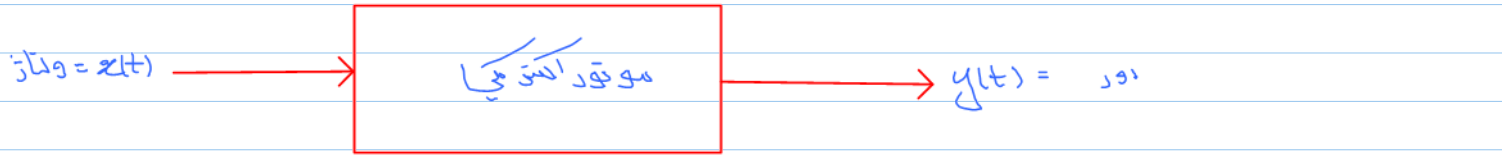
جلسه ۱۱ سیگنال

« تبدیل Z »

مقدمه: $x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

هدف: انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس: فهمیدن مولفه‌های فرکانسی یک سیگنال



تابع موتور الکتریکی: $H(s) = \frac{s-20}{s(s+150)}$ → $s=20$ صفر — قطبها $s=0$ و $s=150$

$x(t)$: ولتاژ اعمالی

$y(t)$: دور موتور

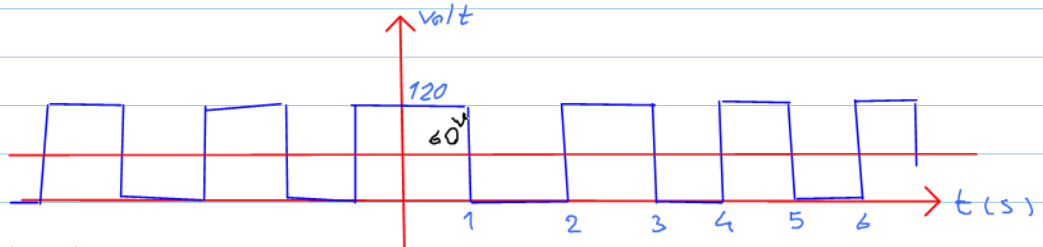
$s=20$

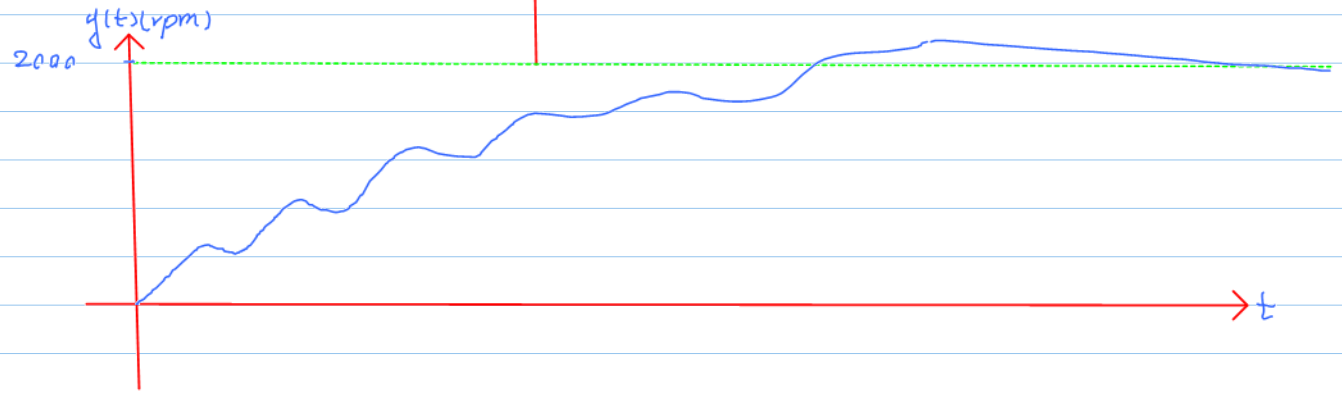
$x(t) = \frac{120}{=} \sin(20t) \longrightarrow y(t) = 0$

