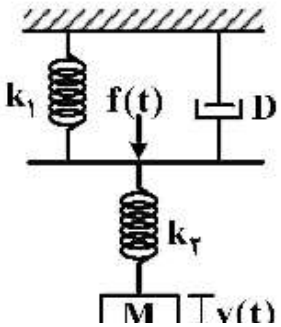
حل سوالات کنترل خطی ارشد ۱۳۹۹

www.Liveamooz.com

همواره سعی کنید سؤال را تبدیل به فرمولها درس کنید.

۱ سیستم زیر، نیروی $f(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی است. به‌ازای چه مقدار k_1، خروجی $y(t)$ با اعمال ورودی ضربهٔ واحد، پس از گذشت مدت زمانی صفر خواهد شد؟ k^*، یک بهرهٔ ثابت است. $M = k_2 = D = 1$



۱) $k_1 > k^*$

۲) $k_1 < k^*$

۳) $k_1 = 2\sqrt{D}$

۴) $k_1 > 0$ ✓

$y(\infty) = 0$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: مدلسازی-پایداری

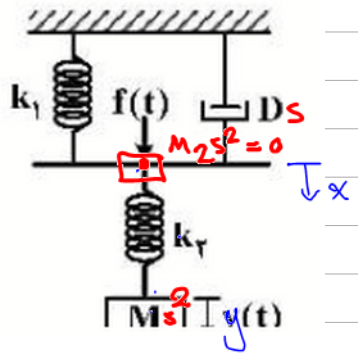
حل تشریحی

در یک سیستم در چه حالتی $p=0$ (های p) در پاسخ به ورودی واحد.

* پاسخ ضربه سیستم پایدار در نهایت به صفر می‌رسد. *

ترجمه: به ازای چه مقدار k_1، سیستم پایدار است؟

$\Delta(s)$ ← مخرج



$M_2 = 0$

روش ماتریسی ← دو یا بیشتر از دو تا جرم

$$\begin{matrix} & M & M_2 \\ M & \begin{bmatrix} Ms^2+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & 0+k_2+k_1+Ds \end{bmatrix}_{2\times 2} & \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix} \\ M_2 & & \end{matrix}$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{}{\Delta(s)}$$

A

$$\Delta(s) = \det(A) = (Ms^2+k_2)(Ds+k_2+k_1) - (k_2)^2$$

$$\Delta(s) = (s^2+1)(s+1+k_1) - 1$$

$$\Delta(s) = 1s^3 + (1+k_1)s^2 + 1s + k_1 s^0 \checkmark$$

شرط پایداری:

① ✓ موجودبودن عامل توانها

② همه علائم یکسان بودن ضرایب → $\begin{cases} 1+k_1>0 \rightarrow k_1>-1 \\ k_1>0 \end{cases} \rightarrow k_1>0$ *

③ $(1+k_1)(1) > 1\times k_1 \rightarrow 1>0$ ✓

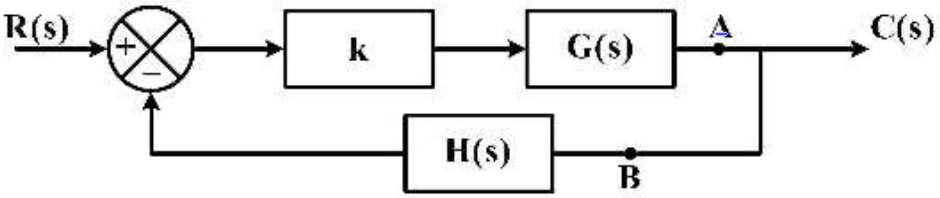
حل تشریحی

$\frac{Y(s)}{F(s)} = G(s)$ $\quad F(s) = 1$ $\quad Y(s) = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

$y(\infty) = ?$ $\rightarrow$ به شرط پایداری $\quad y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s)$

۲

بهرهٔ k را چطور انتخاب کنیم تا اثر اغتشاش وارد در نقطهٔ A و نقطهٔ B، حداقل شود؟



۱) A: کاهش k، B: افزایش k

۲) A: افزایش k، B: کاهش k ✓

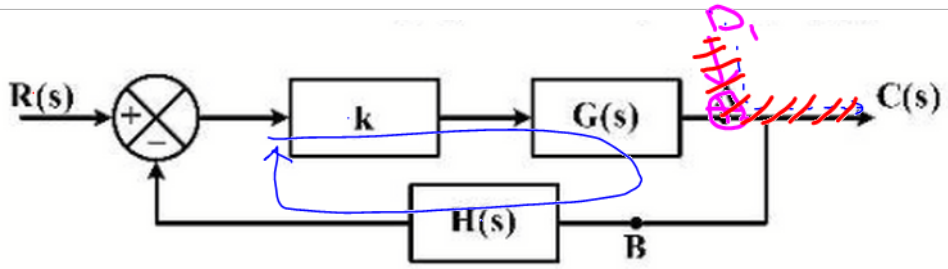
۳) A: کاهش k، B: کاهش k

۴) A: افزایش k، B: افزایش k

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: فصل اول و چهارم

حل تشریحی

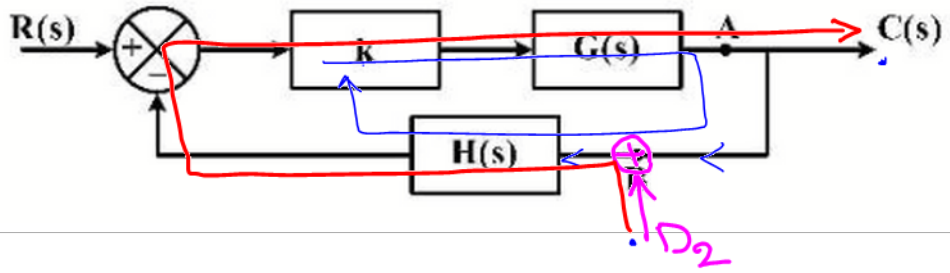


$$\frac{C(s)}{D_1(s)} = \frac{\sum F_i \Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta = 1-(-kGH) = 1+kGH$$

$$F_1 = 1 \qquad \Delta_1 = 1 \qquad \frac{C(s)}{D_1} = \frac{1\times 1}{1+kGH}$$

k↑



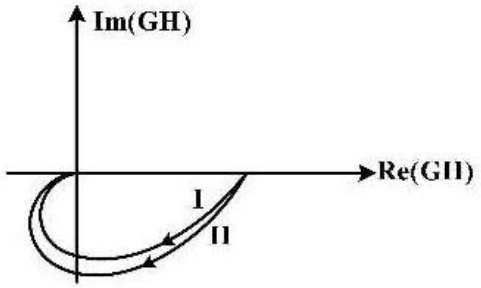
$$\frac{C(s)}{D_2} = ? \frac{\sum F_i \Delta_i}{\Delta}$$

