جلسه 24 سیگنال

فصل سوم

مقدمه: چرا باید تبدیل های مختلف را یاد بگیریم؟

تبدیل چیست؟

پاسخ فرکانسی چیست؟

کجا به دردمان می خورد؟

فصل اول ← تجزیه و تحلیل سیگنال و سیستم ها

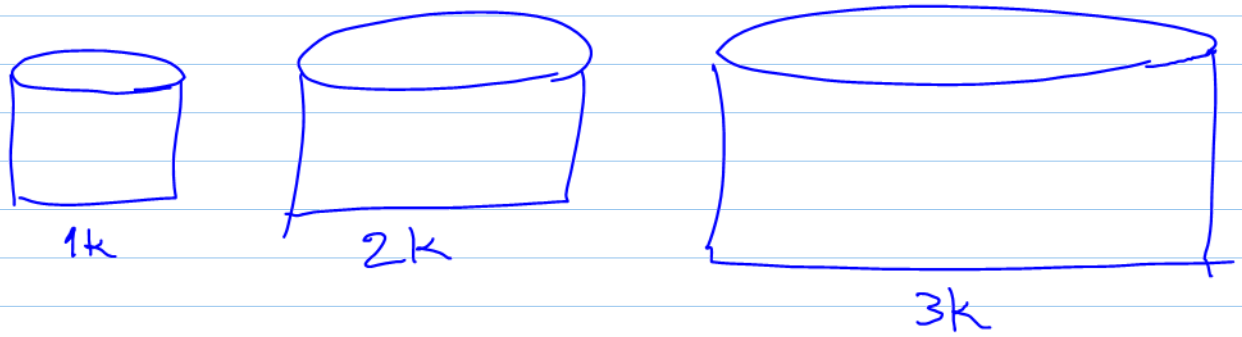
فصل دوم ← معرفی سیستم های LTI در حوزه زمان

فصل سوم به بعد ← تبدیل های حوزه زمان به فرکانس.

سیستم LTI:

$$g(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

مثال: فرض کنید یک مغازه ترازو ندارید ولی قابمای مشخص دارید که میدانید اگر هر قاب با شکر پر شود وزن آن چقدر خواهد شد، حالا اگر یک فرشته ۱۵ کیلو شکر بخواهد چه خواهید کرد؟



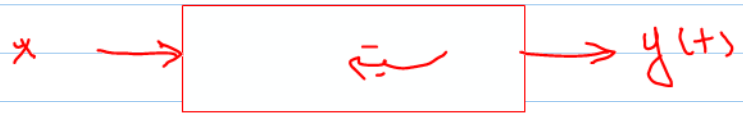
ساده‌ترین راه حل؟

① ۱۵ تا ظرف ۱kg

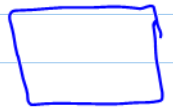
② 5 تا ظرف 2kg

③ 3 تا ظرف 3k ✓ + ۱ ظرف ۱kg

مثال:

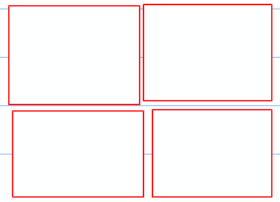


$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ به شکل مربع باشد.} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ به شکل دایره باشد.} \end{cases}$$





