حل سوالات سیگنال سیستم

ارشد ۱۳۹۹

www.Liveamooz.com
Telegram: @Controldehghanii

در دوره نکته تست ۷۰۱۰ ← سوالات از سال ۸۹ تا ۱۴۰۰ به همراه مرور نکات

۱

- یک سیستم با رابطهٔ ورودی $(x(t))$ ـ خروجی $(y(t))$ به‌صورت $y(t) = x(\sin(t))$، در کدام دسته قرار دارد؟

۱) تغییرپذیر با زمان و علّی
۲) تغییرپذیر با زمان و غیرعلّی
۳) تغییرناپذیر با زمان و غیرعلّی
۴) تغییرناپذیر با زمان و علّی

درجه سختی: خیلی ساده

موضوع سوال: خواص سیستم ها

مرور نکات

بعضی خواص سیستم:

① خطی بودن: اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد سیستم غیرخطی است و اگرنه، خطی است.

* اگر x بتوان خواند $1+$ داشته باشد

* " " داخل عملگر غیرخطی مثل $\sin(x)$ قرار گیرد

* " " در شرط‌ها باشد

② TV یا TI: اگر آرگومان زمان بیرون x باشد و یا داخل x روی آرگومان زمان عملیات غیر از شیفت زمانی انجام شود، سیستم TV است و در غیر این صورت TI است.

$y[m] = 2^{x[m-1]} \times x[-m+1]$ (TV)

$y(t) = x(t-1) + t\,x(t)$

③ حافظه‌دار بودن: اگر داخل x روی آرگومان زمان هر عملیات انجام شود حافظه دارد است.

$y(t) = x(t)(t-1)$

$y[n] = x[n-1]$

④ علّی بودن: آرگومان y را بنویسید و آرگومان عام x ها را هم بنویسید.

اگر با رعایت قیدهای سؤال، به ازای عام زمان‌ها آرگومان y بزرگتر یا مساوی آرگومان‌های xها باشد یعنی سیستم علّی است، در غیر این صورت غیرعلّی است.

$y[n] = \begin{cases} x[-n] & n \geq 0 \\ x[n-2] + x[n] & n < 0 \end{cases}$

$n \geqslant ?$

$-n \quad ; \quad n \geq 0$

$n \quad ; \quad n < 0$

$n-2 \quad ; \quad n < 0$

$n \geqslant -n$ ✓ ; $n \geq 0$

$n \geqslant n$ ✓ ; $n < 0$

$n \geqslant n-2$ ✓ ; $n < 0$

علّی

$y(t) = x(t) + x(t)\,x(|t|-1)$

$t \geqslant ?$

t

$|t|-1$

$t \geqslant t$ ✓

$t \geqslant |t|-1$ ✗

$-10 < 10-1$

غیرعلّی

$y(t) = x^1(t) + x^1(t \cdot \cos(t)) + 1^a$

$y[n] = \underline{Re}\{ x[1] + x[-\sin(n)] \}$

$y(t) = x^1(t) \; x^1(t-1) + \underline{2^{x(t)}}$

x^2

⑤ پایداری: اگر به ازای ورودی محدود، خروجی $\pm\infty$ (در تمام زمانها یا حتی $t=\pm\infty$ یا $n=\pm\infty$) نتو دهیم ناپایدار است و غیر این صورت پایدار است.

اگر x در خرج باشد یا داخل تابعی باشد که می‌تواند ∞ شود حتماً آن مقدار را بررسی کنید.

در غیر این صورت $x(t)=A$ ($x[n]=A$) گذاشته و y را حساب کنید.

$$y(t)=\tan(|x(t)|)$$

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]}{x[n-1]-2} & x[n-1]\neq 2\\ x[n]\times e^{x[n-1]} & x[n-1]=2\end{cases}$$

$x(t)=\frac{\pi}{2} \longrightarrow y(t)=\tan(\frac{\pi}{2})=\infty$

$x[n]=2^+=2+0^+\neq 2 \longrightarrow y[n]=\dfrac{2+0^+}{2+0^+-2}=\dfrac{2^+}{0^+}=\infty$ ناپایدار

$x[n-1]=2+0^+$

⑥ معکوس پذیری:

سیستم معکوس پذیر است اگر و تنها اگر شرط زیر را داشته باشد:

(I) ورودی x در تمام زمانها روی خروجی تأثیر داشته باشد ← با آگاهی از x هر عددی بین $+\infty$ و $-\infty$ را بتوان ساخت.

(II) تمام مقادیر x روی خروجی تأثیر داشته باشد.

(III) بتوان تابع x بر حسب y را بدون ابهام به صورت یکتا نوشت.

1) $y(t)=x(t)$

2) $y[n]=\dfrac{|x[n]|}{x[n]}=①$

3) $y[n]=\begin{cases}0 & n\geq 0\\ x^2[n] & n<0\end{cases}$

4) $y(t)=\begin{cases}x(t) & x(t)\geqslant 0\\ x^2(t) & x(t)<0\end{cases}$

(I) $t\rightarrow$ ✓

(II) $y=x(t)$ ✓ معکوس پذیر

(III) $x(t)=y(t)$ ✓

2) (I) n ✓

(II) $y[n] = \begin{cases} +1 & x[n] \geq 0 \\ -1 & x[n] < 0 \end{cases}$ X معکوس ناپذیر

3) (I) $n \quad ; \quad n < 0$ X معکوس ناپذیر

4) (I) t ✓

(II) $x(t) \geq 0 \longrightarrow y(t) = x(t)$

$x(t) < 0 \longrightarrow y(t) = x^2(t) > 0$ ✓

(III) $x(t) = y(t) \quad ; \quad y(t) \geq 0$

$x(t) = \begin{cases} +\sqrt{y(t)} \\ -\sqrt{y(t)} \checkmark \end{cases}$ $x(t) = -\sqrt{y(t)} \; ; \; y(t) > 0$

$x(t) = \begin{cases} y(t) \\ -\sqrt{y(t)} \end{cases}$ ✓

مرور نکات

نکته: اگر بدست آوردن x بر حسب y امکان پذیر نباشد از نکات سمت راست استفاده می‌کنیم.

