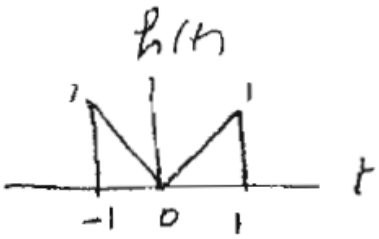
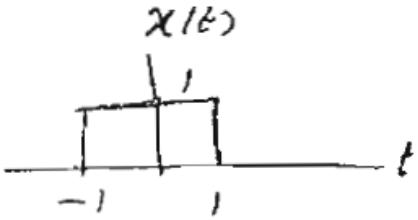
حل سوالات سیگنال سیستم

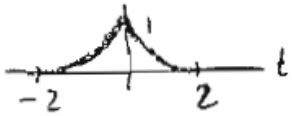
کارشناسی ارشد سال ۱۳۸۹

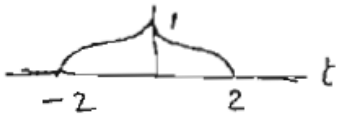
www.Liveamooz.com

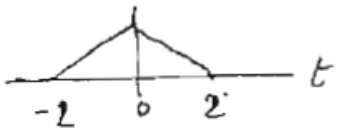
۱ اگر پاسخ ضربه سیستم LTI به صورت $h(t)$ باشد پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ به صورت کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

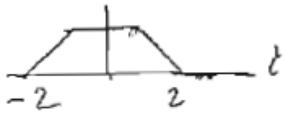




(۱)


(۲)


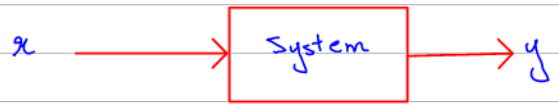
(۳)


(۴)


درجه سختی: متوسط	موضوع سوال: خواص سیستم های LTI

مرور نکات

محاسبه پاسخ سیستم های LTI:



معادله سیستم $y(t) = f(x,t)$

سیستم یا توسط معادله توصیف می شود یا پاسخ ضربه (h)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\,h[k]$$

① اگر در صورت سوال x و h را به صورت شکل بدهد و طول x، h محدود باشد داریم:

(I) سیگنال x یا h هرکدام ساده تر است را ضربه زمانی می کنیم و نسبت به محور عمودی

(II) سیگنال ضربه شده را به اندازه t شیفت می دهیم (محور افقی را با t یا n) جمع می کنیم.

(III) به ازای $n(t)$ های مختلف حاصلضرب دو سیگنال را بدست آورده و انتگرال (یا $\sum$) می گیریم.

② اگر x و h را به صورت فرمول داده باشد از رابطه فوق محاسبه می کنیم.

* در سیستم های گسسته سعی می کنیم x یا h را تا جای ممکن به صورت تابعی از δ بنویسیم.

* " " " پیوسته تا جای ممکن انتگرال ها را ساده کنید.

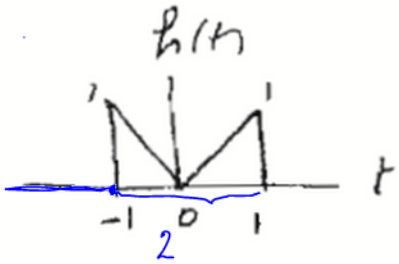
* در محاسبه کانولوشن اول، نقطه شروع، نقطه پایان و طول را محاسبه کنید و تا جای ممکن گزینه ها را حذف کنید.

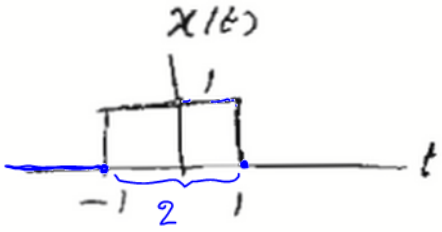
نقطه شروع y = نقطه شروع x + نقطه شروع h

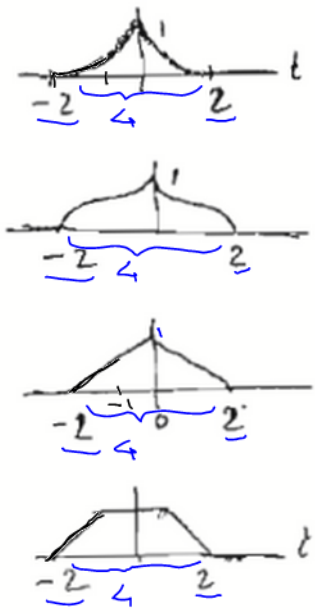
" پایان " = " " + " پایان "

