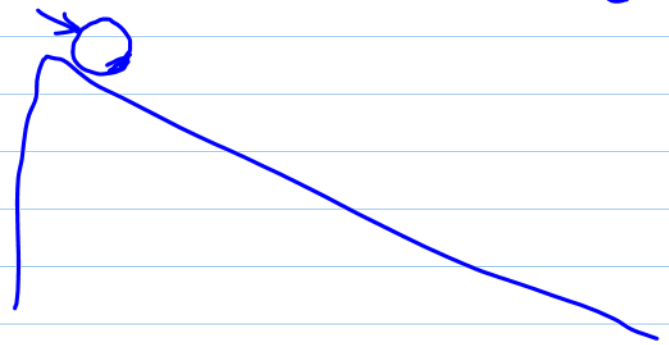
کنترل جلسه ۱۴

فصل دوم

پایداری

مفهوم پایداری: یعنی انرژی سیستم همواره افزایش نیابد.



سرعت همواره در حال افزایش

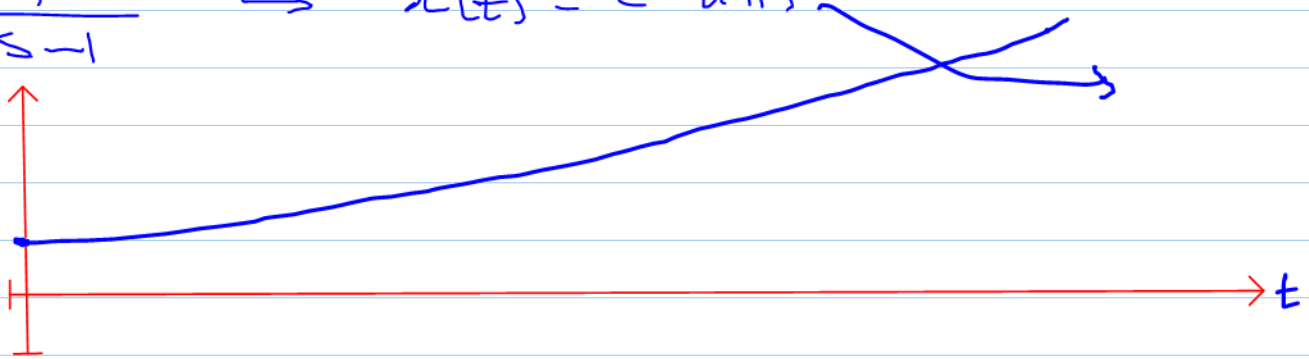
↑ انرژی جنبشی ⇒ ↑ سرعت

یک سیستم را پایدار گوئیم اگر انرژی آن بجز نقاطی که به مقادیر ثابت (یا گردوی نزدیک) انرژی آن سیگنال زمانی ثابت می شود. (سیگنال در حوزه زمان)

اگر دامنه سیگنالی با گذر زمان به سمت صفر برود یعنی انرژی آن صفر است.

برای بررسی این موضوع:

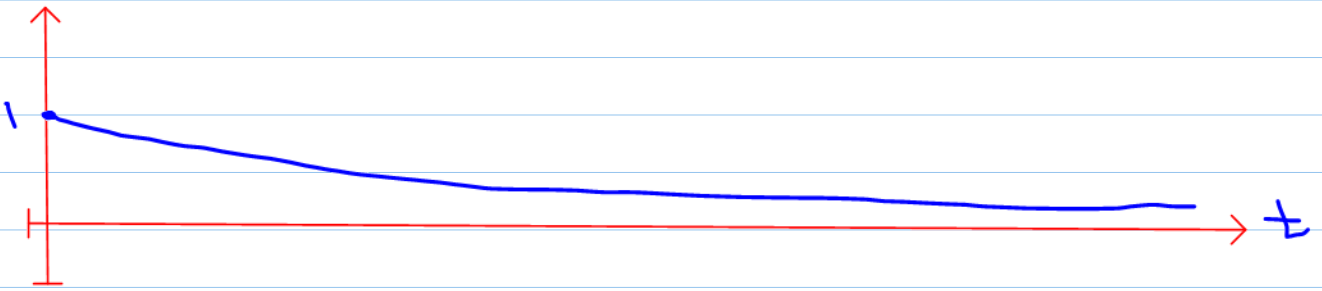
$$X(s) = \frac{1}{s-1} \rightarrow x(t) = e^{1t}u(t)$$



