جلسه 52 سیگنال

تبدیل لاپلاس

مقدمه:

هدف کلی از همه تبدیل‌ها ← انتقال سیگنال از حوزه زمان به حوزه فرکانس و ساده سازی محاسبات

تبدیل

هدف سری فوریه: سنجش میزان شباهت سیگنالهای متناوب با $e^{jk\omega_0 t}$ یا $e^{jk\omega_0 n}$

که ω_0 فرکانس پایه سیگنال است و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ می باشد.

$x(t) \xrightarrow{FS} a_k$ a_k : وزن فرکانس موهومی محض $jk\omega_0$ در سیگنال x

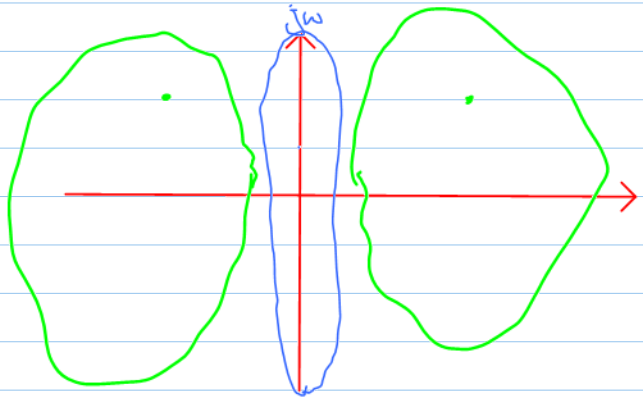
هدف تبدیل فوریه: سنجش میزان شباهت سیگنال x (متناوب یا غیر متناوب) با $e^{j\omega t}$

$x(t)$ یا $x[n] \xrightarrow{F} X(j\omega)$

$X(j\omega)$: وزن فرکانس موهومی محض $j\omega$ در سیگنال x

سؤال: آیا سیگنالها همه فرکانسهای موهومی محض دارند؟ خیر

سؤال: اگر بخواهیم وزن فرکانسهای حقیقی یا مختلط در سیگنال x را تعیین کنیم چکار کنیم؟



تبدیل فوریه ← وزن فرکانس $j2$

$2+j2$ ~ ~ → ؟

تبدیل لاپلاس: مجموعه سیگنال هایی زمان پیوسته با e^{st} که $s=\sigma+j\omega$ بوده و کل فرکانس ها را دربرگیرد.

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ → وزن فرکانس مختلط s در $x(t)$

$X(s)$: وزن فرکانس مختلط s در سیگنال $x(t)$

تعریف تبدیل لاپلاس

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

تعریف تبدیل فوریه

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

* تبدیل لاپلاس همان تبدیل فوریه است که به جای $j\omega$ ، s گذاشته شده.

$x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \times e^{-s\times 0}\, dt$$

($\delta(t)$ فقط در $t=0$ مقدار دارد؛ e^{-st} در $t=0$ برابر 1 است)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$x(t) = e^{at}\,u(t)$

$x(t) = e^{at}\,u(t) \xrightarrow{Re(a)<0} X(jw) = \frac{1}{-a+jw} = \frac{1}{jw-a}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}\,\underbrace{u(t)}_{t\geq 0}\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{at}\,e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s}\left(e^{(a-s)\infty} - \cancel{e^{(a-s)\times 0}}^{\,1}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{a-s}\,e^{(a-s)\times\infty} + \frac{1}{s-a} \quad ; \quad a = Re(a) + jIm(a)$$

$$s = \sigma + jw$$

$$e^{(a-s)\times\infty} = e^{(Re(a)-\sigma + j(Im(a)-w))\infty}$$

$$= \underbrace{e^{(Re(a)+\sigma)\infty}}_{\text{عدد حقیقی}} \times \cancel{e^{j(Im(a)-w)\infty}}$$

عدی مختلط با -1 و 1

$$e^{\text{عدد حقیقی}\times\infty} = \begin{cases} \infty & \text{عدد حقیقی} > 0 \\ 0 & \sim < 0 \end{cases}$$

$$e^{(Re(a)-\sigma)\times\infty} = \begin{cases} \infty & Re(a)-\sigma > 0 \\ 0 & \sim < 0 \end{cases}$$

$$e^{(a-s)\infty} = \begin{cases} \infty & Re(a)-\sigma > 0 \\ 0 & Re(a)-\sigma < 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \begin{cases} \infty & Re(a) > \sigma = Re(s) \\ \frac{1}{s-a} & Re(a) < \sigma = Re(s) \end{cases}$$

$x(t) = e^{at} u(t)$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{Re}(a) > \text{Re}(s) \\ \infty & \text{Re}(a) < \text{Re}(s) \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega - a} & \text{Re}(a) > 0 = \text{Re}(s) \\ \text{undefined} & \text{Re}(a) < 0 = \text{Re}(s) \end{cases}$$