طول y = طول x + طول h

حل تشریحی





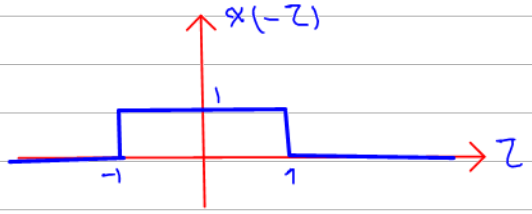


(۲) ✓

y نقطه شروع $= -1 + -1 = -2$

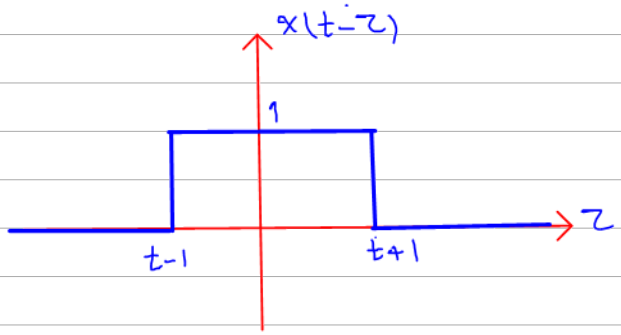
y پایان $= 1 + 1 = 2$

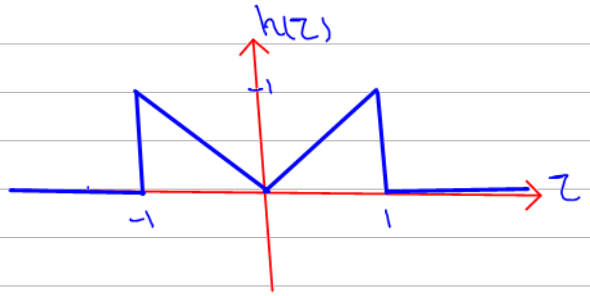
y طول $= 2 + 2 = 4$



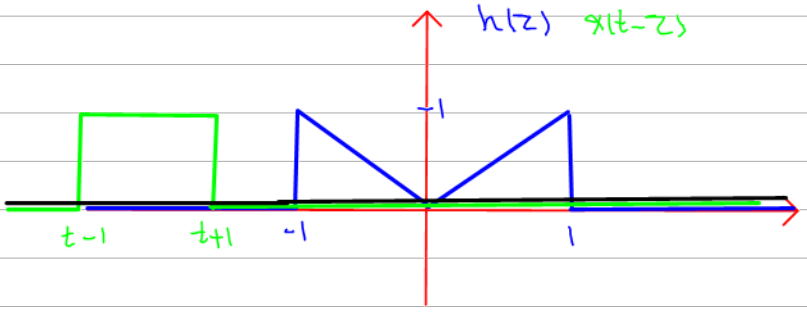
① یکی از سیگنال‌ها را قرینه زمانی می‌کنیم. $x(-z)$

② حول انتهای سیگنال مرحله ① را با t جمع می‌کنیم. $x(t-z)$





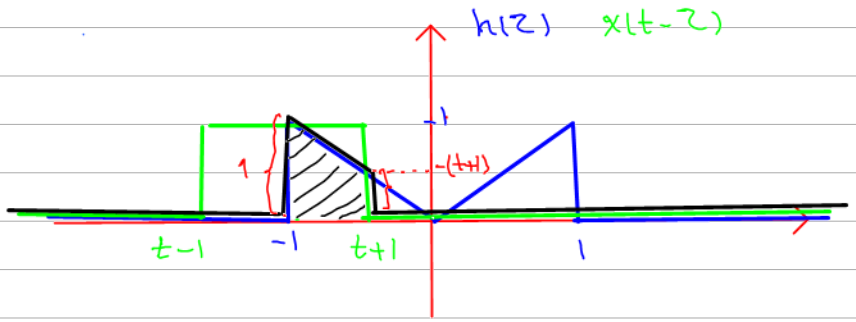
③ حاصلضرب $x(t-z)$ را با h به ازای مقادیر مختلف t حاسبه می‌کنیم.