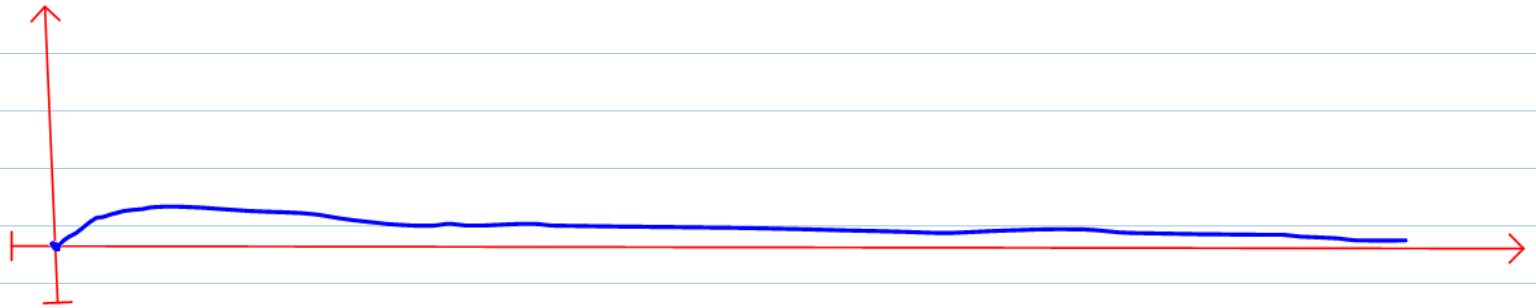
ازدی = ∞

اگر خروجی سیستم یک سیگنال با ازدی ∞ باشد، سیستم ناپایدار است.

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \rightarrow y(t) = e^{-1t}u(t)$$

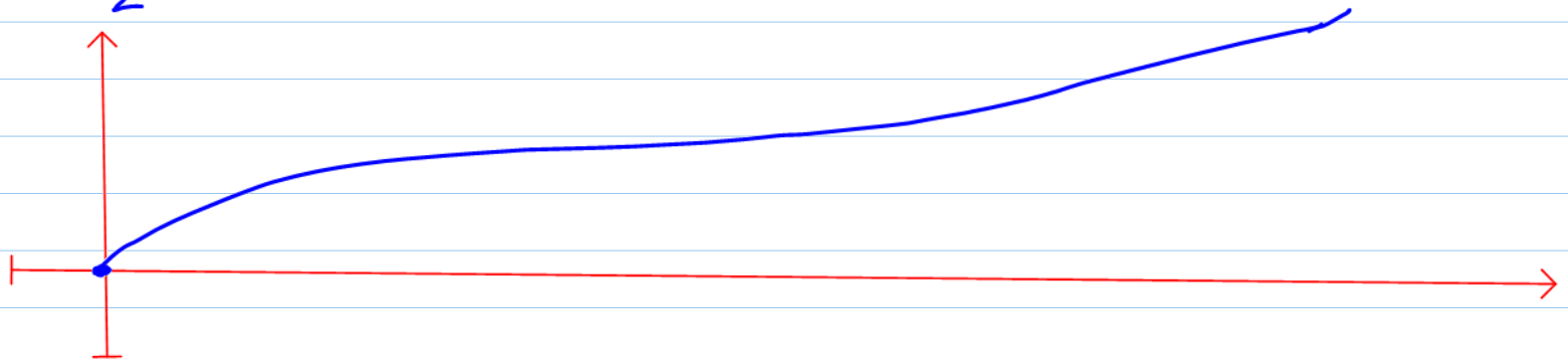


$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \rightarrow f(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$



$$F_2(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} e^{t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-t} u(t)$$