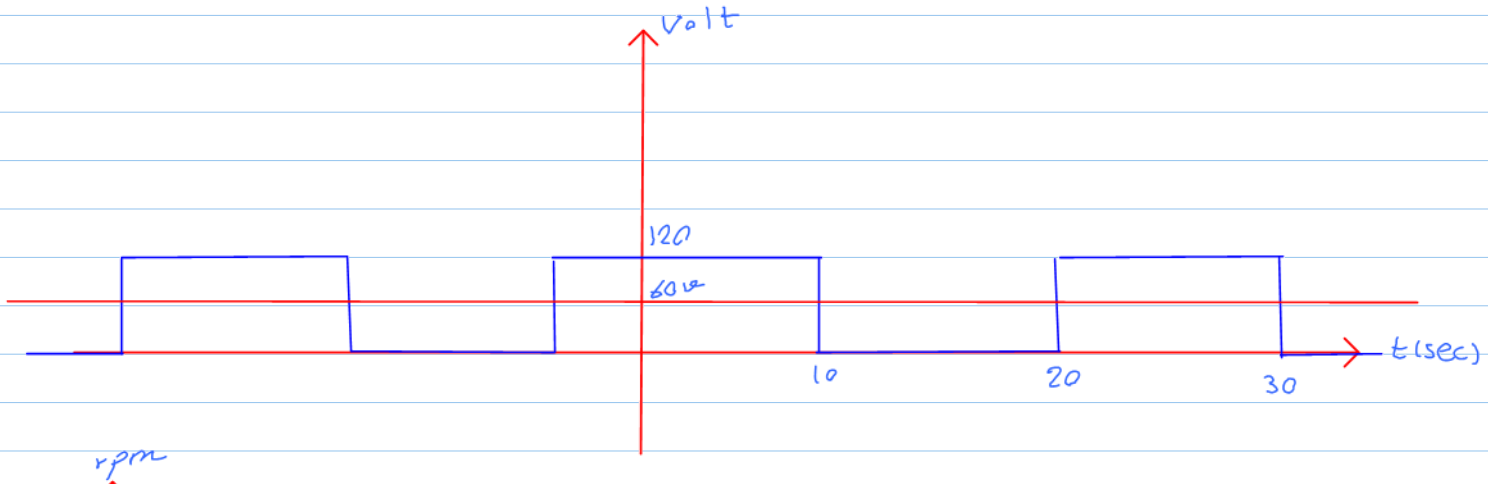
$s=150$

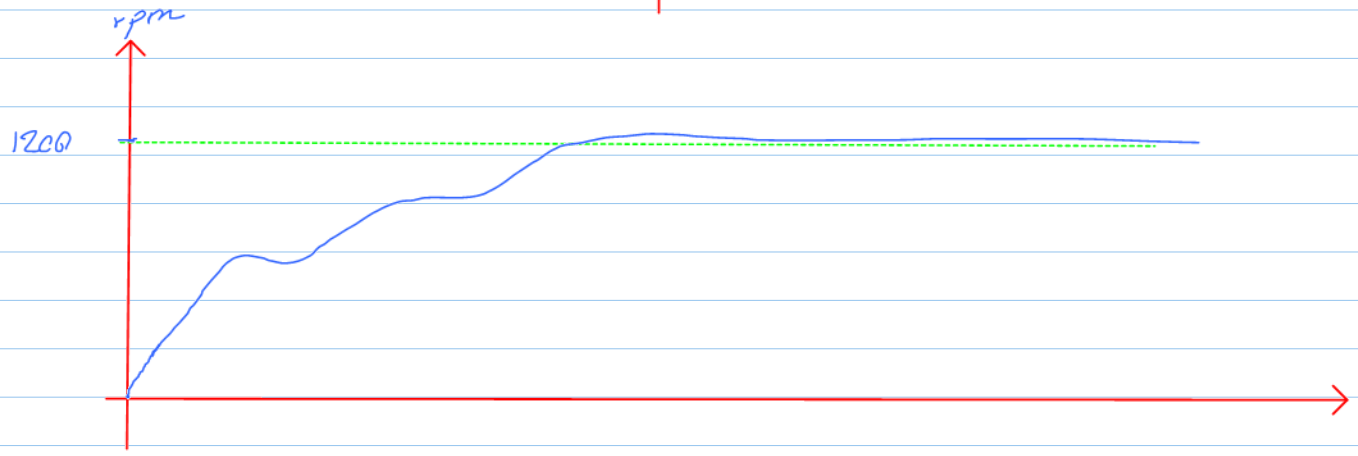
$x(t) = \frac{120}{=} \sin(150t) \longrightarrow y(t) = \infty$ → موتور منفجر می‌شود

