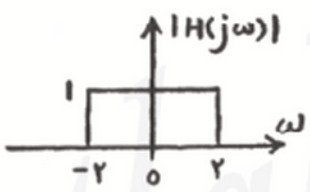
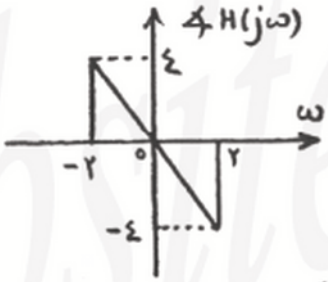
جلسه 42 سیگنال

* هرگاه ورودی متناوب باشد
* $h(t)$ به شکل یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه
* پاسخ وزکاس داده باشد
* ورودی سیگنال تک‌وزکاس ← e^{jat} , $\cos(at)$, $\sin(at)$
* ورودی به شکل یکی از سیگنالهای جدول تبدیل فوریه باشد.

1. ورودی x متناوب باشد ← از سری فوریه ← فصل 3
2. ورودی یا $h(t)$ تک‌وزکاس باشد
3. غیر از حالت 1 و 2 ✓

سیگنال $x(t) = 2\pi\delta(t)$ وارد سیستم LTI با مشخصات فرکانسی شکل مقابل می‌شود. در این صورت مقدار خروجی در لحظهٔ $t = 2$ برابر است با:





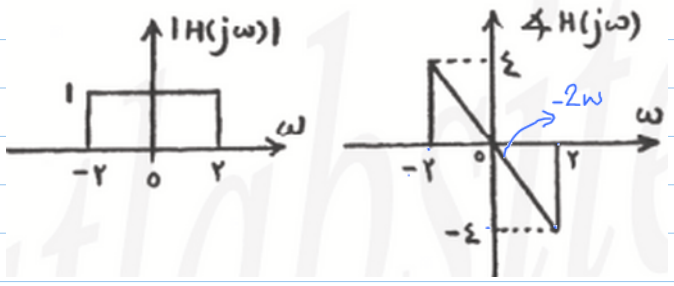
۱) 4π

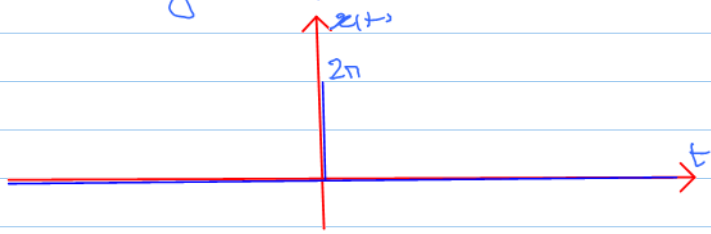
۲) $\frac{4}{\pi}$

۳) ۴

۴) $\frac{2}{\pi}$

$x(t) = 2\pi\,\delta(t) \longrightarrow$ $y(t) = ?$ $y(2) = ?$





غیرازحالت ① و ②

$X(j\omega) = 2\pi$ ، $H(j\omega)$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$

$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\angle H(j\omega)} = \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{j(-2\omega)}$

$Y(j\omega) = 2\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-j2\omega} \longrightarrow y(t) = ?$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-j2\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) d\omega$$

$$y(2) = \int_{-\infty}^{2} \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right) d\omega = \int_{-2}^{2} 1\, d\omega = 4 \checkmark$$

۱۹

۹- یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان دارای پاسخ ضربهٔ $h(t) = e^{-۲t}u(t)$ می‌باشد. اگر سری فوریه نمایی خروجی سیستم را به صورت $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{jn\omega_0 t}$ نمایش دهیم، در این صورت مقدار $b_۲$ با فرض اینکه ورودی سیستم $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱+j۲\pi}$ ۲) $\frac{۱}{۴+j۴\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۱+j۴\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۴+j۲\pi}$

$$h(t) = e^{-4t}\,u(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \qquad b_2 = ?$$

① $T_0 = 1 \rightarrow \omega_0 = 2\pi$ ② $H(jk\times\omega_0) \neq 0$?

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 4} \qquad H(jk\times 2\pi) = \frac{1}{j2\pi k + 4} \longrightarrow$$

لهذا يمكن
وبالتالي ممكنة.

③ $a_k = \frac{1}{T_0} = 1$ ④ $b_k = a_k\, H(j2\pi k) = 1 \times \frac{1}{j2\pi k + 4}$

$$b_2 = \frac{1}{j4\pi + 4} \checkmark$$

۸۰. یک سیستم گسسته خطی و تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که دارای پاسخ ضربه $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ باشد ($u[n]$ مشخص کننده دنباله پله واحد می‌باشد). خروجی این سیستم $y[n]$ را وقتی تبدیل فوریه ورودی $X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$ باشد برابر کدام است؟

۱) $[-2(\frac{1}{2})^n - 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$ ۲) $[2(\frac{1}{2})^n - 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$ ۳) $[2(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$ ۴) $[-2(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{3}{4})^n]u[n]$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ $\qquad X(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$

$y[n] = ?$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega) \longrightarrow y[n] = ?$

$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

$Y(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \longrightarrow y[n] = ?$

$3 \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \longrightarrow 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$