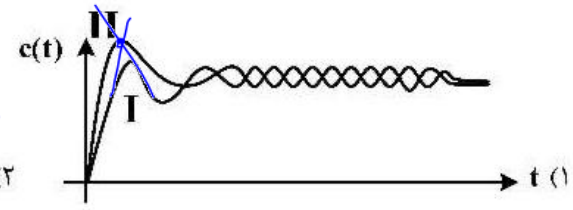
$$F_1 = -kGH \qquad \Delta_1 = 1 \qquad \frac{C(s)}{D_2} = \frac{-kGH}{1+kGH}$$

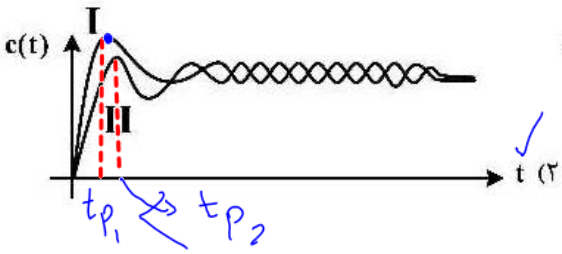
k↓

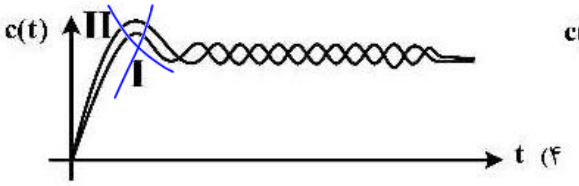
حل تشریحی

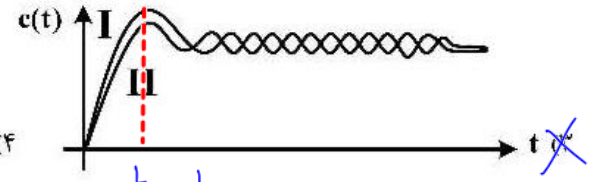
۳ نمودار قطبی دو سیستم مرتبه دو در زیر رسم شده است. درصورتی‌که این دو سیستم فرکانس طبیعی یکسانی داشته باشند، پاسخ پلهٔ این دو سیستم، کدام است؟



۱)


۲)


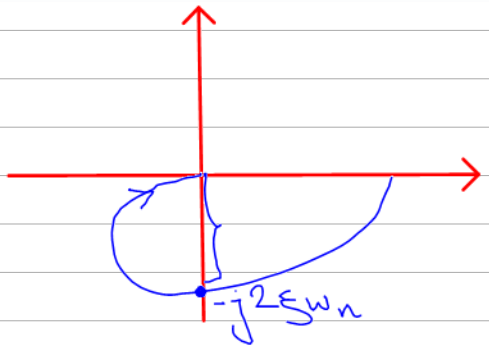
۳)


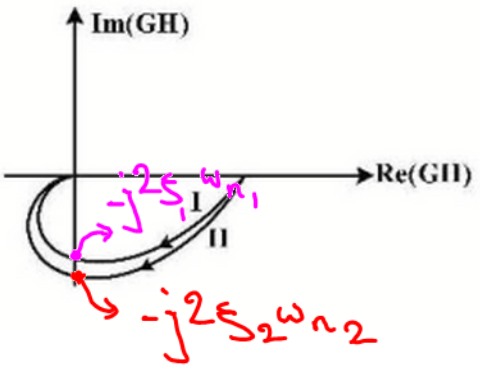
۴)


درجه سختی: ساده

موضوع سوال: نمودار نایکوئیست و مشخصات حالت گذرا

حل تشریحی





$-j2\xi_2\omega_{n_2} < -j2\xi_1\omega_{n_1}$

$\omega_{n_1} = \omega_{n_2}$

$\xi_2 > \xi_1$

دو سیستم مرتبه دوم با ω_n برابر و $\xi_2 > \xi_1$ ←

$\%OS \downarrow$ $\xi \uparrow$

$\xi_2 > \xi_1$

$\%OS_2 < \%OS_1$

$t_{s_1} < t_{s_2}$

$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$\xi \uparrow$ $\omega_d \downarrow$ $t_p \uparrow$

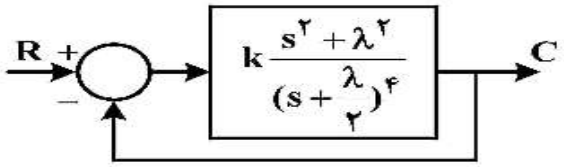
$\xi_1 < \xi_2$

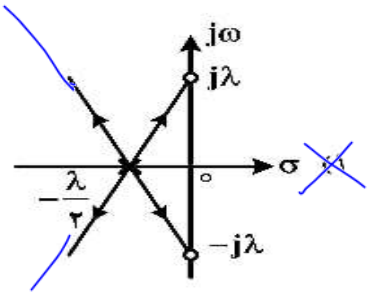
$\omega_{d_1} > \omega_{d_2}$

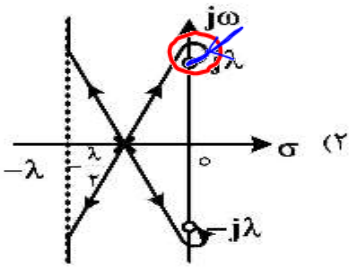
$\boxed{t_{p_1} < t_{p_2}}$

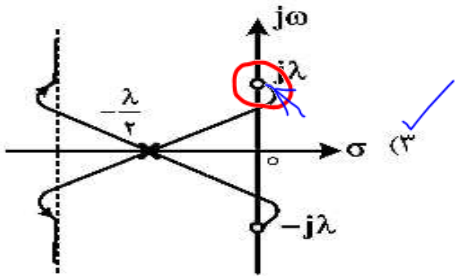
حل تشریحی

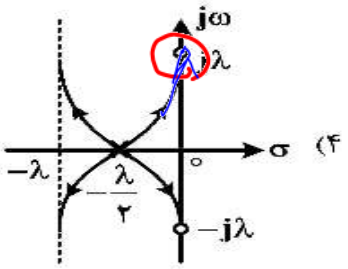
۴ نمودار مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم زیر به‌ازای $k>0$ و $\lambda>0$، کدام است؟



۱)


۲)


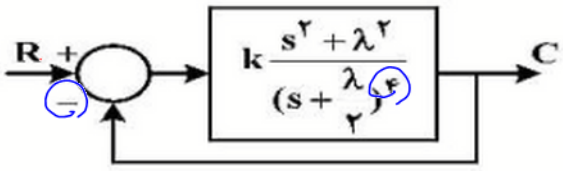
۳)


۴)


درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: مکان هندسی

حل تشریحی



$$\Delta = 1 + k\frac{s^2+\lambda^2}{(s+\frac{\lambda}{4})^2} = 0$$

علامت مکان = + x − = منفی ← خودسکار

① محور حقیقی x

② جابجاها ← { تعداد = n − m = 4 − 2

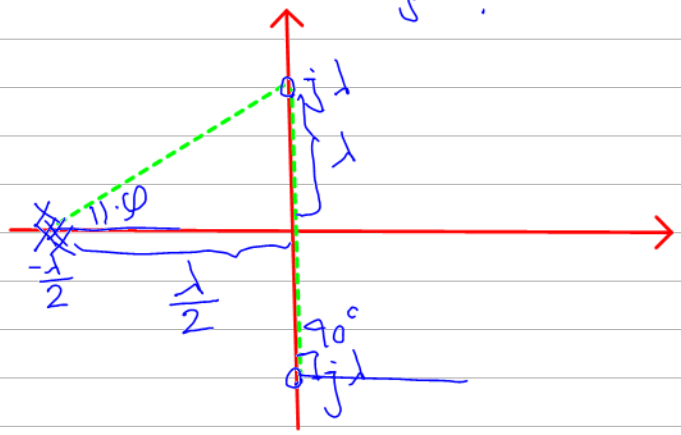
زاویه = $\frac{(2l+1)\pi}{\text{تعداد}}$ ، $l = 0, \pm1, \pm2, \dots$