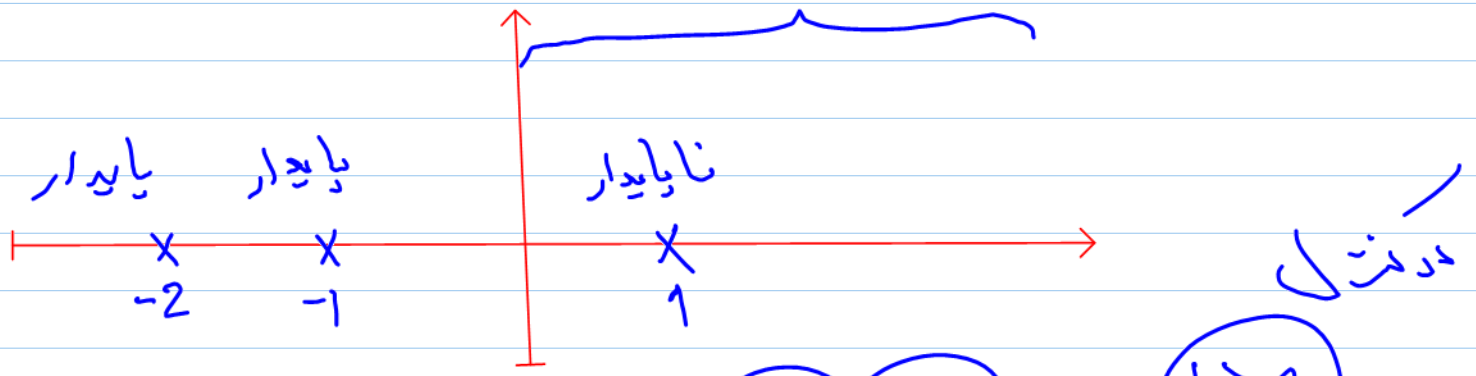


$\frac{1}{s-1}$ X

$\frac{1}{s+1}$ ✓

$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ ✓

$\frac{1}{(s-1)(s+2)}$ X



$X(s) = \frac{1}{s+a} \rightarrow x(t) = e^{-at}$ ~~u(t)~~

دو نتیجه

$t \geq 0$

$a = Re\{a\} + j\,Im(a)$ $\qquad a = 1 + j2$

$x(t) = e^{-(Re(a) + j\,Im(a))t}$

$= e^{-Re\{a\}t} \; e^{-j\,Im(a)\,t}$

$-1 \leq e^{j\,\omega t} \leq 1$

عددی بین ۱- و ۱

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$e^{j(-\mathrm{Im}(a))t} = \cos(-\mathrm{Im}(a)t) + j\sin(-\mathrm{Im}(a)t)$$