$-2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \longrightarrow -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$Y(j\omega) = \frac{A}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$

$$\frac{A + B + \left(-\frac{A}{2} - \frac{3B}{4}\right)e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1}{\sim}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \longrightarrow B = -2 \\ -\frac{A}{2} - \frac{3B}{4} = 0 \longrightarrow A = -\frac{3B}{2} \longrightarrow A = 3 \end{cases}$$

$$Y(j\omega) = 3\,\frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} + (-2)\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

۱۰۰ـ یک سیستم زمان‌گسسته LTI دارای پاسخ فرکانسی $H(\Omega)=\frac{۲\cos(۲\Omega)}{۱+\cos^{۲}(\Omega)}$ می‌باشد، اگر ورودی این سیستم $x[n]=\begin{cases}۰ & ,\ n \text{ زوج}\\ ۲ & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}$ باشد خروجی آن چه خواهد بود؟

۱) $y[n]=\begin{cases}۰ & ,\ n \text{ زوج}\\ ۲ & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}$

۲) $y[n]=\begin{cases}۲ & ,\ n \text{ زوج}\\ ۰ & ,\ n \text{ فرد}\end{cases}$

۳) $y[n]=۰$

۴) $y[n]=۲$

$$H(j\omega) = \frac{2\cos(2\omega)}{1+\cos^2(\omega)} \qquad x[n] = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{زوجي} \\ \text{فردي} \end{matrix} \qquad = 1 + -1(-1)^n$$

$$x[n] = \begin{cases} A & \text{زوجي} \\ B & \text{فردي} \end{cases} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}(-1)^n$$

$$x[n] = 1 - (-1)^n \qquad H(j\omega) = \frac{2\cos(2\omega)}{1+\cos^2(\omega)}$$

$$x[n] = 1 - e^{j\pi n} = e^{j0n} - e^{j\pi n}$$

$$e^{j\omega n} \longrightarrow e^{j\omega n} H(j\omega)$$

$$e^{j0n} \longrightarrow e^{j0n} \quad H(j0) = e^{j0n} \times \frac{2\cos(0)}{1+\cos^2(0)} = 1 \times 1 = 1$$

$$e^{j\pi n} \longrightarrow e^{j\pi n} \quad H(j\pi) = e^{j\pi n} \times \frac{2\cos(2\pi)}{1+(\cos(\pi))^2} = e^{j\pi n}$$

$$x[n] \longrightarrow 1 - e^{j\pi n} = 1 - (-1)^n$$

$$y[n] = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{زوجي} \\ \text{فردي} \end{matrix}$$

۹- سطح زیر منحنی سیگنال $v(t)$ به صورت $A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,dt$ تعریف می‌شود. اگر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد، که $x(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی و $h(t)$ پاسخ ضربه آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی یعنی A_y کدام است؟

۱) $A_y = A_x + A_h$
۲) $A_y = A_x \cdot A_h$
۳) $A_y = A_x * A_h$
۴) رابطه مشخصی بین A_y، A_x و A_h وجود ندارد.

$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt = A_v$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = A_x$ $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = A_h$

$y(t) = x(t) * h(t)$ $A_y = A_h, A_x$ برحسب =?

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = A_x$

$A_x = X(j0)$

$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\,dt = A_h \rightarrow A_h = H(j0)$

$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t}\,dt = A_y$ $A_y = Y(j0)$

$Y(j0) = H(j0)$ و $X(j0)$ برحسب =?

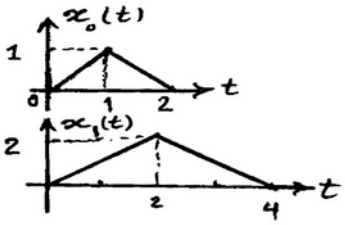
$y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega) \rightarrow Y(j0) = X(j0)\,H(j0)$

$A_y = A_x \times A_h$

۹۲

اگر $y_0(t)$ پاسخ یک سیستم LTI پایدار به ورودی $x_0(t)$ بوده و بدانیم $\int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t)dt = \pi$ می‌باشد، آن‌گاه در مورد $y_1(t)$ که پاسخ همان سیستم به ورودی $x_1(t)$ است، چه می‌توان گفت؟



۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = 2\pi$

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = -4\pi$

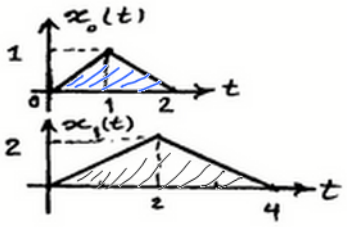
۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = +4\pi$

۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(t)dt = 0$

$x_0(t) \longrightarrow y_0(t) \longrightarrow A_{y_0} = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t)\,dt = \pi$

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \longrightarrow A_{y_1} = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(t)\,dt = ?$

$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow A_y = A_x \times A_h$



$A_{y_0} = A_{x_0} \times A_h$

$\pi = A_{x_0} \times A_h$

$? = A_{y_1} = A_{x_1} \times A_h$

$A_{x_0} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

$\pi = 1 \times A_h \longrightarrow \boxed{A_h = \pi}$

$A_{x_1} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$

$A_{y_1} = 4 \times \pi = \boxed{4\pi}$