جلسه 22 سیگنال

* وقتی که یک سری خاصیت سیستم را وابعد و یک ورودی مشخص و خروجی مشخص را می دهد ولی پاسخ ضربه یا مشابه سیستم را نمی دهد، و در نهایت پاسخ سیستم به ورودی جدیدی را می خواهد.

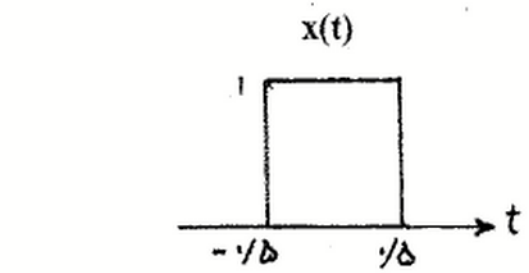
باید با استفاده از خواص سیستم عملیات مجاز را مشخص کنیم و با عملیات مجاز، ورودی دوم و اول را به هم ربط دهید، یعنی از ورودی اول به ورودی دوم یا برعکس برسید و همین عملیات را روی خروجی هم اعمال کنید.

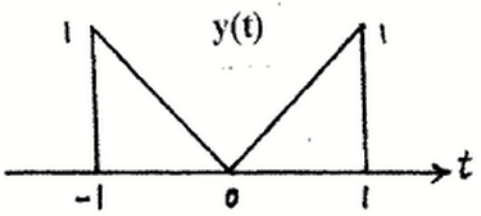
خطی ← ضرب عدد
جمع دو سیگنال

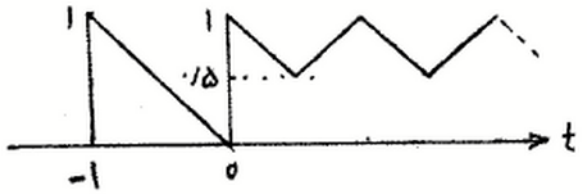
T ← شیفت زمانی

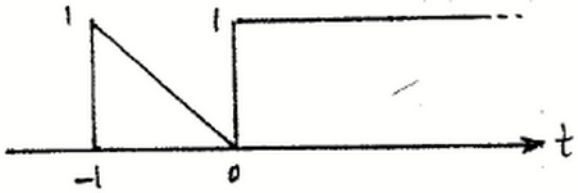
بدون حافظه ← عملیات ندارد و مفهوم حافظه باید استفاده شود.

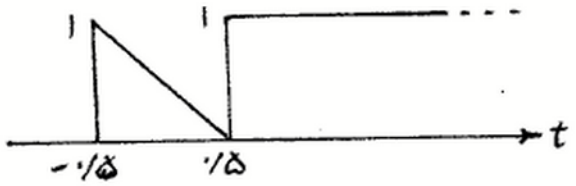
۲۰- $y(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ است (به شکل توجه کنید). کدام گزینه پاسخ پله این سیستم را به دست می‌دهد؟ برق ۸۸

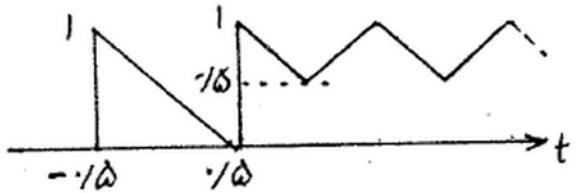




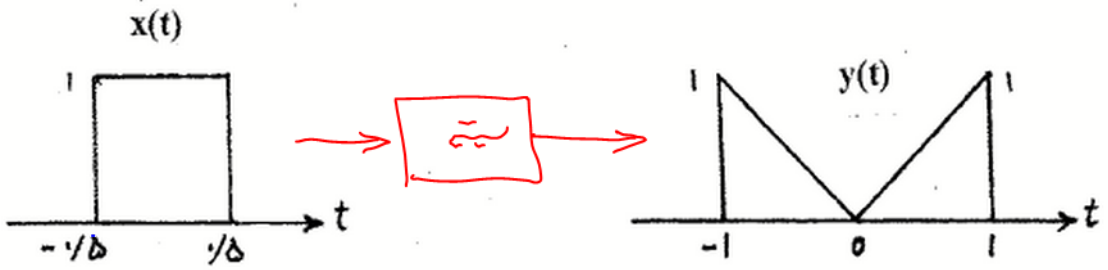
۱)


۲)


۳)


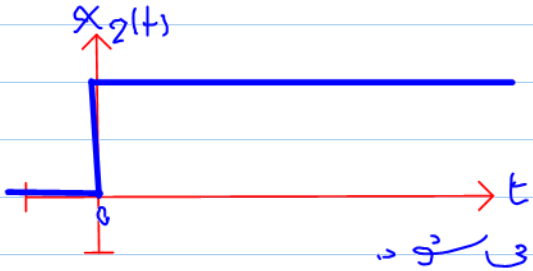
۴)


خواص سیستم LTI



خطی ←

LTI



سیستم → $y_2(t) = ?$

خطی ← ① اگر ورودی در عددی ضرب شود خروجی هم در آن عدد ضرب می‌شود.