$x(t) \Rightarrow$









$x_1(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/sec

$x_1(t)$: مثلثی فرکانسهای ضرب صحیح از π است.

$x_2(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ rad/sec . مثلثی فرکانسهای ضرب صحیح از $\frac{\pi}{10}$ است

تبدیل های مختلف:

$a_k \rightarrow (jk\omega_0)$

① سیگنالهای متناوب زمان گسسته و پیوسته ← سری فوریه : وزن فرکانسهای نوعی من

② " متناوب و نامتناوب " " " " " ← تبدیل فوریه : " " " " $X(j\omega)$

③ " " " پیوسته ← تبدیل لاپلاس : " " " مختلط $X(s)$ $s=\sigma+j\omega$

④ " " " گسسته ← تبدیل Z : " " " "

تبدیل Z : وزن فرکانسهای مختلط در سیگنال زمان گسسته $X(z)$

تبدیل لاپلاس: سنجش میزان شباهت سیگنال $x(t)$ با e^{st}

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

وزن وکتور $X(2+j1) = x(t), 2+j1$

میزان شباهت $x(t), e^{(2+j1)t}$

$$x(t) \xrightarrow{t \to n} x[n]$$

$$e^{st} \xrightarrow{t \to n} e^{sn}$$

تبدیل z: سنجش میزان شباهت $x[n]$ با $z^n = e^{sn}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

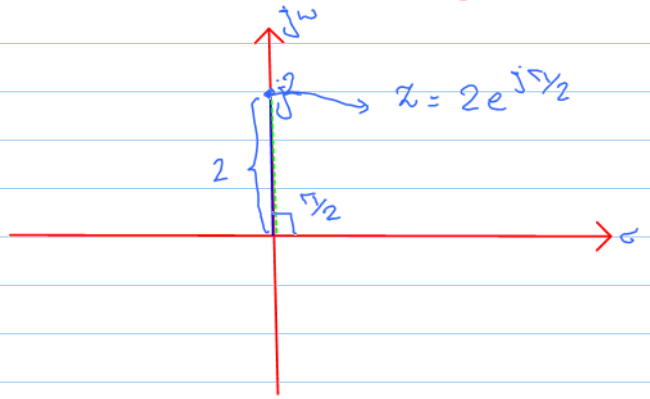
$$e^s \longrightarrow z$$

فرق لاپلاس و z

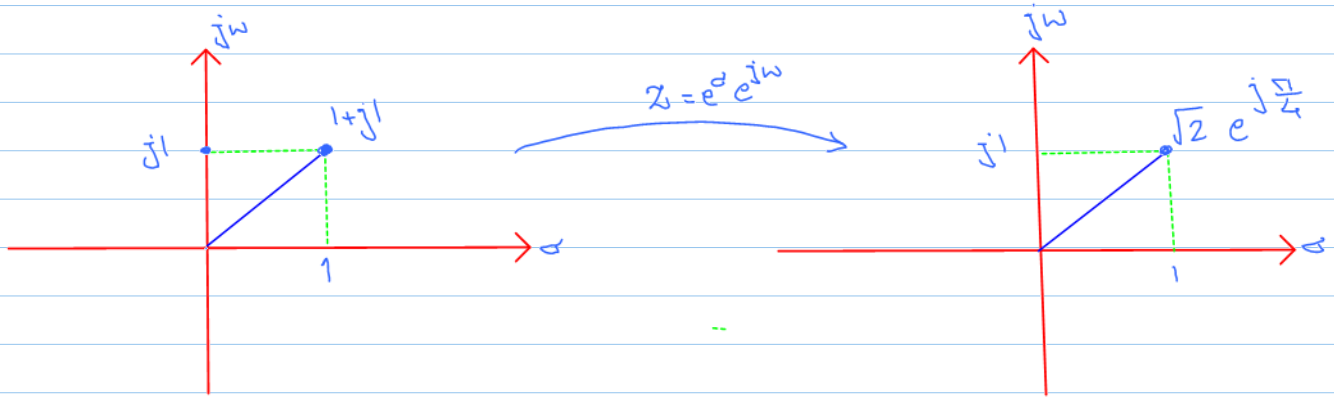
$$z = e^s = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} e^{j\omega} = r e^{j\omega}$$

