جلسه ۲۵ کنترل خطی

فصل چهارم: تحلیل حالت ماندگار

یادآوری: قضیه مقدار نهایی:

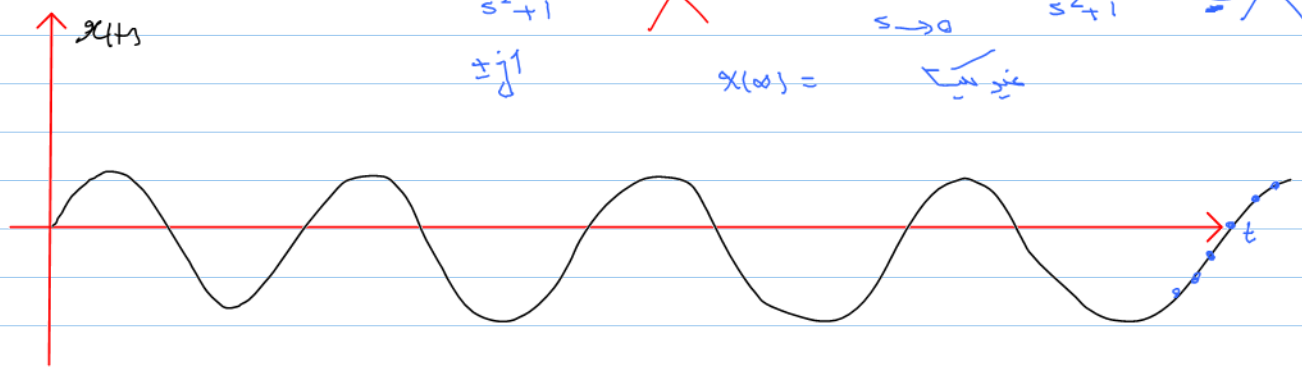
اگر $x(t)$ سیگنال پوسانی یا ناپایدار نباشد آنگاه داریم:

$$x(t)\Big|_{t=\infty} = \lim_{s\to 0} s\,X(s)$$

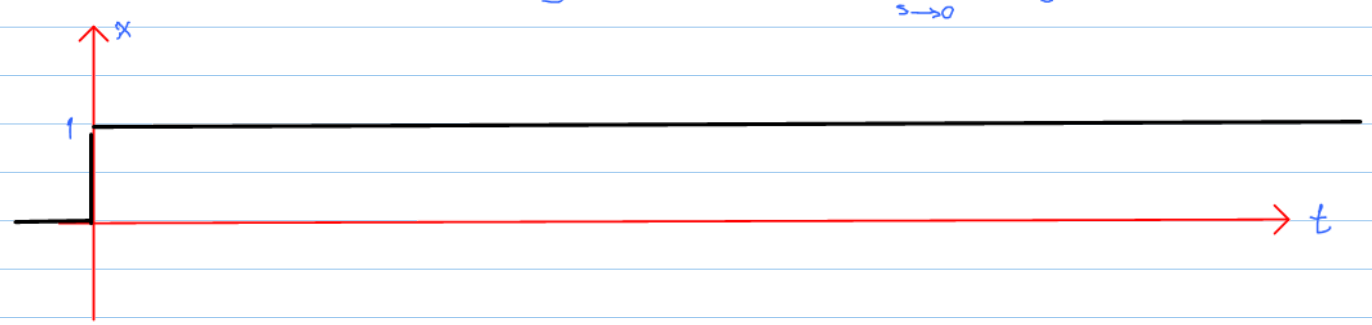
$x(t)$ $\quad x(\infty)$ $\quad X(s)$

$x(t) = \sin(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s^2+1}$ $\quad \pm j1$ $\quad$ ✗ $\quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2+1} = 0$ ✗