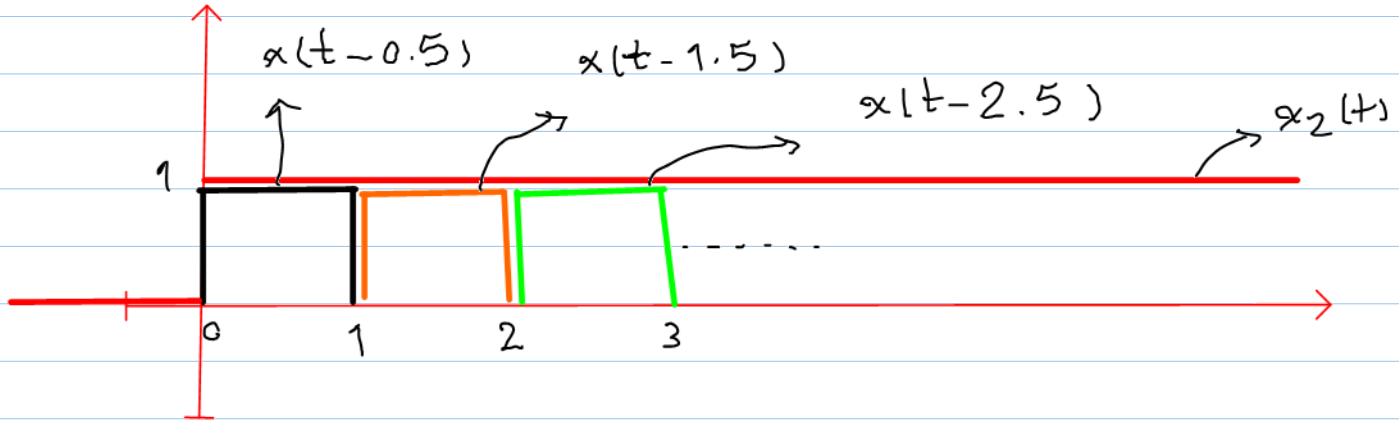
$ax(t) \longrightarrow ay(t)$

② اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند، خروجی آن‌ها با هم جمع می‌شوند.

LTI ← اگر ورودی را شیفت دهیم خروجی هم همان اندازه شیفت خواهد یافت.

$x(t) \longrightarrow y(t)$

$x(t-b) \longrightarrow y(t-b)$

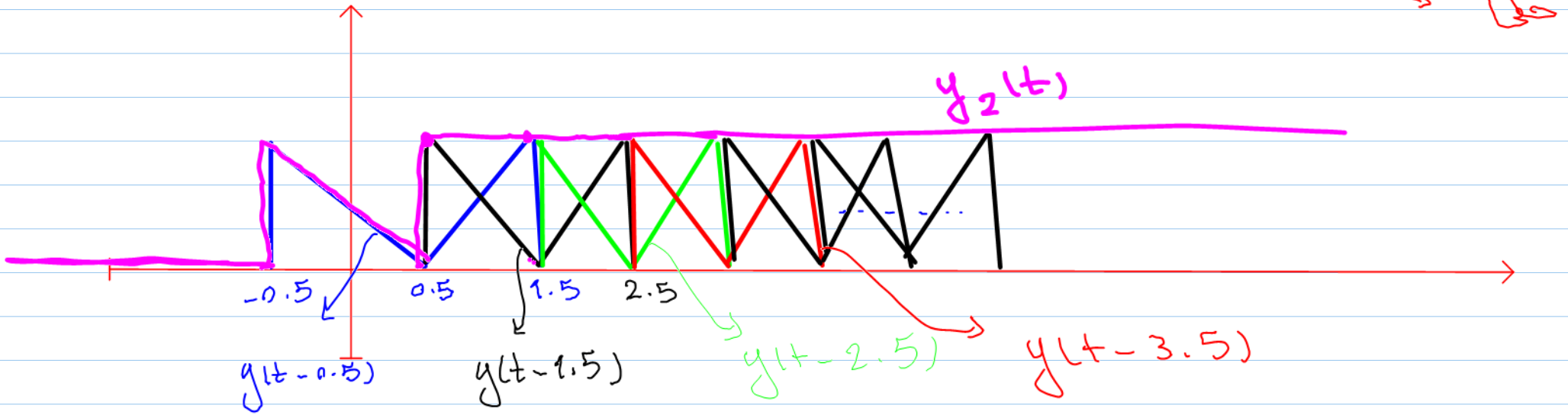


$$x_2(t) = x(t-0.5) + x(t-1.5) + x(t-2.5) + x(t-3.5) + \dots$$

خاصیت TI

$$y_2(t) = y(t-0.5) + y(t-1.5) + y(t-2.5) + y(t-3.5) + \dots$$

خطا



۲۴ ـ پاسخ یک سیستم زمان گسسته خطی بدون حافظه به ورودی $x_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$ برابر است با $y_1[n] = 2\delta[n-1]$. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ کدام یک از جواب‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) $y_2[n] = -\delta[n-1]$ ۲) $y_2[n] = \delta[n-1]$ ۳) $y_2[n] = 2\delta[n-2]$ ۴) $y_2[n] = -2\delta[n-2]$

$x_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] \longrightarrow y_1[n] = 2\delta[n-1]$ حقا و بدون حافظه

$x_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2] \longrightarrow y_2[n] = ?$

$a x_1[n] \longrightarrow a y_1[n]$ ① خطی ←

② اگر دو تا ورودی را با هم جمع کنیم خروجی‌هایشان با هم جمع می‌شوند.

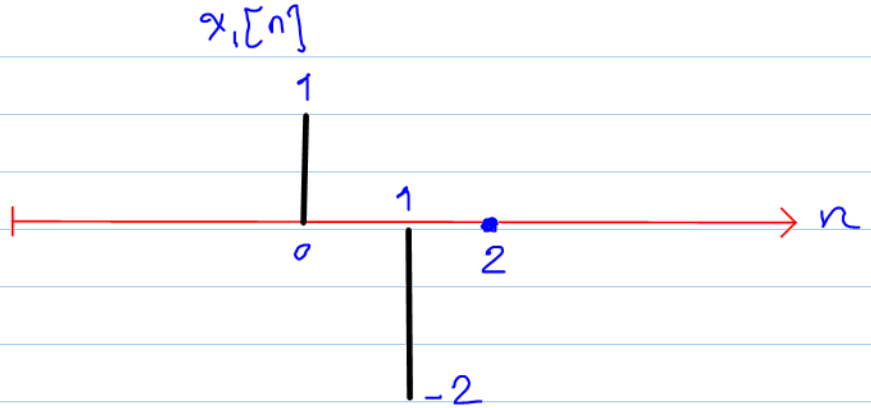
بدون حافظه.