زاویه → $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ → $\pm 90^\circ$

③ زوایای ورود و خروج ← زاویه ورود به صفر لازم = θ_1

$$\theta_1 = \pi + \sum_{4\varphi} \text{زاویه قطبها} - \sum_{90^\circ} \text{زاویه صفرها}$$

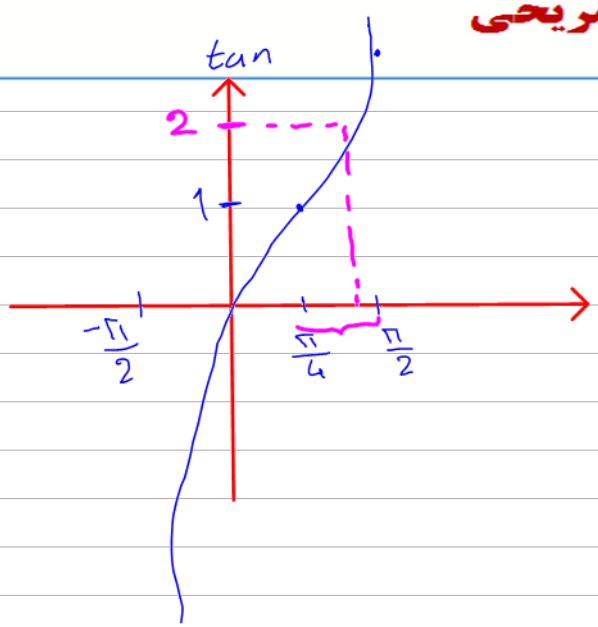
لازم ؟



$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2}}\right) = \tan^{-1}(2)$$

$$\theta_1 = \pi + 4\tan^{-1}(2) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\tan^{-1}(2)$$

حل تشریحی

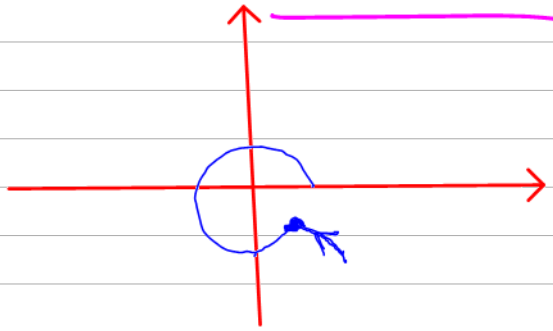


$$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

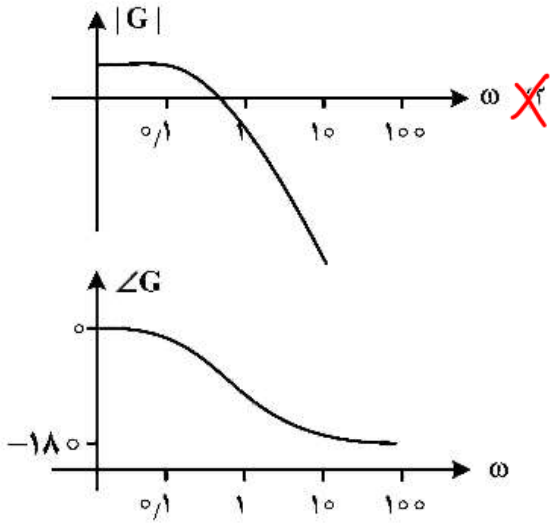
زاویه $\pi < 4\varphi < 2\pi$

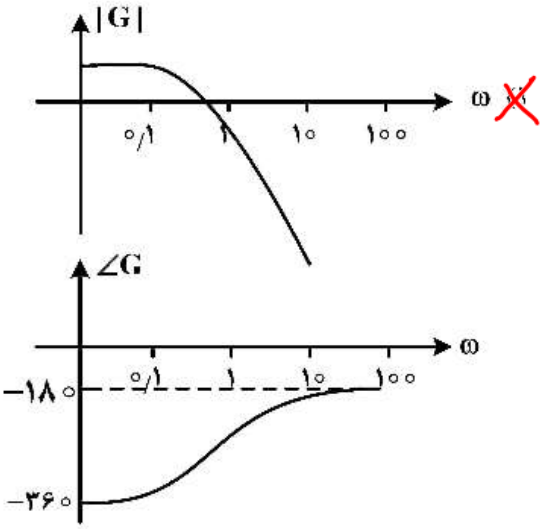
θ_1

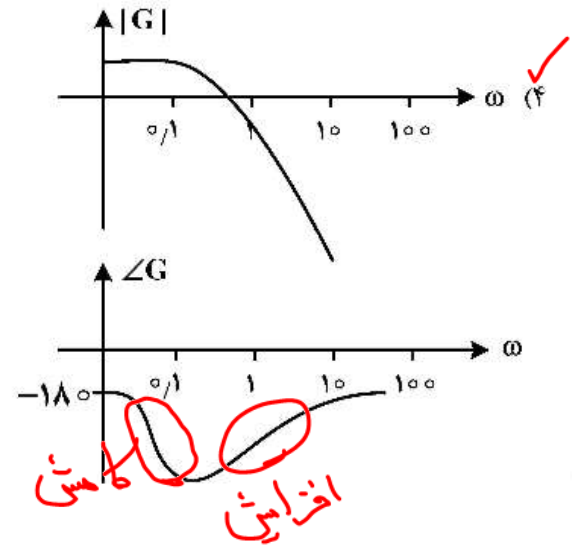
$$\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + 4\varphi < \frac{5\pi}{2}$$

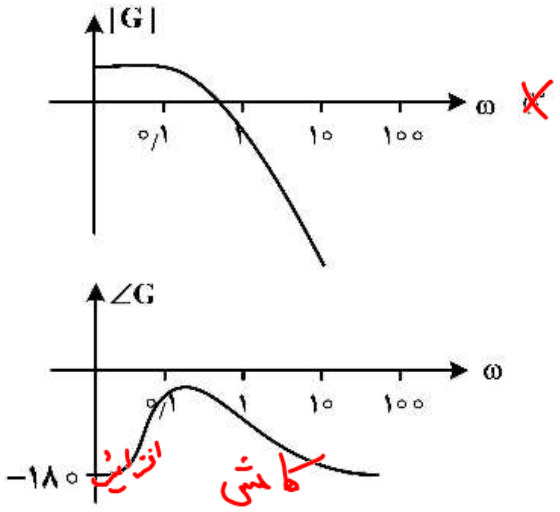


۵ دیاگرام بودی سیستم با تابع تبدیل $G(s)=\frac{۲}{s^۲-۳s-۱}$، کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