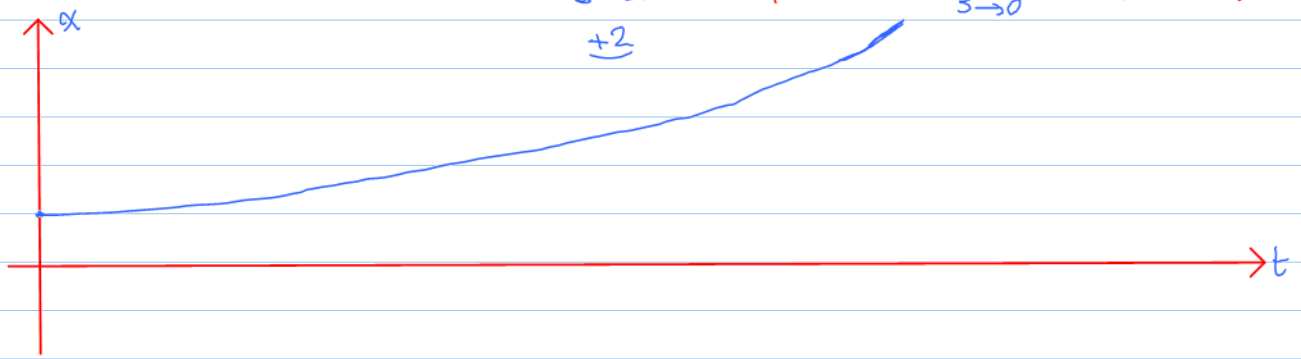
$x(\infty) =$ غیر ممکن

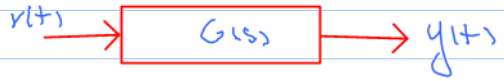


$x(t) = u(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s}$ $\quad x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s} = 1$ ✓

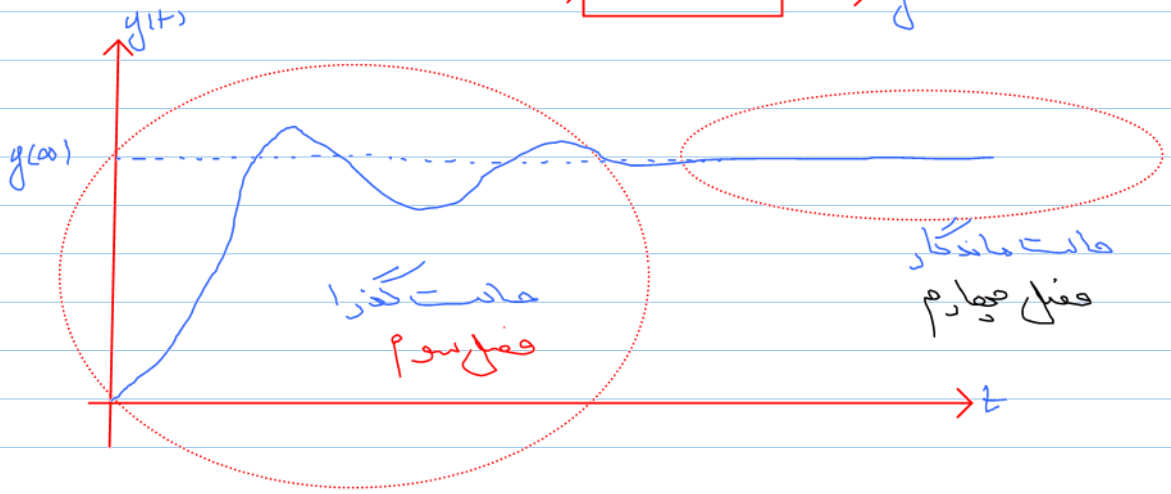


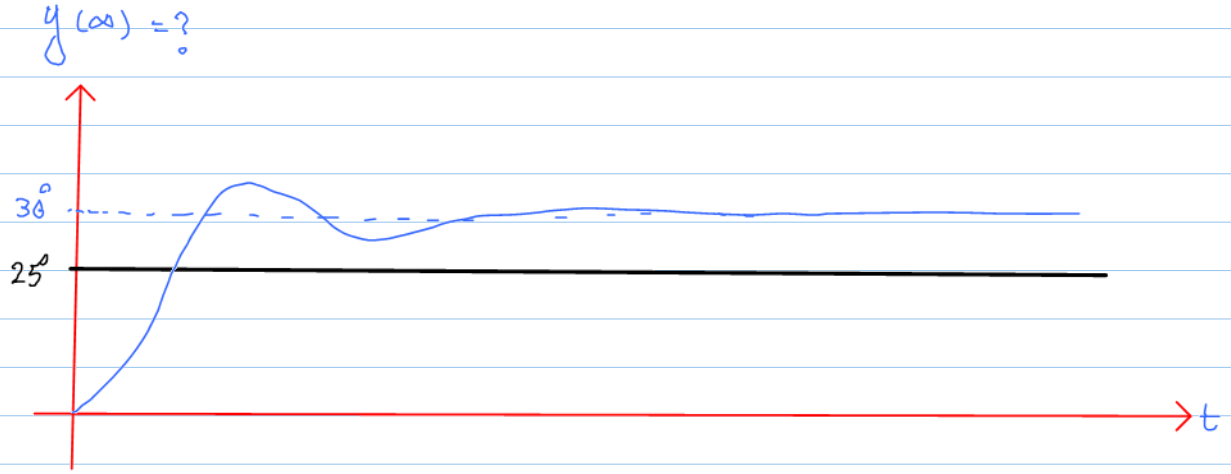
$x(t) = e^{2t}u(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s-2}$ $\quad +2$ $\quad$ ✗ $x(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s-2} = 0$ ✗





