حل سوالات سیگنال سیستم

کارشناسی ارشد سال ۱۴۰۰

www.Liveamooz.com
Telegram: @Controldehghanii

در ادامه دوره ۷۵۱۰ ← سوالات ارشد سال ۸۹ به بعد
پس از هر سوال ← نکات مربوطه

نکات را به صورت سوموزی

تا سال ۹۸ دوره کامل سیگنال انجام شده

- ROC ← نکات مربوط به ROC
- ۹۳ ← قضیه مقدار اولیه ←
- ۹۴ ← سیگنال متناوب کامل

نحوه مشخص کردن حل ←
لگ نشانه ها مفی ←

۱

پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $h(t)$ و تبدیل فوریهٔ آن به‌صورت $H(\omega)=\frac{۱+j\omega}{۲-j\omega}$ است.

کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) غیرعلّی و وارون‌پذیر
۲) علّی و وارون‌پذیر
۳) علّی و وارون‌ناپذیر
۴) غیرعلّی و وارون‌ناپذیر

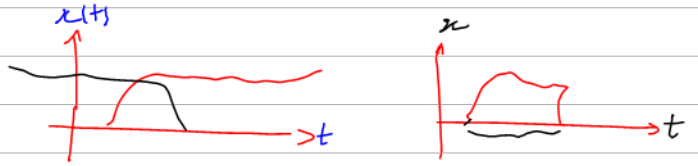
درجه سختی: متوسط

به عنوان مثال در دوره نکته تست ۷۰۱۰ حل کرده بودیم.

$x(t) \longrightarrow X(s)$ $\qquad X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$

$ROC_x = \{ s \mid X(s) \neq \pm\infty \}$

نحوه تعیین ROC :



① قطبهای $X(s)$ را روی صفحه s مشخص کنید.

② روی هر قطب یک خط عمودی رسم کنید.

③ اگر $x(t)$ دست راستی باشد، ROC_x سمت راست، راستترین خط است.

④ " " چپی " " " چپ، چپترین " " .

⑤ " " از هر دو طرف محدود باشد و $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt < \infty$ باشد، ROC_x کل صفحات.

⑥ " " نامحدود باشد، ROC_x بین دو خط است که توسط اطلاعات تکمیلی تعیین میشود.

نکته! اگر $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-at}\, dt < \infty$ باشد یعنی $s = a$ در ROC_x هست.

" $= \infty$ " " " " " " " نیست.

نکته! اگر دو سیگنال مثلاً $X(s)$ و $Y(s)$ در یک عملیات ریاضی مشترک کنند یعنی حتماً ROC_x و ROC_y باهم اشتراک دارند.

$x(t) + y(t)$

مرور نکات

بررسی معکوس پذیری سیستم LTI:

① هرگاه بتوان رابطه سیستم را به فرم $y(t)=x(t)*h(t)$ نوشت آن سیستم LTI است.

② اگر سیستم LTI دارای پاسخ ضربه $h(t)$ باشد شرط معکوس پذیری می تواند این باشد که معکوس پاسخ ضربه به ازای عالم مزخرفی مانند همگرایی H ، تعریف شده باشد و عدد شود.
$H(j\omega)$ $H(s)$

$H(s)=\frac{1}{s+1}$ $Re(s)>-1$ $H(s)=\frac{s-2}{s+1}$ $Re(s)>-1$

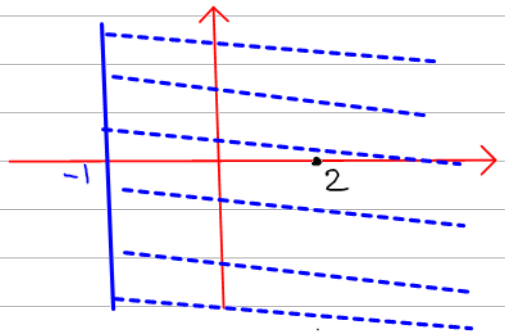
$H^{-1}(s)=\frac{s+1}{1}$ ✓

$y(t)=(x(t)\cos(t))*(u(t))$ → ورودی $=x(t)\cos(t)$

$h(t)=u(t)$

$h(t)$ → $H(j\omega)$ / $H(s)$ / $H(z)$ → $\frac{1}{H(j\omega)}$ یا $\frac{1}{H(s)}$ یا $\frac{1}{H(z)}$

$H_i(s)=s+1$



$H_i(s)=\frac{s+1}{s-2}$ $s=2$ → $H_i(s)=\frac{3}{0}$ معکوس ناپذیر ✗

$Re(s)>-1$

مرور نکات

① هر سیگنالی که دارای تبدیل فوریه باشد حتماً دارای تبدیل لاپلاس نیز هست و می‌توان با جایگذاری s به جای $j\omega$ در تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس را بدست آورد و حتماً محور $j\omega$ نیز در ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس خواهد بود.

② اگر سیگنالی دارای تبدیل لاپلاس باشد، در صورتی که محور $j\omega$ در ROC آن قرار داشته باشد دارای تبدیل فوریه خواهد بود که با جایگذاری $j\omega$ به جای s بدست می‌آید و در غیراینصورت دارای تبدیل فوریه نخواهد بود.

③ اگر تبدیل لاپلاس سیگنالی را دانسته باشیم به سؤالات زیر پاسخ خواهیم داد:

(I) ROC دستگاه پایدار است اگر و تنها اگر بزرگترین توان s در مخرج $\geq$ بزرگترین توان s در صورت

$X(s)$ محور $j\omega \in ROC_x \longrightarrow X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=j\omega}$

$X(j\omega) \xrightarrow{j\omega = s} X(s)$ وجود دارد $\rightarrow$ محور $j\omega \in ROC_x$

$X(s) \xrightarrow[s=j\omega]{\text{اگر محور } j\omega \in ROC_x} X(j\omega)$

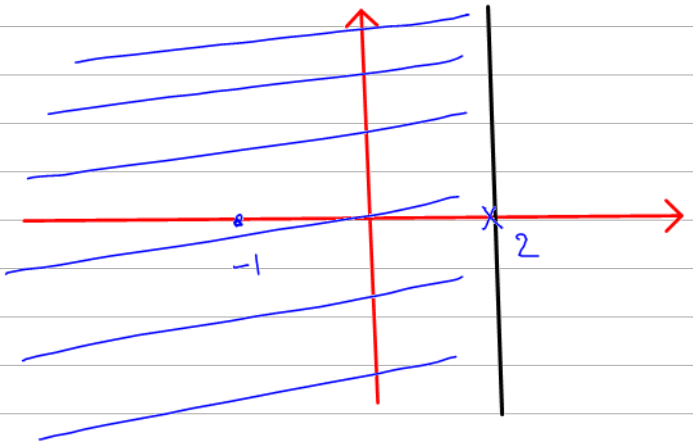
حل تشریحی

پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان $h(t)$ و تبدیل فوریهٔ آن به‌صورت $H(j\omega)=\frac{1+j\omega}{2-j\omega}$ است.

کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) غیرعلّی و وارون‌پذیر
۲) علّی و وارون‌پذیر
۳) علّی و وارون‌ناپذیر
۴) غیرعلّی و وارون‌ناپذیر

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+1}{2-j\omega} \xrightarrow{j\omega=s} H(s)=\frac{s+1}{2-s}$$



$$H_i(s)=\frac{2-s}{s+1} \qquad H_i(-1)=+\frac{3}{0}$$

@liveamooz www.liveamooz.com

۲ عیناً سال ۹۴

ضرایب سری فوریهٔ سیگنال زمان گسستهٔ متناوب $x[n]$ با پریود $N=۶$ را a_k می‌نامیم. دراین‌صورت ضرایب سری فوریهٔ سیگنال متناوب زمان پیوستهٔ $y(t)$ با تعریف $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-۴n)$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}a_k$

۲) $\frac{۱}{۴}a_k$

۳) $۴a_k$

۴) $۶a_k$

درجه سختی: دشوار

① تعریف تبدیل فوریه:

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega) \longrightarrow \begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

عکس تبدیل فوریه

$$x[n] \xrightarrow{F} X(j\omega) \quad (X(e^{j\omega})) \longrightarrow \begin{cases} X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega \end{cases}$$

متناوب با 2π

* تبدیل فوریه برای سیگنالهای متناوب و نامتناوب تعریف می‌شود.
* " " سیگنالهای گسسته در حسب ω دوره‌ای هستند.
* " " " " " " متناوب با 2π هستند.

② تعریف سری فوریه:

سری فوریه برای سیگنالهای متناوب تعریف می‌شود.

* محاسبه سری فوریه:

(I) در مرحله اول دوره تناوب $x(t)$ یا $x[n]$ را محاسبه می‌کنیم.

(II) فرکانس پایه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ یا $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ را محاسبه می‌کنیم.

(III)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 n} \qquad a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

* ضرایب سری فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$، متناوب با دوره تناوب N_0 است.

حل تشریحی

* لم اول ← در سیگنال، فرمول عجیب و غریب نداریم.

↳ با عملیات ریاضی که معادل با مفاد سیگنال استفاده می‌شود صورت سؤال ساده می‌شود.