$$x(t) = e^{-\mathrm{Re}(a)t} \times \text{سینوسی با دامنه ۱}$$

$$e^{2t} \quad t=\infty \rightarrow e^{2\times\infty} = \infty$$

$$e^{-2t} \quad t=\infty \rightarrow e^{-2\times\infty} = e^{-\infty} = 0$$

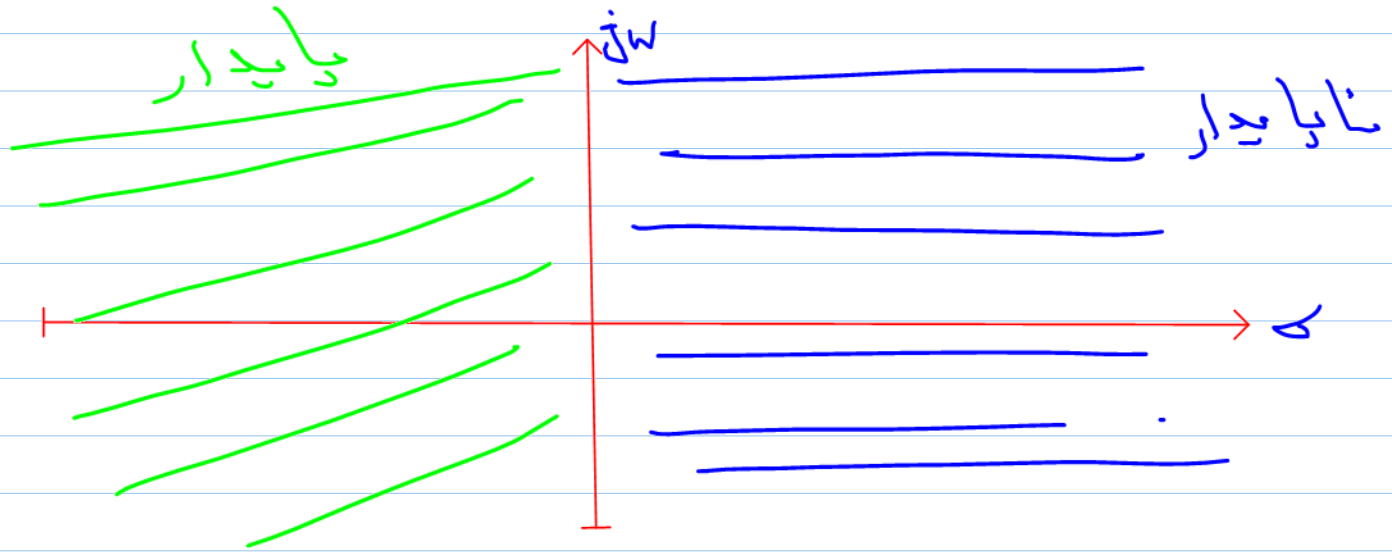
$$\begin{cases} -\mathrm{Re}(a) > 0 \rightarrow & x(\infty) = \infty \\ -\mathrm{Re}(a) < 0 \rightarrow & x(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(a) < 0 \rightarrow & \text{ناپایدار} \\ \mathrm{Re}(a) > 0 \rightarrow & \text{پایدار} \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \longrightarrow \begin{cases} -Re(a) > 0 & \text{ناپایدار} \\ -Re(a) < 0 & \text{پایدار} \end{cases}$$

$-a =$ قطب

$$\begin{cases} Re(-a) > 0 \longrightarrow Re(\text{قطب}) > 0 & \text{ناپایدار} \\ Re(-a) < 0 \quad Re(\text{قطب}) < 0 & \text{پایدار} \end{cases}$$