$x(t) \Rightarrow$



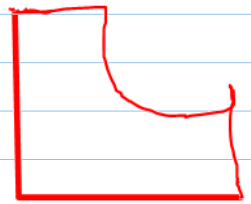
$\longrightarrow \quad y(t) = ?$ ↳

$x(t) \longrightarrow$

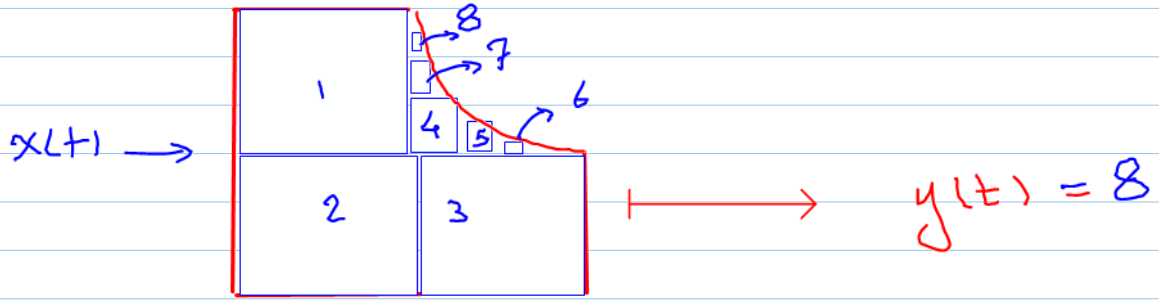


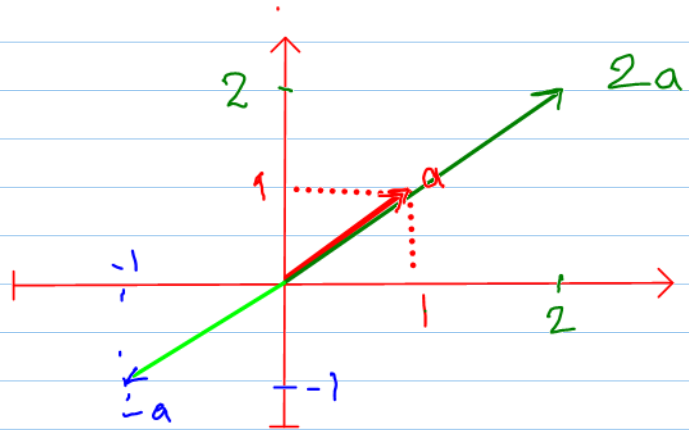
$\longmapsto \quad y(t) = ?$ 1 + 0

$x(t)$ —



$\longrightarrow \quad y(t) = ?$





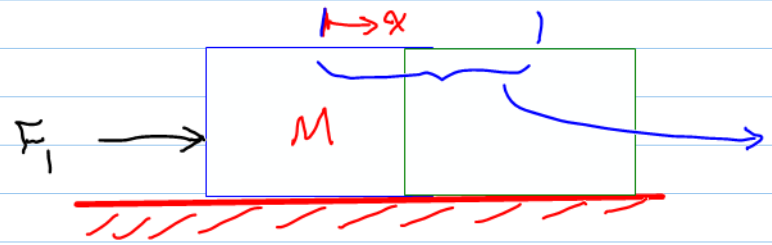
مقدار ویژه و بردار ویژه

2a ?

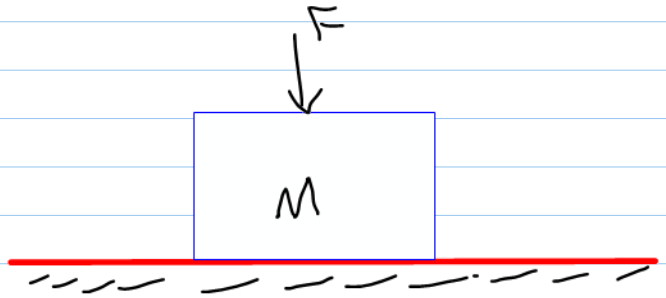
-1a ?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times a \; ?$$

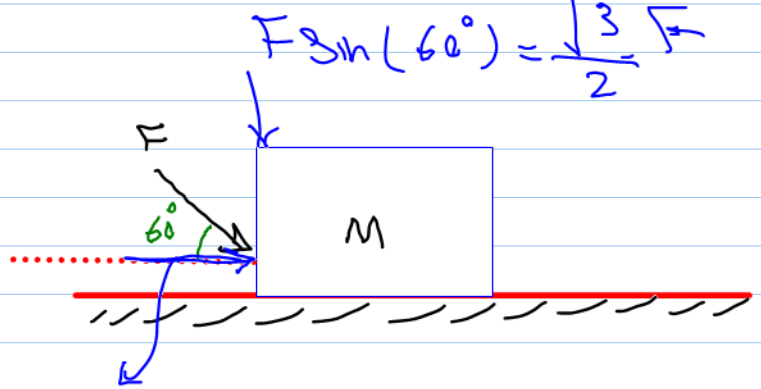
مثال: فرض کنید یک جسم داریم که به شکل زیر نیروی F وارد می‌شود، حرکت آن را توصیف کنید.



تأثیر نیروی F



تأثیر ندارد.



تأثیر نیروی F

V_1

جهت عمودی ← $h_1 = 0$

جهت افقی ← $h_2 = \frac{1}{2}$

V_2

تعریف بردار ویژه و مقدار ویژه یک ماتریس.