(I) اگر سیستم خطی باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که:

اگر خروجی بازای تمام زمانها صفر باشد بتوان نتیجه گرفت که ورودی در تمام زمانها صفر بوده است. خوش 96

خطی $y(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t) = x_o(t)$

$x(t) = t^2 \longrightarrow y(t) = 0 \quad \forall t$ معکوس ناپذیر

(II) اگر سیستم بدون حافظه باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که تابع y بر حسب x یک به یک باشد (در همسایگی صفر)

$y(t) = 2x^2(t) + t\,x(t)$

$y = 2x^2 + tx \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

* تابع چند جمله‌ای در همسایگی صفر یک به یک است. $y = x^3 + ax^2 + bx$

(III) اگر آگومان زمان بیرون x باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک به یک بودن تابع y بر حسب x است.

$y(t) = x(t)\,x(t-1) + x(t-2)^2$

$y = x^2 + x^2 \longrightarrow \underbrace{y = 2x^2}_{\text{زوج}} \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

احتمال سیستم ها

سیستم اول	سیستم دوم	نوع اتصال	سیستم کلی
خطی	خطی	سری/موازی	**خطی یا غیرخطی**
خطی	غیرخطی	سری	**خطی یا غیرخطی**
خطی	غیرخطی	موازی	**غیرخطی**
غیرخطی	غیرخطی	سری	**خطی یا غیرخطی**
غیرخطی	غیرخطی	موازی	**خطی یا غیرخطی**
TI	TI	سری	TI
TV	TV	سری	TI یا TV
TI	TV	سری	TI یا TV
TI	TI	موازی	TI
TI	TV	موازی	TV
TV	TV	موازی	TI یا TV
پایدار	پایدار	سری	**پایدار**
پایدار	ناپایدار	سری	**پایدار یا ناپایدار**
ناپایدار	ناپایدار	سری	**پایدار یا ناپایدار**
پایدار	پایدار	موازی	**پایدار**
پایدار	ناپایدار	موازی	**ناپایدار**
ناپایدار	ناپایدار	موازی	**ناپایدار یا پایدار**
حافظه دار	حافظه دار	سری	**حافظه دار یا بدون حافظه**
حافظه دار	بدون حافظه	سری	**حافظه دار یا بدون حافظه**
بدون حافظه	بدون حافظه	سری	**بدون حافظه**
حافظه دار	حافظه دار	موازی	**حافظه دار یا بدون حافظه**
حافظه دار	بدون حافظه	موازی	**حافظه دار**
بدون حافظه	بدون حافظه	موازی	**بدون حافظه**
علی	علی	سری	**علی**

علی	غیرعلی	سری	**غیرعلی**
غیرعلی	غیرعلی	سری	**علی یا غیرعلی**
علی	علی	موازی	**علی**
علی	غیرعلی	موازی	**غیرعلی**
غیرعلی	غیرعلی	موازی	**علی یا غیرعلی**

حل تشریحی

$y(t) = x(\sin(t))$ × عملیات غیر از شیفت ← دوی آرگومان

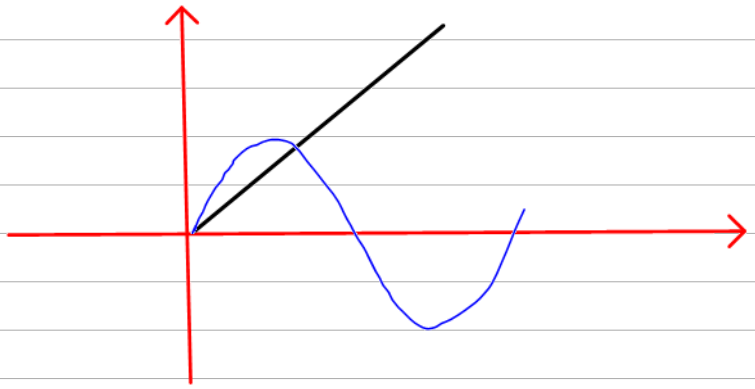
⇓

۳۶

شیفت $t \mp 9$

$t \gtrless \sin(t)$ ×

غیرعلی



$y(t) = x(\sin(t))$ حافظه‌دار

$x(t) = A < \infty \rightarrow x(\sin(t)) = A$ $\quad y(t) = A < \infty$ پایدار

$y(t) = x'(\sin(t))$ خطی

$y(t) = x(\sin(t))$

$-1 \leq \sin(t) \leq 1 \rightarrow y(t) = x(\text{عددی بین } -1 \text{ و } +1)$

$x(2) \rightarrow$ دوی خطی $\rightarrow$ معکوس‌ناپذیر

اثری ندارد

حل تشریحی

حل تشریحی

۲

ورودی یک سیستم گسسته $x[n]$ و خروجی آن $y[n]$ به‌صورت زیر است:

$$y[n]=y[n-1]x(n-1)+\frac{1}{2}x(n)$$

در مورد خطی بودن و پایداری سیستم فوق، کدام گزینه درست است؟

۱) سیستم خطی و پایدار است.

۲) سیستم خطی و ناپایدار است.

۳) سیستم غیرخطی و پایدار است.

۴) سیستم غیرخطی و ناپایدار است.