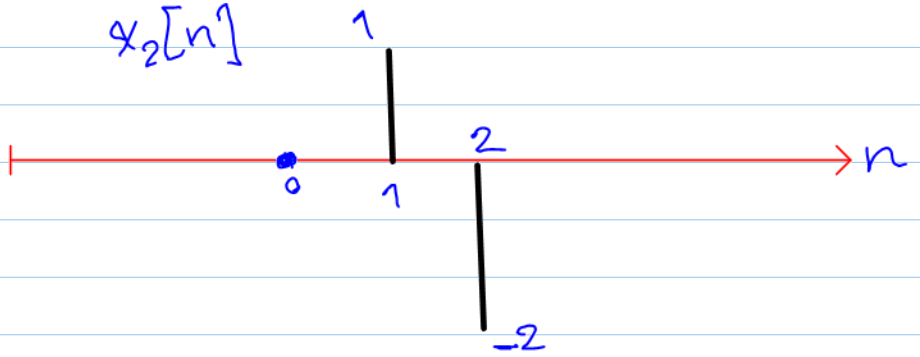
$x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ ✓

نکته TI ✗

اشتباه رایج ← ✗

$y_2[n] = y_1[n-1] = 2\delta[n-2]$



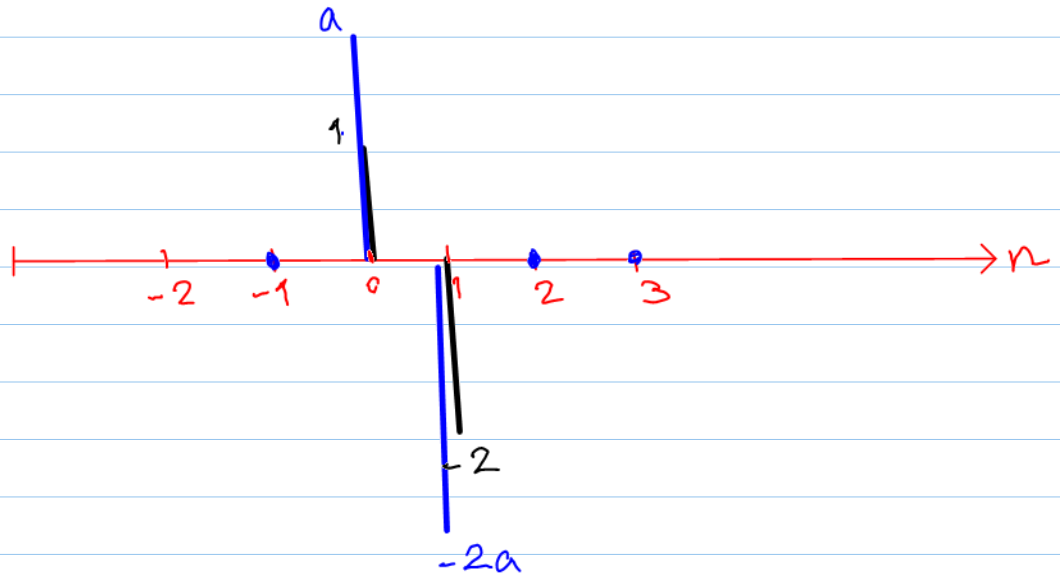


عملیات خطی ← خطا

حتا ورودی که خروجی آن خطا مستقل است را باهم جمع کنیم تا ورودی x_2 ساخته شود

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n]$$

$$a x_1[n] \longrightarrow a y_1[n]$$



بدون حافظه ← سیستم در هر لحظه $n=b$ فقط به مقدار ورودی در آن لحظه نگاه می‌کند.