درجه سختی: ساده

موضوع سوال: نمودار بودی

حل تشریحی

نمودار فاز ← روند افزایش یا کاهش فاز

$$G(s) = \frac{2}{s^2 - 3s - 1}$$

قطبها $= \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$

قطب سمت راست $= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

قطب سمت چپ $= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

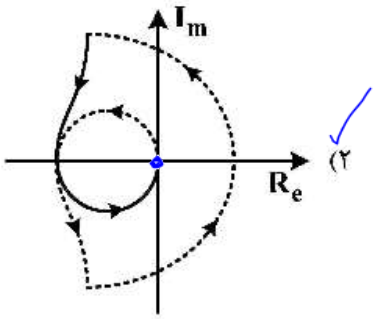
قطب راست (مثبت) — قطب چپ

$\omega: \quad 0 \longrightarrow \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right| \longrightarrow \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \longrightarrow \infty$

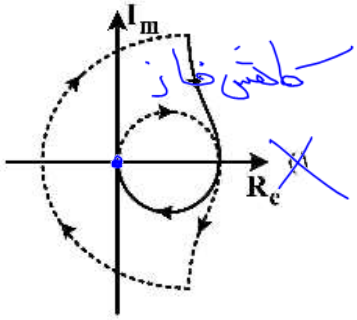
فاز: کاهش فاز ⟵ افزایش فاز

۶

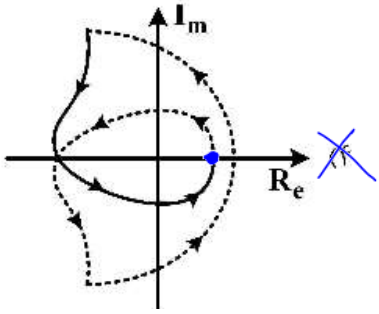
یک سیستم کنترل با تابع تبدیل مسیر پیشروی $G(s)$ و فیدبک واحد منفی را در نظر بگیرید که در آن تابع $G(s)$ حداقل تعداد صفر و قطب حقیقی را داشته باشد. می‌دانیم $g(0^+) = K$ که $g(t)$ پاسخ ضربهٔ $G(s)$ است. همچنین خطای مانای سیستم حلقه‌بسته به ورودی شتاب $(\frac{1}{2}t^2)$ صفر است. کدام گزینه نمودار نایکوئیست این سیستم را نشان می‌دهد؟



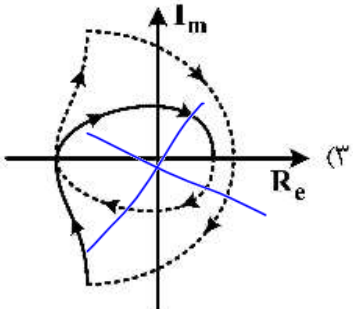
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

درجه سختی: سخت

موضوع سوال: نایکوئیست-خطای حالت ماندگار

حل تشریحی

یک سیستم کنترل با تابع تبدیل مسیر پیشروی $G(s)$ و فیدبک واحد منفی را در نظر بگیرید که در آن تابع $G(s)$ حداقل تعداد صفر و قطب حقیقی را داشته باشد. می‌دانیم $g(0^+) = K$ که $g(t)$ پاسخ ضربهٔ $G(s)$ است. همچنین خطای مانای سیستم حلقه‌بسته به ورودی شتاب $(\frac{1}{2}t^2)$ صفر است. کدام گزینه نمودار نایکوئیست این سیستم را نشان می‌دهد؟

خطای ماندگار به ورودی شتاب صفر است.



خطای تعریفی = $R - y$

حالت پله ↓ شکل ~ = $R - y$

↓

نوع سیستم

بزرگ‌ها پایدار

* نوع ورودی < نوع سیستم ⟶ $e_{ss} = 0$

~ ~ = ~ ~ ⟶ $0 < e_{ss} < \infty$

~ ~ < ~ ~ ⟶ $e_{ss} = \infty$

نوع سیستم: تعداد قطب‌های روی محور $j\omega$ و $G(s)$ حقیقی $s = 0$

نوع سیستم > 2 ⟶

2 < تعداد قطب‌های روی محور $j\omega$ و G

حداقل

↓

تعداد قطب‌های روی محور $j\omega$ و G = 3

$$G(s) = \frac{N(s)}{s^3}$$

$$g(0^+) = \lim_{s \to \infty} sG(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{N(s)}{s^{3-1}} = k$$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{N(s)}{s^2} = k$$

حل تشریحی

درجه $N(s)$ برابر با 2 است.

$$G(s) = \frac{k(s+a)(s+b)}{s^3}$$

$e_{ss}=0 \longrightarrow$ پایدار است $\rightarrow \Delta(s) = 1 + G(s)$

$$\Delta(s) = 1s^3 + ks^2 + k(a+b)s + kab = 0$$ پایدار

$k>0$, $k(a+b)>0$, $kab>0$

$\downarrow$

$a+b>0$

$ab>0 \rightarrow$ a, b هر دو مثبت ✓

a, b هر دو منفی ✗

$a+b>0$

$$G(s) = \frac{k(s+a)(s+b)}{s^3}$$

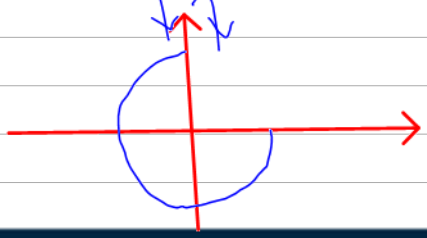
دو سر فاز:

سه تا قطب در مبدا

فاز اولیه $= 3 \times -90^\circ + 0 \times 90 + \angle \tilde{G}(0)$

$\tilde{G}(s) = k(s+a)(s+b)$ $\quad \tilde{G}(0) = kab > 0 \rightarrow \angle = 0$

فاز اولیه $= 3 \times -90^\circ = -270^\circ$



حل تشریحی

نقطه‌های $= \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{k(s+a)(s+b)}{s^3} = 0$

$\omega: 0 \longrightarrow$ مجانب‌های گوه $\longrightarrow$

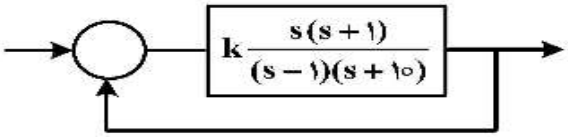
- $s=0$ 3 تا قطب
- $s=-a$ 1 صفر منفی
- $s=-b$ ~ ~ ~ ~

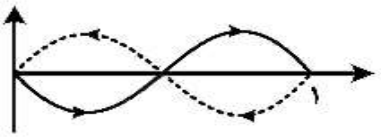
$\omega: 0 \longrightarrow |-a| \longrightarrow |-b| \longrightarrow \infty$