درجه سختی: **ساده اما بسیار بد**

موضوع سوال: خواص سیستم ها

حل تشریحی

حافظه هست! رابطه $y[n]$ یا $y(t)$ برحسب تابعی از xها

$y(t)$ / $y[n]$ = تابعی از xها

$y[n] = y[n-1]x[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$ حافظه هست

خطی بودن → x را α برابر کنیم → y هم α برابر شود.

$x_2 + x_1 \rightarrow y_1 + y_2$

$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$

$y_1[n] = y_1[n-1]x_1[n-1] + \frac{1}{2}x_1[n]$

$\alpha x_1[n] \rightarrow y_2[n] \overset{?}{\neq} \alpha y_1$ غیر خطی

$y_2[n] = y_2[n-1] \times \alpha x_1[n-1] + \frac{1}{2}\alpha x_1[n]$

$\alpha y_1[n] = \alpha y_1[n-1] \times \alpha x_1[n-1] + \frac{1}{2}\alpha x_1[n]$

$y_1[n] = \alpha y_1[n-1]x_1[n-1] + \frac{1}{2}x_1[n-1]$

$x_1[n] \rightarrow y_1$

$x_2 \rightarrow y_2$

$x_1 + x_2 \overset{?}{\rightarrow} y_1 + y_2$

حل تشریحی

$$y[n] = y[n-1]x[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$$

تعریف پایداری: اگر ورودی محدود باشد، خروجی محدود باشد.

* در روابط بازگشتی، معمولاً باید با عددگذاری حل کرد.

$x[n]$ = سیگنال محدود $\longrightarrow$ $y[n] < \infty$

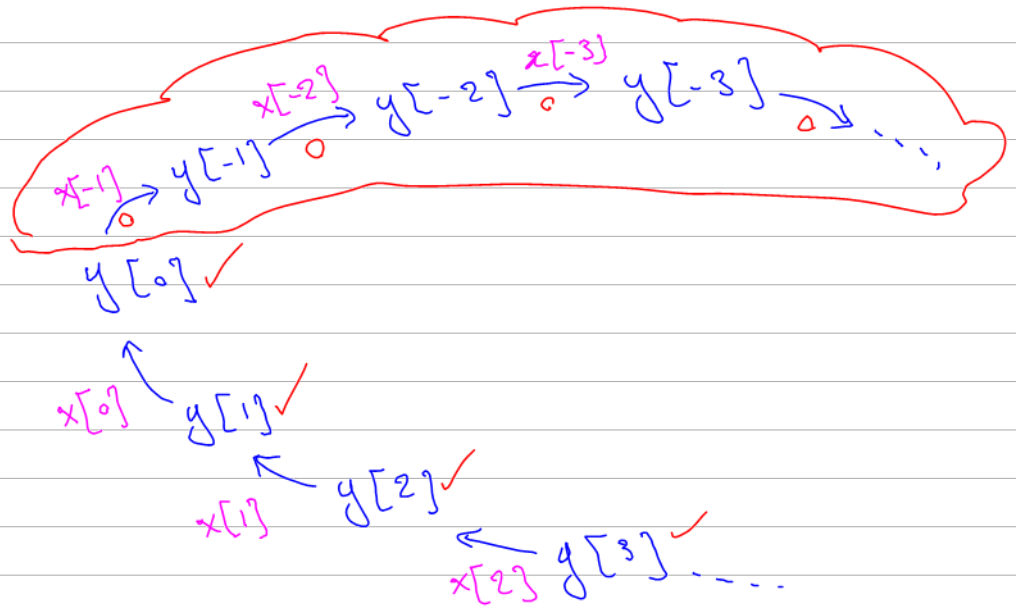
$$y[-1] = y[-2]x[-2] + \frac{1}{2}x[-1]$$

$$y[0] = y[-1]x[-1] + \frac{1}{2}x[0]$$

$x[n] =$

$$y[1] = y[0]x[0] + \frac{1}{2}x[1]$$

$$y[2] = y[1]x[1] + \frac{1}{2}x[2]$$



حل تشریحی

$$y[0] = y[-1]\,u[-1] + \frac{1}{2}\,u[0] = \frac{1}{2}$$

$$y[1] = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 1 \qquad +\frac{1}{2}$$

$$y[2] = 1\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{3}{2} \qquad +\frac{1}{2}$$

$$y[3] = \frac{3}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 = 2 \qquad +\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$y[\infty] = \infty$$

$x[n] = u[n] < \infty \longrightarrow$ $y[\infty] = \infty$ ناپایدار

۳

کدام گزینه صحیح است؟

۱) اتصال متوالی دو سیستم غیرخطی، معادل یک سیستم غیرخطی است.

۲) اتصال متوالی دو سیستم پایدار، می‌تواند سیستم معادل ناپایدار را نتیجه دهد.

۳) یک سیستم خطی وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر سیگنال خروجی صفر، تنها ناشی از اعمال ورودی صفر باشد.

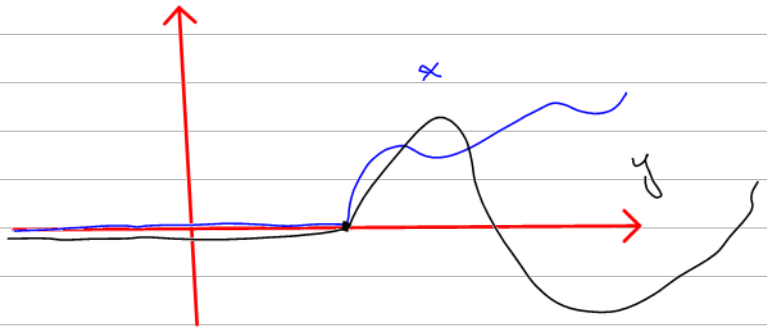
۴) در هر سیستم علّی، اگر ورودی تا لحظهٔ دلخواه t_0 متحد با صفر باشد، سیگنال خروجی نیز متحد با صفر است.