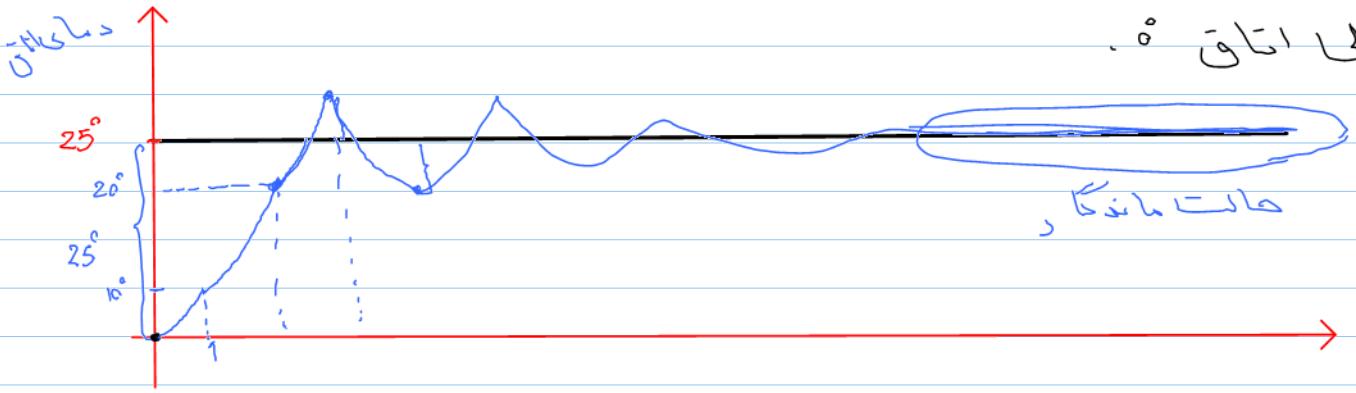
حالت ماندگار

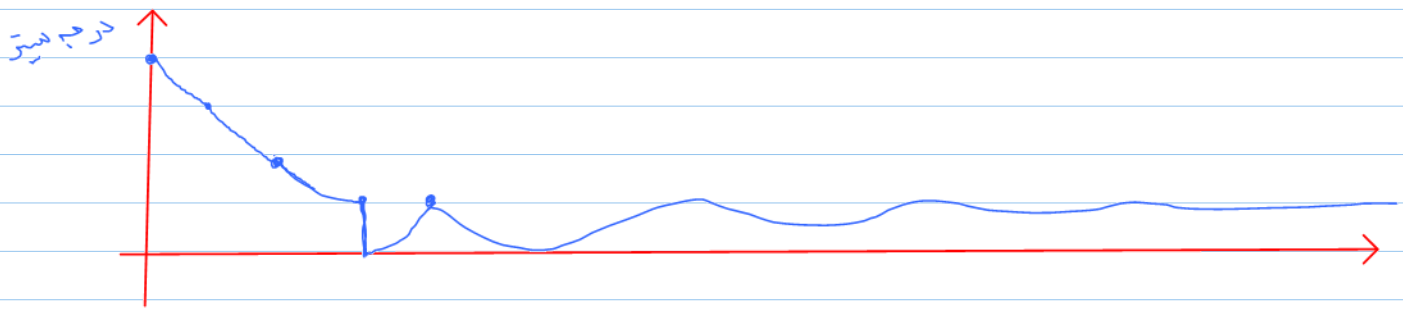


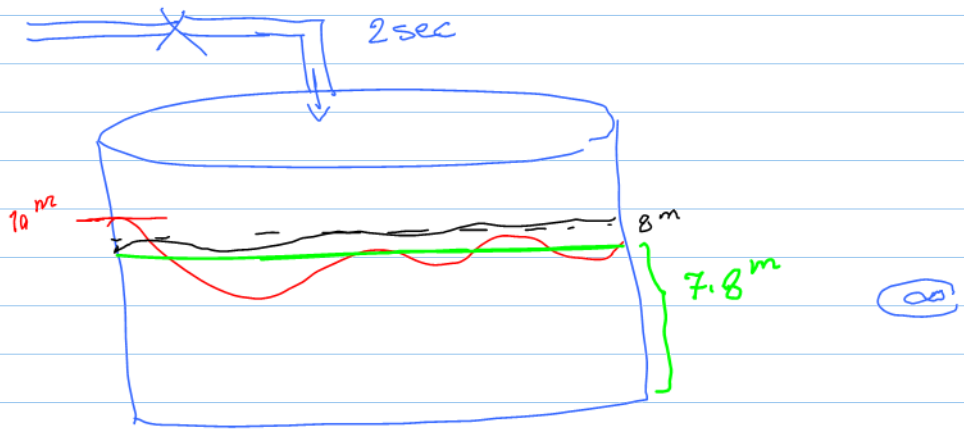