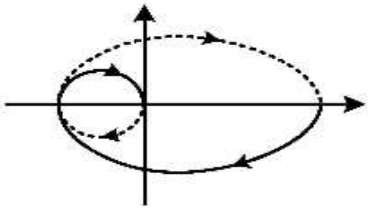
$\longrightarrow$ افزایش فاز $\longrightarrow$ افزایش فاز $\longrightarrow$ فاز

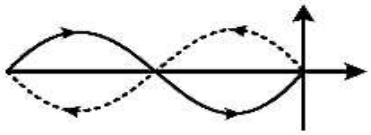
حل تشریحی

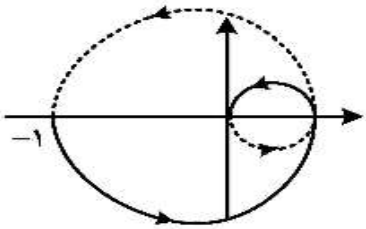
۷ اگرام نایکوئیست سیستم زیر، کدام است؟



۱)


۲)


۳)


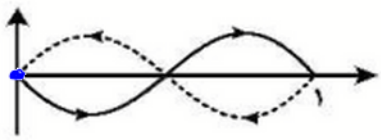
۴)


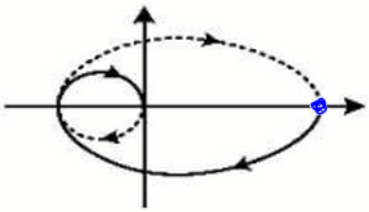
درجه سختی: ساده

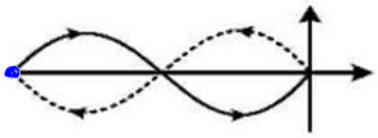
موضوع سوال: نایکوئیست

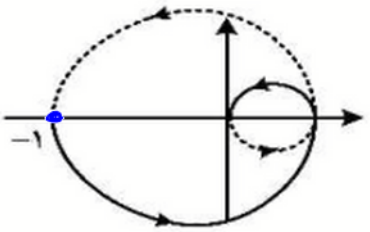
حل تشریحی

$$G(s) = \frac{kS(s+1)}{(s-1)(s+10)}$$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

نقطه شروع ← اندازه / فاز

$$G(0) = \frac{k \times 0 \times 1}{-1 \times 10} = 0$$

حل تشریحی

۸

یک سیستم فیدبک واحد منفی با تابع تبدیل حلقه‌باز $G(s)=\frac{۱}{(s-۳)(s+۲)}$ را در نظر بگیرید. کنترل‌کنندهٔ مناسب برای پایدارسازی سیستم حلقه‌بسته و خطای حالت دائم به ورودی پله $e_{ss}=۰/۰۱$، کدام است؟

۱) $C(s)=k\frac{s+۴}{s+۴/۵}$

۲) $C(s)=k\frac{s-۳}{s+۴}$

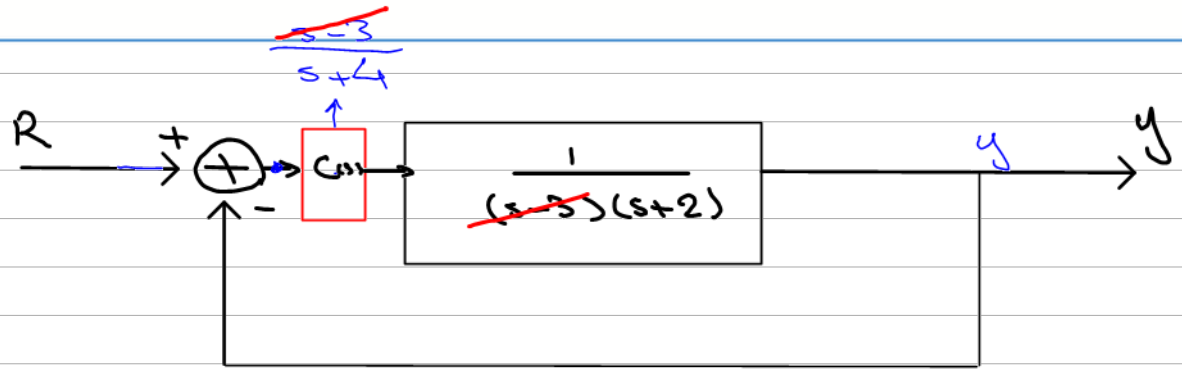
۳) $C(s)=k\frac{s+۴}{s+۶}$

۴) $C(s)=k\frac{s+۴}{s+۵/۱}$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: کنترلر

حل تشریحی



$e_{ss} = 0.01 \longrightarrow$ خطای دائمی $= R - y$ $\longrightarrow$ حلقه باز

تقریبی $\sim = R - y$ $\downarrow$

$$e_{ss} = \frac{\text{دامنه ورودی}}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} C(s)\,G(s)$$

در گزینه 2 حذف صفر و قطب مساوی $\leftarrow$ ناپایداری داخلی

1, 3, 4 $\longrightarrow$ $C(s) = k\,\frac{s+4}{s+\alpha}$

شرط پایداری $\leftarrow$

$$\Delta(s) = 1 + k\,\frac{s+4}{s+\alpha}\,\frac{1}{(s-3)(s+2)} = 0$$

$$= (s+\alpha)(s^2 - s - 6) + ks + 4k$$

$$= 1s^3 + (\alpha - 1)s^2 + (-\alpha - 6 + k)s + 4k - 6\alpha = 0$$

حل تشریحی

شرایط پایداری ←

$$\begin{cases} \alpha - 1 > 0 \\ k - \alpha - 6 > 0 \\ 4k - 6\alpha > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha > 1 \\ k > \alpha + 6 \\ k > \frac{3\alpha}{2} \end{cases}$$

۱ $(\alpha - 1)(k - \alpha - 6) > 1 \times (4k - 6\alpha)$

شرایط پایداری:

① $\alpha > 1$ ② $k > \overbrace{\alpha + 6}^{+}$ ③ $k > \overbrace{\frac{3\alpha}{2}}^{+}$

④ $(\alpha - 1)(k - \alpha - 6) > 4k - 6\alpha$

$$e_{ss} = 0.01 = \frac{1}{1 + k_p} \qquad k_p = 99$$

$$k_p = \lim_{s \to 0} k \frac{s+4}{s+\alpha} \frac{1}{(s-3)(s+2)} = \frac{4k}{-6\alpha}$$

$$\frac{4k}{-6\alpha} = 99 \rightarrow k = \frac{-99 \times 6 \times \alpha}{4}$$

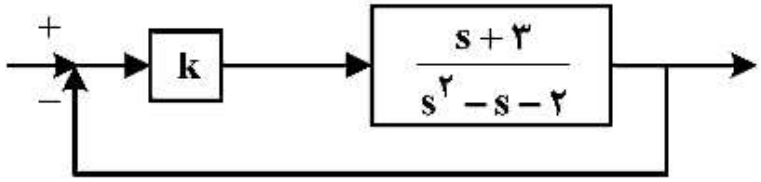
۱) $\alpha = 4.5$ (۲ $\alpha = 6$ (۳ $\alpha = 5.1$ (۴