$x(t-z)\,h(z) = 0 \quad \text{if} \quad t < -2$

$y(t) = 0 \qquad t < -2$

حل تشریحی



$-2 < t < -1$

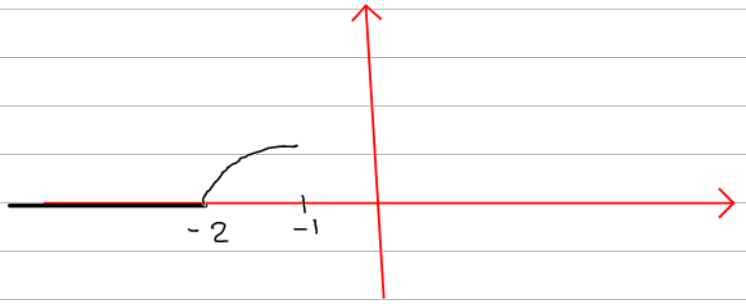
سیگنال مشکی $= x(t-\tau)h(\tau)$

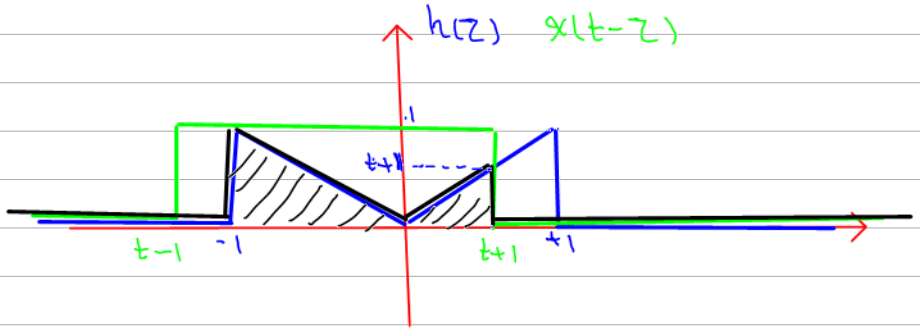
$y(t) = \int x(t-\tau)h(\tau)d\tau = ?$ $\quad -2<t<-1$

$y(t) = \frac{(t+1-(-1))\times(1+(-t-1))}{2} =$

$y(t) = -\frac{t^2}{2} - t \quad -2 < t < -1$

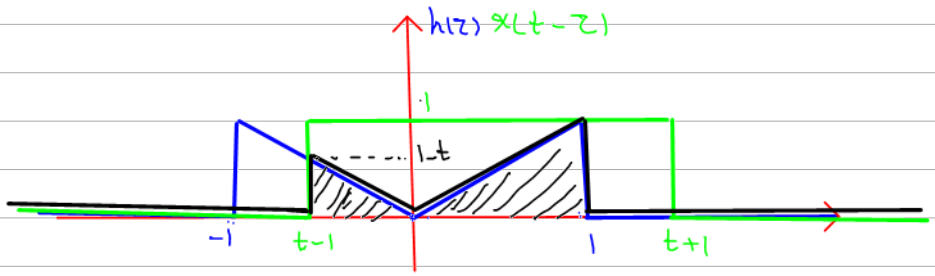
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ -\frac{1}{2}t^2 - t & -2 < t < -1 \\ \vdots & \vdots \\ ? & ? \end{cases}$$