درجه سختی: **ساده**

موضوع سوال: **خواص سیستم ها**

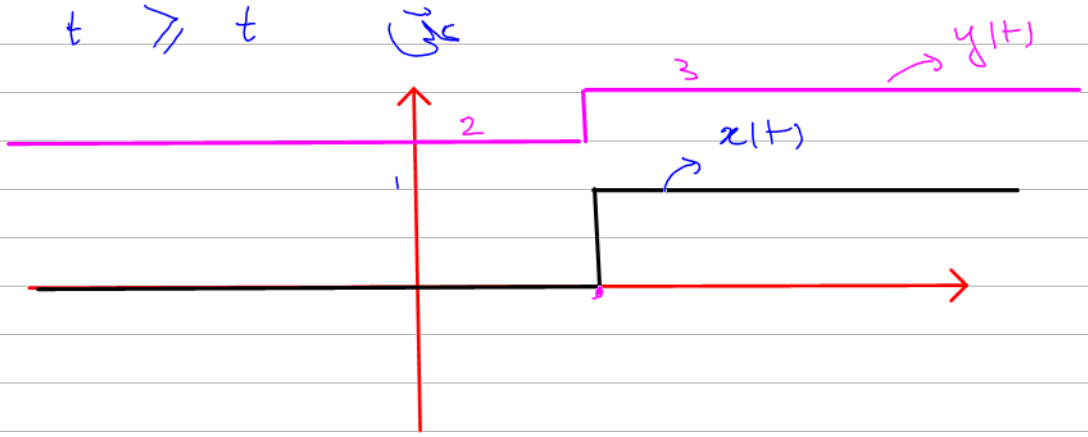
حل تشریحی

اگر سیستم خطی باشد، سیستم معکوس پذیرات اگر و تنها اگر به ازای هر خروجی دو ورودی متمایز داشته باشد.



$y(t) = x(t) + 2$ شبه خطی / غیر خطی

$t \geq t$ علی ✓



$y(t) = x(t) + 2x^{0}(t)$ → خطی است

↓

تابعه مبدا از x

حل تشریحی

۴ سیگنال $x(t)$ به‌صورت زیر تعریف شده است. مقدار $x(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t-۳n)$$

$$\text{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

۱) $-\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) ۱

درجه سختی: متوسط-تکراری

موضوع سوال: فوریه

حل تشریحی

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t-3n) \qquad x\left(\frac{3}{2}\right) = ?$$

$\text{sinc}(t)$ ، $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n)$ ⟵ تبدیل فوریه

$$f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$$

$$\text{sinc}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) * \delta(t-3n)$$

$*$ روی t عمل می‌کند — n ثابت در نظر گرفته می‌شود — خروجی عددی می‌شود

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t-3n) = x(t)$$

$$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \xrightarrow{F} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \qquad * \frac{\sin(at)}{\pi t} \longrightarrow \Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right) *$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n) \xrightarrow{Fs} a_k = \frac{1}{3} \qquad \sum \delta(t-nT_0) \longrightarrow a_k = \frac{1}{T_0}$$

$a_k = \frac{1}{T_0}$ و $\frac{1}{T_0}$ متناوب با $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-T_0 n)$ مثال $*$

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad \text{سیستم LTI}$$

مثال یک سیستم LTI $\quad y(t) = \underbrace{\text{sinc}(t)}_{\text{ورودی}} * \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n)}_{\text{پاسخ ضربه}}$

حل تشریحی

اگر دوره‌ی متناوب باشد:

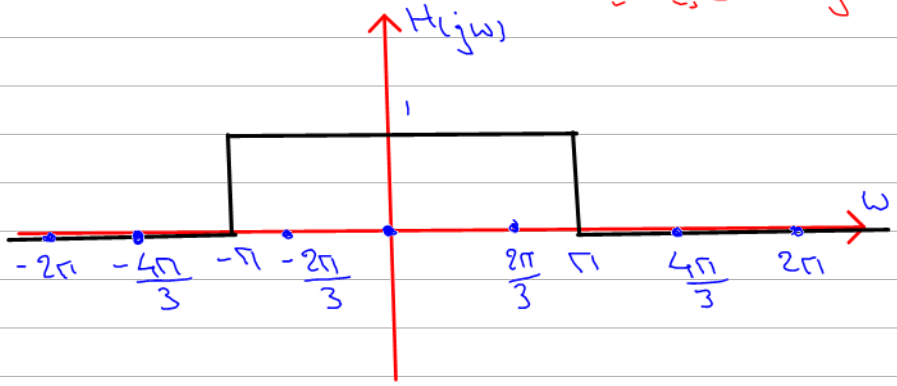
① $H(jw)$ را حساب کنید.

$$H(jw) = \Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

② از روی دوره‌ی w_0 را حساب کنید.

$$w_0 = \frac{2\pi}{3}$$

③ k هایی که $H(jkw_0) \neq 0$ را پیدا کنید.



$H(jk\frac{2\pi}{3}) \neq 0$ ؟

$k=0 \longrightarrow H(j0)=1$

$k=1 \longrightarrow H(j\frac{2\pi}{3})=1$

$k=2 \longrightarrow H(j\frac{4\pi}{3})=0$

$\vdots$

$k=-1 \longrightarrow H(-j\frac{2\pi}{3})=1$

$k=-2 \longrightarrow H(-j\frac{4\pi}{3})=0$

$\vdots$

پس $H(jkw_0)$ به ازای $k=0,\pm1$ برابر 1 است و در غیر اینصورت برابر 0 است.

④ به ازای k های فوق، a_k را حساب کنید.

حل تشریحی

a_0, a_1, a_{-1} ?