$x[n]\ ,\ N_0 = 6 \longrightarrow a_k$

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-4n) \longrightarrow b_k = ?$

دوره تناوب y ؟

اگر $P[m]$ سیگنال گسسته با دوره تناوب M_0 ←

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P[m]\delta(t - T_0 m) \longrightarrow T_x = M_0 \times T_0$

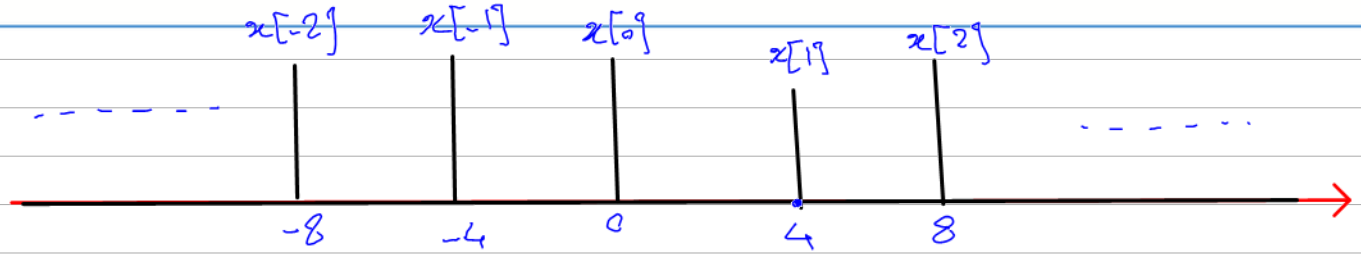
$T_y = 6 \times 4 = 24 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_y} = \frac{\pi}{12}$ ✓

$b_k = \frac{1}{T_y}\int_{\langle T_y \rangle} y(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{24}\int_{\langle 24 \rangle} y(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{12}t}\, dt$

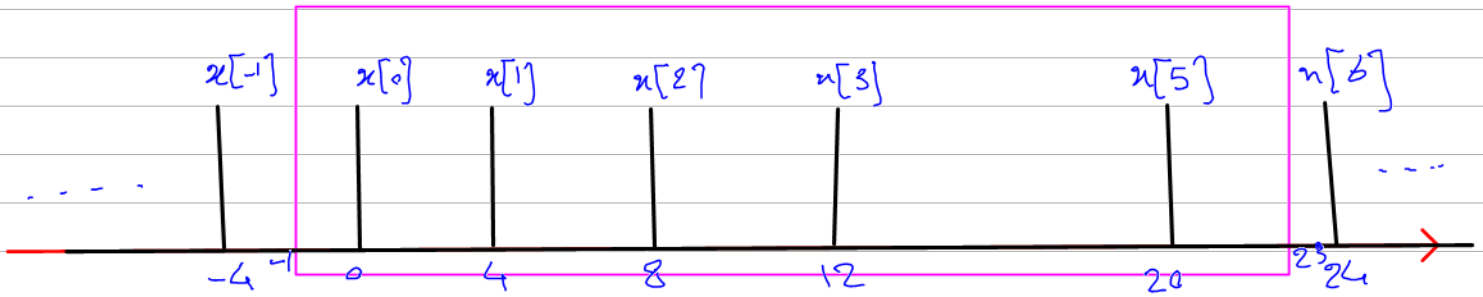
$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-4n) = x[0]\delta(t) + x[1]\delta(t-4) + x[2]\delta(t-8) + \cdots$

$+ x[-1]\delta(t+4) + x[-2]\delta(t+8) + \cdots$

حل تشریحی



$$\int_{\langle 24\rangle} = \int_{-1}^{23}$$



$$y_{\langle 24\rangle} = x[0]\delta(t) + x[1]\delta(t-4) + \cdots + x[5]\delta(t-20)$$

$$b_k = \frac{1}{24}\int_{\langle 24\rangle} \left[x[0]\delta(t) + x[1]\delta(t-4) + \cdots + x[5]\delta(t-20)\right] e^{-jk\frac{\pi}{12}t}\, dt$$

$$f(t)\,\delta(t-a) = f(a)\,\delta(t-a)$$

$$b_k = \frac{1}{24}\int_{-1}^{23} \left(x[0]\, e^{-jk\frac{\pi}{12}\cdot 0}\,\delta(t) + \cdots + x[5]\, e^{-jk\frac{\pi}{12}\cdot 20}\,\delta(t-20)\right] dt$$

$$b_k = \frac{1}{24}\left[\int_{-1}^{23} x[0]\,\delta(t)\,dt + \cdots + \int_{-1}^{23} x[5]\, e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\,\delta(t-20)\,dt\right]$$

حل تشریحی

$$\int_c^b \delta(t-a)\,dt = \begin{cases} 1 & a \in [c,b] \\ 0 & a \notin [c,b] \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{24}\left[x[0]\int_{-1}^{23} \delta(t+1)\,dt + \cdots + x[5]\,e^{-jk\frac{5\pi}{3}}\int_{-1}^{23} \delta(t+20)\,dt \right]$$

$$b_k = \frac{1}{24}\left[x[0] + x[1]e^{-jk\frac{\pi}{3}} + \cdots + x[5]e^{-jk\frac{5\pi}{3}} \right]$$

$x[n]$, $N_0 = 6 \longrightarrow a_k$ $\qquad \omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\,e^{-jk\frac{\pi}{3}n} =$$

$$a_k = \frac{1}{6}\left[x[0] + x[1]\,e^{-jk\frac{\pi}{3}} + \cdots + x[5]\,e^{-jk\frac{5\pi}{3}} \right]$$

$$b_k = \frac{1}{4}a_k \checkmark$$

زمان پیوسته : $t : a \to b \Rightarrow$ طول بازه $= b-a$

زمان گسسته : $n : a \to b \Rightarrow$ طول بازه $= b-a+1$

حل تشریحی

حل تشریحی

۳

$x(t)$، سیگنال زمان پیوسته با انرژی E_x به یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\frac{۱}{t}$ ، به‌عنوان ورودی اعمال می‌شود. اگر $y(t)$ سیگنال خروجی باشد، در این‌صورت انرژی $y(t)$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}E_x$

۲) E_x

۳) $\pi^۲E_x$

۴) ∞

درجه سختی: متوسط

مرور نکات

① خاصیت دوگانی تبدیل فوریه

$$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$$
$$X(t) \longrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

② انرژی سیگنال در حوزه زمان و فرکانس برابر است.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

③ خاصیت دوگانی سری فوریه

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad ; \quad T_x = 2\pi$$
$$X(t) \longrightarrow x[-k]$$

حل تشریحی

$y(t) = x(t) * h(t)$; $h(t) = \frac{1}{t}$

تبدیل به ضرب

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ $\qquad E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = ?$

$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$

طبق رابطه پارسوال:

$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega$

$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 |H(j\omega)|^2 d\omega$

$|ab| = |a||b|$

$h(t) = \frac{1}{t} \longrightarrow H(j\omega) = ?$

$sgn(t) \longrightarrow \frac{2}{j\omega}$

$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$

$\frac{1}{2} \frac{2}{t} \longrightarrow \frac{1}{2} 2\pi\, sgn(-\omega)$

$\frac{1}{t} \longrightarrow \pi\, sgn(-\omega) = \begin{cases} \pi & \omega < 0 \\ -\pi & \omega > 0 \end{cases}$

حل تشریحی

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, |H(j\omega)|^2 \, d\omega$$

$$H(j\omega) = \pi \, sgn(-\omega) = \begin{cases} \pi & \omega \leq 0 \\ -\pi & \omega > 0 \end{cases}$$

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} \pi & \omega \leq 0 \\ \pi & \omega > 0 \end{cases} = \pi$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, \pi^2 \, d\omega = \pi^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \right)}_{E_x}$$

$$E_y = \pi^2 E_x$$

۴ مقدار انتگرال زیر، کدام است؟

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^{۲}\left(\frac{۳\omega}{۲}\right)\cos(\omega)}{\sin^{۲}\left(\frac{\omega}{۲}\right)} d\omega$$

۱) π
۲) ۲π
۳) ۴π
۴) ۶π

درجه سختی: دشوار

جدول تبدیل فوریه

سیگنال حوزه زمان	شرط وجود تبدیل فوریه	تبدیل فوریه
$e^{at}u(t)$	$Re\{a\} < 0$	$\frac{1}{j\omega - a}$
$e^{at}u(-t)$	$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j\omega}$
$\delta(t-a)$	-	$e^{-ja\omega}$
$\delta(t)$	-	1
$u(t)$	-	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
e^{jat}	-	$2\pi\delta(\omega - a)$
1	-	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$a > 0$	$\Pi(\frac{\omega}{2a})$
$\Pi(\frac{t}{2a})$	-	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
$\Lambda(\frac{t}{2a})$	-	$\frac{1}{2a}\left(\frac{2\sin a\omega}{\omega}\right)^2$
$e^{a\lvert t\rvert}$	$a < 0$	$-\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$sgn\,(t)$		$\frac{2}{j\omega}$

جدول تبدیل فوریه گسسته

سیگنال حوزه زمان	شرط وجود تبدیل فوریه	تبدیل فوریه
$a^n u[n]$	$\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$a^n u[-n]$	$\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{ae^{-j\omega} - 1}$
$\delta[n-a]$	-	$e^{-ja\omega}$
$\delta[n]$	-	1
$u[n]$	-	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega)$
e^{jan}	-	$2\pi\delta(\omega - a)$
1	-	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin an}{\pi n}$	$a > 0$	$\Pi(\frac{\omega}{2a})$
* $\Pi(\frac{n}{2a})$	-	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$ *
$\Lambda(\frac{n}{2a})$	-	$\frac{1}{2a}\left(\frac{2\sin a\omega}{\omega}\right)^2$
$a^{\lvert n\rvert}$	$\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$
$sgn\,[n]$	-	$\frac{2}{j\omega}$

* بیان دوم $\Pi\left(\frac{n}{2a}\right) \longrightarrow \frac{\sin\left((2a+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

* هرگاه در سیگنال حامل انتگرال بخواهد یعنی از جدول ها استفاده کنید.

* هرگاه انتگرالی از یک سیگنال یا انتگرالی از یک سیگنال و e^{jat} را برحسب زمان بخواهد داریم:

(I) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ یا $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jat}dt$ را بخواهد، تبدیل فوریه $x(t)$ را بنویسید:

$$x(t) \longrightarrow X(j\omega) \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \qquad X(-ja)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jat}dt$$

* اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را بلد نبودید، ساده‌ترین سیگنال به $x(t)$ را از جدول تبدیل فوریه نوشته و با عملیات ریاضی روی دو طرف تعریف تبدیل فوریه، $x(t)$ را بیابید.

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx(t)}{dt}e^{j2t}dt = ?$$

(II) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ یا $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jan}$ را بخواهد.

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$$

$$X(j0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \qquad X(-ja)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jan}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[\overbrace{n-2}^{n'}]\,e^{jan} = ? \qquad \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']e^{jan'+ja2} = e^{ja2}\underbrace{\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']e^{jan'}}_{X(-ja)}$$

(III) $\int_{-a}^{a} x(t)\,dt$ یا $\int_{-a}^{a} x(t)e^{jbt}dt$ یا $\sum_{n=-a}^{a} x[n]$ یا $\sum_{n=-a}^{a} x[n]e^{jbn}$ را بخواهد.

* تعریف سری فوریه را بنویسید.

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

* از روی $x(t)$ یا $x[n]$، T_0 (N_0) و ω_0 را حساب کنید و در طرف دوم سری فوریه k را طوری عدد دهید که با انتگرال یا سیگمای خواسته شده یکی شود.