اگر در لحظه $n=0$ ، عدد $1a$ را ببیند

سیستم

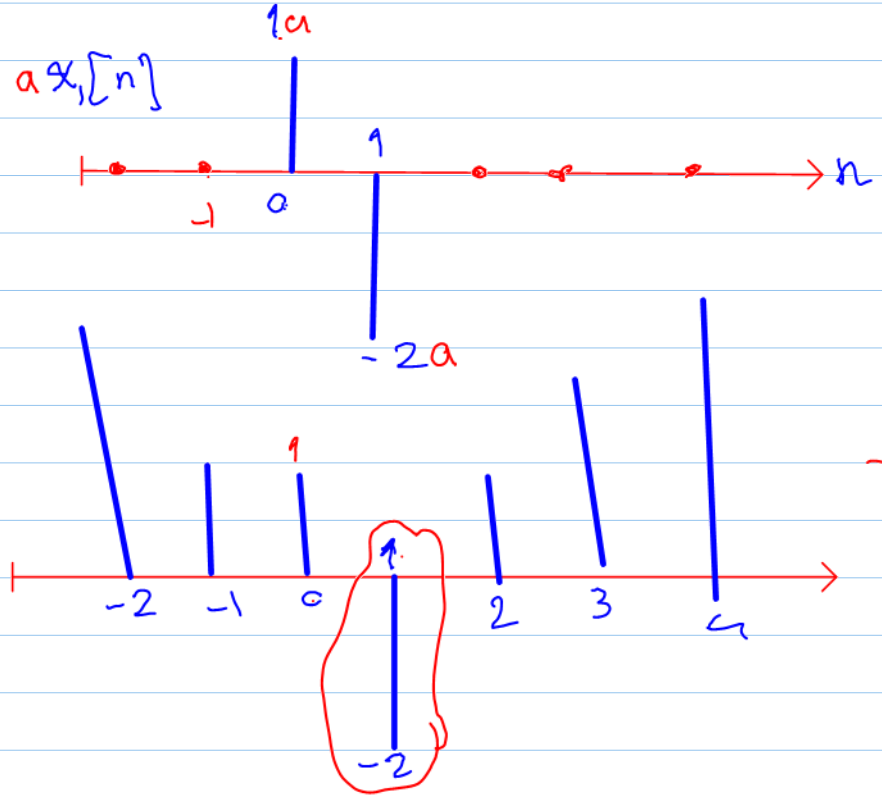
خروجی در $n=0$ برابر a است

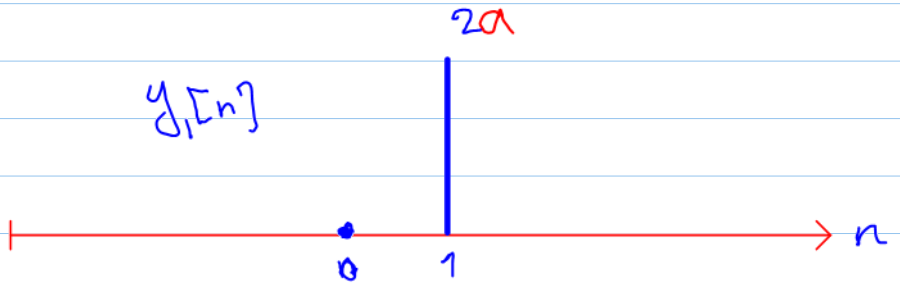
۱

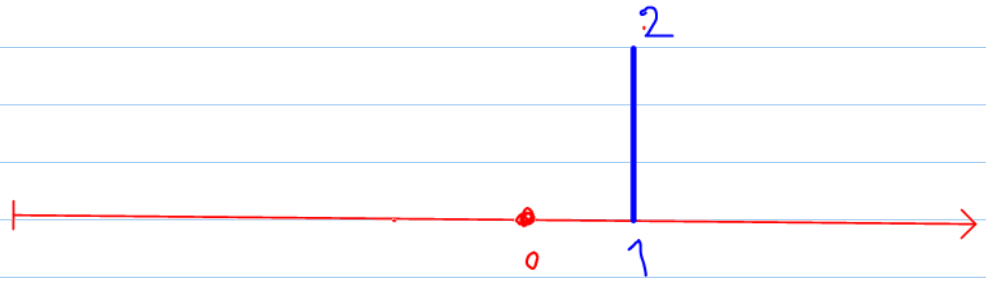
$-2a$ عدد $n=1$ را ببیند

سیستم

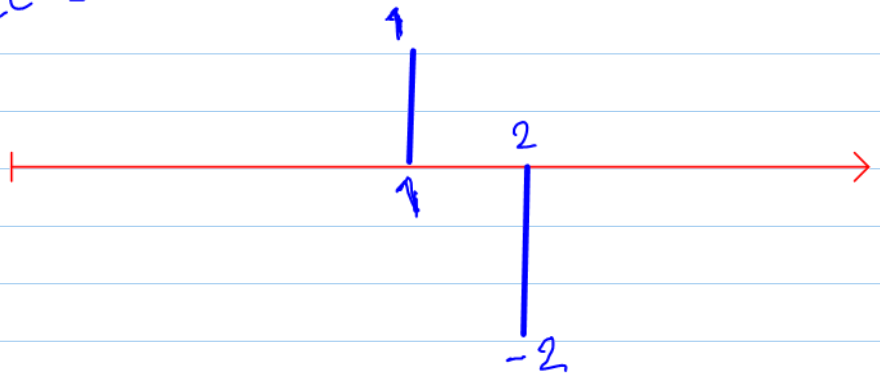
خروجی در $n=1$ برابر $2a+$ است.

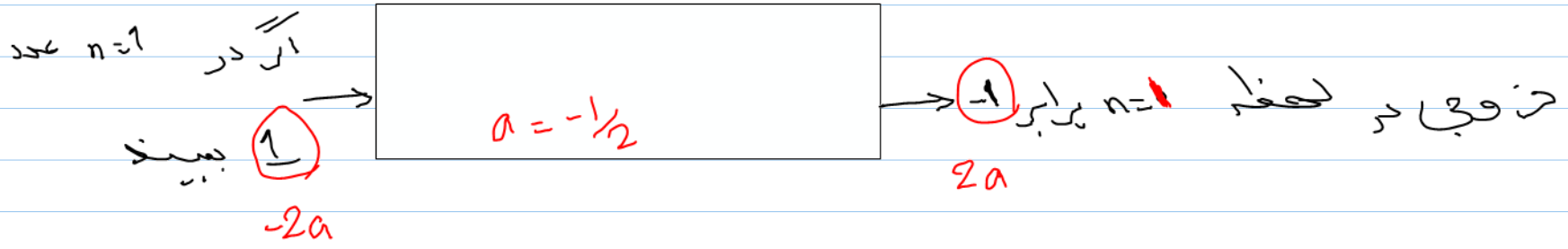






$x_2[n]$





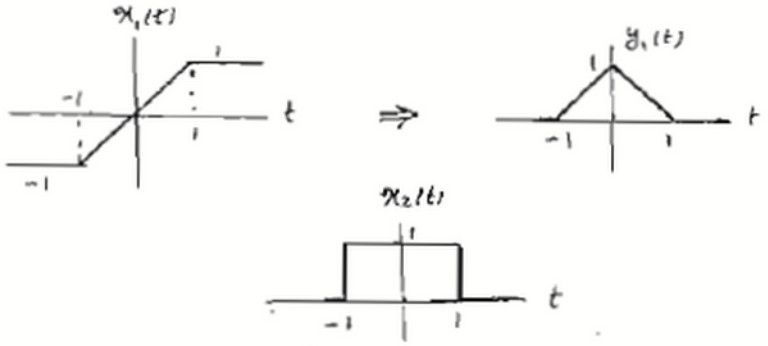
اگر در $n=1$ عدد 1 بیندازیم

در لحظه $n=1$ برابر -1 خواهد بود

پس متوجه میشویم که y_2 در لحظه $n=1$ برابر -1 است.