$$z = r e^{j\omega}$$

z: عدد مختلط با اندازه r و فاز ω



$$z = 2e^{j\pi/2}$$

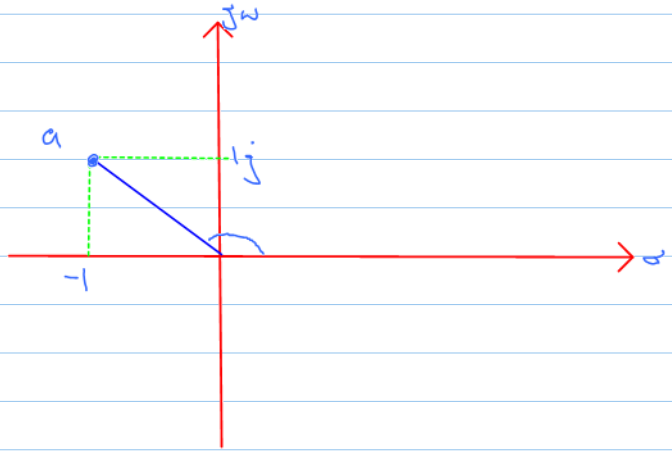


حوزه s

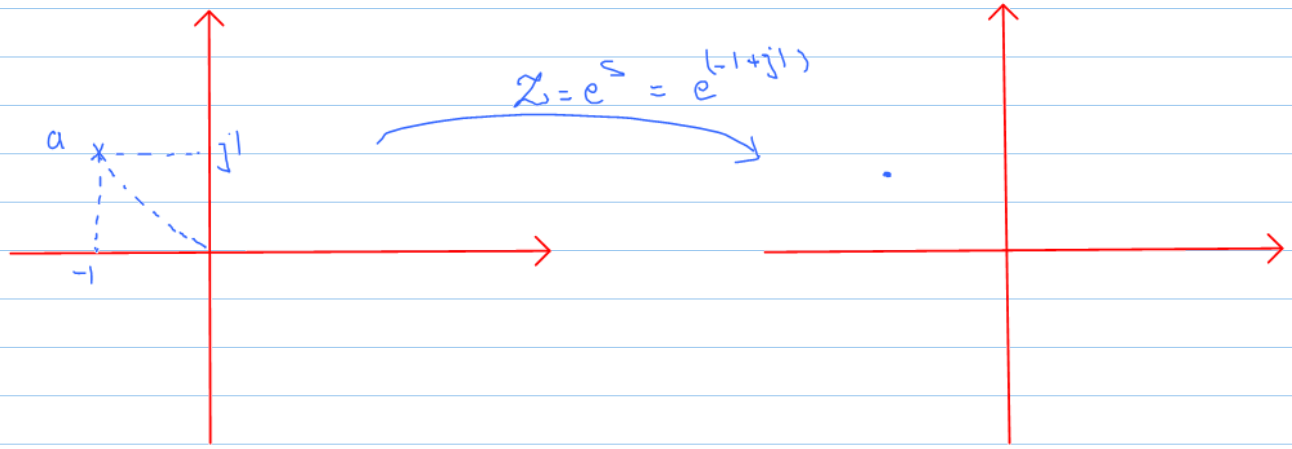
حوزه z

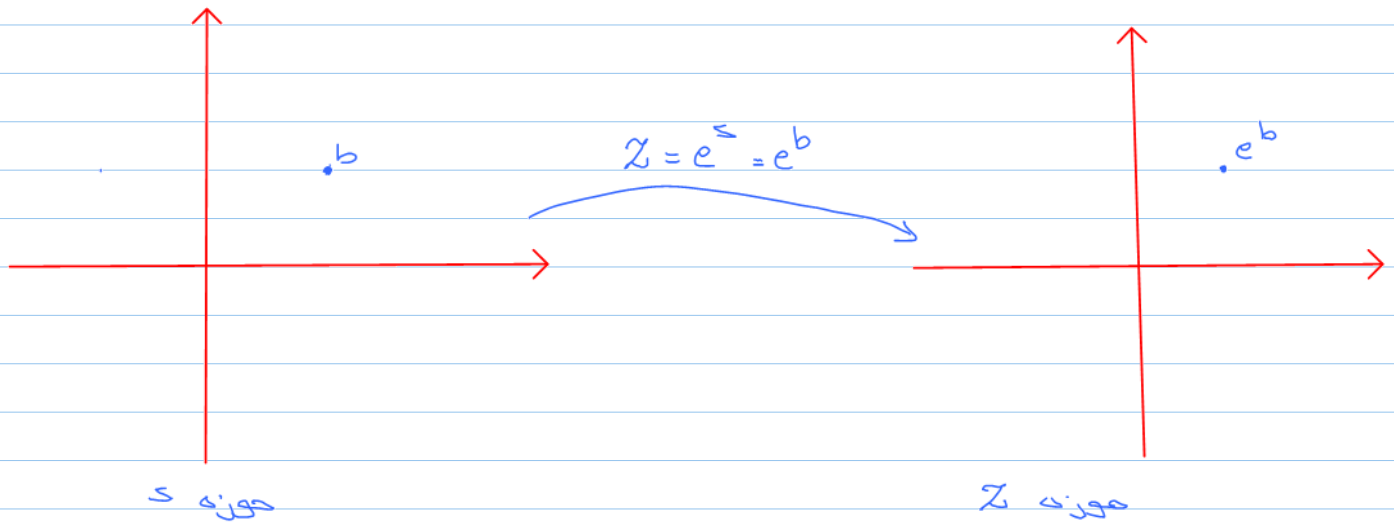
بیان قطبی $\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$ ← بیان کارتزین $1+j1$