در صورت لزوم از عملیات ریاضی یا تغییر متغیر هم استفاده کنید.

$x[n] \longrightarrow a_k = 1 - (-1)^k \quad , \quad \omega_0 = \pi$ $\qquad \sum_{n=0}^{1} x[n-10]$

$\downarrow$

تعریف سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} \qquad N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2$$

$$a_k = \frac{1}{2} \sum_{n=<2>} x[n]\, e^{-jk\pi n} \qquad \sum_{n=0}^{1} \overbrace{x[n-10]}^{n'} = \sum_{n'=-10}^{-9} x[n']$$

$n' = n - 10$

$$2a_k = \sum_{n=-10}^{-9} x[n]\, \overbrace{e^{-jk\pi n}}^{1} \qquad k=0 \qquad = \sum_{n'=-10}^{-9} x[n'] \times 1$$

$$2a_0 = \sum_{n=-10}^{-9} x[n]$$

$$2x0 = \sum_{n=-10}^{-9} x[n] = \sum_{n=0}^{1} x[n-10] \quad \checkmark$$

$\sum_{n=0}^{2} x[n] = ?$

$$a_k = \frac{1}{2} \sum_{n=<2>} x[n]\, e^{-jk\pi n} \Rightarrow$$

$$2a_k = \sum_{n=0}^{1} x[n]\, \overbrace{e^{-jk\pi n}}^{1} \qquad k=0 \qquad 2a_0 = 2x^{e} = \sum_{n=0}^{1} x[n]$$

$$\sum_{n=0}^{2} x[n] = \left(\sum_{n=0}^{1} x[n]\right) + x[2] = 0 + x[2] = 0 + 2 = 2$$

$$x[\overbrace{n}^{2}] = \sum_{n=<N_0>} a_k\, e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{1} a_k\, e^{jk\pi \overbrace{n}^{2}}$$

$$= a_0 + a_1\, e^{j2\pi} = 0 + 2 \times 1 = 2$$

$x[n] \longrightarrow a_k = 1 - (-1)^k$ ، $\omega_0 = \pi$

$\sum_{n=0}^{1} x[n-10] = ?$ $\qquad$ $\sum_{n=0}^{2} x[n] = ?$

(IV) انتگرالی بر حسب ω بخواهد: $\int X(j\omega)e^{jb\omega}d\omega$ یا $\int X(j\omega)d\omega$

① حدود انتگرال اگر ∞ باشد تعریف عکس تبدیل فوریه زمان پیوسته را نوشته و داریم:

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$ $\qquad$ $2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$ $\qquad$ $2\pi x(b) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{jb\omega}d\omega$

② حدود انتگرال محدود باشد عکس تبدیل فوریه گسسته را بنویسید.

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$ $\qquad$ $2\pi x[0] = \int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)d\omega$ $\qquad$ $2\pi x[b] = \int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)e^{jb\omega}d\omega$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{3\omega}{2}\right)\cos(\omega)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}d\omega$$

$$\cos(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

$n=1$ $\qquad$ $n=1$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{j\omega}d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j\omega}d\omega$$

$X(j\omega)$

$$\pi x[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\omega)e^{j\omega}d\omega$$

$$\pi x[-1] = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\omega)e^{-j\omega}d\omega$$

مرور نکات

① $x(t) \overset{n}{*} y(t) \longrightarrow X(jw)\,Y(jw)$

② $\Pi\left(\frac{n}{2a}\right) \longrightarrow \frac{\sin\left(\frac{(2a+1)w}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$

$x[n] \longrightarrow X(jw)$

$$X(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} X(jw)\,e^{jwn}\,dw$$

حل تشریحی

$$I = \Pi x[1] + \Pi x[-1]$$

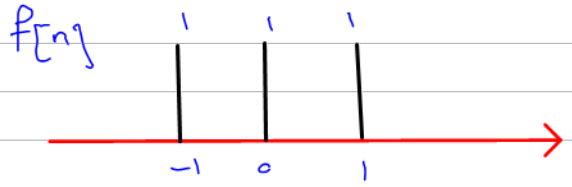
$$x[n] \longrightarrow \frac{\sin^2\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} = X(j\omega)$$

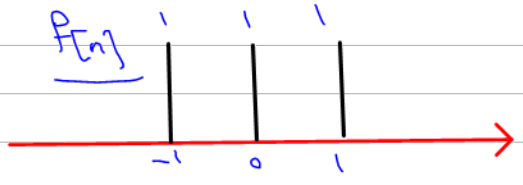
$$\Pi\left(\frac{n}{2\times N_1}\right) \longrightarrow \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$f[n] = \Pi\left(\frac{n}{2}\right) \longrightarrow \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = F(j\omega)$$

$$x[n] = f[n] * f[n] \longrightarrow F(j\omega) \times F(j\omega) = X(j\omega)$$

$$x[n] = \Pi\left(\frac{n}{2}\right) * \Pi\left(\frac{n}{2}\right) \quad ; \quad x[1],\ x[-1]$$



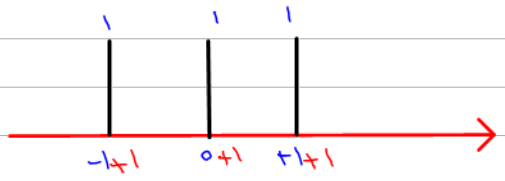


$x[n] = f[n] * f[n]$?

طول حدود ← با رسم شکل

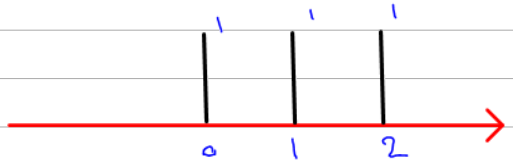
حل تشریحی

$f[-n]$

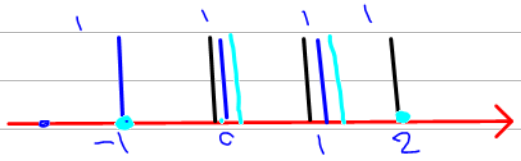


$x[1]$

$f[1-n]$



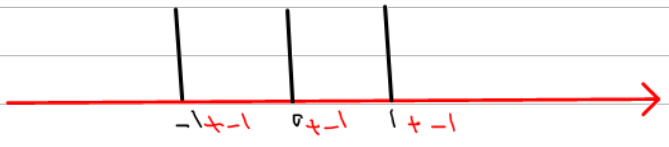
$f[n] \times f[1-n] =$ حاصل



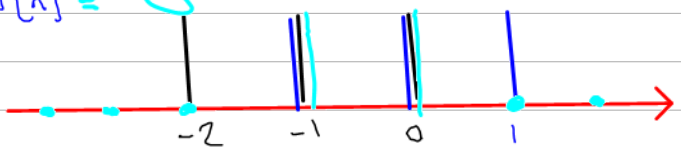
$x[1] = 0 + 1 + 1 + 0 \dots = 2$

$x[-1] = ?$

$f[-n]$



$f[-1-n] \times f[n] =$ حاصل



$x[-1] = 0 + 0 + \dots + 0 + 1 + 1 + 0 = 2$

$I = \pi x[1] + \pi x[-1] = 2\pi + 2\pi = 4\pi$

۵ رابطهٔ ورودی $x(n)$ و خروجی $y[n]$ یک سیستم علّی به‌صورت زیر است:

$$y[n]=x(n)x(n-1)+\frac{1}{2}y(n-1)$$

کدام گزینه در مورد این سیستم درست است؟

۱) ناپایدار و معکوس‌پذیر
۲) ناپایدار و معکوس‌ناپذیر
۳) پایدار و معکوس‌پذیر
۴) پایدار و معکوس‌ناپذیر

درجه سختی: متوسط

مرور نکات

بعضی خواص سیستم:

① خطی بودن: اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد سیستم غیرخطی است و اگرنه، خطی است.

* اگر x یوان غیراز $1+$ داشته باشد

* " " داخل عملگر غیرخطی مثل $\sin(x)$ قرار گیرد

* " " در شرط‌ها باشد

② TV یا TI: اگر آرگومان زمان بیرون x باشد و یا داخل x روی آرگومان زمان عملیات غیراز شیفت زمانی انجام شود، سیستم TV است و درغیر این صورت TI است.

$y[n] = 2^{x[n-1]} \times x[-n+1]$ (TV)

$y(t) = x(t-1) + t\,x(t)$

③ حافظه‌دار بودن: اگر داخل x روی آرگومان زمان هرعملیات انجام شود حافظه دارد است.

$y[n] = x[n-1]$

$y(t) = x(t)(t-1)$

④ علّی بودن: آرگومان y را بنویسید و آرگومان عام x ها را هم بنویسید.

اگر با رعایت قیدهای سؤال، به ازای عام زمان‌ها آرگومان y بزرگتر یا مساوی آرگومان‌های xها باشد یعنی سیستم علّی است، درغیراین صورت غیرعلّی است.

$y[n] = \begin{cases} x[-n] & n \geq 0 \\ x[n-2] + x[n] & n < 0 \end{cases}$

$n \geqslant ?$

$-n \quad ; \quad n \geq 0$

$n \quad ; \quad n < 0$

$n-2 \quad ; \quad n < 0$

$n \geqslant -n$ ✓ ; $n \geq 0$

$n \geqslant n$ ✓ ; $n < 0$

$n \geqslant n-2$ ✓ ; $n < 0$

علّی

$y(t) = x(t) + x(t)\,x(|t|-1)$

$t \geqslant ?$

t

$|t|-1$

$t \geqslant t$ ✓

$t \geqslant |t|-1$ ✗

$-10 < 10-1$

غیرعلّی

$y(t) = x^1(t) + x^1(t \cdot \cos(t)) + 1^a$

$y[n] = \underline{Re}\{ x[1] + x[-\sin(n)] \}$

$y(t) = x^1(t) \; x^1(t-1) + \underline{2^{x(t)}}$

x^2

⑤ پایداری: اگر به ازای ورودی محدود، خروجی $\pm\infty$ (در تمام زمانها حتی $t=\pm\infty$ یا $n=\pm\infty$) نده سیستم ناپایدار است در غیر این صورت پایدار است.

اگر x در مخرج باشد یا داخل تابعی باشد که می‌تواند ∞ شود حتماً آن مقدار را بررسی کنید.