y_2 در لحظه $n=2$ ؟ ← همین طور که توانستید حدس بزنید

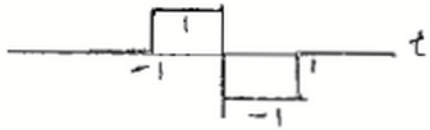
۱۹- پاسخ یک سیستم بدون حافظه تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ چیست؟



۱) 

۲) 

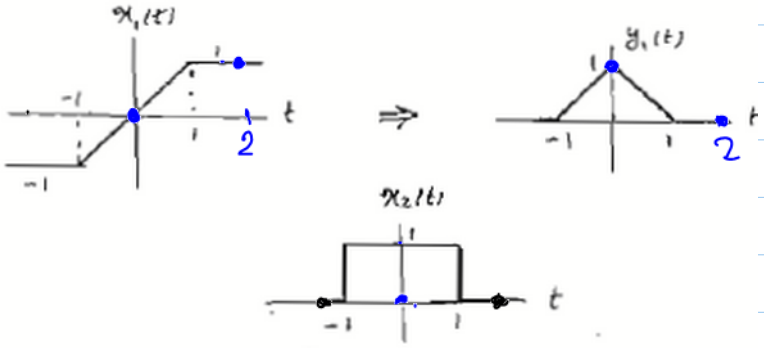
۳) 

۴) 

خواص سیستم:

TI ← سیستم

بدون حافظه ← معکوس



خروجی در لحظه $t=a$ برابر است با ← سیستم ← اگر در لحظه $t=0+a$ عدد ۵ بیندازیم

(فرعدی) (فرعدی)

خروجی در لحظه $t=2+b$ برابر است با ← سیستم ← ۵ را در لحظه $t=2+b$ عدد بیندازیم

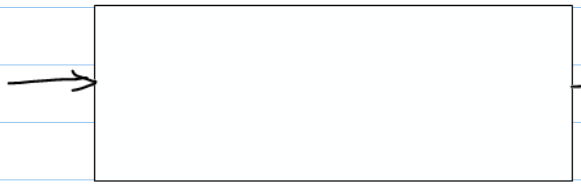
معکوس سیستم ← یعنی هر زمان را می‌توان با هر عددی جمع کرد (هم در ورودی هم در خروجی)

ط هر عددی می‌توانیم بیندازیم $2+b$ هر عددی می‌توانیم.

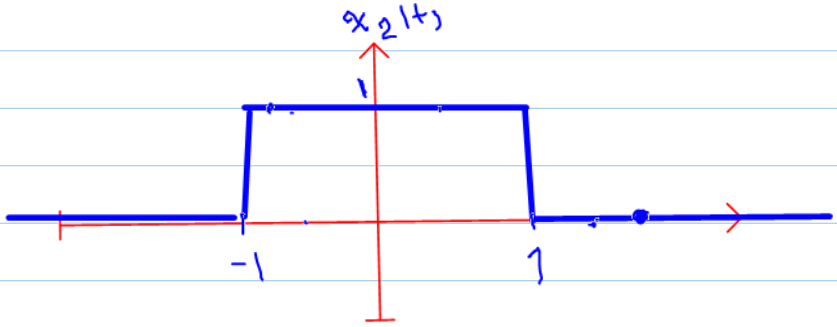
هر عددی

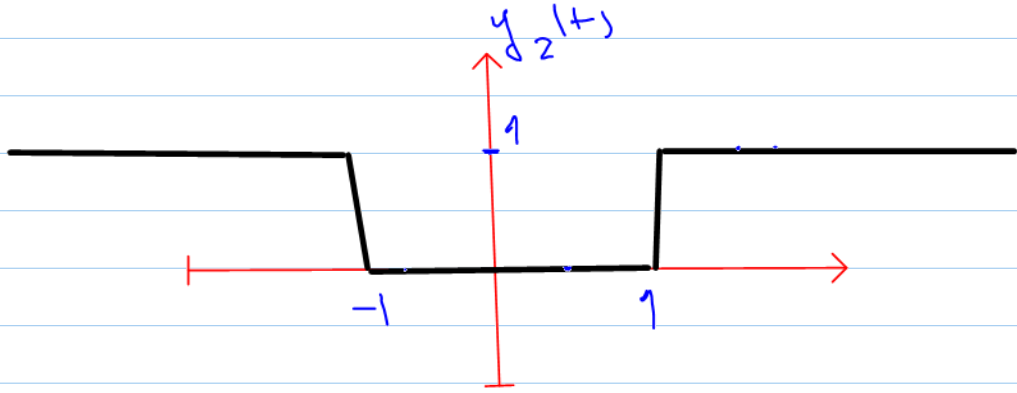
اگر در لحظه t هر عدی

عدد ۱ بیشتر



خروجی در آن لحظه برابر ۱ است.





$t = a+b$ در عدی ← b در عدی

ارتباط خواص سیستم با پاسخ ضربه:

داشتن پاسخ ضربه یعنی LTI پاسخ به ورودی ضربه یعنی LTI سیست.

