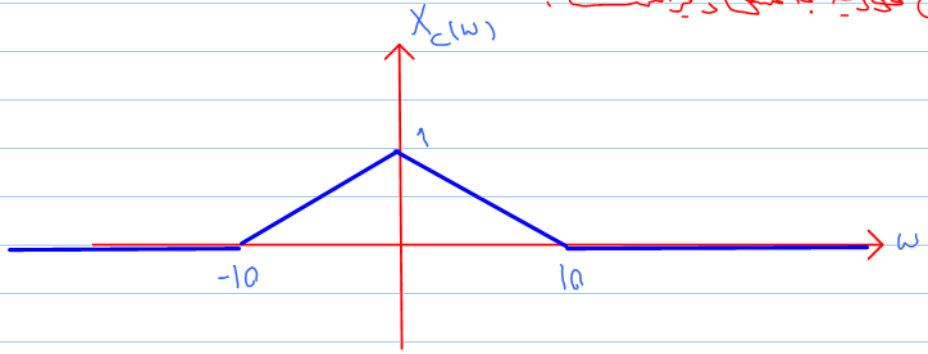
$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega) * \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_0)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_0} \Big(X_c(\omega) + X_c(\omega - \omega_0) + X_c(\omega - 2\omega_0) + \cdots$$
$$+ X_c(\omega + \omega_0) + X_c(\omega + 2\omega_0) + \cdots \Big)$$

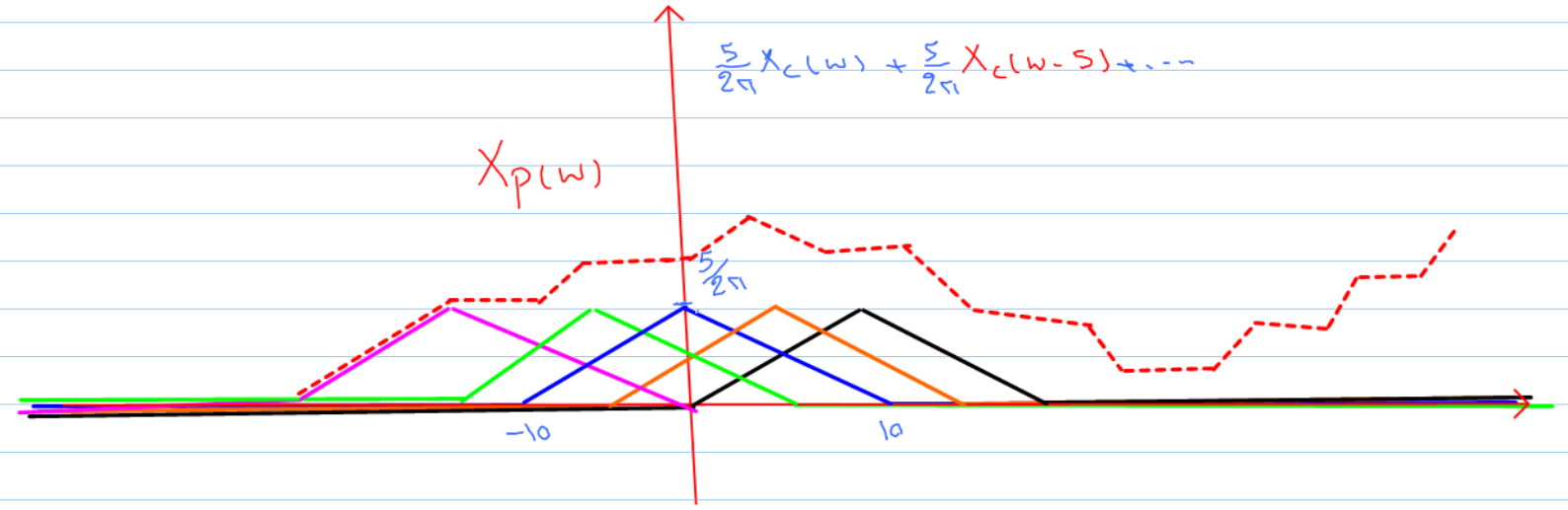
مثال: فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل فوریه به شکل زیر است.