$-1 < t < 0$

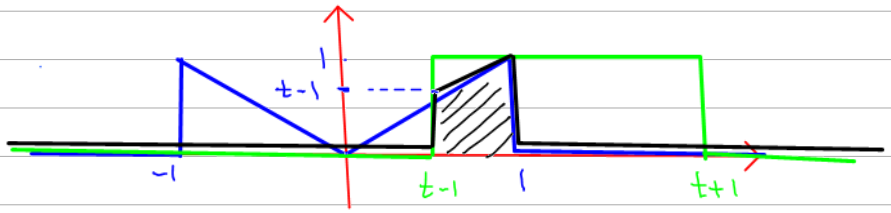
$y(t) = \frac{1\times 1}{2} + \frac{(t+1)(t+1)}{2} = \frac{t^2}{2} + t + 1 \quad -1 < t < 0$



$0 < t < 1$

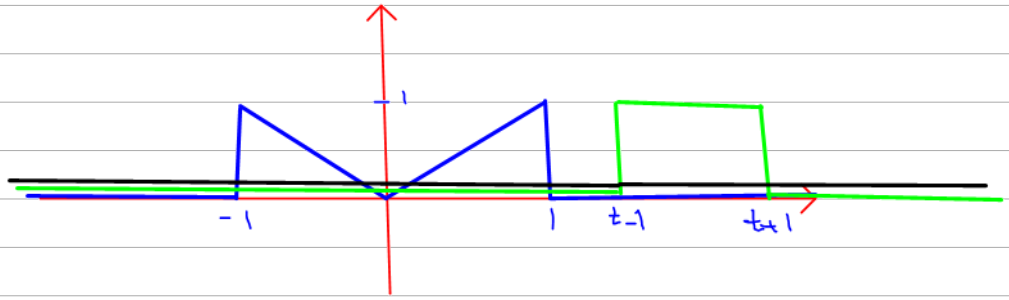
$y(t) = \frac{(t+1)(1-t)}{2} + \frac{1\times 1}{2} = +\frac{1}{2}t^2 - t + 1 \quad 0 < t < 1$

حل تشریحی



$1<t<2$

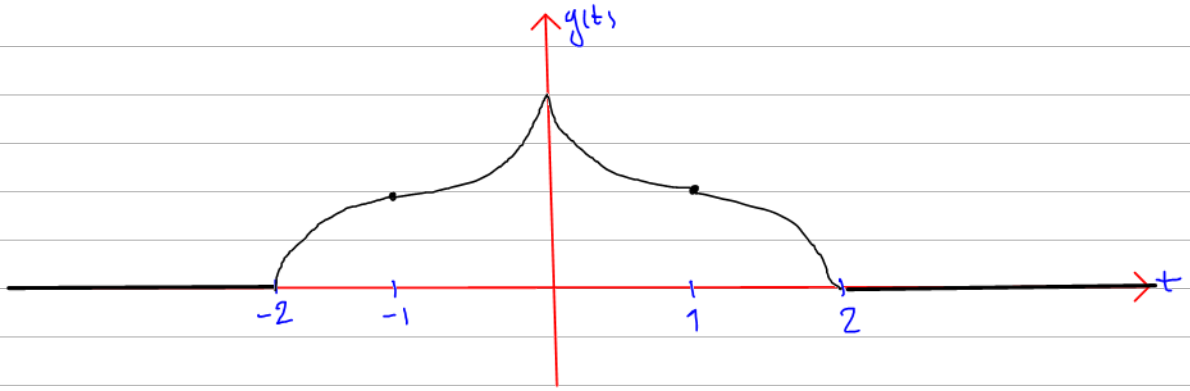
$$y(t) = \frac{(1-(t-1))\times(t-1+1)}{2} = -\frac{1}{2}t^2 + t \qquad 1<t<2$$



$t>2$

$y(t) = 0 \qquad t>2$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<-2 \\ -\frac{1}{2}t^2 - t & -2<t<-1 \\ \frac{t^2}{2} + t + 1 & -1<t<0 \\ +\frac{t^2}{2} - t + 1 & 0<t<1 \\ -\frac{t^2}{2} + t & 1<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$



۲ اگر $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$ باشد، در این صورت ضرایب بسط سری فوریه سیگنال زمان پیوسته $y(t) = X(e^{j2t})$ کدام است؟

۱) $x[-k]$

۲) $x[k]$

۳) $x[2k]$

۴) $x[-2k]$

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: سری و تبدیل فوریه

① تعریف تبدیل فوریه:

$$x(t) \xrightarrow{F} X(jw) \longrightarrow \begin{cases} X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw \end{cases}$$

$$x[n] \xrightarrow{F} X(jw) \text{ یا } X(e^{jw}) \longrightarrow \begin{cases} X(jw) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jwn} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(jw)\, e^{jwn}\, dw \end{cases}$$

* تبدیل فوریه برای سیگنالهای متناوب و نامتناوب تعریف می‌شود.
* " " سیگنالهای گسسته برحسب w دوره‌ای هستند.
* " " " " " " متناوب با 2π هستند.