هدف: بازوشن کردن سیر فضای اتاق را به دمای 25° برسانیم.

دمای فعلی اتاق 0°.





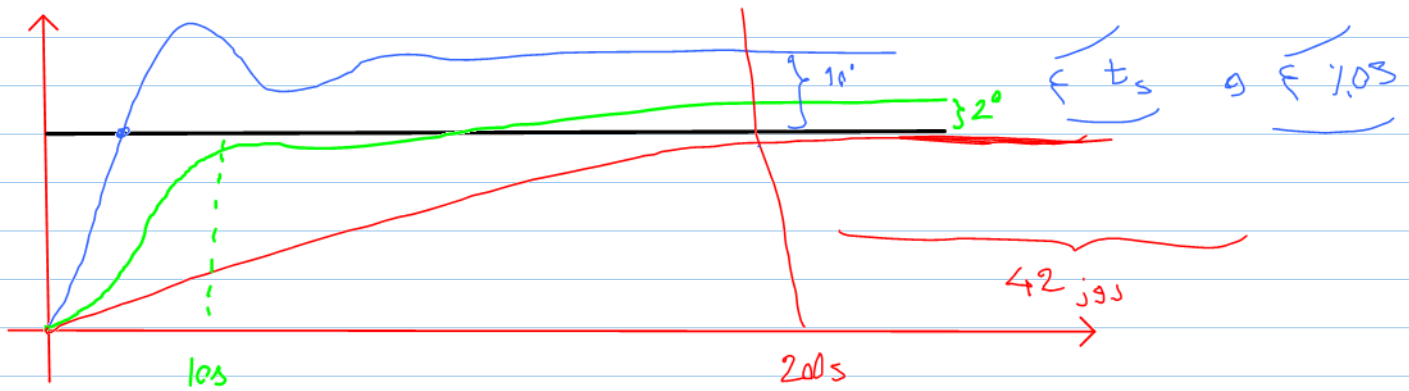


در کنترل فقط حالت ماندگار را با $t=\infty$ مثال می‌دیم.