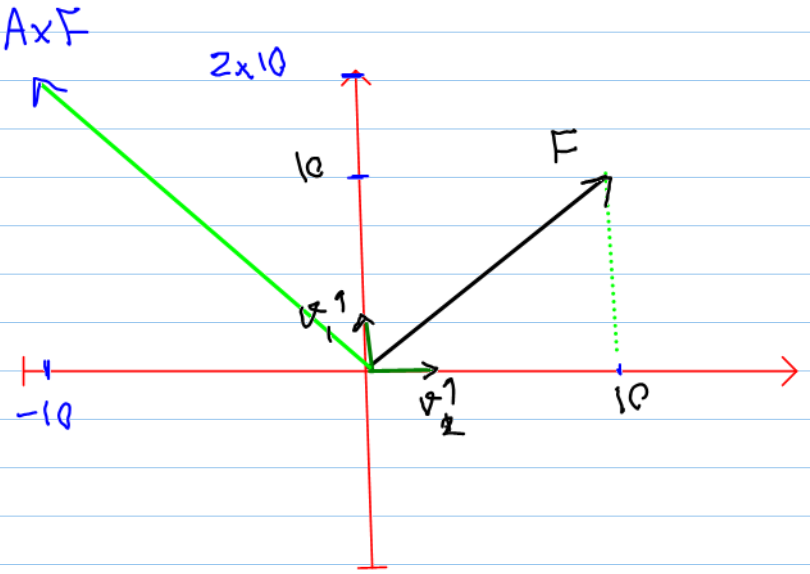
یعنی اگر ماتریس A در یک عدد ضرب شود، تأثیر آن در عمل چیست؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad AF = ?$$



یعنی ماتریس A بردار F را در راستای $\vec{v}_1$ با ضریب λ_1 و در راستای $\vec{v}_2$ با ضریب λ_2 تقویت می‌کند.

پس در واقع ماتریس A با قابلیت v_1 و v_2 سنجیده می‌شود.

به v_iها بردار ویژه و λ_iها مقدار ویژه گفته می‌شود.

حالا می‌خواهیم این مفهوم را به سیستم‌ها تعمیم دهیم.

ادعا: پاسخ سیستم‌های LTI برای برخی سیگنال‌ها، مضربی از خود ورودی است.

$$x(t) = e^{jat}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ja(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau$$

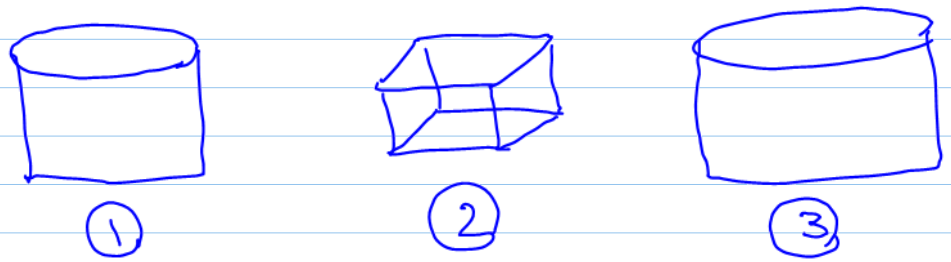
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jat} e^{-ja\tau} h(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = e^{jat} \longrightarrow y(t) = \underbrace{e^{jat}}_{x(t)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-ja\tau} d\tau$$

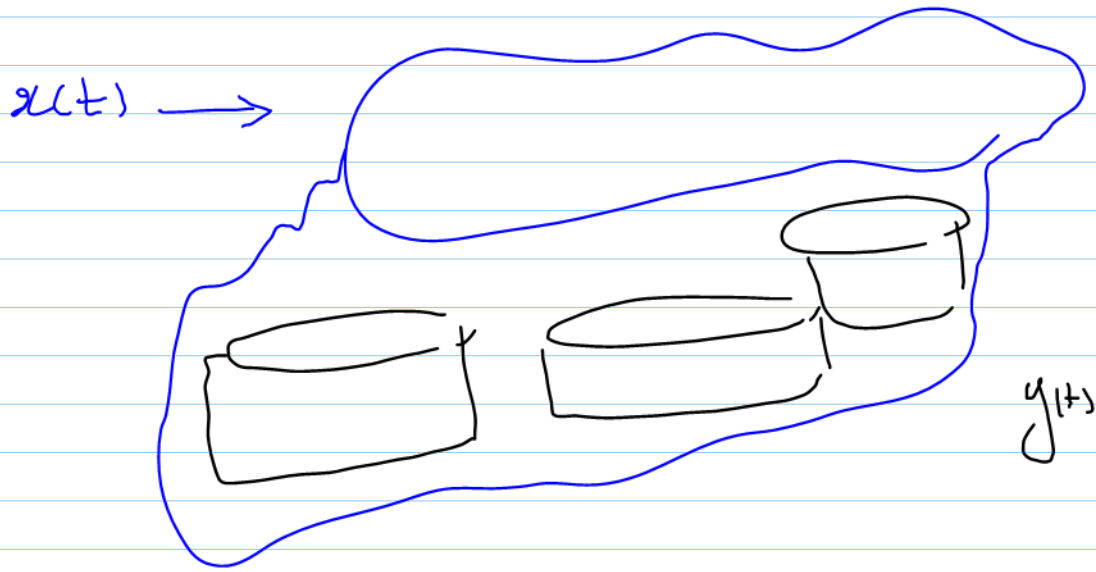
یعنی فاصبه پاسخ سیستم LTI به این سیگنالها بسیار ساده است.