در غیر این صورت $x(t)=A$ ($x[n]=A$) گذاشته و y را حساب کنید.

$$y(t)=\tan(|x(t)|)$$

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]}{x[n-1]-2} & x[n-1]\neq 2\\ x[n]\times e^{x[n-1]} & x[n-1]=2\end{cases}$$

$x(t)=\frac{\pi}{2} \longrightarrow y(t)=\tan(\frac{\pi}{2})=\infty$

$x[n]=2^+=2+0^+ \longrightarrow y[n]=\dfrac{2+0^+}{2+0^+-2}=\dfrac{2^+}{0^+}=\infty$ ناپایدار

$x[n-1]=2+0^+$

⑥ معکوس پذیری:

سیستم معکوس پذیر است اگر و تنها اگر شروط زیر را داشته باشد:

(I) ورودی x در تمام زمانها روی خروجی تأثیر داشته باشد ← با آگاهی از x هر عددی بین $+\infty$ و $-\infty$ را بتوان ساخت.

(II) تمام مقادیر x روی خروجی تأثیر داشته باشد.

(III) بتوان تابع x برحسب y را بدون ابهام بصورت مجزا نوشت.

1) $y(t)=x(t)$

2) $y[n]=\dfrac{|x[n]|}{x[n]}=①$

3) $y[n]=\begin{cases}0 & n\geq 0\\ x^2[n] & n<0\end{cases}$

4) $y(t)=\begin{cases}x(t) & x(t)\geqslant 0\\ x^2(t) & x(t)<0\end{cases}$

(I) $t\rightarrow$ ✓

(II) $y=x(t)$ ✓

(III) $x(t)=y(t)$ ✓

معکوس پذیر

2) (I) n ✓

(II) $y[n] = \begin{cases} +1 & x[n] \geq 0 \\ -1 & x[n] < 0 \end{cases}$ X معکوس ناپذیر

3) (I) n ; $n < 0$ X معکوس ناپذیر

4) (I) t ✓

(II) $x(t) \geq 0 \longrightarrow y(t) = x(t)$

$x(t) < 0 \longrightarrow y(t) = x^2(t) > 0$ ✓

(III) $x(t) = y(t)$; $y(t) \geq 0$

$x(t) = \begin{cases} +\sqrt{y(t)} \\ -\sqrt{y(t)} \checkmark \end{cases}$ $x(t) = -\sqrt{y(t)}$; $y(t) > 0$

$x(t) = \begin{cases} y(t) \\ -\sqrt{y(t)} \end{cases}$ ✓

نکته: اگر بدست آوردن y بر حسب x امکان پذیر نباشد از نکات سمت راست استفاده می‌کنیم.

(I) اگر سیستم خطی باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که:

اگر خروجی بازای تمام زمانها صفر باشد ورودی نیز تمام زمانها صفر بوده است.

خطی $\quad y(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t) = x_o(t)$

$x(t) = t^2 \longrightarrow y(t) = 0 \quad \forall t$ معکوس ناپذیر

(II) اگر سیستم بدون حافظه باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که تابع y بر حسب x یک به یک باشد (در همسایگی صفر)

$y(t) = 2x^2(t) + t\,x(t)$

$y = 2x^2 + tx \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

* تابع چند جمله‌ای در همسایگی صفر غیر یک به یک است. $y = x^3 + ax^2 + bx$

(III) اگر آگومان زمان بیرون x نباشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک به یک بودن تابع y بر حسب x است.

$y(t) = x(t)\,x(t-1) + x(t-2)^2$

$y = x^2 + x^2 \longrightarrow \underbrace{y = 2x^2}_{\text{زوج}} \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

احتمال سیستم ها

سیستم اول	سیستم دوم	نوع اتصال	سیستم کلی
خطی	خطی	سری/موازی	**خطی یا غیرخطی**
خطی	غیرخطی	سری	**خطی یا غیرخطی**
خطی	غیرخطی	موازی	**غیرخطی**
غیرخطی	غیرخطی	سری	**خطی یا غیرخطی**
غیرخطی	غیرخطی	موازی	**خطی یا غیرخطی**
TI	TI	سری	TI
TV	TV	سری	TI یا TV
TI	TV	سری	TI یا TV
TI	TI	موازی	TI
TI	TV	موازی	TV
TV	TV	موازی	TI یا TV
پایدار	پایدار	سری	**پایدار**
پایدار	ناپایدار	سری	**پایدار یا ناپایدار**
ناپایدار	ناپایدار	سری	**پایدار یا ناپایدار**
پایدار	پایدار	موازی	**پایدار**
پایدار	ناپایدار	موازی	**ناپایدار**
ناپایدار	ناپایدار	موازی	**ناپایدار یا پایدار**
حافظه دار	حافظه دار	سری	**حافظه دار یا بدون حافظه**
حافظه دار	بدون حافظه	سری	**حافظه دار یا بدون حافظه**
بدون حافظه	بدون حافظه	سری	**بدون حافظه**
حافظه دار	حافظه دار	موازی	**حافظه دار یا بدون حافظه**
حافظه دار	بدون حافظه	موازی	**حافظه دار**
بدون حافظه	بدون حافظه	موازی	**بدون حافظه**
علی	علی	سری	**علی**

علی	غیرعلی	سری	**غیرعلی**
غیرعلی	غیرعلی	سری	**علی یا غیرعلی**
علی	علی	موازی	**علی**
علی	غیرعلی	موازی	**غیرعلی**
غیرعلی	غیرعلی	موازی	**علی یا غیرعلی**

حل تشریحی

$y[n] = x[n]x[n-1] + \frac{1}{2}\, y[n-1]$ این رابطه مناسبه نیست.

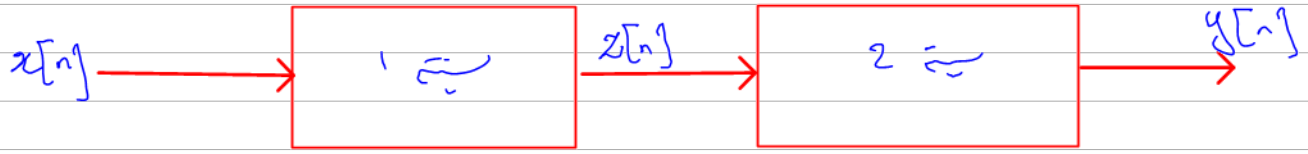
مناسبه سیستم باید $y[n]$ یا $x[n]$ برحسب ورودی ها قابل استخراج باشد.

① معکوس پذیری ② پایداری

استخراج مناسبه ←

$$y[n] = x[n]x[n-1] + \frac{1}{2}\, y[n-1]$$

$z[n] = x[n]\, x[n-1]$ سیستم ۱



$y[n] = z[n] + \frac{1}{2} y[n-1]$ سیستم ۲ $\qquad y[n-1] = z[n-1] + \frac{1}{2} y[n-2]$

$y[n] = z[n] + \frac{1}{2} z[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] \qquad y[n-2] = z[n-2] + \frac{1}{2} y[n-3]$

$y[n] = z[n] + \frac{1}{2} z[n-1] + \frac{1}{4} \times z[n-2] + \frac{1}{8} y[n-3]$

$\vdots$

$y[n] = z[n] + \frac{1}{2} z[n-1] + \frac{1}{4} z[n-2] + \frac{1}{8} z[n-3] + \cdots + \frac{1}{2^{\infty}}^{0} y[n-\infty]$

$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z[n-k] \qquad z[n] = x[n]\, x[n-1]$

حل تشریحی

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(x[n-k]\, x[n-1-k] \right)$$

پایداری:

$$x[n] = A < \infty$$

$$x[n-k] = A \qquad x[n-1-k] = A$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k A^2 = A^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = A^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2A^2 < \infty$$

پایدار ✓

معکوس پذیری:

آیا $y[n]$ مال n است؟

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x[n-k]\, x[n-1-k]$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x^2 = x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \cdots$$

غیر یک به یک ← معکوس ناپذیر

۶

اگر $Y(e^{j\omega}) = 2Re\left[e^{-j3\omega}X(e^{-j3\omega})\right]$ باشد، دراین‌صورت، $y[0], y[6]$ ، کدام است؟

۱) $y[0] = x[0] + x^*[1]$ ، $y[6] = x[1] + x^*[4]$

۲) $y[0] = 2Re[x[1]]$ ، $y[6] = x[0] + x^*[4]$

۳) $y[0] = x[-1] + x^*[1]$ ، $y[6] = x[-1] + x^*[3]$

۴) $y[0] = 2Re[x[1]]$ ، $y[6] = x[-1] + x^*[3]$

درجه سختی: متوسط

خواص تبدیل فوریه

خاصیت	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$x(t)+y(t)$ $x[n]+y[n]$	$X(j\omega)+Y(j\omega)$
انتقال زمانی	$x(t+a)$ $x[n+a]$	$X(j\omega)e^{ja\omega}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{jat}$ $x[n]e^{jan}$	$X(j(\omega-a))$
قرینگی زمانی	$x(-t)$ $x[-n]$	$X(-j\omega)$
مزدوجی	$x^*(t)$ $x^*[n]$	$X^*(-j\omega)$
مزدوجی	$x^*(-t)$ $x^*[-n]$	$X^*(j\omega)$
مقیاس دهی زمانی	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{j\omega}{a})$
مقیاس دهی زمانی	$x_{(m)}[n]$	$X(j\omega m)$
مقیاس دهی زمانی	$x[mn]$	$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}X\left(j\left(\frac{\omega}{m}-\frac{2\pi}{i}\right)\right)$
ضرب در حوزه زمان	$x(t)\times y(t)$ $x[n]\times y[n]$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
ضرب در حوزه فرکانس	$x(t)*y(t)$ $x[n]*y[n]$	$X(j\omega)\times Y(j\omega)$
مشتق گیری در حوزه زمان	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
مشتق گیری در حوزه فرکانس	$tx(t)$ $nx[n]$	$\frac{jdX(j\omega)}{d\omega}$
انتگرال در حوزه زمان	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
سیگما در حوزه زمان	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{X(j\omega)}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(0)\delta(\omega$
دوگانی تبدیل فوریه	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$