② تعریف سری فوریه:

سری فوریه برای سیگنالهای متناوب تعریف می‌شود.

* فاصله سری فوریه:

(I) در مرحله اول دوره تناوب $x(t)$ یا $x[n]$ را محاسبه می‌کنیم.

(II) فرکانس پایه $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ یا $w_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ را محاسبه می‌کنیم.

(III)
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jkw_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k\, e^{jkw_0 n} \qquad a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]\, e^{-jkw_0 n}$$

* توان سری فوریه سیگنال زمان گسسته $x[n]$، متناوب با دوره تناوب N_0 است.

حل تشریحی

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ و $X(e^{j\omega})$ نسبت به ω متناوب با 2π است.

$g(t) = X(e^{j2t}) \xrightarrow{FS} a_k = ?$

$x(t) = X(e^{jt}) \rightarrow T_0 = 2\pi$ $X(e^{jt})$ متناوب با $T_0 = 2\pi$ است.

$x(2t) = X(e^{j2t}) \rightarrow \frac{T_0}{2} = \pi$

$g(t) = X(e^{j2t}) \rightarrow T_0' = \pi$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$g(t) \longrightarrow a_k = ?$ $\quad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ $\quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

$g(t) = X(e^{j2t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2tn}$

$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\times t\times n}$ $\xrightarrow{+n=-k}$ $k=-n$

$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\times 2\times t}$

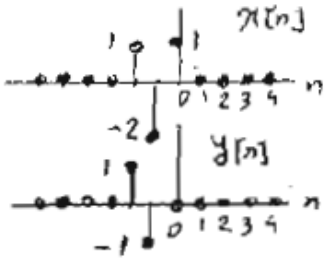
$g(t) = \sum_{k=\infty}^{-\infty} x[-k] e^{-j2\times t\times(-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{jk\times 2\times t}$

$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\times 2\times t}$

۳ کدام یک از دو گزاره زیر در مورد سیگنال‌های زمان گسسته شکل روبه‌رو صحیح است؟

الف) یک سیستم LTI علی می‌تواند $x[n]$ را به $y[n]$ تبدیل نماید.

ب) یک سیستم LTI پایدار می‌تواند $x[n]$ را به $y[n]$ تبدیل نماید.



۱) فقط الف

۲) فقط ب

۳) هر دو

۴) هیچ کدام

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: خواص سیستم های LTI، تبدیل Z

مرور نکات

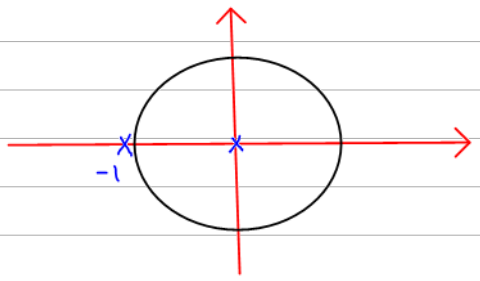
$x[n] \longrightarrow X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad ; \quad ROC_x = \{ z \mid X(z) \neq \pm\infty \}$$

جدول تبدیل z

$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < 1$
$\delta[n]$	1	کل صفحه
$\delta[n+a]\ ; a>0$	z^a	$\lvert z\rvert < \infty$
$\delta[n+a]\ ; a<0$	z^a	$\lvert z\rvert > 0$
$\cos(an)u[n]$	$\frac{1-\cos(a)z^{-1}}{1-2\cos(a)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\cos(an)u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < 1$
$\sin(an)u[n]$	$\frac{\sin(a)z^{-1}}{1-2\cos(a)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-\sin(an)u[-n-1]$	〃	$\lvert z\rvert < 1$

$$X(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{z^{-1} + 1} \times \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^1 + 1}{z + z^2} \rightarrow z = 0, -1$$



$$x[n] = u[n] + u[n-2] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \le n < 2 \\ 2 & n \ge 2 \end{cases}$$