حال اگر بتوانیم هر ورودی را در قالبهای e^{jat} بیان کنیم کار بسیار ساده است.

$$x(t) = -1e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} + 3e^{j3t}$$



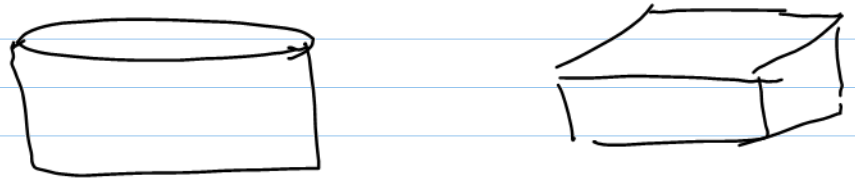
پاسخ سیتم LTI به ورودی‌های ① ، ② و ③ را داریم .



= ① تا 2 + ② تا 3 + ③ تا 4

$y(t) = 2 \times a + 3 \times b + 4\,c$

حالا باید برای سیتم های LTI قابلها را استفاده کنیم .



حالا باید خروجی سگنال با شکل موج سیتم به آن را داریم .

برای هر سیستم LTI ، شکل متناسبار ای توان در آورد.

$e^{jat} \longrightarrow y(t) = e^{jat} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-ja\tau}\, d\tau$

$e^{jbt} \longrightarrow y(t) = e^{jbt} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-jb\tau}\, d\tau$

پاسخ فرکانسی



فرض

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-jw\tau}\, d\tau$$

$e^{jat} \longrightarrow y(t) = e^{jat} H(ja)$

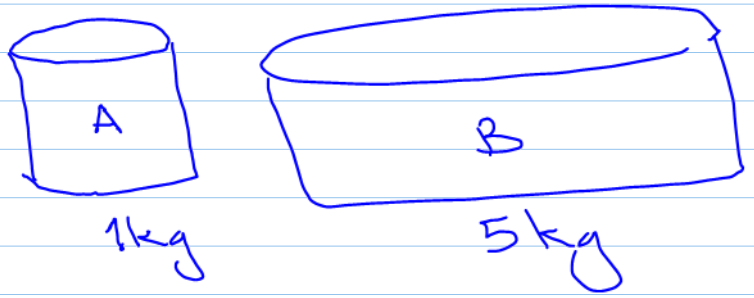
$e^{jbt} \longrightarrow y(t) = e^{jbt} H(jb)$

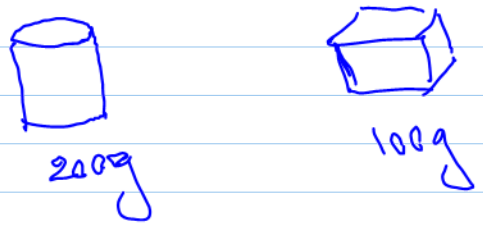
خاصیت پاسخ سیستم LTI به ورودی های e^{jat} بسیار ساده است.

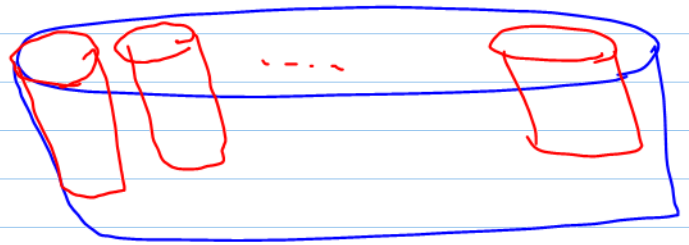
$$H(jw) = \frac{1}{w^2+1}$$

$$e^{j2t} \longrightarrow e^{j2t} \times \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5} e^{j2t}$$

خاصیتی سیستم LTI به ورودی e^{jat} آنها $H(jw)$ را خاصیت را پیدا کردیم.