مرور نکات

$Y(jw) = 2\,Re\left(e^{-j3w}\, X(-j3w) \right)$ اطلاعات سأله در حوزه فرکانس

$y[0]$ ، $y[6]$ ؟ خواسته در حوزه زمان

$a + a^* = 2\,Re(a)$ $\qquad (e^{jq})^* = e^{-jq}$

$$Y(jw) = e^{-j3w} X(-j3w) + \left(e^{-j3w} X(-j3w) \right)^*$$

$x[n] \longrightarrow X(jw)$

$n \to -n$ ↓ $w \to -w$

$x[-n] \longrightarrow X(-jw)$

$n \to \frac{n}{3}$ ↓ $w \to 3w$

$x_{(3)}[-n] \longrightarrow X(-j3w)$

$n \to n-3$ ↓ $e^{j(-3)w}$

$x_{(3)}[-(n-3)] \longrightarrow e^{-j3w} X(-j3w)$

+

$x^*_{(3)}[n+3] \longrightarrow \left(e^{-j3w} X(-j3w) \right)^*$

+

$x_{(3)}[-n+3] + x^*_{(3)}[n+3] \longrightarrow Y(jw)$

$y[n]$

حل تشریحی

$$y[n] = x_{(3)}[-n+3] + x^*_{(3)}[n+3]$$

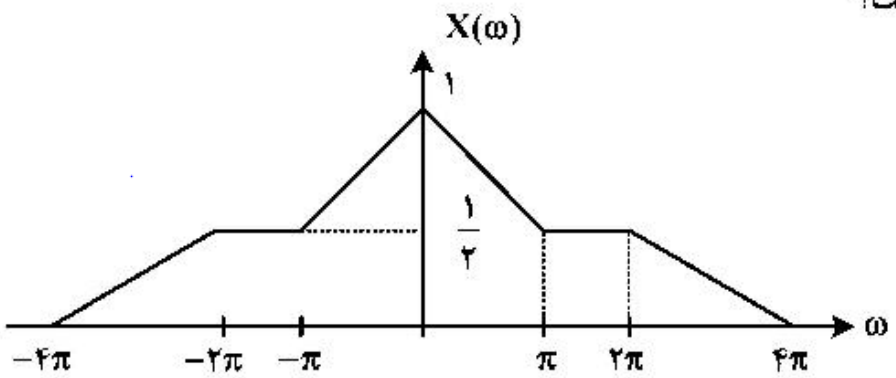
$$y[0] = x_{(3)}[3] + x^*_{(3)}[3] = x[1] + x^*[1] = 2Re(x[1])$$

$$y[6] = x_{(3)}[-3] + x^*_{(3)}[9] = x[-1] + x^*[3] \checkmark$$

حل تشریحی

۷ $x(t$ یک سیگنال با تبدیل فوریهٔ $X(\omega)$ در شکل زیر نشان داده شده است. اگر $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x(t-n)$

شد، مقدار $y(1)-y\left(\frac{1}{2}\right)$، کدام است؟



($-\frac{۳}{۲}$

($-\frac{۱}{۲}$

($\frac{۱}{۲}$

($\frac{۳}{۲}$

درجه سختی: دشوار

محاسبه پاسخ سیستم LTI در حالتهای مختلف:

① اگر ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ را به صورت شکل بدهد از رابطه کانولوشن حساب میکنیم. (فصل دوم)

* سیگنال x یا h را نسبت به محور عمودی قرینه میکنیم و محور افقی را τ میگذاریم.

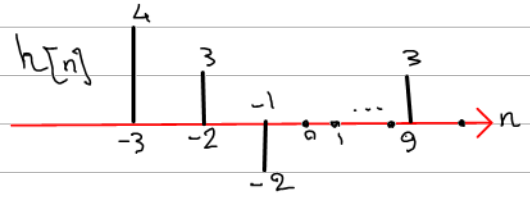
* محور افقی سیگنال قرینه شده را با t جمع میکنیم (تمام اعداد محور افقی را)

* حاصلضرب سیگنال فوق با سیگنال قرینه شده را به ازای tهای مختلف حساب میکنیم.

* به ازای tهای مختلف مساحت سیگنال حاصلضرب را محاسبه میکنیم که برابر خروجی است.

② اگر ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ را به صورت شکل یا فرمول بدهد که طول یکی از آنها محدود باشد.

$h[n] = u[n] - u[n-10]$, $x[n] = 2^n + e^n$



$x[n] = 2^n u[-n-1]$ $h[n] = 4\delta[n-(-3)] + 3\delta[n-(-2)] + -2\delta[n-(-1)] + 3\delta[n-9]$

* سیگنال با طول محدود را به صورت جمع ضربه‌ها نوشته و حاصل کانولوشن x و h را حساب میکنیم.

$$f[n] * a\delta[n-b] = af[n-b]$$

③ x و h را به صورت فرمول بدهد و x یا h سینوسی هیچ کدام از سیگنالهای جدول تبدیل نبود، فوریه، تبدیل لاپلاس و z نباشد. (معمولاً خروجی یک زمان طولانی را خواهد)

از فرمول کانولوشن حساب میکنیم.

* تعویف کانولوشن را نوشته و t یا n را برابر با لحظه‌ای قرار میدهیم که خروجی را خواسته پس حاصل انتگرال یا $\sum$ را محاسبه میکنیم.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

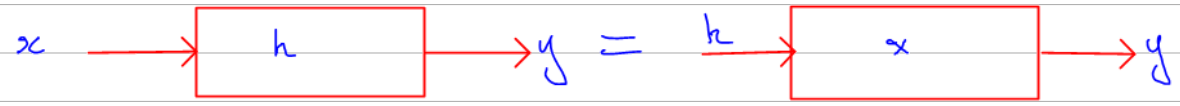
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k]$$

$$y(10) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(10-\tau) d\tau$$

④ پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ رابعد یا x یا H به فرم سیگنالهای جدول تبدیل فوریه باشند.

4-1- ورودی x یا پاسخ ضربه به فرم سیگنال تک فرکانس باشند.

* اگر h تک فرکانس باشد جای x و h را عوض می‌کنیم.



تبدیل فوریه پاسخ ضربه را حساب می‌کنیم ($H(j\omega)$) ($X(j\omega)$)

$x(t) = a \longrightarrow y(t) = a H(j0)$

$x[n] = a \longrightarrow y[n] = a H(j0)$

$x(t) = A \overset{\sin}{\cos}(bt+\varphi) \longrightarrow y(t) = A|H(jb)| \overset{\sin}{\cos}(bt+\varphi+\angle H(jb))$

$x[n] = A \overset{\sin}{\cos}[bn+\varphi] \longrightarrow y[n] = A|H(jb)| \overset{\sin}{\cos}[bn+\varphi+\angle H(jb)]$

$x(t) = A e^{j(b\overset{n}{t}+\varphi)} \longrightarrow y(t) = A|H(jb)| e^{j(b\overset{n}{t}+\varphi+\angle H(jb))}$

* اگر ورودی تک فرکانس بوده و n نداشته باشد خروجی هم n نخواهد داشت.

4-2- ورودی متناوب باشد:

$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega) \Longrightarrow Y(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$ یا $y(t)$

4-3- ورودی x یا پاسخ ضربه متناوب باشد:

* اگر پاسخ ضربه متناوب باشد جای x و h را عوض می‌کنیم.

(I) دوره تناوب و فرکانس پایه x ورودی را حساب می‌کنیم. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ یا $\frac{2\pi}{N_0}$

(II) در $H(j\omega)$ به جای ω عبارت $k\omega_0$ را می‌گذاریم. (k عدد صحیح)

(III) kهایی که $|H(jk\omega_0)| \neq 0$ است را پیدا می‌کنیم.

(IV) ضرایب سری فوریه ورودی x یعنی a_k را به ازای kهای فوق حساب می‌کنیم.

(V) ضرایب سری فوریه خروجی y یعنی b_k را حساب می‌کنیم. $b_k = H(jk\omega_0)\, a_k$

(VI) خروجی y را از فرمول سری فوریه حساب می‌کنیم.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \qquad y[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} b_k e^{jk\omega_0 n}$$

⑤ معادله دیفرانسیل سیستم را بدهد و پاسخ سیستم LTI را بخواهد.

در این حالت با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل تابع $H(s)$ را بدست می‌آوریم و ROC_H را با توجه به خواص سیستم LTI گفته شده در سوال یا اطلاعات کمکی حساب می‌کنیم.

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

5-1- ورودی $x(t)$ تک زمانی باشد. (e^{at} یا عددثابت)

$$x(t) = a \longrightarrow y(t) = \begin{cases} \infty & s=0 \notin ROC_H \\ aH(0) & s=0 \in ROC_H \end{cases}$$

$$x(t) = Ae^{bt} \longrightarrow y(t) = \begin{cases} \infty & s=b \notin ROC_H \\ Ae^{bt}H(0) & s=b \in ROC_H \end{cases}$$

5-2- ورودی $x(t)$ تک زمانی نباشد.

* $Y(s)$ را حساب می‌کنیم. $Y(s) = X(s)H(s)$

* ناحیه همگرایی $Y(s)$ را با توجه به ناحیه همگرایی X و H حساب می‌کنیم.

حالتهای $Y(s)$ را حساب می‌کنیم، ROC_y باید به نحوی باشد که با ROC_x و ROC_H اشتراک داشته باشد.

* از روی $Y(s)$ و ROC_y، $y(t)$ را حساب می‌کنیم.

⑥ معادله تفاضلی سیستم را بدهد و پاسخ را بخواهد. $y[n-2] + \cdots = x[n] - x[n-1]$

ابتدا از معادله تفاضلی تبدیل z گرفته و $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ را حساب می‌کنیم.

۶-۱- ورودی $x[n]$ تک نزکاس باشد (عدد ثابت یا a^n)

$$x[n]=a \longrightarrow y[n]=\begin{cases}\infty & z=1\notin ROC_H \\ aH(1) & z=1\in ROC_H\end{cases}$$

$$x[n]=A\,b^n \longrightarrow y[n]=\begin{cases}\infty & b\notin ROC_H \\ AH(b)\,b^n & b\in ROC_H\end{cases}$$

۶-۲- ورودی x تک نزکاس نباشد.