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-3n) \longrightarrow a_k = \frac{1}{3}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

(5)

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

$$a_k = \frac{1}{3} \qquad H\left(jk\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = 0, \pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} b_0 e^{j0\times\frac{2\pi}{3}t} + \frac{1}{3} b_1 e^{j\frac{2\pi}{3}t} + b_2 e^{j\frac{4\pi}{3}t} + \dots + \frac{1}{3} b_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{3}t} + b_{-2} e^{-j\frac{4\pi}{3}t} + \dots$$

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}t} + e^{-j\frac{2\pi}{3}t}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2j}e^{j\alpha} - \frac{1}{2j}e^{-j\alpha}$$

حل تشریحی

$y(t)$ خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربه $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-3n)$ و ورودی $\text{sinc}(t)$

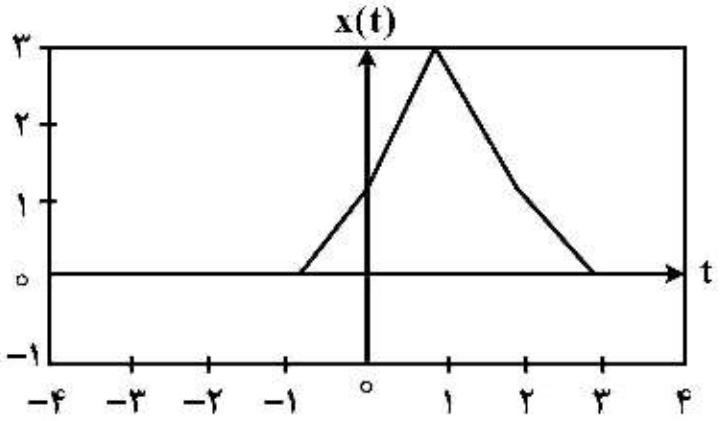
$$y(t)=\text{sinc}(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-3n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{sinc}(t-3n)=x(t)$$

$$x(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

$$x\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\pi)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}\ \checkmark$$

۵

سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ به‌صورت زیر داده شده است. با در نظر گرفتن $H(\omega) = ۲\frac{\sin(\omega)}{\omega}$، مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,H(\omega)e^{j۲\omega}d$، برابر کدام است؟



۵

$\frac{۵}{۲}$

۵π

$\frac{۵}{۲}\pi$

درجه سختی: متوسط و تکراری

موضوع سوال: تبدیل فوریه

حل تشریحی

$\int_{-\infty}^{\infty}$ تعریف عکس تبدیل فوریه ← dw

دنباله پیوسته

$\int_{<2\pi>}$ ~ ~ ~ ~ ← dw ← دنباله گسسته

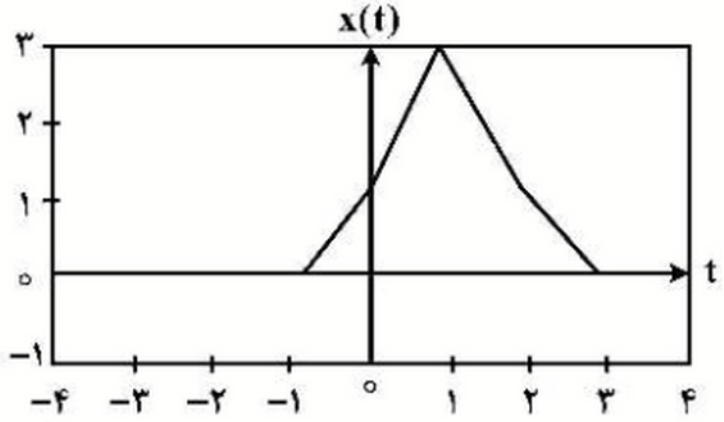
$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j2\omega}d$ ، برابر کدام است؟

۵

$\frac{۵}{۲}$

۵π

$\frac{۵}{۲}\pi$



$x(t) \rightarrow X(jw)$ ← جای‌گذاری ← حاصل !

اگر انتگرالی از w را خواست:

عکس تبدیل فوریه را نوشته و با جای‌گذاری عددی به جای t ، صورت سؤال را بسازید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(jw)H(jw)}_{F(jw)} e^{j2w}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\,e^{j2w}\,dw$$

$$2\pi f(t)^2 = 2\pi\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jw)\,e^{jwt^2}\,dw$$

حل تشریحی

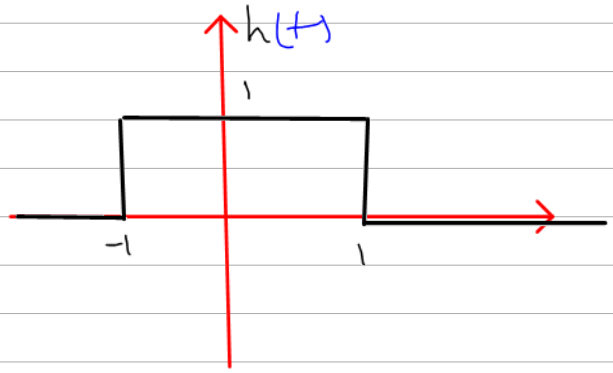
$$2\pi f(2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\, e^{j2\omega}\, d\omega = I$$