⟶ وزن = ?

وزن = 200g × 10 + 100g × 2 ← 2 تا شربتی + 10 تا کاپیون

وزن کل کیک = 2.2 kg

خاصیت سیستم‌های خطی:

e^{jwt}

$x(t) \longrightarrow$ خروجی سیستم $\times$ را در e^{jwt} ضرب می‌کنیم.

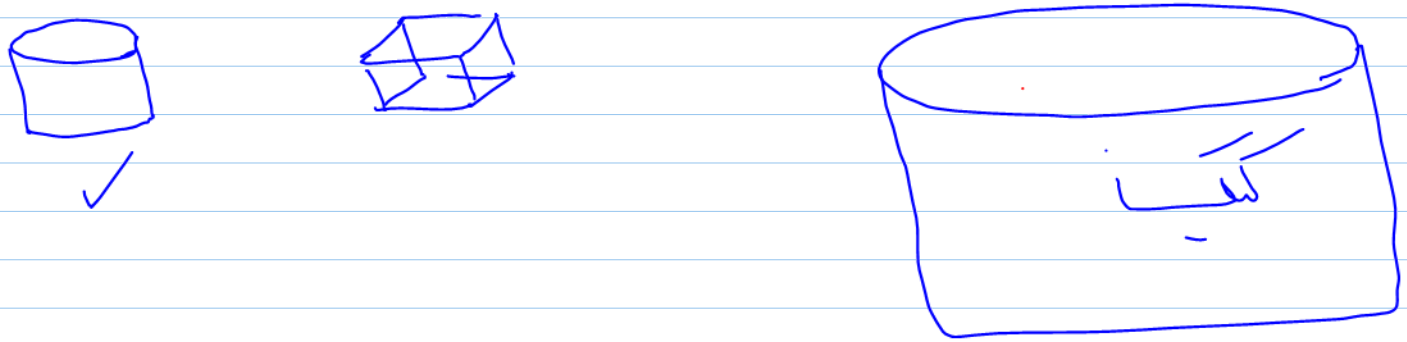
$$x(t) = 2e^{j2t} + 3e^{j4t} + 1e^{jt}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\tan(t) + e^{j3t}\cos(t)$$

$$2e^{jwt} \longrightarrow 2e^{jwt}H(jw)$$

$$y(t) = 2e^{j2t}H(j2) + 3e^{j4t}H(j4) + 1e^{jt}H(j1)$$

هدف تبدیل: $x(t)$ را باید خطی و با تعداد محدود سینوسی بیان کنیم.



چیز تا قالب ؟

تبدیل ← انتخاب شکل قالب و اینکه چیز قالب ؟

شباهت

نوع میزان شباهت ؟

$x(t) = \sin(2t)$

- e^{jt}
- e^{j2t}
- e^{j3t}
- ⋮

سنجش میزان شباهت دو سیگنال ؟ ضرب داخلی

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(-t)\, dt$$

$$\langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$e^{j\omega t}$ ← هاتبعا ← LTI بلی سبب

$$\langle \sin(2t), e^{jlt} \rangle = 0$$

$$\langle \sin(2t), e^{j2t} \rangle = \frac{1}{2j}$$

$$\langle \sin(2t), e^{-j2t} \rangle = -\frac{1}{2j}$$

$$\langle \sin(3t), e^{j4t} \rangle = 0$$

$e^{jwt} \longrightarrow e^{jwt} H(jw)$

$x(t) \simeq$ ها e^{jwt} با x تقریب $\Rightarrow$

$\langle x(t), e^{jwt} \rangle$

$h(t) = u(t)$

$\sin(2t) \longrightarrow \boxed{H(jw) = \frac{1}{jw}} \longrightarrow ?$ $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$

$$\sin(2t) = \frac{1}{2j} e^{j2t} - \frac{1}{2j} e^{-j2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2j} e^{j2t} \frac{1}{j2} - \frac{1}{2j} e^{-j2t} \frac{1}{j(-2)}$$

تبدیل = میزان شباهت x با $e^{j\omega t}$ = $\langle x(t), e^{j\omega t} \rangle$