ω_0: فرکانس تکرارپذیری $\rightarrow$ T_0: فاصله تکرارپذیری ؛ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

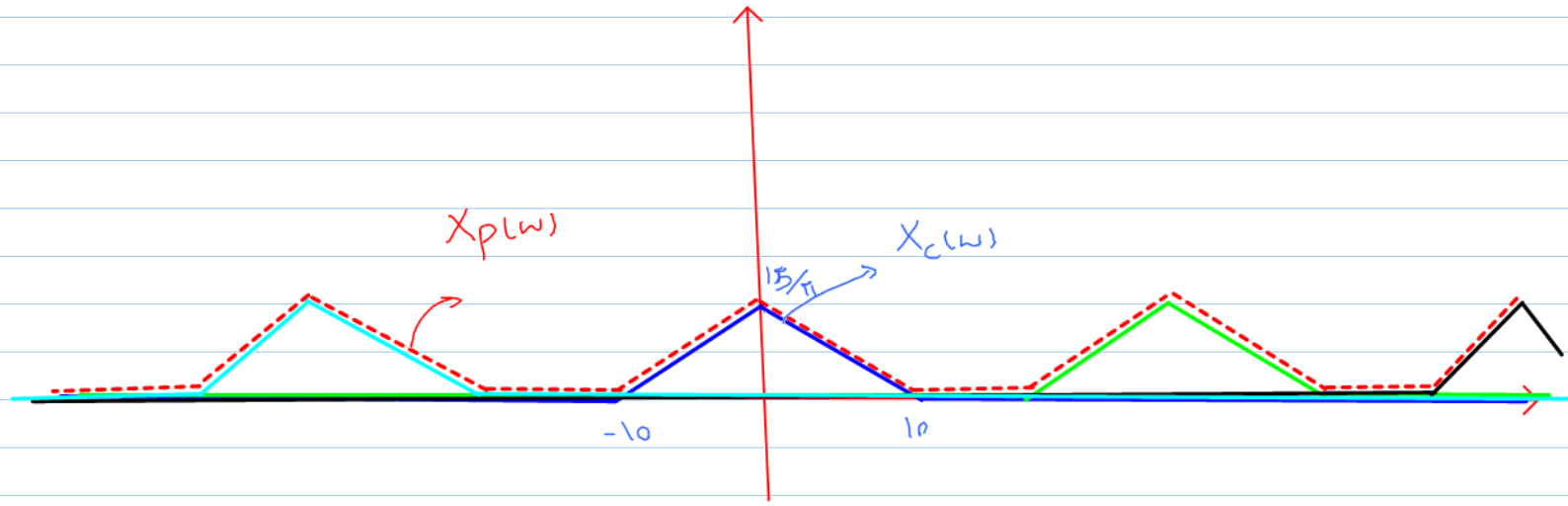
$$\omega_0 = 5 \;\frac{rad}{s} \;,\; T_0 = \frac{2\pi}{5}$$

$$X_p = \frac{5}{2\pi} \Big(X_c(\omega) + X_c(\omega - 5) + X_c(\omega - 10) + X_c(\omega - 15) + \cdots$$
$$+ X_c(\omega + 5) + X_c(\omega + 10) + \cdots \Big)$$



$w_0 = 30$, $T_0 = \frac{2\pi}{30}$

$$X_p(w) = \frac{15}{\pi}\left(X_c(w) + X_c(w-30) + X_c(w-60) + \cdots \right.$$
$$\left. + X_c(w+30) + X_c(w+60) + \cdots \right)$$





در فرآیند نمونه‌برداری، تبدیل فوریه سیگنال نمونه‌برداری شده (x_p) همواره از شیفت یافته‌های تبدیل فوریه سیگنال اصلی (x_c) است که با ضرب قطار ضربه نمونه‌برداری (ω_0) شیفت یافته است.

از بررسی همزمان قضایای فرآیند نمونه‌برداری و قضیه نایکوئیست که اگر بزرگترین فرکانس تبدیل فوریه x_c برابر ω_M باشد در صورتی که $\omega_0 \geq 2\omega_M$ باشد و توان از روی $X_p(j\omega)$ با یک فیلتر پایین گذر $X_c(j\omega)$ را بازیابی کرد.

$$\frac{2\pi}{T_0} \geq 2\omega_M \rightarrow \quad T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_M} \rightarrow$$

یعنی اگر فاصله نمونه‌برداری‌ها کمتر از $\frac{\pi}{\omega_M}$ باشد $x_p(t)$ به خوبی رفتار $x(t)$ را نمایش می‌دهد.