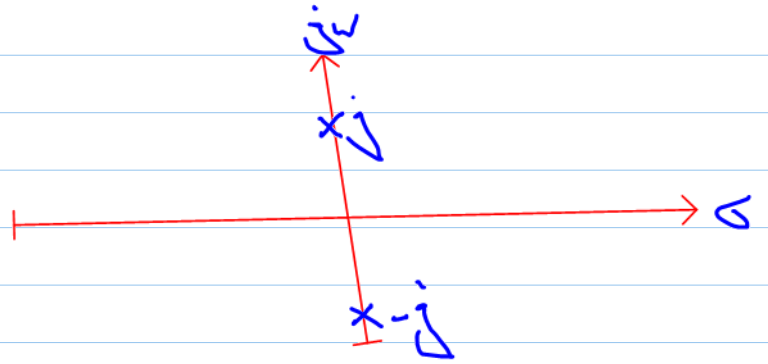


اگر قطب سیستم روی محور $j\omega$ باشد قطب ناپایدار

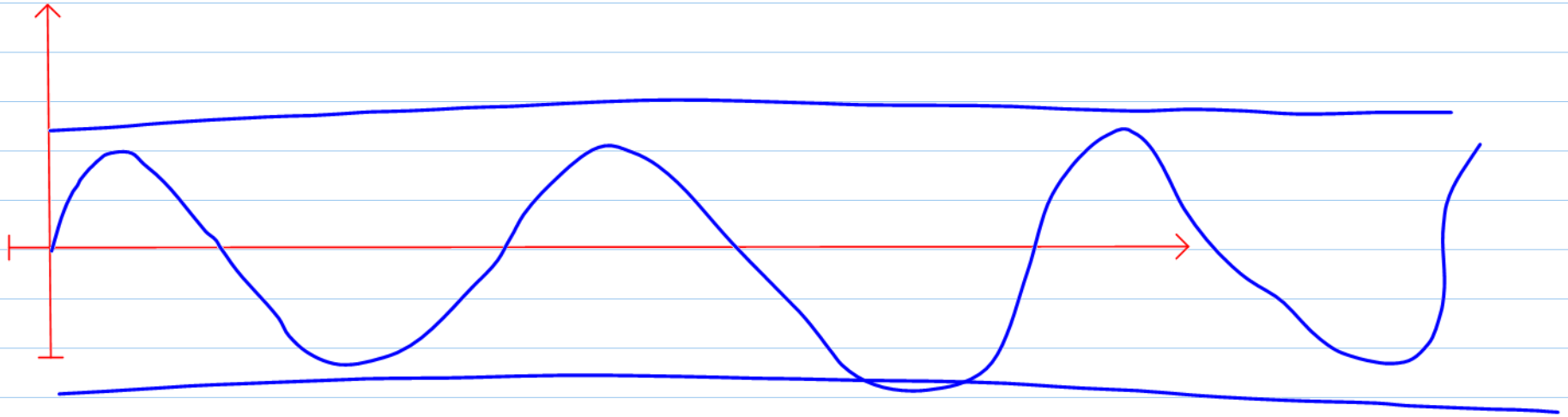
" " خیلی " " " پایدار

" " روی محور $j\omega$ باشد قطب نوسانی است.

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1}$$



$$x(t) = \sin(1t)$$



به این حالت ← نوسانی = مرز پایداری

اگر داشته خروجی سیگنال نوسانی با دامنه (نه صفر نه ∞) سیستم را نوسانی گوییم.

سوال: فرق کندانسور ناپایدار داریم. یعنی دور موتور ∞ میشود؟

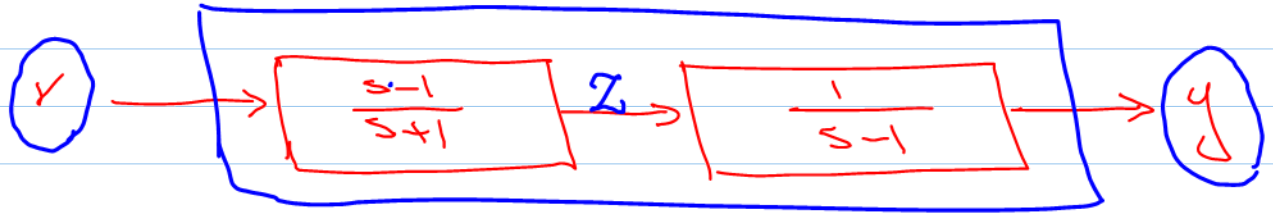
∞ در عمل یعنی از کار افتادن سیستم (نابود شدن)

تعریف پایداری:

① پایداری داخلی

② پایداری BIBO

تعریف پایداری BIBO: اگر به ازای هر ورودی محدود، خروجی سیستم محدود باشد پایدار BIBO است ← این نوع پایداری به داخل سیستم کاری ندارد و فقط به تابع تبدیل سیستم نگاه می‌کند.