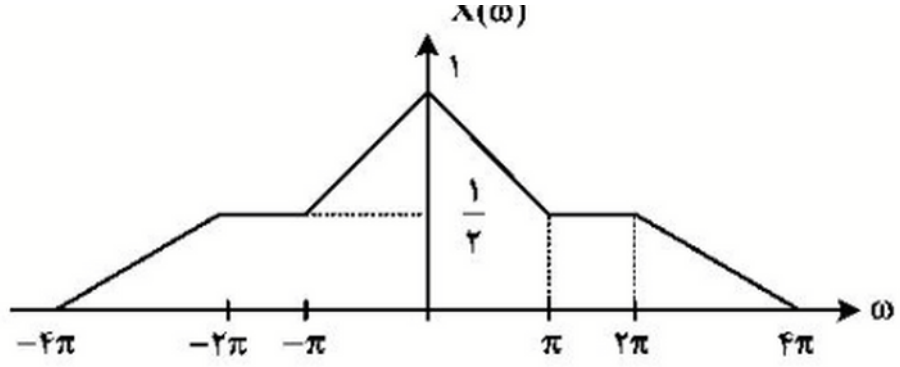
* $Y(z)$ و ROC_y را محاسبه می‌کنیم. $Y(z)=H(z)X(z)$

ROC_y به نحوی باید باشد که با ROC_x و ROC_H اشتراک داشته باشد.

* از روی $Y(z)$ و ROC_y، $y[n]$ را محاسبه می‌کنیم.

مرور نکات

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(t-n)$$



$x(t) \longrightarrow X(jw)$ ✓

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-nT_0) \longrightarrow a_k = \frac{1}{T_0}\left(1-(-1)^k\right), \quad T = 2T_0$$

$$x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n) = \sum (-1)^n x(t-n)$$

t روی x — n روی δ

$x(t) * \delta(t-b) = x(t-b)$ خاصیت تابعی ضربه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(t) * \delta(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(t-n) = y(t)$$

$$y(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n), \quad X(jw)$$

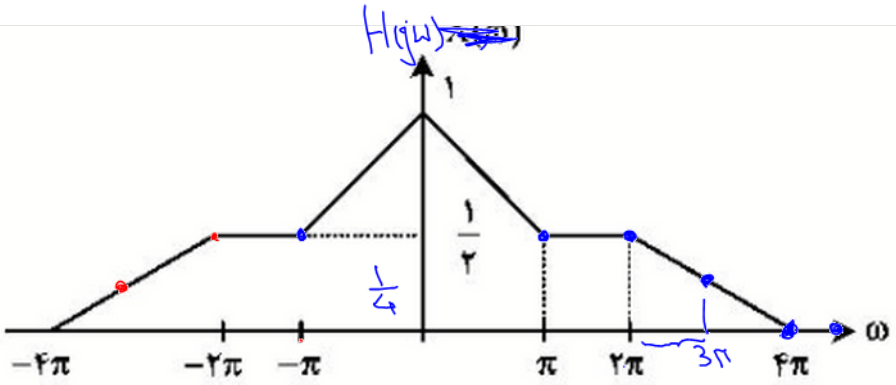
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

یک سیستم LTI داریم که $h(t)$ متناوب و $X(jw)$

حل تشریحی

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$ فرض

$h(t) \longrightarrow H(j\omega)$



$T_n = 2 \rightarrow \omega_0 = \pi$ ①

$|H(jk\omega_0)| \neq 0$? ← $H(jk\pi) \neq 0$ ②

$H(j0)$ ✓ $H(j\pm\pi)$ ✓ $H(j\pm2\pi)$ ✓ $H(j\pm3\pi)$ ✓ $H(j\pm4\pi) = 0$ ....

به ازای $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ باید a_k را حساب کنیم.

$x(t) \longrightarrow a_k = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^k\right)$

$a_0 = 0 \quad a_1 = a_{-1} = 1 \quad a_2 = a_{-2} = 0 \quad a_3 = a_{-3} = 1$

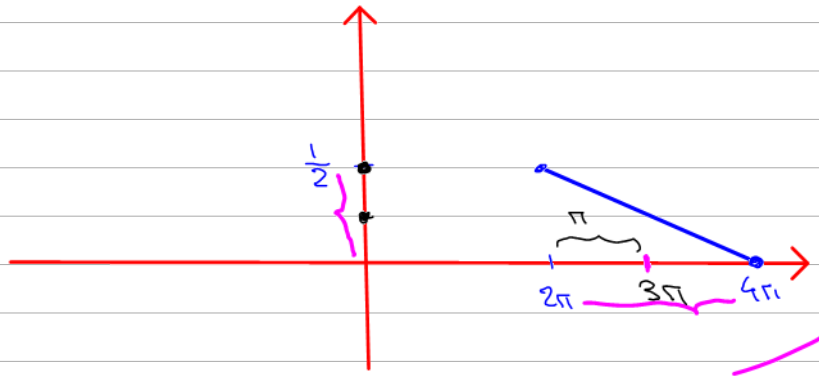
$b_k = a_k H(jk\omega_0)$

$b_0 = 0 \times H(j0) = 0 \quad b_1 = 1 \times \frac{1}{2} \quad b_{-1} = 1 \times \frac{1}{2}$

$b_2 = 0 \times H(j2\pi) = 0 \quad b_{-2} = 0 \times H(-j2\pi) = 0$

حل تشریحی

$b_3 = 1 \times H(j3\pi) = \frac{1}{4}$ $\quad b_{-3} = 1 \times H(-j3\pi) = \frac{1}{4}$



در هر 2π ← $\frac{1}{2}$ کم می‌شود

$3\pi \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ← $\frac{1}{4}$ کم می‌شود ← π ~ ~

$b_4 = a_4 H(j4\pi) = 0$ $\quad b_5 = a_5 H(j5\pi) = 0$ ....

$b_{-4} = a_{-4} H(-j4\pi) = 0$ $\quad b_{-5} = a_{-5} H(-j5\pi) = 0$ ....

$b_k = 0 \qquad k \neq \pm 1, \pm 3$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\pi t}$$

$$y(t) = b_{-1} e^{-j\pi t} + b_1 e^{j\pi t} + b_3 e^{j3\pi t} + b_{-3} e^{-j3\pi t}$$

$$y(t) = \underbrace{e^{-j\pi t} + e^{+j\pi t}}_{2\cos(\pi t)} + \underbrace{\frac{1}{4} e^{j3\pi t} + \frac{1}{4} e^{-j3\pi t}}_{\frac{1}{2}\cos(3\pi t)}$$

حل تشریحی

$$y(t) = 2\cos(\pi t) + \frac{1}{2}\cos(3\pi t)$$

$$y(1) = -2 \quad \therefore \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

۸

پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان به‌صورت $h(t)=e^{-t}u(t)$ است. اگر ورودی این سیستم $x(t)=u(-t)$ باشد و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش دهیم، در این‌صورت، $y(-1)-y(-2)$، کدام است؟

۱) صفر

۲) $e^{-1}-e^{-2}$

۳) $e^{1}-e^{2}$

۴) $e^{2}-e^{1}$

درجه سختی: متوسط

مرور نکات

① محاسبه عکس تبدیل لاپلاس با توجه به ROC:

برای محاسبه $x(t)$ از روی $X(s)$، ابتدا به ROC_x توجه می‌کنیم،

* اگر ROC_x دست‌راستی باشد، $x(t)$ دست‌راستی است.

* " " " چپی " " " چپی ".

$X(s) = \boxed{\frac{1}{s-1}}$ $\quad Re(s) > 1$ $\quad\quad$ $X(s) = \frac{1}{s-1}$ $\quad Re(s) < 1$

$e^{t}u(t)$ $\quad\quad$ $-e^{t}u(-t)$

$e^{at}u(t) \rightarrow \frac{1}{s-a}$ $\quad\quad$ $-e^{at}u(-t) \rightarrow \frac{1}{s-a}$

هرگاه $X(s)$ ترکیبی باشد که تبدیل لاپلاس آن در جدول نیست و دارای قطب‌های متفاوت باشد، بهترین راه تجزیه به کسرهای جزئی ساده است.

برای این منظور $X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \cdots$ می‌نویسیم.

سپس در تعیین عکس $X_i(s)$ توجه می‌کنیم که اگر ROC_x مستراست قطب X_i باشد، سیگنال $x(t)$ دست‌راستی است و اگر سمت چپ باشد، $x_i(t)$ دست چپی است.

① $X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$ $\quad Re(s) > 1$

② $X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$ $\quad -2 < Re(s) < 1$

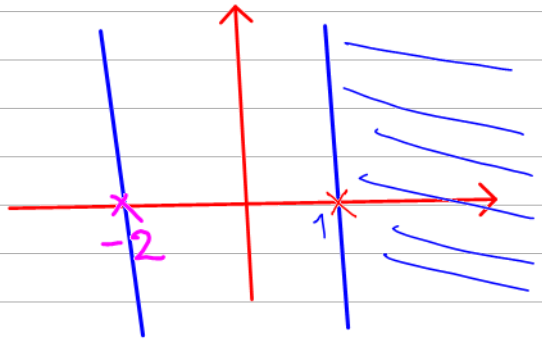
$X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$ $\quad A = \lim_{s\to 1} \frac{1}{(s+2)} = \frac{1}{3}$

$B = \lim_{s\to -2} \frac{1}{(s-1)} = -\frac{1}{3}$

مرور نکات

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}$$

① $Re(s) > 1 \rightarrow ROC_x$



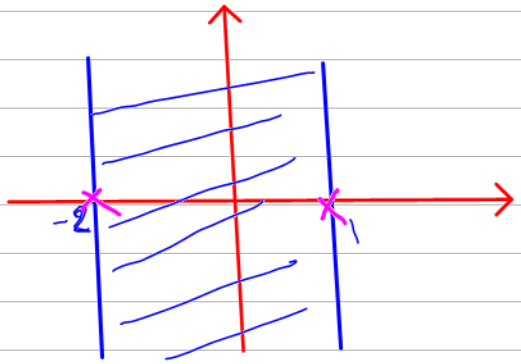
$\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} \rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{t}u(t)$ ✓ , $\frac{1}{3}(+e^{t}u(-t))$ ✗

$\frac{1}{3}\frac{1}{s+2} \rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$ ✓ , $-\frac{1}{3}e^{-2t}u(-t)$ ✗

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t)$$ ✓

② $ROC_2 = -2 < Re(s) < 1$



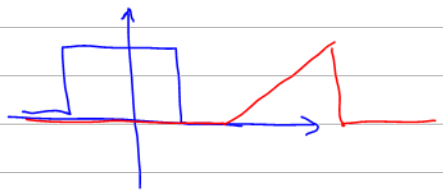
$\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} \rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{t}u(t)$ ✗ , $-\frac{1}{3}e^{t}u(-t)$ ✓