حوزه z همان حوزه ای است که بالای قطبی بیان شده است.

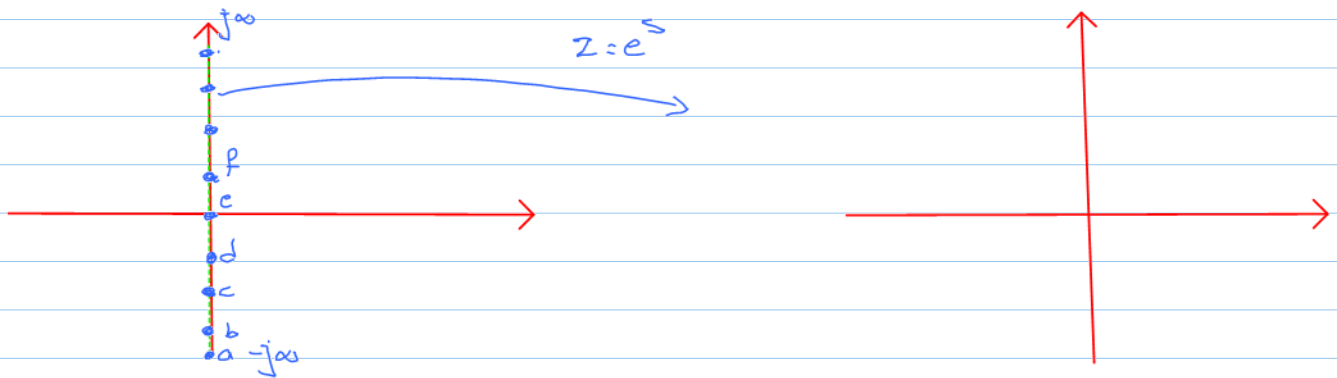


$$a = \begin{cases} -1+j1 \rightarrow & \text{حوزه } s \\ \sqrt{2}\, e^{j\frac{3\pi}{4}} \rightarrow & \text{حوزه } z \end{cases}$$





مثال: معادل خط موازی محور ω در حوزه s کدام خط در حوزه z خواهد بود.