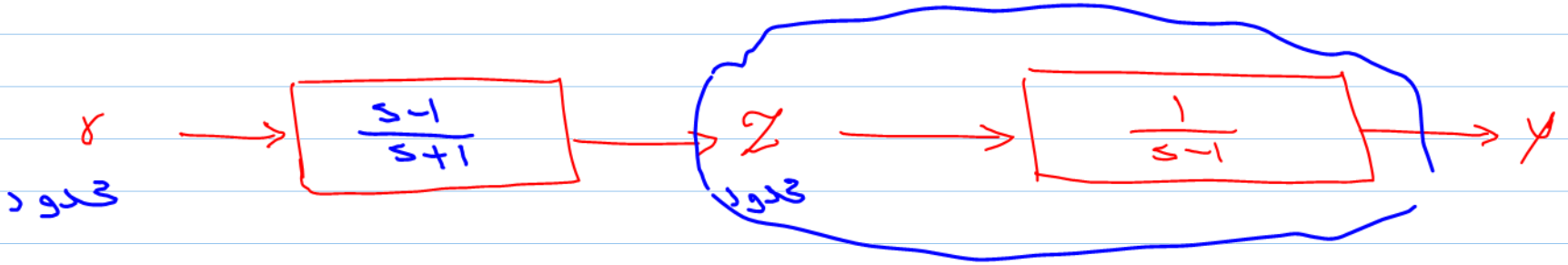


$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$s=-1$ قطب پایدار

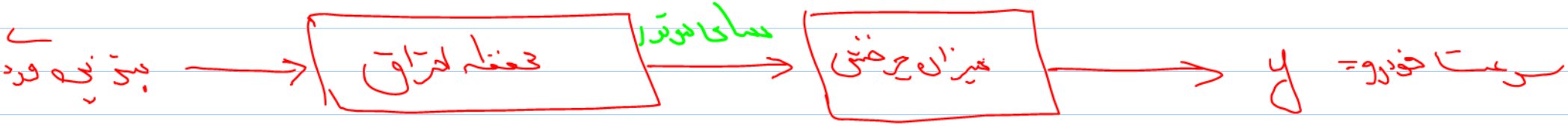
از نظر BIBO ← پایدار

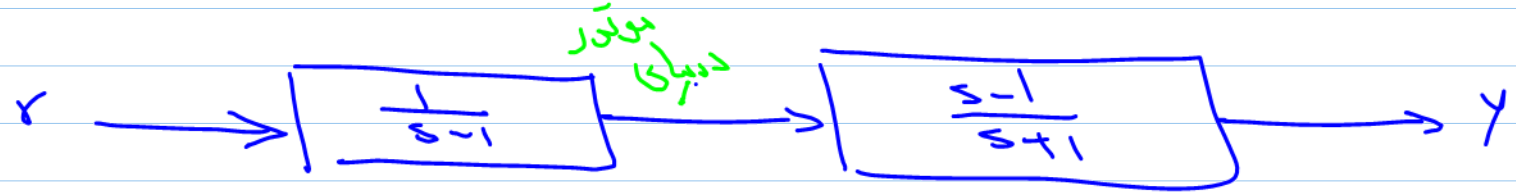
$$R(s)=1 \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} \qquad y(t) = e^{-t}u(t) \checkmark$$



$$\frac{y}{z} = \frac{1}{s-1} \qquad z=1 \rightarrow y(t) = e^{t}u(t)$$

ناپایدار





سرعت محدود ⟵ $\lim_{s\to\infty}$ ⟵ $r=1$ ⟵ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}$

در اثر ورود بنزین سایی موتور افزایش می‌یابد و بعد از مدتی باعث ناپایداری موتوری شود.

پایداری BIBO پایداری کاملی است چون از داخل سیستم اطلاعی ندارد.

پایداری داخلی: تمام متغیرهای مستقل داخل سیستم محدود باشند.

متغیر حالت

تمام متغیرهای حالت محدود باشند.

پایداری داخلی شامل پایداری BIBO هم می‌شود.

پایدار داخلی ⟵ پایدار BIBO

* پایدار داخلی یعنی تمام قطبها (قبل از حذف صفرها) سمت چپ محور باشند

$$\frac{Y}{R} = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

ماتریس حالت

$\det(sI - A) = 0$ ← ریشه‌های این معادله تمام قطبها (شامل قطبهای ساده شده) را نشان می‌دهد.

$\det(sI - A) = 0$ ⟵ { قطبهای تابع تبدیل
قطبهای ساده شده با هم‌صفرها }

$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{s+1} \times \frac{s+2}{s+2} = \frac{1}{s+1}$$

*

نکته: پایداری BIBO در صورتی که صفرو قطب سیستم هدف شود دیگر پایداری داخلی هم هست.

* حذف صفرو قطب سیستم باعث ناپایداری می شود.

* از این به بعد پایداری BIBO منظور است مگر اینکه صفرو قطب حذف نمی شوند داشته باشیم.

شرایط پایداری:

پایداری فقط باتوجه قطبها بیان می شود. ← معادله مشخصه (مخرج تابع تبدیل)،

Δ ، $\det(sI-A)$

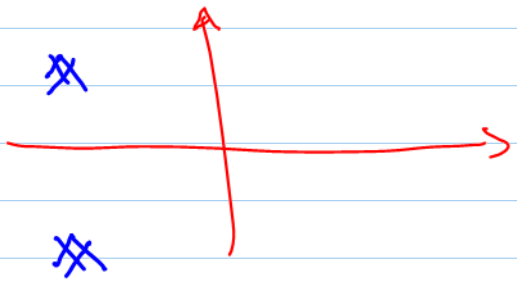
انواع قطبها:

① قطبهای پایدار: قطبهای سمت چپ محور اس ، یعنی حقیقی قطب منفی باشد.