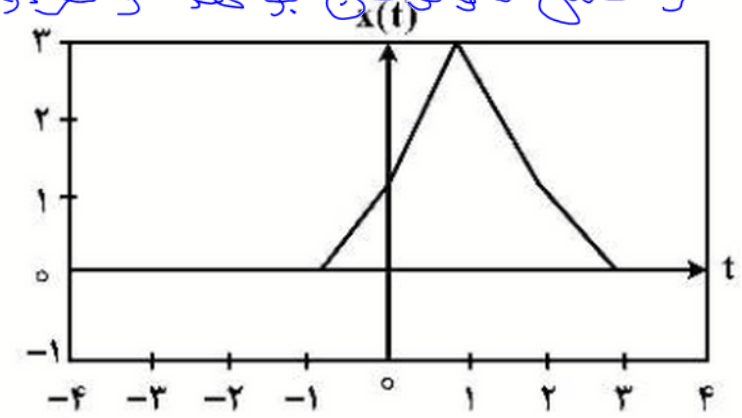
$$f(t)\Big|_{t=2} = ? \qquad f(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow X(j\omega)H(j\omega) = F(j\omega)$$

$$I = 2\pi x(t) * h(t)\Big|_{t=2} = ?$$

$$H(j\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} \longrightarrow \Pi\left(\frac{t}{2}\right) = h(t) \qquad \Pi\left(\frac{t}{2a}\right) \longrightarrow \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

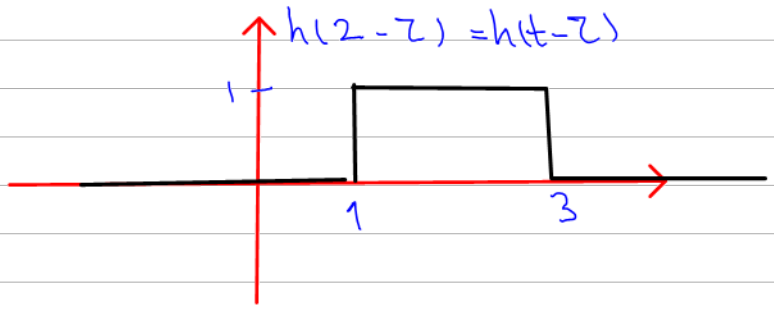
اگر حاصل کانولوشن بخواهد و هردو سیگنال ذوزنقه ترسیم



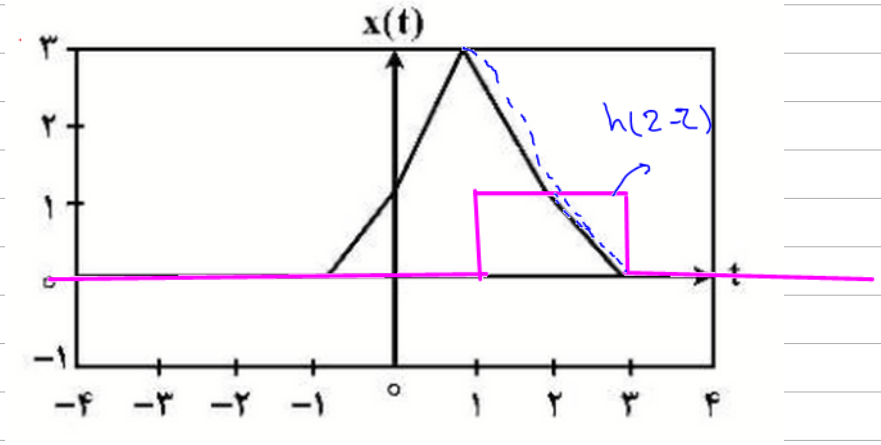


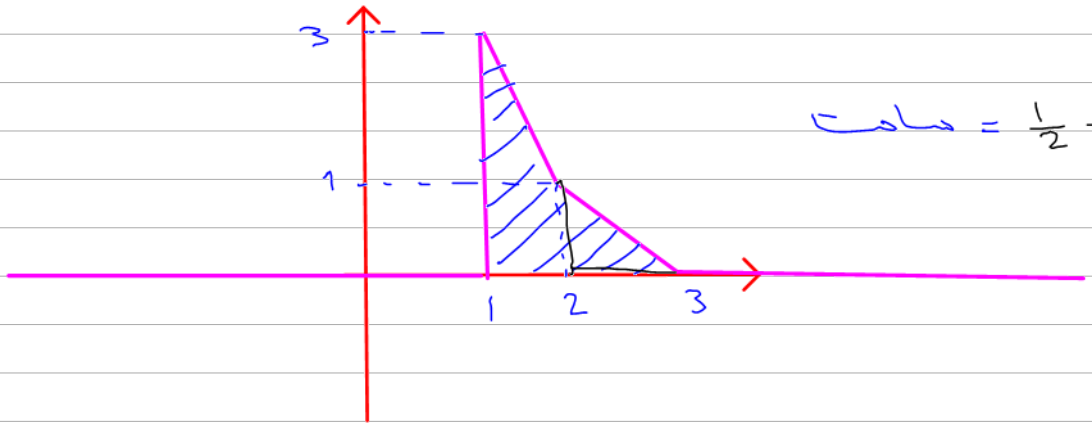


$t = 2$



حل تشریحی





$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} + \frac{1\times(4)}{2} = 2.5$$

$$I = 2\pi \times \left(\overset{2.5}{\cancel{x(t) * h(t)\Big|_{t=2}}} \right) = 5\pi \checkmark$$

۶

$x_1(t)=e^{-2t}u(t-1)$ و $y_1(t)$، به‌ترتیب، سیگنال‌های ورودی و خروجی متناظر در یک سیستم LTI هستند. اگر $x_2(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)$ به‌عنوان ورودی به سیستم داده شود، در آن صورت خروجی متناظر، $y_2(t)$، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$y_2(t)=-2y_1(t)+e^{-t}u(t-2)$$

$h(t)$، پاسخ ضربهٔ سیستم، برابر کدام است؟

۱) $e^{-t}u(t-2)$

۲) $e^{-t}u(t-1)$

۳) $e^{-(t-1)}u(t-2)$

۴) $e^{-(t-1)}u(t-1)$

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: تبدیل لاپلاس

حل تشریحی

$x_1(t)=e^{-2t}u(t-1)$ و $y_1(t)$، به‌ترتیب، سیگنال‌های ورودی و خروجی متناظر در یک سیستم LTI هستند. اگر $x_2(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)$ به‌عنوان ورودی به سیستم داده شود، در آن صورت خروجی متناظر، $y_2(t)$، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$y_2(t)=-2y_1(t)+e^{-t}u(t-2)$$