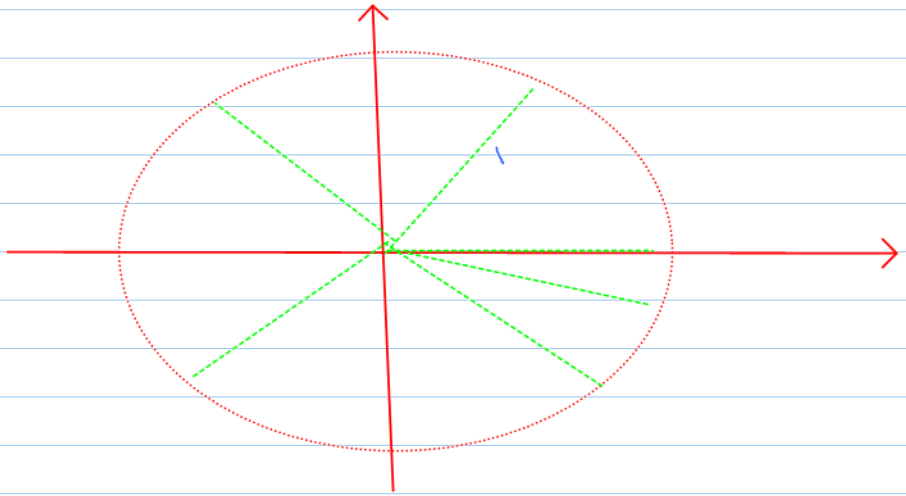
$e^a \quad e^b \quad e^c \quad \dots\dots$

$s = \sigma + j\omega$ $\qquad$ $s = j\omega$ = نقاط روی محور $j\omega$

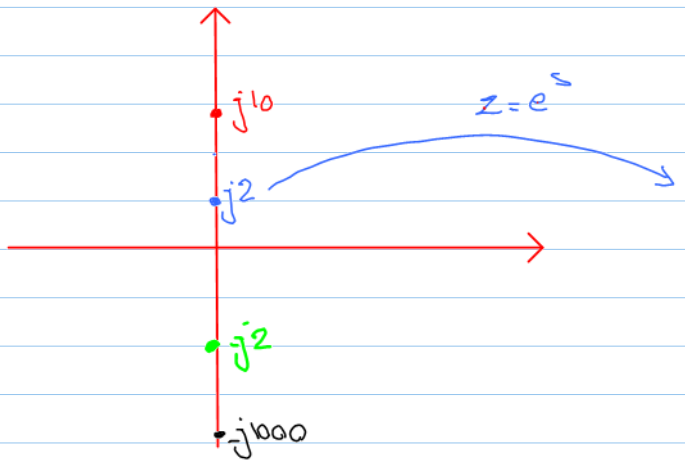
$z = e^s \longrightarrow$ $s = j\omega \;;\; \omega: -\infty \to \infty$ $\qquad$ محور $j\omega$

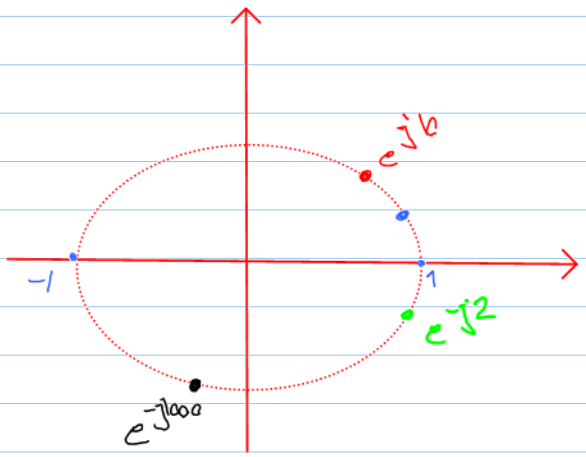
$z = 1e^{j\omega} \;;\; \omega: -\infty \to \infty$