$e_{ss} = 0.01$ → k عددی منفی → ناممکن

شرط پایداری ← k عددی مثبت $k >$

۹

سیستم زیر را در نظر بگیرید. به ازای چه مقادیری از k سیستم در پاسخ به ورودی پله، دارای پاسخ نوسانی است؟



۱) $k = ۱۳/۳$

۲) $k > ۱۳/۳$

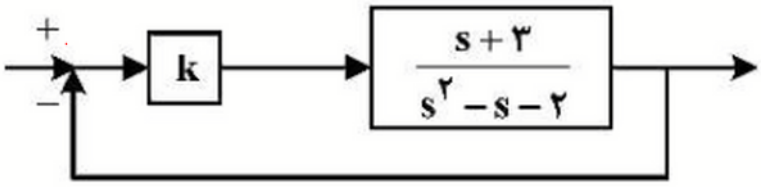
۳) ✓ $۱ < k < ۱۳/۳$

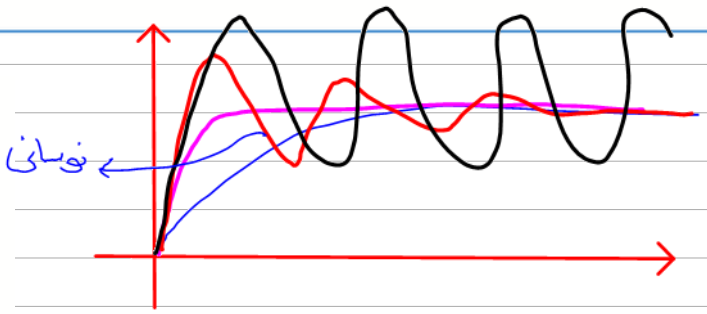
۴) $k > ۱$

درجه سختی: ساده

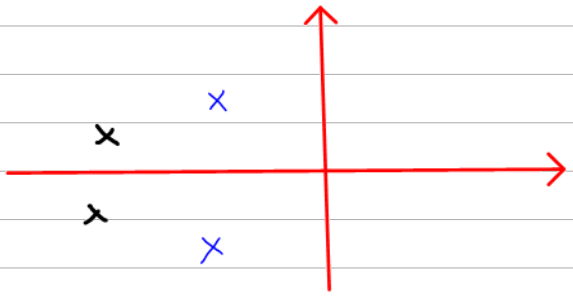
موضوع سوال: فصل دوم و سوم

حل تشریحی





زیرا ← دارای دو قطب حلقه بسته مختلط سمت چپ

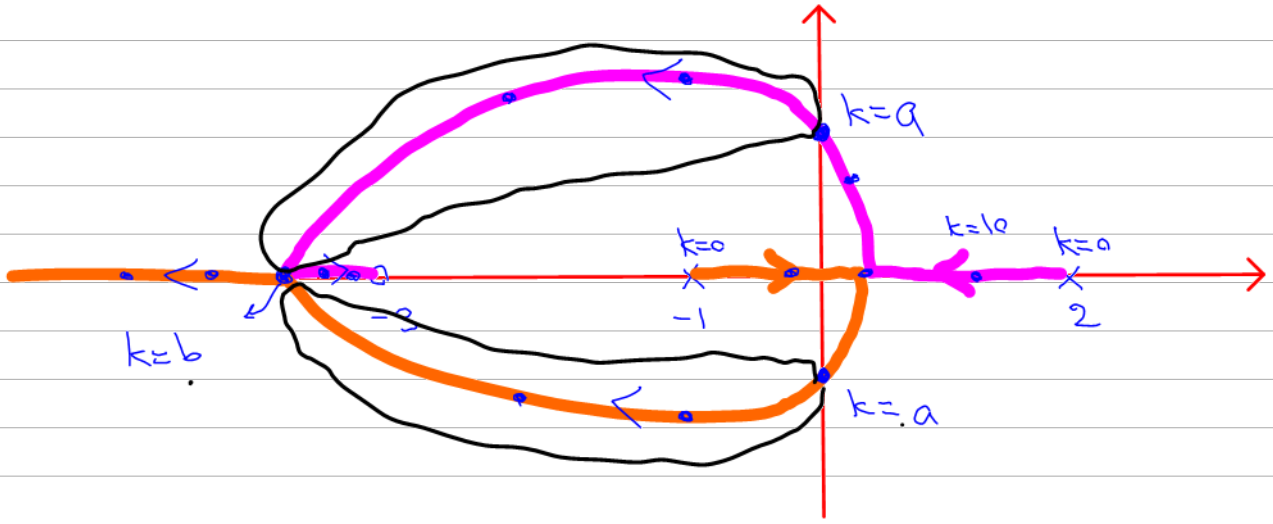


$$\Delta(s) = 1 + k\frac{s+3}{s^2-s-2} = 0$$

علامت مکان = هنوز

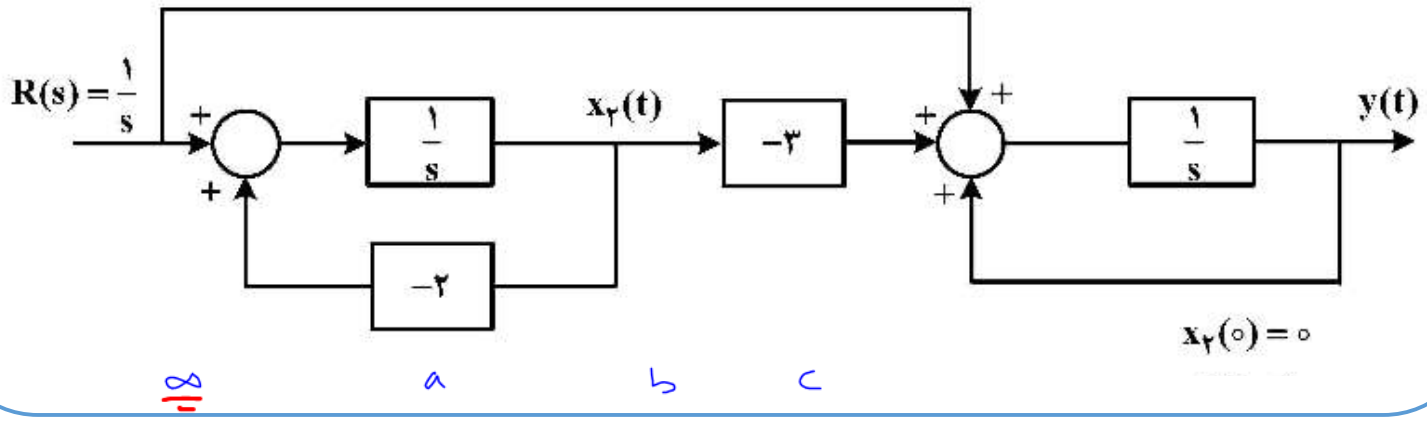


$a < k < b$



حل تشریحی

۱۰ ر حالت دائم خروجی (y_{ss}) برای سیستم زیر،کدام است؟



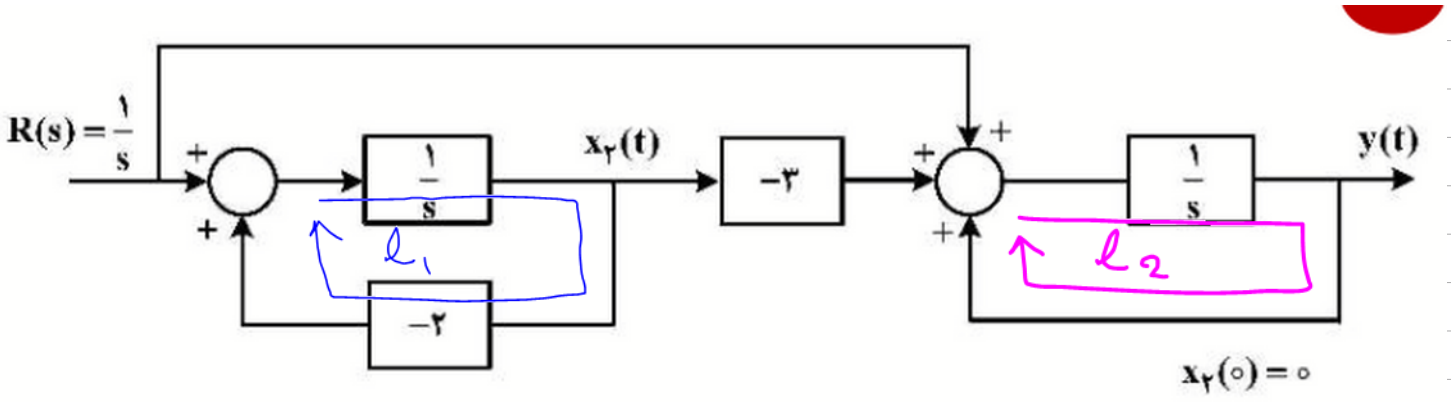
∞ ۸ ب ج

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: پایداری-خطای حالت دایم

حل تشریحی

اگر در گزینه‌های پاسخ حالت داخل حلقه دیدید ← ناپایدار



$\Delta = 1 - (\sum \text{بهره حلقه‌ها}) + (\sum \prod \text{بهره حلقه‌ها که به دو مستقل}) - \dots$

$l_1 = \frac{1}{s} \times -2 \qquad l_2 = \frac{1}{s}$

$\Delta = 1 - \left(-\frac{2}{s} + \frac{1}{s}\right) + \left(\frac{-2}{s^2}\right) = 1 + \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$