② قطبهای نوسانی: قطبهای روی محور $j\omega$ (موهومی محض) که تکراری نباشند.

③ ناپایدار: قطبهای سمت راست محور $j\omega$ یا قطبهای تکراری روی محور $j\omega$

$$s = \begin{cases} 2 & ③ \\ -2 & ④ \\ -2+j \\ -2-j \end{cases} \quad ①$$



$$s = \begin{cases} 2 \pm j & ③ \\ -2 & ① \\ +j\sqrt{5}, +j\sqrt{5} & ③ \\ -j\sqrt{5}, -j\sqrt{5} & ③ \end{cases}$$



انواع پایداری:

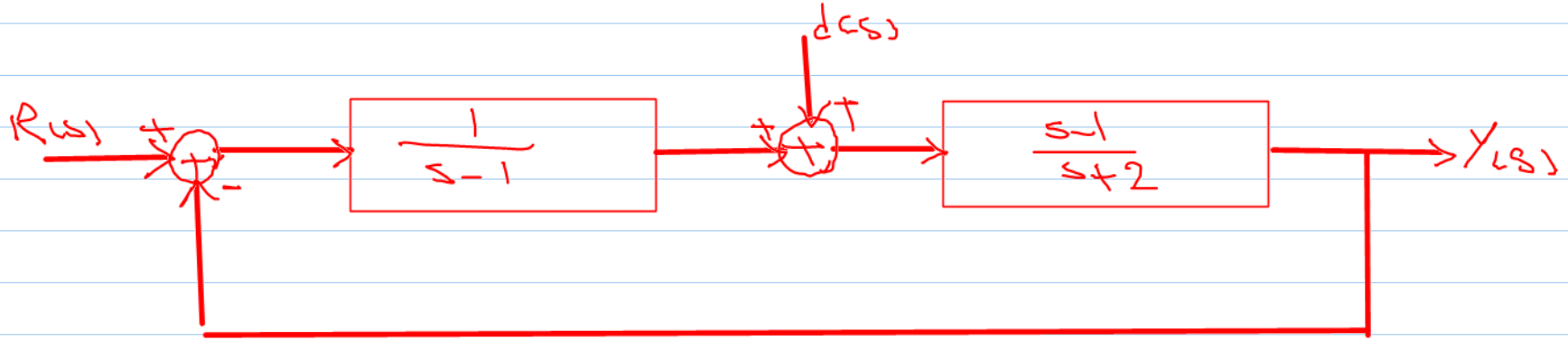
① پایدار مجانبی: اگر عام قطبها از نوع پایدار باشند.

② پایدار مرزی: عام قطبها از نوع پایدار یا نوسانی باشد.

③ ناپایدار: حداقل یک قطب از نوع ناپایدار داشته باشد.

مسئله ۷۱: سیستم حلقه بسته زیر جزو کدام سیستم است؟

۱) پایدار ۲) ناپایدار ۳) پایدارمرزی ۴) بستگی به ورودی $d(s)$ دارد.



نکته: پایداری سیستم یک مشخصه ذاتی است و ربطی به ورودی و خروجی سیستم ندارد.

$\Delta(s)$ = ؟ — Δ دیجیتال به ورودی او فزونی ندارد.

$$\Delta(s) = 1 - \left(\frac{1}{s-1} \times \frac{s-1}{s+2} \times -1 \right)$$

سیستم ناپایدار ← ناپایداری ← حذف صفر و قطب مثبت رابت

$$\Delta(s) = 1 + \frac{1}{s+2} = 0 \rightarrow \frac{s+2+1}{s+2} = 0 \rightarrow \boxed{s = -3}$$

قطب سیستم

قطب از نوع پایدار ستها حذف صفر و قطب مثبت رابت باعث ناپایداری می شود.

در عل $\Delta(s)$ با معادله مشخصه دارای درجه بالاتر از 2 است.

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$$

قطب $= -\frac{1}{10}$ قطب $= -10$

برای پایداری نیاز داریم فقط بتوانیم که ریشه های $\Delta(s)$ سمت چپ

یا راست یا روی محور $j\omega$ هستند یا نه؟

حل حدودی ریشه های $\Delta(s)$ نسبت به محور $j\omega$

جدول روث - هورویتز RH