$h(t)$، پاسخ ضربهٔ سیستم، برابر کدام است؟

$x_1(t)=e^{-2t}u(t-1) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2=\frac{dx_1}{dt}$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

$y_2(t)=-2y_1(t)+e^{-t}u(t-2)$

$y_1(t)=x_1(t)*h(t)$

$y_2(t)=x_2(t)*h(t)$

$\rightarrow$ کانولوشن $\rightarrow$ حوزه‌ی زمان

$e^{at}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s-a}$ $\rightarrow$ تبدیل لاپلاس

$X_1(s) \longrightarrow Y_1(s)$

$X_2(s) \longrightarrow Y_2(s)$

$x_2(t)=\frac{dx_1}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)=sX_1(s)$

$y_2(t)=-2y_1(t)+e^{-t}u(t-2)$

حل تشریحی

$$X_1(s) \longrightarrow Y_1(s)$$

$$X_2 = sX_1(s) \longrightarrow sY_1(s) = Y_2$$

$$y_2(t) = -2y_1(t) + e^{-t}u(t-2)$$

$$e^{-t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+1}$$

$t \to t-2$ ، e^{-2s}

$$e^{-(t-2)}u(t-2) \longrightarrow \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$e^{-2}e^{2}e^{-t}u(t-2) \longrightarrow e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$e^{-t}u(t-2) \longrightarrow e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$y_2(t) = -2y_1(t) + e^{-t}u(t-2)$$

$$\underbrace{Y_2(s)}_{sY_1(s)} = -2Y_1(s) + e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$sY_1(s) = -2Y_1(s) + e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$Y_1(s) = \frac{e^{-2}e^{-2s}}{(s+2)(s+1)} = H(s)X_1(s)$$

حل تشریحی

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t-1)$$

$t \to t-1$ $\quad e^{-2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+2}$

$e^{-2}e^{2}e^{-2t}u(t-1) \longrightarrow e^{-2}\frac{e^{-s}}{s+2}$

$$e^{-2t}u(t-1) \longrightarrow e^{-2}\frac{e^{-s}}{s+2} = X_1(s)$$

$$\frac{e^{-2}e^{-2s}}{(s+2)(s+1)} = H(s) \times e^{-2}\frac{e^{-s}}{(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

$$e^{-t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+1}$$

$$h = e^{-(t-1)}u(t-1) \longrightarrow \frac{e^{-s}}{s+1}$$

$$h(t) = e^{-t+1}u(t-1)$$

حل تشریحی

۷

مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{\sin^{2}(5\frac{\omega}{2})}{\sin^{2}(\frac{\omega}{2})}d\omega$$

۱) 6π

۲) 5π

۳) 2π

۴) 10π

درجه سختی: متوسط-تکراری

موضوع سوال: تبدیل فوریه

حل تشریحی

$$\Pi\left(\frac{n}{2a}\right) \longrightarrow \frac{\sin\left((2a+1)\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$I = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2 d\omega = ?$$

انتگرالی از $d\omega$ ← تبدیل فوریه

بازه 0 تا 2π ← ← ← زمان گسسته

انتگرالی از حاصلضرب دو سیگنال یا توان دوم سیگنال ← رابطه پارسوال

$$I = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2 d\omega$$

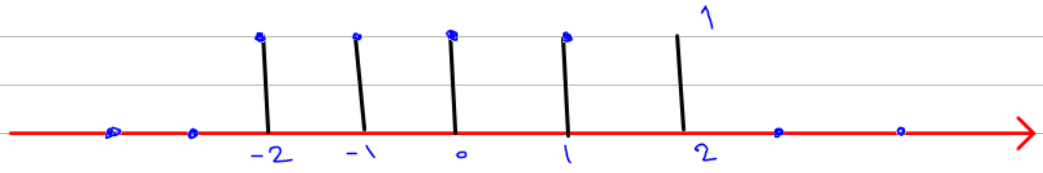
$$\int_{0}^{2\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2$$

حل تشریحی

$$X(jw) = \frac{\sin(\frac{5w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})} \longrightarrow \Pi\left(\frac{n}{4}\right) = x[n]$$

$$I = \int_0^{2\pi} |X(jw)|^2 dw = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\Pi\left(\frac{n}{4}\right)\right|^2$$



$$I = 2\pi\left(1^2 + (+1)^2 + (1)^2 + 1^2 + 1^2\right) = 10\pi \checkmark$$

۸

در مورد سیستم LTI زمان گسسته، کدام گزینه صادق است؟

۱) اگر پاسخ ضربه کران‌دار باشد، سیستم پایدار است.

۲) اگر پاسخ پله کران‌دار باشد، سیستم پایدار است.

۳) اگر سیستم پایدار باشد، پاسخ پله کران‌دار است.

۴) اگر سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه می‌تواند بی‌کران شود.

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: خواص سیستم

حل تشریحی

در مورد سیستم LTI زمان گسسته، کدام گزینه صادق است؟

۱) اگر پاسخ ضربه کران‌دار باشد، سیستم پایدار است.

۲) اگر پاسخ پله کران‌دار باشد، سیستم پایدار است.

۳) اگر سیستم پایدار باشد، پاسخ پله کران‌دار است.

۴) اگر سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه می‌تواند بی‌کران شود.

اگر ورودی محدود ← خروجی محدود ⇔ پایدار

① اگر ورودی مزبه واحد بدهیم و خروجی محدود باشد ← پایدار

② " " پله واحد " " " " " "

③ سیستم پایدار است ← اگر ورودی پله بدهیم خروجی محدود است.