علی بودن:

یک سیستم با پاسخ ضربه $h(t)$ را علی گوییم اگر و تنها اگر $h(t)=0 \quad \forall t<0$

$h(t)=0 \quad \forall t<0 \iff$ علی ✓

$h(t)=0 \quad \forall t\geq 0 \iff$ غیر علی

حافظه‌دار بودن:

$h(t)=$ ضربی از $\delta(t)$ $\iff$ بدون حافظه

یا $k\delta[n]$

$h(t)=0 \quad \forall t\neq 0 \iff$ بدون حافظه

پایداری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$\Longleftrightarrow$ پایدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

برق ۸۱

۲- پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI به صورت $h(t) = e^{t}u(-1-t)$ داده شده است که در آن $u(t)$ تابع پله واحد می‌باشد. در این صورت سیستم چگونه است؟

۱) پایدار و علّی ۲) ناپایدار و علّی ۳) ناپایدار و غیر علّی ۴) پایدار و غیرعلّی

$h(t) = e^t u(-1-t)$ علی و یا علی؟

$$h(t) = e^t \times \begin{cases} 1 & t \le -1 \\ e & t > -1 \end{cases} = \begin{cases} e^t & t \le -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$$

$h(-2) = e^{-2} \neq 0 \rightarrow$ غیرعلی

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{-1} |e^t|\,dt + \cancel{\int_{-1}^{\infty} 0 \times dt}$$

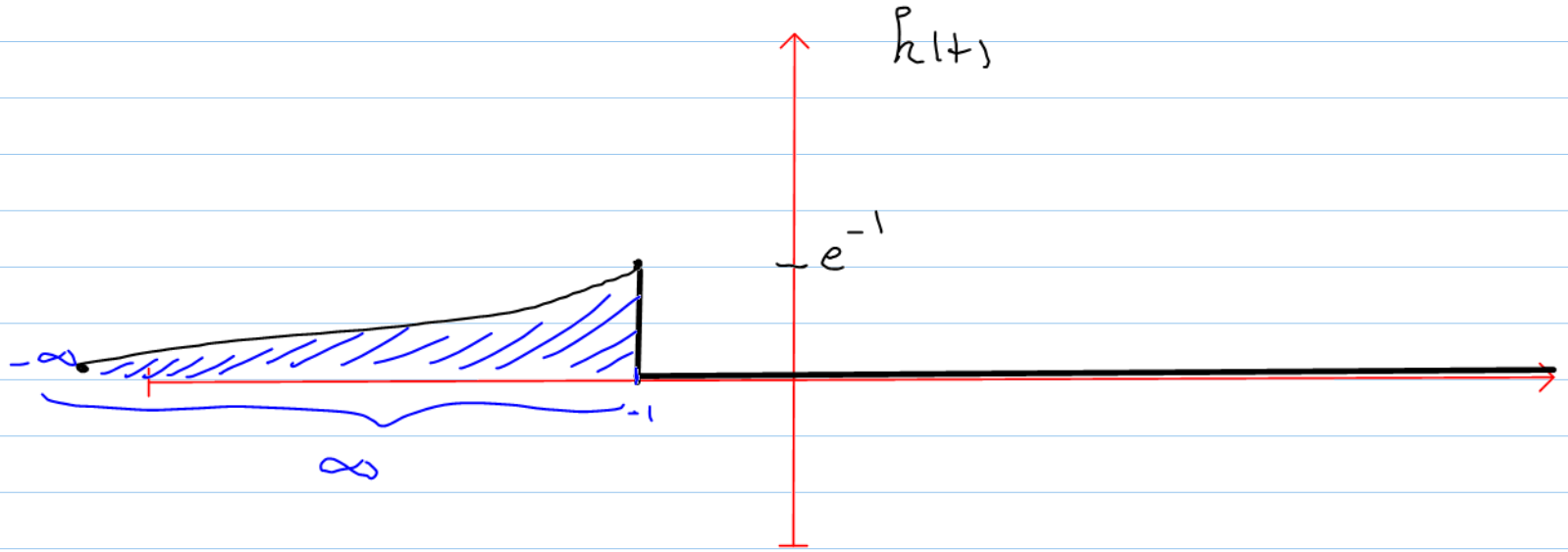
$|e^t| = e^t$

2.73^t

عددستابه هر توانی برسد (حتی سقا) باز هم مثبت است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{-1} e^t\,dt = e^t\Big|_{-\infty}^{-1} = e^{-1} - e^{-\infty} = e^{-1} - 0 = e^{-1} < \infty$$

پایدار



$h(t) = \begin{cases} e^t & t \leq -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$

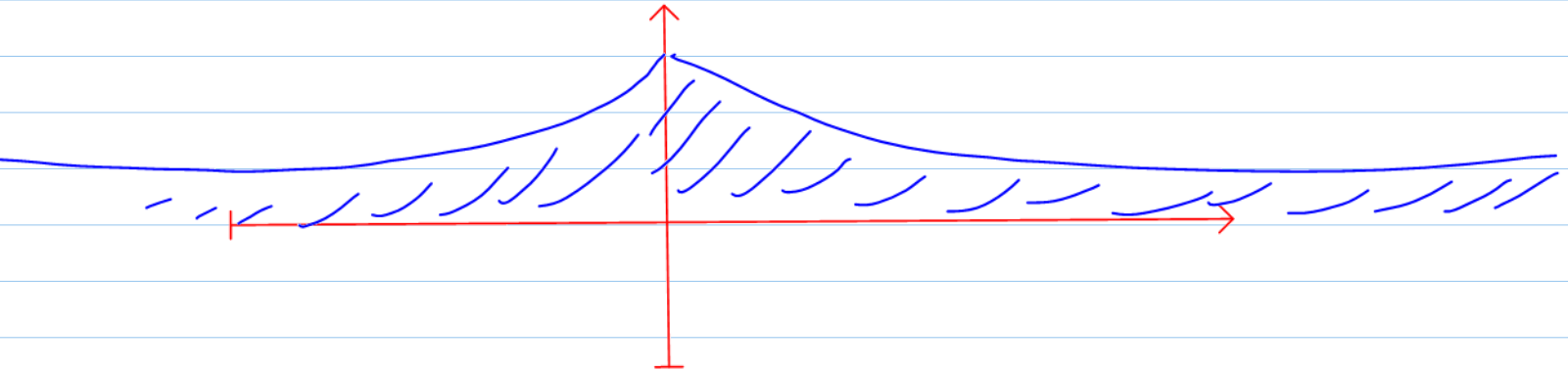
$|h(t)|$ را رسم کنید.