$\Delta = s^2 + s - 2 = 0$

$\Delta = (s+2)(s-1) = 0$

قطب سمت راست ← ناپایدار

✓ $y_{ss} = \infty$

حل تشریحی

۱۱

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{k}{s(s+۲)(s+۴)}$$

در حوالی کدام نقطه، کمترین تغییرات قطب‌ها حاصل می‌شود؟

۱) $s=-۳$

۲) $s=-۲/۲$

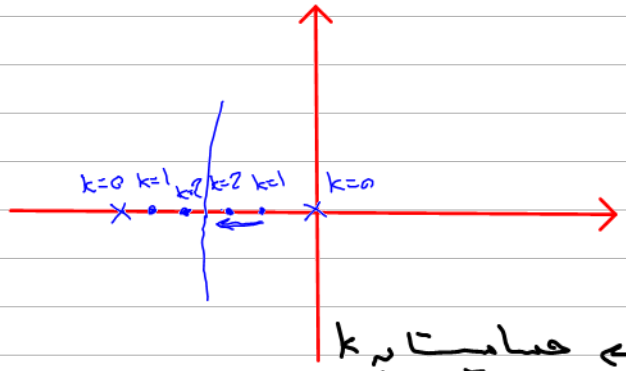
۳) $s=-۱$

۴) $s=-۳/۲۵$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: مکان هندسی

حل تشریحی



کمترین تغییرات ←

یعنی با تغییر k، محل قطب حداقل چه

حد تغییر کند.

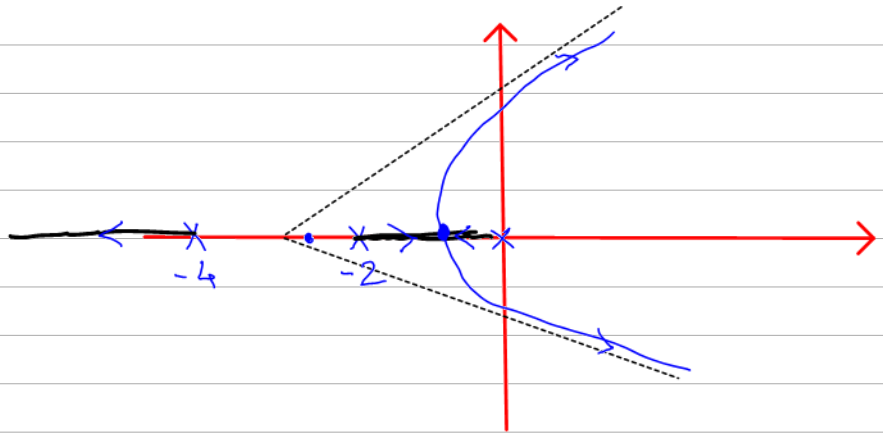
* میزان تغییرات قطب‌ها ← k ← حساسیت به k

سؤال: کدام گزینه حساسیت کمتری به k دارد؟

* هرچقدر نزدیک نقطه شکست نوع حساسیت به k بیشتر می‌شود.

سؤال: کدام نقطه از نقطه شکست بیشترین فاصله را دارد؟

$$G(s)=\frac{k}{s(s+2)(s+4)} \qquad \Delta(s)=1+\frac{k}{s(s+2)(s+4)}=0$$



با توجه $k>0$

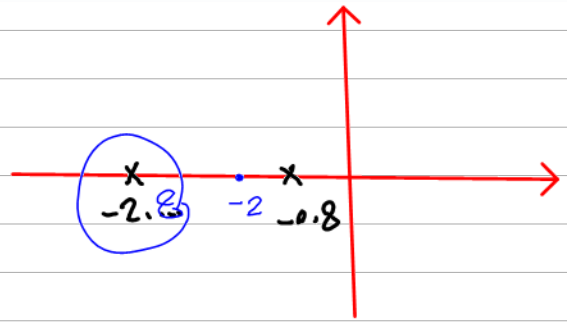
$$\Delta(s)=1+\frac{k}{s(s+2)(s+4)}=0 \rightarrow k=-s(s+2)(s+4)$$

$$k=-(s^3+6s^2+8s) \qquad \frac{dk}{ds}=-(3s^2+12s+8)=0$$

$$\frac{dk}{ds}=s^2+4s+\frac{8}{3}=0 \rightarrow s_1=-2-\sqrt{\frac{16}{3}}=-2-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