z : اعداد مختلط با شعاع ۱ و فاز از $-\infty$ تا ∞

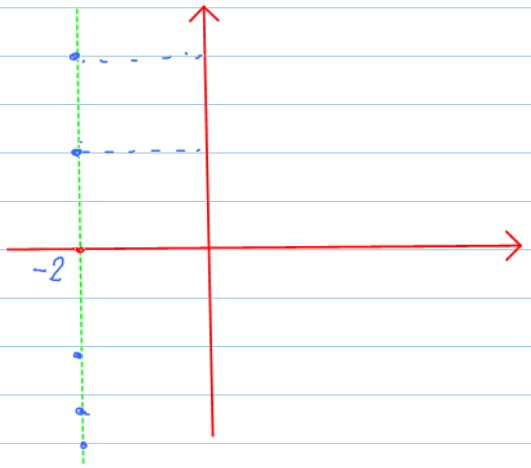


تصویر محور $j\omega$ بعد نگاشت $z = e^s$ ← یک دایره با شعاع ۱

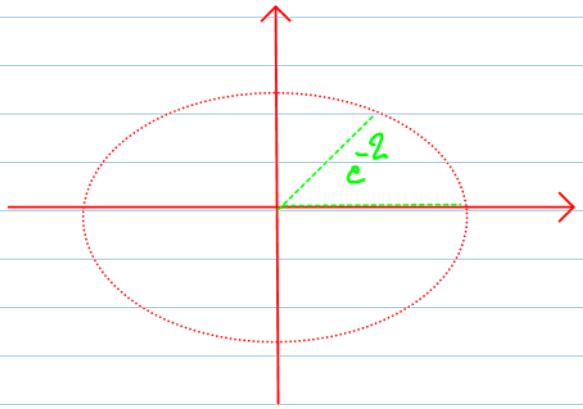




تصویر خط $Re(s) = -2$ تحت نگاشت $z = e^s$



$z = e^s$

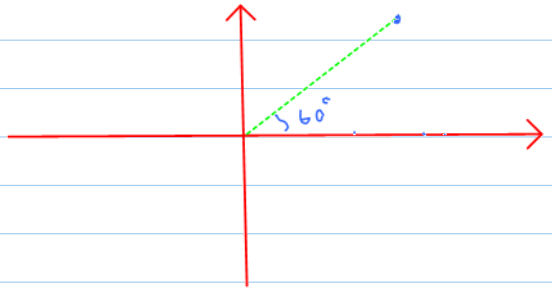


$s = -2 + jw$; $w: -\infty \to \infty$

$z = e^{(-2+jw)} = e^{-2} e^{jw}$; $w: -\infty \to \infty$

z : اعداد مختلط با اندازه e^{-2} و فاز w از $-\infty$ تا $+\infty$

فاز : هر عددی می‌تواند باشد ← $\theta \to 360^\circ$



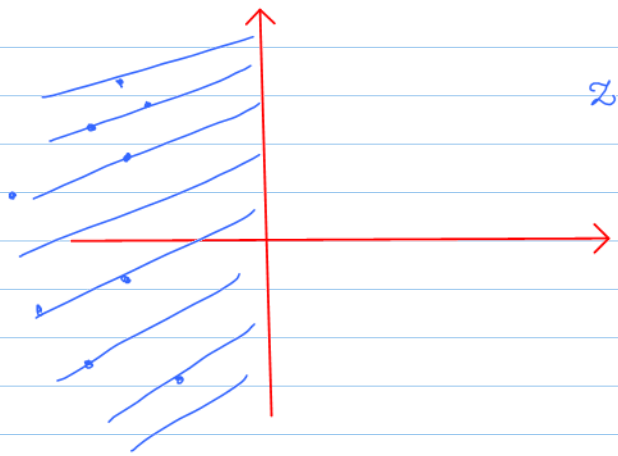
زاویه $= 60^\circ$

$360^\circ + 60^\circ$

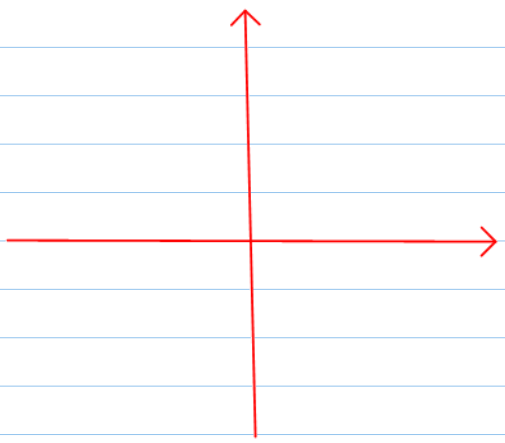
$360 \times 1000 + 60^\circ$

یک دایره کامل $\theta \to 360^\circ$ $\longrightarrow$ $-\infty \to \infty$: فاز

تصویر نامیه $Re(s) < 0$ تحت نگاشت z :