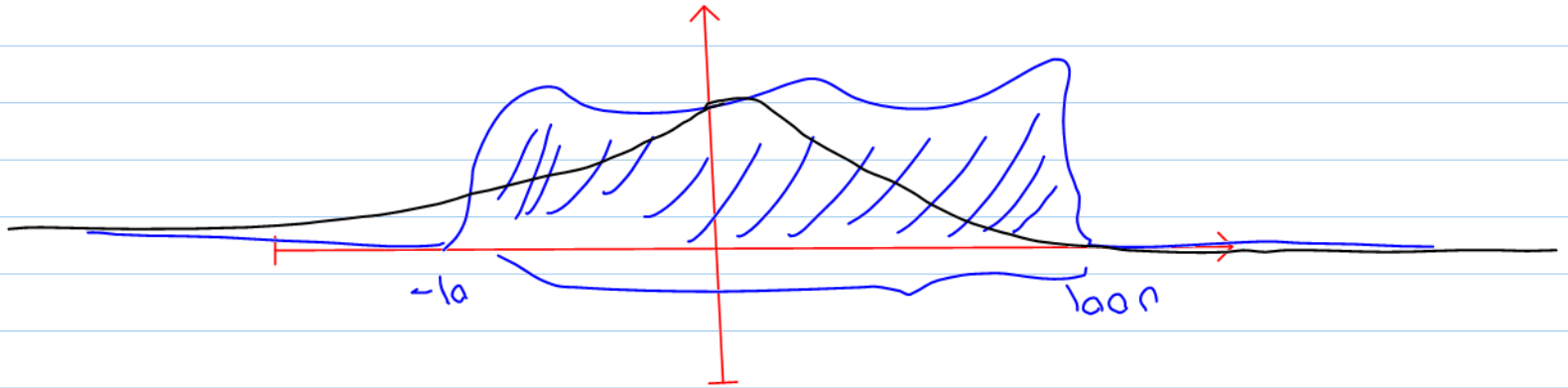
دامنه در حال کاهش به سمت ∞ است پس ناپایدار است.

نکته: $|h(t)|$ را رسم کنید ← ① دامنه در حال افزایش و طول سیگنال ∞ ← ناپایدار

② ← ثابت یا در حال کاهش به سمت عددی متناهی با طول ∞ ← ناپایدار

③ ← در حال کاهش به سمت عدد ۰ با طول سیگنال محدود ← پایدار




-10
100

برق ۸۳

۹. پاسخ یک سیستم LTI گسسته به ضربه شیفت یافته $x[n] = \delta[n - ۱]$ به صورت مقابل است:
در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟



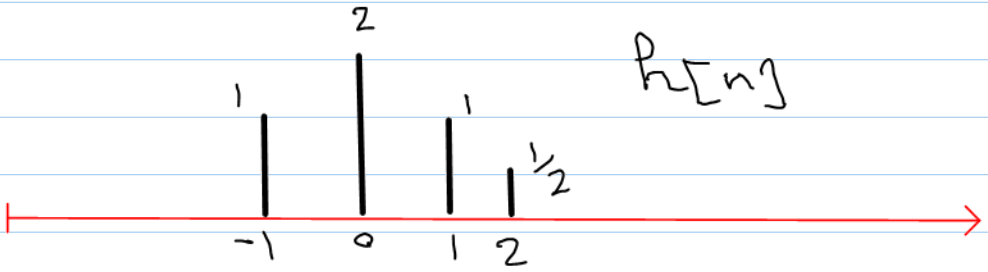
۱) علی، حافظه‌دار و ناپایدار
۲) علی، بدون حافظه و پایدار
۳) غیرعلی، حافظه‌دار و پایدار
۴) غیرعلی، بدون حافظه و ناپایدار

LTI

$x[n] = \delta[n-1] \longrightarrow y[n]$

TI

$x[n+1] = \delta[n] \longrightarrow h[n] = y[n+1]$



حافظه دار؟ ← $h[n]$ در لحظات غیر از صفر مقدار دارد ← حافظه دار

پایداری؟ ←

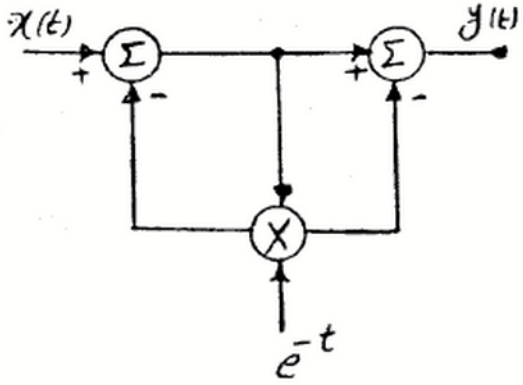
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1+2+1+\frac{1}{2} = 4.5 < \infty$ پایدار

علی؟

$h[-1] = 1 \longrightarrow h[n=-1] \neq 0$ غیر علی

برق ۹۵

۲۸- سیستم نشان داده شده در شکل روبه‌رو ..... است.