$\frac{1}{3}\frac{1}{s+2} \rightarrow$ $\frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$ ✓ , $-\frac{1}{3}e^{-2t}u(-t)$ ✗

$$x(t) = -\frac{1}{3}e^{t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-2t}u(t)$$ ✓

حل تشریحی

۸ پاسخ ضربهٔ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان به‌صورت $h(t)=e^{-t}u(t)$ است. اگر ورودی این سیستم $x(t)=u(-t)$ باشد و خروجی آن را با $y(t)$ نمایش دهیم، در این‌صورت، $y(-1)-y(-2)$، کدام است؟



دو شمای حل ← ① حل دوم ← کانولوشن ✗

② تبدیل فوریه

③ ~ لاپلاس ✓ ساده تر

$u(t) \longrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$u(-t) \longrightarrow -\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(-\omega)$

$u(-t) \longrightarrow -\frac{1}{s} \quad Re(s)<0$

$y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(s) = X(s)\,H(s)$

$x(t)=u(-t) \longrightarrow X(s) = -\frac{1}{s} \quad Re(s)<0$

$h(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1} \quad Re(s)>-1$

$Y(s) = -\frac{1}{s} \times \frac{1}{s+1} \qquad ROC_y = ?$

حاصل کانولوشن دو سیگنال دست راستی ← دست راستی

چپی ← ~ چپی

~ ~ یک سیگنال دست راستی و دست چپی ← از هر دو طرف نامحدود

$y(t)$ ← از هر دو طرف نامحدود ← ROC_y: از هر دو طرف محدود

↓

بین دو تا از قطب‌ها

حل تشریحی

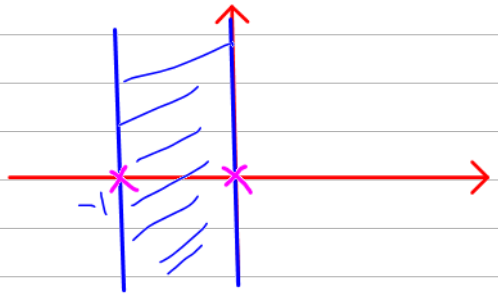
$$Y(s) = \frac{-1}{s(s+1)} \qquad -1 < Re(s) < 0$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s \frac{-1}{s(s+1)} = -1$$

$$B = \lim_{s\to -1} (s+1) \frac{-1}{s(s+1)} = 1$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \qquad -1 < Re(s) < 0$$



$-\frac{1}{s}$ ⟵ $-u(t)$ ✗ ; $u(-t)$ ✓

$\frac{1}{s+1}$ ⟵ $e^{-t}u(t)$ ✓ ; $-e^{-t}u(-t)$ ✗

$$y(t) = u(-t) + e^{-t}u(t)$$

$$y(-1) = \cancel{u(1)}^{1} + \cancel{e^{1}u(-1)}^{e}$$

$$y(-2) = \cancel{u(2)}^{1} + \cancel{e^{2}u(-2)}^{e}$$

$$y(-1) - y(-2) = 1 - 1 = 0$$

۹ فرض کنید $x(n)$ یک سیگنال پریودیک با پریود $N=8$ باشد. اگر ضرایب سری فوریهٔ سیگنال $x(n)$ را با a_k نمایش دهیم و بدانیم $a_k = a_{k+2}$ و $a_0 + a_1 = \frac{1}{4}$ و $x(n+4) = -x(n)$ است، در این صورت، مقدار $\sum_{n=0}^{7} 2^{x(n)}$، کدام است؟

۱) $\frac{15}{2}$

۲) $\frac{17}{2}$

۳) $\frac{27}{2}$

۴) $\frac{29}{2}$

درجه سختی: متوسط

مرور نکات

① هرگاه $x(t)$ یا $x[n]$ دارای تقارن نیم موج باشد [یعنی اگر به اندازه نصف دوره تناوبش شیفت دهیم برابر منفی خودش شود] ضرایب ذوج سری فوریه آن صفر خواهد بود.

$x[n] , N_0 \longrightarrow a_k$ $\qquad$ $x\left[n \mp \frac{N_0}{2} m\right] = -x[n] \rightarrow a_{2k} = 0$

حل تشریحی

$x[n+\frac{N}{2}] = -x[n]$ $\quad N=8$ ← x دارای تقارن نیم موج

$x[n] \longrightarrow a_k \Rightarrow a_k = 0 \;;\; k=$ زوج

① $a_0 + a_1 = \frac{1}{4}$ ② $a_k = a_{k+2}$

③ $x[n+4] = -x[n] \rightarrow a_{2k} = 0$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad N=8 \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

$<N> : -3 \rightarrow +4$

$$x[n] = \sum_{k=-3}^{4} a_k e^{j\frac{k\pi}{4}n} = a_{-3}e^{-j\frac{3\pi}{4}n} + a_{-2}e^{-j\frac{\pi}{2}n} + a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{4}n} + a_0 + a_1 e^{j\frac{\pi}{4}n} + a_2 e^{j\frac{\pi}{2}n} + a_3 e^{j\frac{3\pi}{4}n} + a_4 e^{j\pi n}$$

③ $\rightarrow a_{-2} = a_0 = a_2 = a_4 = 0$

a_{-1}, a_1, a_3, a_{-3} ?

① $\cancel{a_0}^{0} + a_1 = \frac{1}{4} \rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$

② $a_1 = a_3 = \frac{1}{4}$ $\quad a_{-1} = a_1 = \frac{1}{4}$ $\quad a_{-3} = a_{-1} = a_1 = \frac{1}{4}$

$a_1 = a_{1+2}$ $\quad a_{-1} = a_{-1+2}$ $\quad a_{-3} = a_{-3+2}$

حل تشریحی

$$x[n] = \frac{1}{4}e^{-j\frac{3\pi}{4}n} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{4}e^{+j\frac{3\pi}{4}n}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}$$

$$x[n] = \frac{1}{4}\underbrace{\left(e^{-j\frac{3\pi}{4}n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}\right)}_{2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)} + \frac{1}{4}\underbrace{\left(e^{-j\frac{\pi}{4}n} + e^{j\frac{\pi}{4}n}\right)}_{2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{7} 2^{x[n]} = 2^{x[0]} + 2^{x[1]} + \cdots + 2^{x[7]} = \frac{17}{2}$$

$$x[0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$x[1] = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

⋮

۱۰ $x[$ و $X(e^{j\omega}) \triangleq X(\omega)$ زوج تبدیل فوریه هستند. a_k ضرایب سری فوریهٔ زیر، برابر کدام است؟

$$y(t) = X(-3t) + \cos(6t)$$

۱) $x[3k] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$

۲) $x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$

۳) $x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$

۴) $x[3k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$

درجه سختی: متوسط

مرور نکات

نام خاصیت	شرط	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$T_x = T_y$	$Ax(t) + By(t)$ $Ax[n] + By[y]$	$Aa_k + Bb_k$
انتقال زمانی	-	$x(t + t_0)$ $x[n + n_0]$	$a_k e^{jk\omega_0 t_0}$
انتقال فرکانسی	$m \in Z$	$x(t)e^{jm\omega_0 t}$ $x[n]e^{jm\omega_0 n}$	a_{k-m}
قرینگی زمانی	-	$x(-t)$ $x[-n]$	a_{-k}
مزدوجی	-	$x^*(t)$ $x^*[n]$	a^*_{-k}
مقیاس دهی زمانی	$\alpha > 0$	$x(\alpha t)$	a_k
کانولوشن در حوزه زمان	$T_x = T_y$	$x(t) * y(t)$ $x[n] * y[n]$	$T_x a_k b_k$
ضرب در حوزه زمان	$T_x = T_y$	$x(t) \times y(t)$ $x[n] \times y[n]$	$a_k * b_k$
مشتق گیری در حوزه زمان	-	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_o a_k$
دوگانی سری فوریه	فقط برای گسسته	$a[n]$	$\frac{1}{T_x}x[-k]$

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$, $T_0 = 2\pi$

$f(t) = X(jt) \longrightarrow a_k = ?\ x[-k]$

$T_x = 2\pi$

حل تشریحی

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)\ ,\ T_0 = 2\pi \qquad g(t) = X(-3t) + \cos(6t)$

$X(t) \xrightarrow{2\pi} a_k = x[-k]$

$t \to -t$ ، $k \to -k$

$X(-t) \xrightarrow{2\pi} a_{-k} = x[-(-k)] = x[k]$

$t \to 3t$

$X(-3t) \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{3}} a_{-k} = x[k]$;

$X(-3t)\ ,\ T_0 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow a_k = x[k]$

$\omega_0 = 3$

$\cos(6t)\ ;\ T_1 = \frac{2\pi}{6} \longrightarrow \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1] = b_k$

$\omega_1 = 6$

نکته!

$f(t)\ ,\ T_1 \longrightarrow a_k$

$g(t)\ ,\ T_2 \longrightarrow b_k$

$f(t) + g(t) \longrightarrow C_k = ?$

(I) دوره تناوب $f(t)+g(t)$ را پیدا می‌کنیم ← T_3

(II) ضرایب سری فوریه $f(t)$ را با دوره تناوب T_3 می‌نویسیم.

(III) ~ ~ ~ ~ ~ $g(t)$ ~ ~ ~

حل تشریحی

(۱۷) پس مزایب حاصل از دو مرحله قبل را جمع می‌زنیم.

نکته!