$s = \sigma + j\omega$

$s = 0 + j\omega$

$x(t) = e^{at} u(t)$ $\xrightarrow{\text{Re}(a) > 0}$ $\frac{1}{j\omega - a}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $\begin{cases} \frac{1}{s-a} & \text{Re}(a) > \text{Re}(s) \\ \infty & \text{Re}(a) < \text{Re}(s) \end{cases}$

$x(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\,\underbrace{u(-t)}_{t\le 0}\,e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}\,dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t}\,dt = \frac{1}{a+s}\left(\cancel{e^{-(a+s)0}}^{1} - e^{-(a+s)(-\infty)}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{a+s} - \frac{1}{a+s}e^{(a+s)(\infty)}$$

$$e^{(a+s)\infty} = \begin{cases} \infty & -Re(a) > +Re(s) \\ 0 & -Re(a) < Re(s) \end{cases}$$

$$x_1(t) = -e^{-at}u(-t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a+s} & -Re(a) < Re(s) \\ -\infty & -Re(a) > Re(s) \end{cases}$$

$$x_2(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(a) < Re(s) \\ \infty & Re(a) > Re(s) \end{cases}$$

تعریف ناحیه همگرایی: مقادیری از s که به ازای آنها $X(s)$ ، $\pm\infty$ نمی‌شود را ناحیه همگرایی گویند و با ROC (region of convergence) نشان می‌دهیم.

$x(t) = e^{at}u(t)$ $\qquad$ $x(t) = -e^{+at}u(-t)$

$ROC = \{ s \mid X(s) \neq \pm\infty \}$

$$x(t) = e^{at}u(t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(a) < Re(s) \Rightarrow ROC \\ \infty & Re(a) > Re(s) \quad X \end{cases}$$

$$ROC = \{ s \mid X(s) \neq \pm\infty \} = \{ s \mid Re(s) > Re(a) \} = Re(s) > Re(a)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longrightarrow X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & Re(a) > Re(s) \Rightarrow ROC \\ \infty & Re(a) < Re(s) \quad X \end{cases}$$

$$ROC = \{ s \mid Re(s) < Re(a) \}$$

$$e^{at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \; ; \; ROC = Re(s) > Re(a)$$

$$-e^{at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \; ; \; ROC = Re(s) < Re(a)$$

$x(t) = \delta(t)$ $\qquad$ $x(t) = u(t)$

$\delta(t) \longrightarrow X(s) = 1 \quad ; \quad ROC =$ کل صفحه s

$x(t) = u(t) \longrightarrow$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(t)}_{t \geq 0} e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s}\left(e^{-s\times\infty} - \overbrace{e^{-s\times 0}}^{1}\right)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\times\infty}$$

$$e^{-(\sigma+j\omega)\infty} = e^{-\sigma\times\infty} \times \underbrace{e^{-j\omega\times\infty}}_{\text{عددی محدود}}$$

$$e^{-j\omega\times\infty} = \underbrace{\cos(\omega\times\infty)}_{-1 \leq \;\leq 1} - j\underbrace{\sin(\omega\times\infty)}_{-1 \leq \;\leq 1} \rightarrow \text{عددی محدود}$$

$$e^{-\sigma\times\infty} = \begin{cases} e^{-\infty} = 0 & \sigma > 0 \\ e^{\infty} = \infty & \sigma < 0 \end{cases}$$

$$e^{-\sigma\infty} \times e^{-j\omega\infty} = \begin{cases} 0 & \sigma > 0 \\ \infty & \sigma < 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \sigma > 0 \rightarrow Re(s) > 0 \\ \infty & \sigma < 0 \rightarrow Re(s) < 0 \end{cases}$$

$u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$, $ROC = Re(s) > 0$

$\delta(t) \longrightarrow X(s) = 1 \quad ; \quad ROC =$ کل صفحه s

نکته! تبدیل لاپلاس یکتا نیست و با ROC به صورت یکتا مشخص می‌شود.

$$X(s) = \frac{1}{s-a} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = e^{+at}u(t) \\ x(t) = -e^{at}u(-t) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \underline{ROC} = Re(s) > Re(a) \Longrightarrow x(t) = e^{at}u(t)$$

جدول تبدیل لاپلاس:

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$Re(s) > Re(a)$
$-e^{+at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$Re(s) < Re(a)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
$u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) < 0$
$\delta(t)$	1	$ROC = \mathbb{R}$
$\delta(t+a), a>0$	e^{as}	$\mathbb{R} - \{\infty\}$
$\delta(t+a), a<0$	e^{as}	$\mathbb{R} - \{-\infty\}$
$\cos(at)u(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re(s) > 0$
$-\cos(at)u(-t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re(s) < 0$
$\sin(at)u(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re(s) > 0$
$-\sin(at)u(-t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re(s) < 0$
$e^{\lvert a\rvert t}, Re(a) < 0$	$\frac{2a}{s^2-a^2}$	$Re(a) < Re(s) < -Re(a)$