

۱- برای حل از روش دالامبر استفاده می کنیم.

$$c^2 = 9$$

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0 \quad 0 < x < 2, t > 0$$

$$u(x, 0) = 2x + 1 = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = x = g(x) \Rightarrow G(x) = \int_0^x g(s) ds = \frac{x^2}{2}$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0; t > 0 \Rightarrow \text{گسترش کرانج به دور 2, 0 و بازتاب} \quad T = 4$$

ابتدا باید فرضهای جسم صلب فرضی که نقطه $x = 0.4$ به سرعت $c = 3$ منتقل می شود را در نظر بگیریم $t = 1.3$

$$x \pm ct = 0.4 \pm 3 \times 1.3 = -3.5, 4.3$$

$$\text{فرمول دالامبر: } u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} (G(x+ct) - G(x-ct))$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(-3.5) + f(4.3)) + \frac{1}{6} (G(4.3) - G(-3.5))$$

$$u(0.4, 1.3) = \frac{f(0.5) + f(0.3)}{2} + \frac{1}{6} (G(0.3) - G(0.5))$$

$$u(0.4, 1.3) = \frac{2 + 1.6}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{0.09 - 0.25}{2} \right) = 1.8 - \frac{0.08}{6} \approx 1.79$$

تقریباً 0.01

بدترین تقریب (2) صحیح است.

$$|\sin z|^2 = |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x \cosh y + i \sinh y \cos x|^2 \quad -2$$

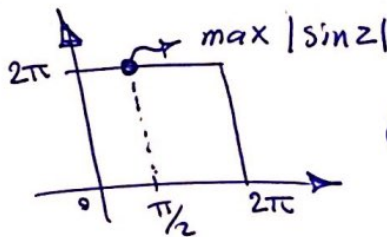
$$= \sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y \cos^2 x$$

می دانیم $|\sinh y| \leq |\cosh y|$ پس نرم دوم کوچکتر است از $\cosh^2 y \cos^2 x$

$$\Rightarrow |\sin z|^2 \leq \sin^2 x \cosh^2 y + \cosh^2 y \cos^2 x = \cosh^2 y$$

$$\Rightarrow |\sin z| \leq \cosh y$$

چون $0 < y < 2\pi$ است. بنابراین مقدار ماکزیمم $\cosh 2\pi$ می تواند باشد. (نرینه 4)



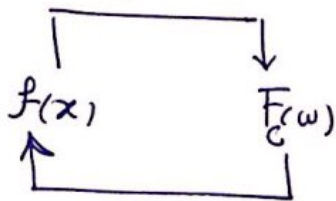
اینده حل در این سوال برای x اصل
مالزیم! در ویدئو دوره ببینید.

3- تنها نرینه ای که در شرایط منبری $w(2, \theta) = \sin 3\theta$ صدق می کند نرینه (4) است.

(حل سه مجن در ویدئو دوره)

4- تابع زوج است. بنابراین از هسته تبدیل $\cos \omega x$ استفاده می‌کنیم.

تبدیل فوری $\cos$: $\int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$



انتگرال فوری : $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega x d\omega$

جزء جز: $F_c(\omega) = \int_0^{\pi} \sin x \cos \omega x dx = I$

مشتق	انتگرال
$\cos \omega x$	$\sin x$
$-\omega \sin \omega x$	$-\cos x$
$-\omega^2 \cos \omega x$	$-\sin x$

$$I = -\cos x \cos \omega x \Big|_0^{\pi} - \omega \sin x \sin \omega x \Big|_0^{\pi} + \omega^2 I$$

$$(1 - \omega^2) I = 1 + \cos \pi \omega$$

$$F_c(\omega) = \frac{1 + \cos \pi \omega}{1 - \omega^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{[Blank Circle]} \cos \omega x d\omega$$

پایین دست لرنیز (3) است.

5- طبق لیم کردن حاصل این انتگرال ضعیف است. روشن دیگر:

$$\left| \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_C \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| = \int_0^\pi \frac{e^{-r \sin \theta}}{r} r d\theta$$

$z = re^{i\theta}$

برای $r \rightarrow \infty$ حد بالا ضعیف است. بنابراین حاصل انتگرال نیز ضعیف خواهد شد. I.C.

6- از معادله بر حسب زمان لاپلاس بگیریم.

$$u \rightarrow U$$

$$u_t \rightarrow sU - u|_{t=0} = sU + e^{-x}$$

$$u_{xx} \rightarrow U_{xx}$$

$$sU + e^{-x} - 4U_{xx} = 3U \Rightarrow 4U'' + (3-s)U = e^{-x}$$

فرم (1) درست است.

7- با جایگزینی $u = v + r$ داریم

$$v_{xx} + r'' = v_t + x - 1 \Rightarrow \boxed{r'' = x - 1}$$

$$v(0, t) = v(2, t) = 0 \Rightarrow r(0) = 3, r(2) = -1$$

$$r' = \frac{x^2}{2} - x + c_1 \Rightarrow r = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 3 \\ c_1 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$I.C. \Rightarrow 1 - x^3 = v(x, 0) + r(x) \Rightarrow \boxed{v(x, 0) = -\frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 2}$$

8- حل نه تسریحی:

$$f(z) = u + iv \Rightarrow f(\overset{x+iy}{z}) = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2 + i v(x, y)$$

چون $x = z$ و $y = 0$ صدق می کند

$$f(z) = (z^2 + 1)^2 + i v(z, 0)$$

چون $v(0, 0) = 0$ است می توانیم فرض کنیم $f(z) = (z^2 + 1)^2$ در این فرض u داده شده

$$\text{Im} \left((x^2 - y^2 + 1 + 2ixy)^2 \right) = 4xy(x^2 - y^2 + 1) \xrightarrow{v(1,1)} \boxed{v(1,1) = 4}$$

گزینه (3) درست است.