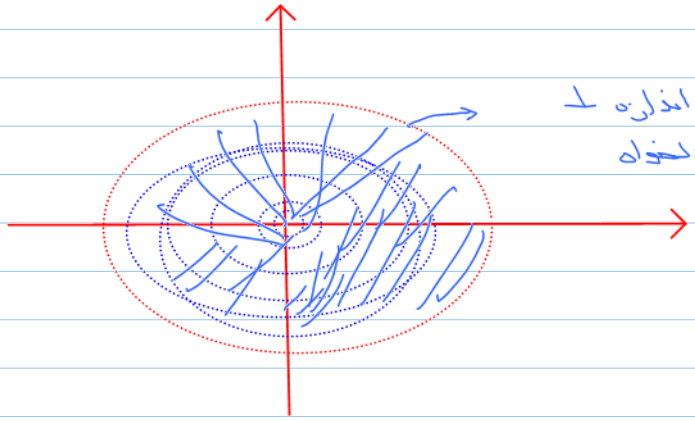
$z = e^s$



$\text{Re}(s) < 0 \rightarrow s = \sigma + j\omega$; $\sigma < 0$, $\omega: -\infty \rightarrow \infty$

$z = e^{\sigma} e^{j\omega}$ → $|z| < 1$ → $e^{\sigma} < 1$

بصورت مقاطعی با اندازه کمتر از ۱ و خارج دایره واحد



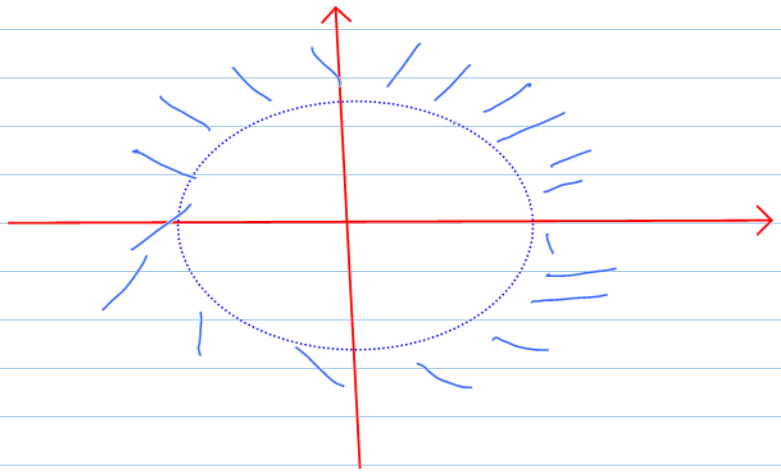
تصویر سمت چپ صفحه s ← مقاطع داخل یک دایره با شعاع ۱

تصویر سمت راست صفحه s ←

$\text{Re}(s) > 0$
$\sigma > 0$

$z = e^{\sigma} e^{j\omega}$; $|z| > 1$ → $e^{\sigma} > 1$ → $\sigma > 0$

خارج دایره واحد → $\omega: -\infty \rightarrow \infty$



تنها فرق تبدیل لاپلاس و z در متوبر کردن Roc است.

* متوبر خط $Re(s)=a$ در حوزه s ⟵ دایره با شعاع e^a

" سمت چپ خط $Re(s)=a$ " ⟵ داخل دایره با شعاع e^a

" " راست " " " ⟵ بیرون " " " "

سمت راست ⟵ بیرون

سمت چپ ⟵ داخل

خط ⟵ دایره