$x(t)\ ,\ T_1 \longrightarrow a_k$

$x(t)\ ,\ T_2 \longrightarrow a_{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}[k]$

$x(-3t)\ ,\ T_0 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow a_k = x[k]$

$\omega_0 = 3$

$\cos(6t)\ ;\ T_1 = \frac{2\pi}{6} \longrightarrow \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1] = b_k$

$\omega_1 = 6$

$x(-3t) + \cos(6t) \longrightarrow ? = c_k$

$T_3 = \text{ک.م.م}\left\{\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{3}\right\} = \frac{2\pi}{3}$

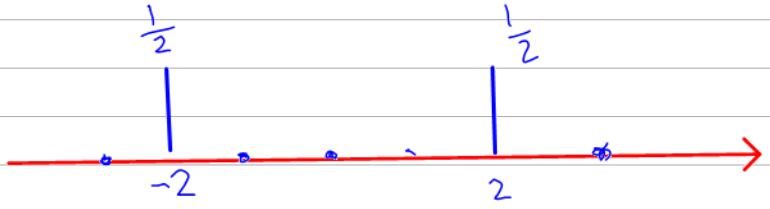
$x(-3t)\ ,\ T_3 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow a_{\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}}\right)}[k] = a_k = \underline{x[k]}$

$\cos(6t)\ ,\ T_3 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow b_{\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi/3}\right)}[k] = b_{(2)}[k] \rightarrow b\left[\frac{k}{2}\right]$

$b\left[\frac{k}{2}\right] = \frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}-1\right] + \frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}+1\right]$

حل تشریحی

$$C_k = \underbrace{x[k]}_{\checkmark} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}-1\right]+\frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}+1\right]}_{b_{(2)}[k]}$$



۱) $x[\cancel{2}k]+\frac{1}{2}\delta[k-2]+\frac{1}{2}\delta[k+2]$

۲) $x[k]+\frac{1}{2}\delta[k-1]+\frac{1}{2}\delta[k+1]$

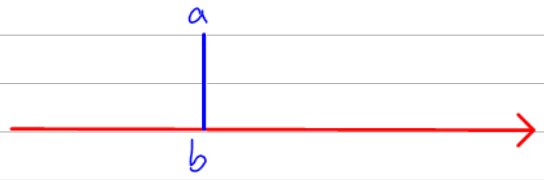
۳) $x[k]+\frac{1}{2}\delta[k-2]+\frac{1}{2}\delta[k+2]$ ✓

۴) $x[\cancel{2}k]+\frac{1}{2}\delta[k-1]+\frac{1}{2}\delta[k+1]$

$$\delta[f[k]] = \begin{cases} 1 & f[k]=0 \\ 0 & \sim \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}-1\right] = \begin{cases} 1\times\frac{1}{2} & k=2 \\ 0 & k\neq 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}+1\right] = \begin{cases} 1\times\frac{1}{2} & k=-2 \\ 0 & k\neq -2 \end{cases}$$



$a\delta[k-b]$

$$\frac{1}{2}\delta[k-(-2)]+\frac{1}{2}\delta[k-2]$$

راه حل دوم:

نکته!

$$\delta[af[n]] = \delta[f[n]] \qquad \delta[af(t)] = \frac{1}{|a|}\delta[f(t)]$$

$$\delta[a(k-b)] = \delta[k-b] \qquad \delta(a(t-b)) = \frac{1}{|a|}\delta(t-b)$$

حل تشریحی

$$y(t) \longrightarrow x[k] + \frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}-1\right] + \frac{1}{2}\delta\left[\frac{k}{2}+1\right]$$

$$\frac{1}{2}\delta[k-a] + \frac{1}{2}\delta[k+a]$$

$$\delta\left[\frac{k}{2}-1\right] \Rightarrow \delta[k-a]$$

$$\delta\left[\frac{1}{2}(k-2)\right] = \delta[k-2]$$

$$\delta\left[\frac{k}{2}+1\right] = \delta\left[\frac{1}{2}(k+2)\right] = \delta[k+2]$$

$$y(t) \longrightarrow x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$$

۱) $x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$

۲) $x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$

۳) $x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-2] + \frac{1}{2}\delta[k+2]$

۴) $x[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$

۱۱

تابع تبدیل یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان و علّی به‌صورت $H(s)=\frac{s-1}{s^2+3s+2}$ است. اگر $y(t)$ پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)=e^{2t}u(-t)$ باشد، مقدار $y(0^+)$ ، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{4}$

درجه سختی: ساده

مرور نکات

حل تشریحی

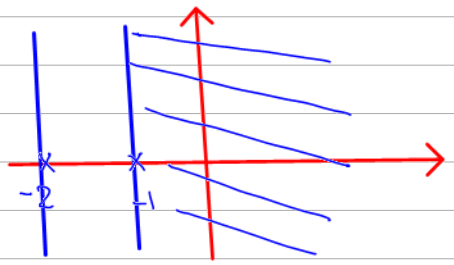
$x(t) = e^{2t}u(-t)$ ③ $\quad H(s) = \dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$ ② ROC دست راستی ← علی ①

$y(t)\Big|_{t=at} = ?$

$Y(s) = X(s)H(s)$

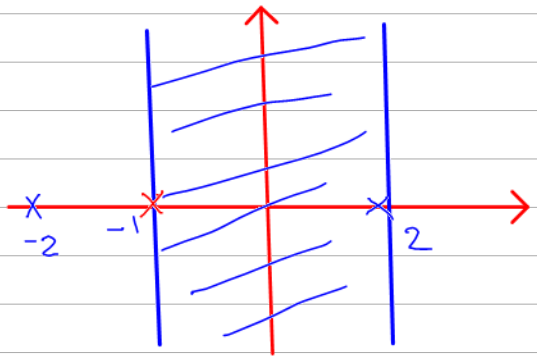
$x(t) = e^{2t}u(-t) \longrightarrow X(s) = \dfrac{-1}{s-2} \quad ; \quad Re(s) < 2$

$H(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \quad ; \quad Re(s) > -1$



$Y(s) = \dfrac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-2)} \quad ; \quad -1 < Re(s) < 2$

$Y(s) = -\dfrac{2/3}{s+1} + \dfrac{3/4}{s+2} + \dfrac{-1/12}{s-2}$



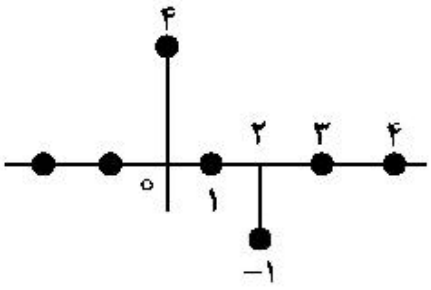
$y(t) = -\dfrac{2}{3}e^{-t}u(t) + \dfrac{3}{4}e^{-2t}u(t) + \dfrac{1}{12}e^{2t}u(-t)$

$y(at) = -\dfrac{2}{3}e^{-at}u(at) + \dfrac{3}{4}e^{-2at}u(at) + \dfrac{1}{12}e^{2at}u(-at)$

$= -\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{12}$ ✓

حل تشریحی

۱۲ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ به ورودی $x_1(n)=u(n)$ به‌صورت $y_1[n]=\left(۲-(\frac{۱}{۲})^n\right)u(n)$ است. اگر پاسخ سیستم به ورودی $x_۲[n]$ در شکل زیر را با $y_۲[n]$ نمایش دهیم، مقدار $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y_۲[n]|^۲$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۱۶}{۳}$

۳) ۱۳

۴) ۲۰

درجه سختی: دشوار

مرور نکات

حل تشریحی

LTI $\rightarrow$ $y[n] = x[n] * h[n]$

$x_1[n] = u[n] \longrightarrow \underbrace{y_1[n]}_{\text{معلوم}} = \underbrace{x_1[n]}_{\text{معلوم}} * \underbrace{h[n]}_{\text{مجهول}} = 2u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$x_2[n] \longrightarrow \underbrace{y_2[n]}_{\text{مجهول}} = \underbrace{x_2[n]}_{\text{معلوم}} * \underbrace{h[n]}_{\text{مجهول}}$

$Y_1(z) = X_1(z)\, H(z)$

$x_1[n] = u[n] \longrightarrow \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$

$2u[n] \longrightarrow \dfrac{2}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$

$-$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longrightarrow \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z|>\frac{1}{2}$

$y_1[n] \longrightarrow \dfrac{2}{1-z^{-1}} - \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ ROC = دست راستی

$y_1[n] \longrightarrow \dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \quad |z|>1$

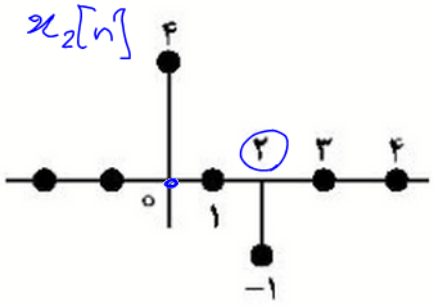
$Y_1(z) = X_1(z)\, H(z)$

$H(z) = \dfrac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \dfrac{\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}{\dfrac{1}{1-z^{-1}}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\quad ROC_h = |z|>\frac{1}{2}$

حل تشریحی

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 4\delta[n] - 1\delta[n-2]$$



$$\delta[n-a] * f[n] = f[n-a]$$

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n] = 4\delta[n] * h[n] - \delta[n-2] * h[n]$$

$$y_2[n] = 4h[n] - h[n-2]$$

$$y_2[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y_2[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2]$$

$$y_2[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u[n] - u[n-2]\right]$$

$$u[n] - u[n-b] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots + \delta[n-b+1]$$

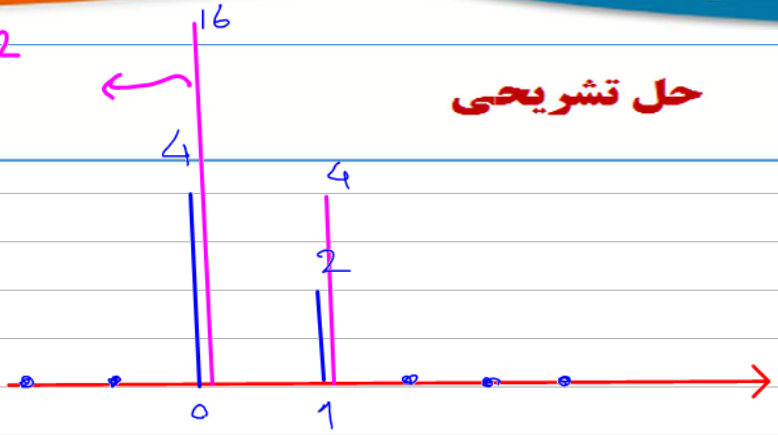
$$u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$y_2[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\delta[n] + \delta[n-1]\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{\overset{0}{n}} \delta[\underset{n=0}{n}] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{\overset{1}{n}} \delta[\underset{n=1}{n-1}]$$

$$y_2[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1]$$

حل تشریحی

$|y_2[n]|^2$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_2[n]|^2 = 16+4 = 20$$

@ Control dehghanii

کانال تلگرام ←

فایل دفتری های آموزشی
دوستان مفید بودن

حل تشریحی