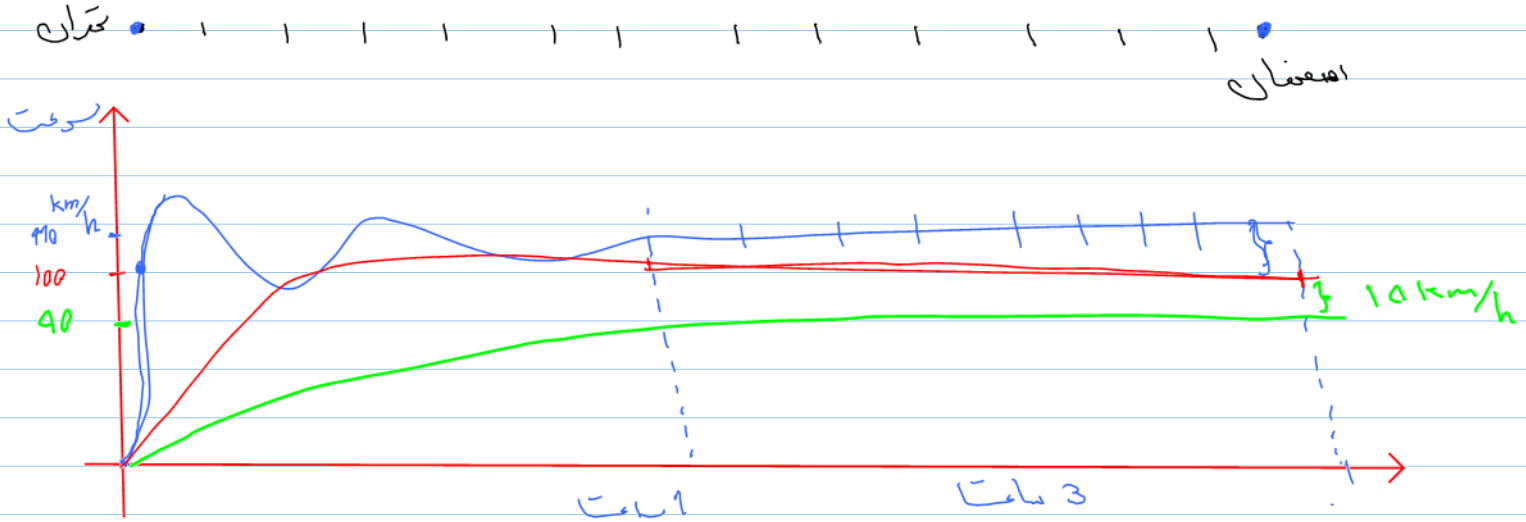
هدف اول کنترل دمایی یا سطح در حالت ماندگار به ورودی مطلوب است.

مثال: مرغداری سه دما را کنترل کنید.

$T=27^\circ C$ عالی $T=30^\circ$ جوجه‌هایی $T=23^\circ C$ جوجه‌هایی

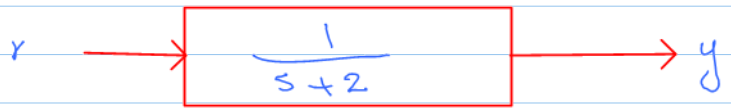


مثال: راننده‌ای یک اتوبان با حداکثر سرعت مجاز 100km/h



جامع حالت ماندگار – ورودی سهموی = خطای ماندگار

$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad e(\infty) = e_{ss}$

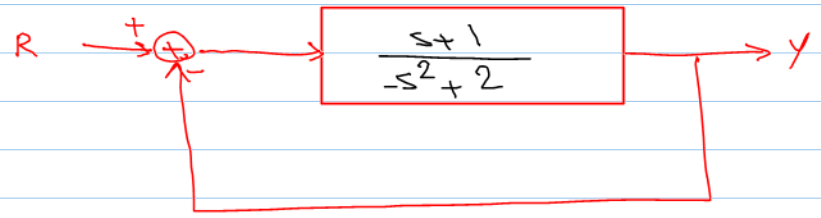


$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad e_{ss} = ?$ $\qquad r(t) = u(t)$

$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - R(s)\frac{1}{s+2}$

$E(s) = R(s)\left(1 - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s+1}{s+2}\right) \rightarrow$ قطبها $\begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\,\frac{s+1}{s+2} = \frac{1}{2}$



$e(t) = r(t) - y(t)$ $\qquad e_{ss} = ?$

$E(s) = R(s) - Y(s)$ $\qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{-s^2+s+3}$

$E(s) = R(s) - R(s)\frac{s+1}{-s^2+s+3}$

$E(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{-s^2+2}{-s^2+s+3}\right)$

$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\,\frac{-s^2+2}{-s^2+s+3} = \frac{2}{3}$ ✗

$E(s)$ قطبها: $\Delta(s) = -s^3 + s^2 + 3s = 0$

قطعاً $E(s)$ ناپایدار ← قطب سمت راست دارد. ← $e(\infty) = \infty$

نکات خیلی مهم:

1. اگر سیستم ناپایدار باشد پاسخ حالت دائمی و خطای ماندگار به هر ورودی ای ∞ است.