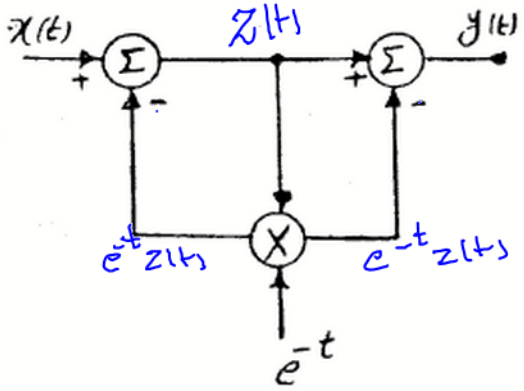


۱) غیرخطی و ناپایدار

۲) خطی و ناپایدار

۳) غیرخطی و پایدار

۴) خطی و پایدار



$$y(t) = z(t) - e^{-t} z(t)$$

$$z(t) = x(t) - e^{-t} z(t) \longrightarrow z(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} x(t)$$

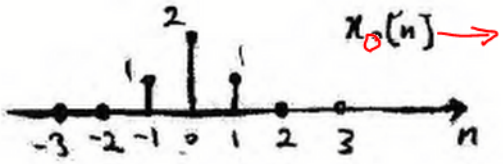
$$y(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}} x(t)$$

تمرین صفحه اول.

خطا و بایدار ← لطفا "حل شد".

۹۱ برق

۷۵- اگر $y_0[n]$ پاسخ یک سیستم LTI پایدار به ورودی $x_0[n]$ بوده و $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_0[n] = -1$ است. $y_1[n]$ پاسخ همان سیستم به ورودی $x_1[n]$ است، کدام گزینه زیر صحیح است؟





۱) $\sum_n y_1[-n] = -۴$

۲) $\sum_n y_1[-n] = ۰$

۳) $\sum_n y_1[-n] = ۴$

۴) $\sum_n y_1[-n] = ۲$

حال

TI

با بدل

$x_1[n] =$ تابع x_0 با توجه به تعریف

جای خالی را [آیا می‌توانید] بنویسید.

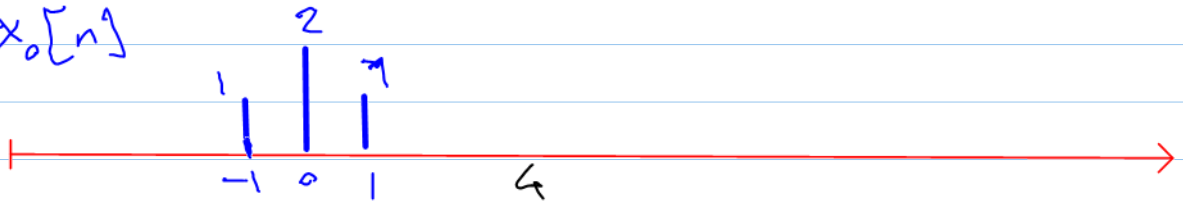
$x_1[n]$

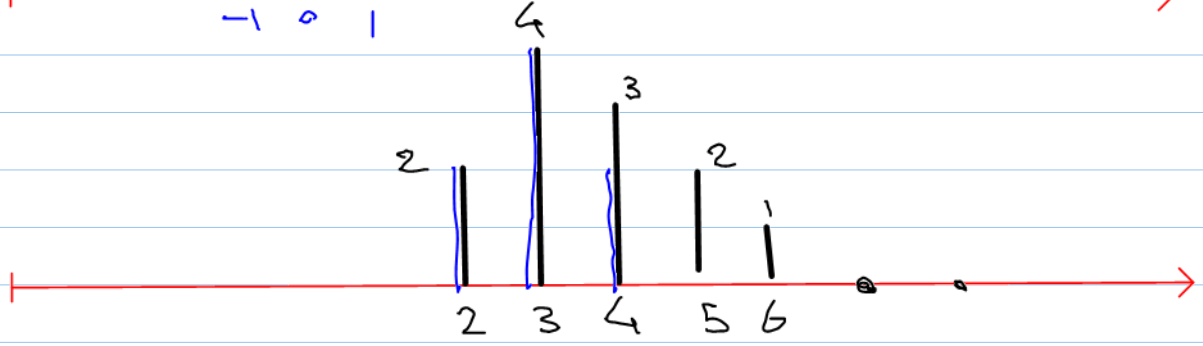


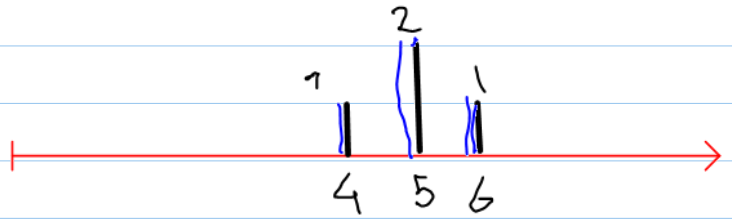
$x_1[n] = x_0[n-1] + 2x_0[n-3]$

$+ x_0[n-5]$

$x_0[n]$







$$x_1[n] = x_0[n-1] + 2x_0[n-3] + x_0[n-5]$$

$$y_1[n] = y_0[n-1] + 2y_0[n-3] + y_0[n-5]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[-n] = ? \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_1[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[-n]$$

$-n = k \rightarrow$ $\quad n: -\infty \rightarrow \infty$

$\quad k: \infty \rightarrow -\infty$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1[n] = \sum y_0[n-1] + 2\sum y_0[n-3] + \sum y_0[n-5]$$

$-1 \qquad -1 \qquad -1$

$$= -1 - 2 - 1 = -4 \checkmark$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_0[n] = -1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_0[n-5] = -1$$ ادعا

باشد ساخت زیر عوامل گذاشته شود.