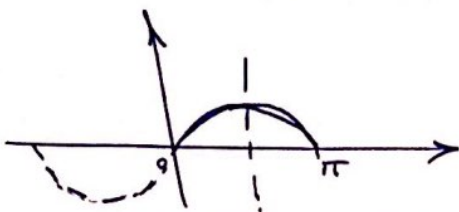
9-

$$F_S(\omega) = \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 4} \sin \omega x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{i\omega x}}{x^2 + 4} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi i \times \text{Res}_{x=+2i} = \frac{1}{2} \times 2\pi i \cdot \frac{x e^{i\omega x}}{2x} \xrightarrow{x=2i} \frac{\pi}{2} e^{-2\omega}$$

گزینه (1)

* توجه کنید گزینه های 2, 4 نیز نادرست می باشد زیرا $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_S(\omega) = 0$ باید باشد. به این می توانیم از استیلاک گزینه ها، آنگاه نتیجه استفاده کنیم $F_S(\omega) = \alpha e^{-2\omega}$ و بعد ضریب α را می بینیم.



odd even

sin (فرد)

$\Rightarrow$ بنابرین لرزه ها 3,4 غلط هستند

از طرف مشتق هم تابع نامرئی است (تقریباً عرض شده!!) بنابرین سرعت در $\frac{c}{n}$ به دست می آید
بنابرین لرزه یک نیز غلط است $\leftarrow$ لرزه 2 صحیح است.

$$u(x,t) \xrightarrow{F} U(\omega,t)$$

$$u_{xx} \rightarrow (i\omega)^2 U(\omega,t)$$

-11

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \xrightarrow{F} U_t + a^2 \omega^2 U = F(\omega,t)$$

$$u(x,0) = 0 \xrightarrow{F} U(\omega,0) = 0$$

حالا می توانیم از معادله لاپلاس بنویسیم.

$$U(\omega,t) \xrightarrow{L} U(\omega,s)$$

$$U_t \rightarrow sU(\omega,s) - U(\omega,0)$$

$$sU + a^2 \omega^2 U = F(\omega,s) \Rightarrow U = F(\omega,s) \cdot \frac{1}{s + a^2 \omega^2}$$

$$U(\omega,t) = \mathcal{L}^{-1}(U(\omega,s)) = F(\omega,t) * e^{-a^2 \omega^2 t} = \int_0^t F(\omega,\tau) e^{-a^2 \omega^2 (t-\tau)} d\tau$$

$\begin{array}{c} \text{---} \tau \text{---} \tau \text{---} t-\tau \text{---} t \end{array}$

لرزه 2 صحیح است.

البته می توانیم معادله خطی مرتبه اول ایجاد کرده و حل کنیم.

12- با استفاده از اصل لیبیل درم

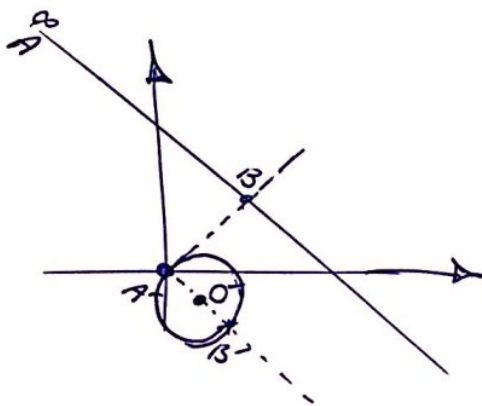
$$|f(z) - 2z^2 - iz| \leq \sqrt{2} \Rightarrow f(z) = 2z^2 + iz + c$$

کلیه

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \oint_{|z|=1} \left(\frac{2}{z^2} + \frac{i}{z} + c \right) dz = i \times 2\pi i = -2\pi$$

گزینه 4 درست است.

13-



با توجه به اینکه $x_0 > 0, y_0 > 0$ یعنی

بنابراین گزینه 1 درست است.

* همچنین راه حل هندسی در ویدئو دوره

14- با استفاده از گزینه‌ها  هستند ← توضیح جامع در ویدئو دوره

$$u(x, y, t) \Rightarrow u = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} A(\omega, k, t) e^{i\omega y} \sin kx \, dk \, d\omega$$

$0 < x < \infty, -\infty < y < \infty$
 $u(0) = 0 \rightarrow \sin kx$
 نمایی به نمایی می‌شود
 $0 < k < \infty$
 $e^{+i\omega y}$
 $-\infty < \omega < +\infty$
 فرکانس y
 فرکانس x

$$y'' - 4y' + 3y = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0$$

y	$\xrightarrow{F}$	Y
y'	$\rightarrow$	$i\omega Y$
y''	$\rightarrow$	$-\omega^2 Y$

$$-\omega^2 Y - 4i\omega Y + 3Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$= 2 \int_0^1 1 \cdot \cos \omega x dx = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

$Y = \frac{-2 \sin \omega}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)}$
--

$\Rightarrow$ (3) $\frac{2 \sin \omega}{\omega(\omega^2 + 4i\omega - 3)}$