اگر در گزینه ها، ∞ دیدید اول پایداری سیستم حلقه بسته را چک کنید (با روش R-H)

2. به خطای تعریف شده در صورت سؤال دقت کنید.

اگر در صورت سؤال خطا را تعریف نکند، $e(t) = r - y$ منظور بود.

3. برای محاسبه e_{ss}، اول خطای تعریفی در صورت سؤال را مشخص کنید و سپس خطای شکل را هم تعیین کنید.

روش حلقه باز ← خطای شکل = خطای تعریفی

" حلقه بسته ← " " ≠ " "

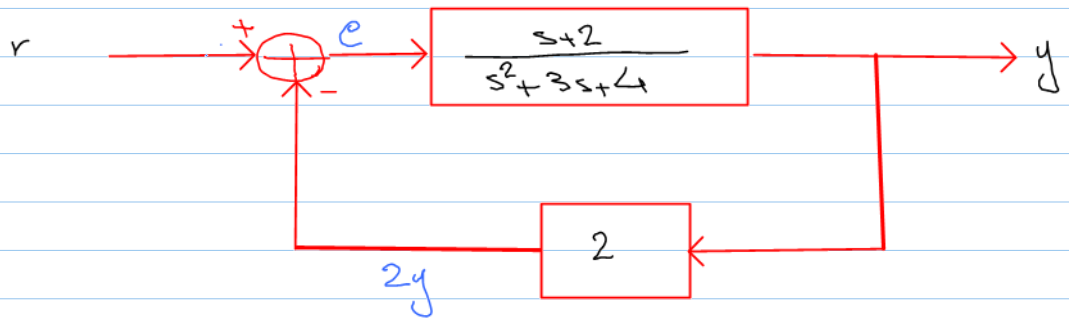
روش محاسبه خطای حالت ماندگار

1. روش حلقه بسته ← از این روش فقط وقتی که خطای تعریفی ≠ خطای شکل باشد استفاده می‌کنیم.

$e(t)$ ← خطای تعریفی

$E(s)$ ← تبدیل لاپلاس ← برحسب ورودی

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$



در سیستم فوق خطای ماندگار چقدر است؟

① بررسی پایداری → $\Delta(s) = 1 + 2\,\frac{s+2}{s^2+3s+4} = 0$

$\Delta(s) = s^2 + 5s + 8 = 0$

$\Delta(s)$ پایدار ✓

② خطای تعریفی $= r - y$

≠

خطای شکل $= r - 2y$ → روش حلقه بسته

③ $e(t) = r(t) - y(t)$

$E(s) = R(s) - Y(s)$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{s^2+5s+8}$

$E(s) = R(s) - R(s)\,\frac{s+2}{s^2+5s+8}$ $\qquad r(t) = u(t)$

$E(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{s+2}{s^2+5s+8}\right)$

$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s}\left(1 - \frac{s+2}{s^2+5s+8}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

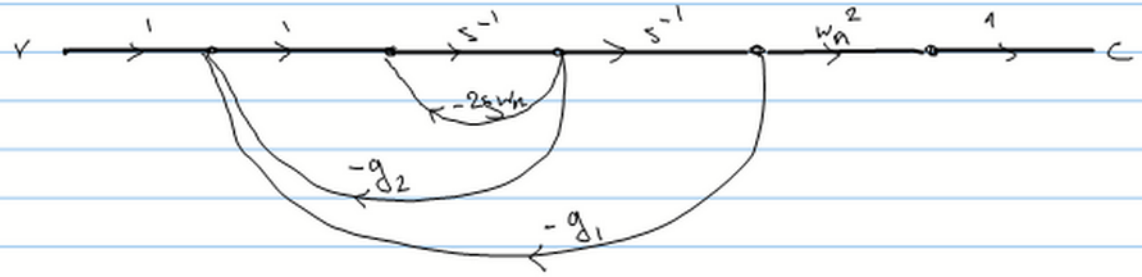
تست ۷۸. در سیستم مرتبه دوم زیر، به ازای کدام مقادیر g_1 و g_2 خطای حالت ماندگی به ورودی شیب واحد برابر صفر می شود؟