↳ اگر هر ورودی محدودی بدهیم ← خروجی محدود

④ " " " " مزبه " " " می‌تواند نامحدود باشد.

↳ ورودی محدود ← حتماً خروجی محدود است.

مزبه زمان گسسته دامنه محدود دارد.

" " پیوسته دامنه نامحدود دارد.

۹

$x(n)$ سیگنال متناوب با پریود N و با ضرایب سری فوریهٔ a_k است. $[z]$ به معنای بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی z است. اگر $y[n] \triangleq x\left(\left[\frac{n}{r}\right]\right)$ که در آن r عدد صحیح مثبت است تعریف شود و ضرایب سری فوریه $y[n]$ را b_k بنامیم، در آن صورت b_0 برابر کدام است؟

۱) a_0

۲) ra_0

۳) $\frac{a_0}{r}$

۴) a_r

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: سری فوریه

حل تشریحی

$\lfloor z \rfloor$ = بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی z

جزء صحیح $\leftarrow \lfloor z \rfloor$

$y[n] = x\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$

$x[n] \longrightarrow a_k$

$y[n] \longrightarrow b_k = ?$

$x\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = x_{(r)}[n] + x_{(r)}[n-1] + \cdots + x_{(r)}[n-r+1]$ دنباله‌ی rتایی

$r=3$

$x\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \Rightarrow$

- $\frac{n}{3}$ = عدد صحیح $\quad n = 3k \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n}{3}$
- $\frac{n-1}{3}$ = " " $\quad n = 3k+1 \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n-1}{3}$
- $\frac{n-2}{3}$ = " " $\quad n = 3k+2 \rightarrow \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n-2}{3}$

4 10 23

$x\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = x\left[\frac{n}{3}\right] + x\left[\frac{n-1}{3}\right] + x\left[\frac{n-2}{3}\right]$

$x\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2]$

حل تشریحی

$$x[n] \longrightarrow a_k$$

$$x_{(r)}[n] \longrightarrow \frac{1}{r} a_k$$

$n \to n-1$

$$x[n-n_0] \longrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 n_0} \quad \times e^{-jk\omega_0}$$

$$x_{(r)}[n-1] \longrightarrow \frac{1}{r} a_k e^{-jk\omega_0}$$

$+$

$$x_{(r)}[n-2] \longrightarrow \frac{1}{r} a_k e^{-jk\omega_0 \times 2}$$

$+ \quad \vdots$

$$x_{(r)}[n-r+1] \longrightarrow \frac{1}{r} a_k e^{-jk\omega_0(-1+r)}$$

$$y[n] \longrightarrow b_k = \frac{1}{r} a_k + \frac{1}{r} a_k e^{-jk\omega_0} + \cdots + \frac{1}{r} a_k e^{-jk\omega_0(r-1)}$$

$$b_0 = \underbrace{\frac{1}{r} a_0 + \frac{1}{r} a_0 + \cdots + \frac{1}{r} a_k}_{\text{تعداد } (r-1-0+1) = r} = \frac{r}{r} a_0 = a_0 \checkmark$$

حل تشریحی

۱۰

رابطهٔ ورودی و خروجی یک سیستم به‌صورت زیر است: ($x[n]$ ورودی و $y[n]$ خروجی)

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x(n)$$

اگر $x(n)=(\frac{1}{2})^n u[n]$ باشد، نسبت $\frac{y[n]}{y[n-1]}$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{n}{2(n-1)}$

۲) $\frac{n+2}{2n}$

۳) $\frac{n+2}{2(n+1)}$

۴) $(\frac{n}{n-1})^2$

درجه سختی: متوسط

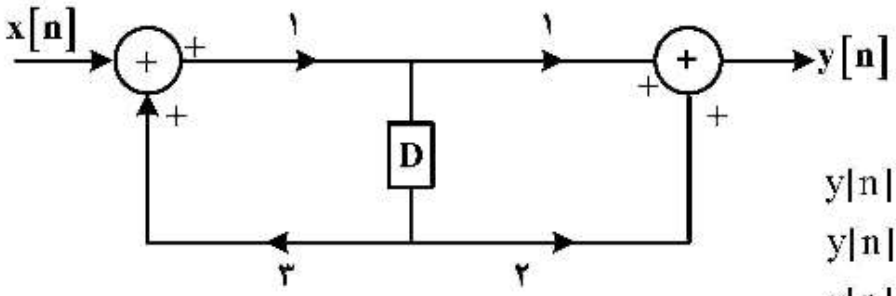
موضوع سوال: تبدیل Z

حل تشریحی

حل تشریحی

حل تشریحی

۱۱ تفاضلی مابین $x[n]$ و $y[n]$ در شکل زیر کدام است؟



۱) $y[n]-۲y[n-۱]=x[n]+۳x[n-۲]$

۲) $y[n]-۳y[n-۱]=x[n]+۲x[n-۱]$

۳) $y[n]-۳y[n-۲]=x[n]+۲x[n-۱]$

۴) $y[n]+۳y[n-۲]=x[n]-۳x[n-۱]$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل Z

حل تشریحی

۱۲

$x[n]$ سیگنال متناوب با پریود ۱۰ و در یک پریود با تعریف زیر است. ضرایب سری فوریهٔ آن با همین دورهٔ تناوب برابر کدام است؟

$$x[n]=\begin{cases}5 & n=2,8\\ -j5 & n=3\\ j5 & n=7\\ 0 & n=0,1,4,5,6,9\end{cases}$$

۱) $\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{3k\pi}{5}\right)$

۲) $j\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$

۳) $\cos\left(\frac{3k\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{3k\pi}{5}\right)$

۴) $j\cos\left(\frac{3k\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: سری فوریه

حل تشریحی

حل تشریحی

حل تشریحی