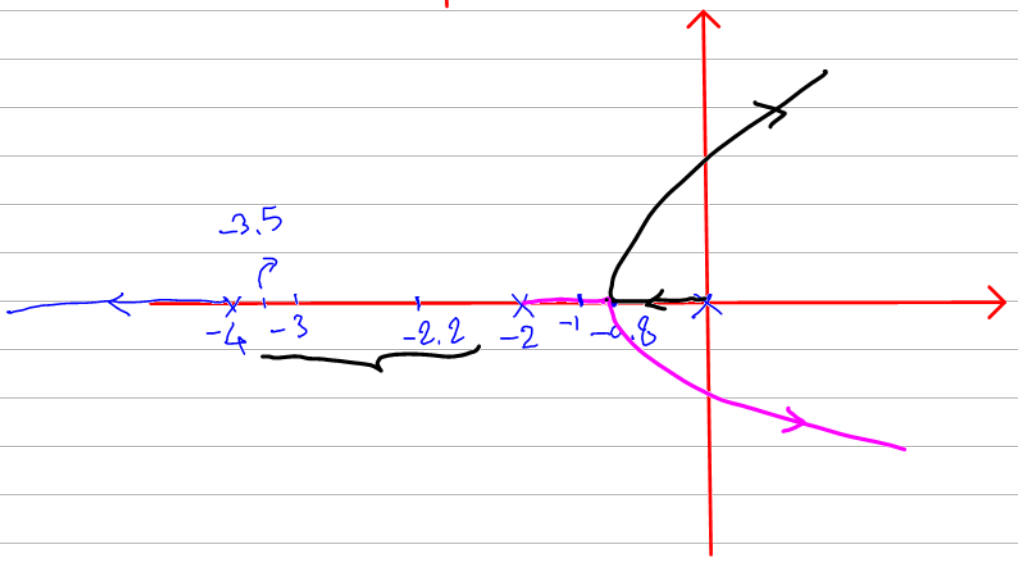
$$s_2=-2+\sqrt{\frac{16}{3}}=-2+\frac{4}{\sqrt{3}}$$

حل تشریحی



نقطه شکست جدا شونده $-2-\frac{4}{\sqrt{3}}$

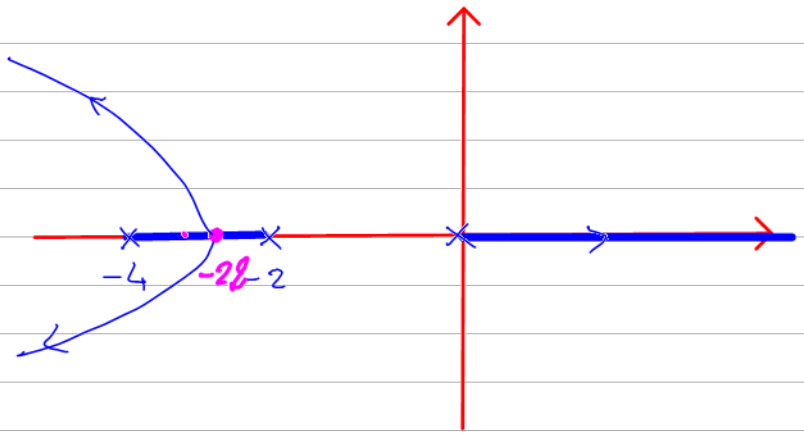
$s_0=-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\checkmark=-0.8$



-2.2 و -3 و -3.25 جزء مکان هایی است و به k حساسیت ندارد.

پس هر سه گزینه از نظر حساسیت به k یکسان است (صفر)

حذف $k<0$



$\frac{dk}{ds}=0\rightarrow s_1=-0.8$

$s_2=-2-\frac{4}{\sqrt{3}}$

$=-2.8$

از -2.8 بیشترین فاصله را دارد؟

- $-2.2\checkmark$
- -3
- -3.25

حل تشریحی

به ازای Kهای مثبت حساسیت (-1) زیاد است

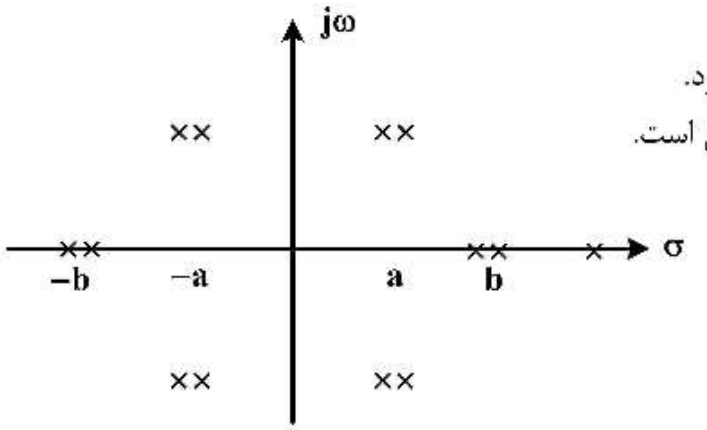
" " " " " -2.2 و -3 و -3.25 صفر است.

" " " صفر " -2.2 از -3 و -3.25 کمتر است.

" " " " " (-1) صفر است.

۱۲

در صورتی‌که محل ریشه‌های معادلهٔ مشخصه مطابق شکل زیر باشد، در ارائهٔ راث چه رخ می‌دهد؟



۱) بین دو سطر صفر سه تغییر علامت وجود دارد.

۲) بعد از اولین سطر صفر هفت تغییر علامت وجود دارد.

۳) دارای یک سطر صفر و چهار تغییر علامت بعد از آن است.

۴) سه سطر صفر دارد.

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: جدول راوث

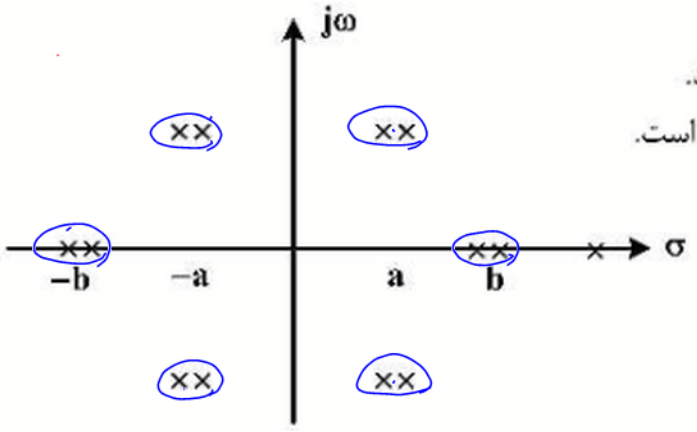
حل تشریحی

۱) بین دو سطر صفر سه تغییر علامت وجود دارد.

۲) بعد از اولین سطر صفر هفت تغییر علامت وجود دارد.

۳) دارای یک سطر صفر و چهار تغییر علامت بعد از آن است.

۴) سه سطر صفر دارد.



۱) ۱۳ تا ریشه دارد ← ۵ از درجه ۱۳ است

۲) ۱۲ تا ← متقارن دارد ← سطر "۰" عامل صفر است.

۳) ۶ تا ← ← ریشه راست دارد ← بعد از سطر عامل "۰" صفر ۶ تا تغییر علامت دارد

۴) ریشه های متقارن از مرتبه تکرار ۲ هستند ← ۲ تا سطر صفر دارد.

حل تشریحی

حل تشریحی

حل تشریحی