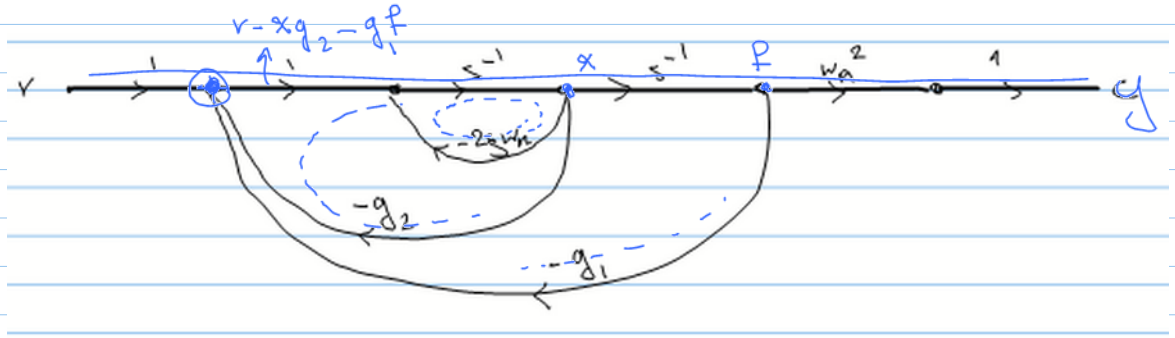
1) $g_1=g_2=\omega_n^2$

2) $g_1=\omega_n^2$, $g_2=\frac{\omega_n}{2\xi}$

3) $g_1=\omega_n^2$, $g_2=\frac{2\xi}{\omega_n}$

4) هیچ مقداری صفر نمی شود.





① $\Delta(s) = ?$

$$\Delta(s) = 1 - \left(-2\xi w_n \frac{1}{s} + -g_2 \times 1 \times \frac{1}{s} + -g_1 \times 1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}\right)$$

$$\Delta = 1 + \frac{2\xi w_n}{s} + \frac{g_2}{s} + \frac{g_1}{s^2} = 0$$

$$= s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1 = 0$$

بشرط $g_1 > 0$ ، $g_2 + 2\xi w_n > 0$ سیستم پایدار است. ✓

② حطای تقریبی $= r - y$

$\neq$

حطای شکل $= r - g_2 x - g_1 f$ $\longrightarrow$ حالت بسته

③ $e(t) = r - y$ $\qquad E(s) = R(s) - Y(s)$

$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$

$$P_1 = 1 \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times w_n^2 \times 1 = \frac{w_n^2}{s^2} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{w_n^2}{s^2} \times 1}{\frac{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}{s^2}} = \frac{w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}$$

$$E(s) = R(s) - R(s) \frac{w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}$$

$R(s) = \frac{1}{s^2}$ $\quad r(t) = t\,u(t) \quad$ = ورودی

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}\right) =$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1 - w_n^2}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}\right)$$

حد: $e_{ss} = 0 \qquad g_1 = w_n^2$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s}{s^2 + (g_2 + 2\xi w_n)s + g_1}\right) = \frac{g_2 + 2\xi w_n}{w_n^2}$$

w_n^2

$e_{ss} = 0 \longrightarrow$ $\boxed{g_2 = -2\xi w_n}$

$\left.\begin{array}{l} g_1 = w_n^2 \\ g_2 = -2\xi w_n \end{array}\right\} \longrightarrow$ ~~$e_{ss} \neq 0$~~ $\qquad \boxed{e_{ss} = \infty}$

شرط پایداری: $\left\{\begin{array}{l} g_1 > 0 \\ g_2 > -2\xi w_n \end{array}\right.$

اگر بخواهیم خطا صفر شود باید $g_1 = w_n^2$ ، $g_2 = -2\xi w_n$ شود ولی این مقادیر سیستم را از پایداری خارج میکند و خطا غیر صفر میشود.

ناپایدار $\longrightarrow$ $e_{ss} = \infty$

پایدار $\longrightarrow$ غیر صفر $e_{ss} =$