دست راستی

$$x[n] = u[-n+1] = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ 1 & n \le 1 \end{cases}$$

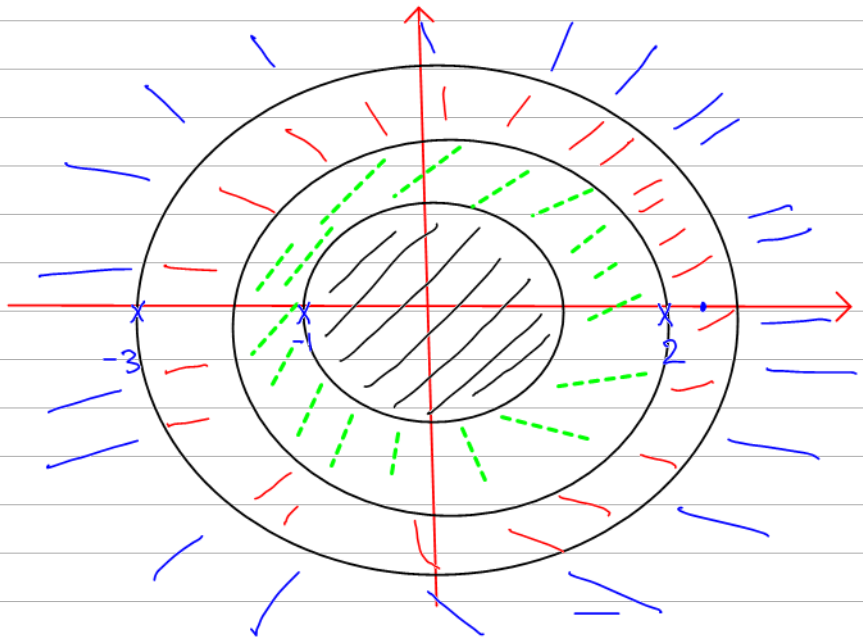
$$X(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-2)(z+3)}$$

دست راستی

دست چپی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{2}{5}\right)^n < \infty$$

$$\frac{5}{2} = 2.5 \in ROC_x$$



نحوه یافتن ROC_x:

1- $X(z)$ را به صورت توابعی هست از z نوشته و قطبهای $X(z)$ را یافتن کنید.

2- روی هر قطب $X(z)$ یک دایره به مرکز مبدأ رسم کنید.

3- اگر $x[n]$ دست راستی باشد، ROC بیرون بزرگترین دایره است (ROC دست راستی)

نکته! اگر در چه صورت $X(z)$ بزرگتر از درجه صورت آن باشد ROC شامل ∞ نیز خواهد بود

$ROC = a < |z| < \infty$ خواهد بود و در غیر این صورت $ROC = |z| > a$

4- اگر $x[n]$ دست چپی باشد ROC داخل کوچکترین دایره است. (ROC دست چپی)
شعاع کوچکترین دایره

نکته! اگر $z=0$ قطب $X(z)$ باشد، $ROC = 0 < |z| < b$ بوده و شامل مبدأ خواهد بود.

نیز شود در غیر این صورت $ROC = |z| < b$ خواهد بود.

5- اگر $x[n]$ دارای طول محدود باشد و به ازای $b < n < a$ مقدار داشته باشد آنگاه

5-1- $a,b>0$ ← $ROC = |z| > 0$ ← کل صفحه به جز مبدأ

5-2- $a,b<0$ ← $ROC = |z| < \infty$ ← " " " " " ∞

5-3- $a \times b < 0$ ← $ROC = 0 < |z| < \infty$ ← " " " " ∞ و مبدأ

6- اگر $x[n]$ دو طرفه باشد آنگاه ROC بین دو دایره خواهد بود.

نکته!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, a^{+n} \neq \infty \rightarrow \frac{1}{a} \notin ROC_x$$

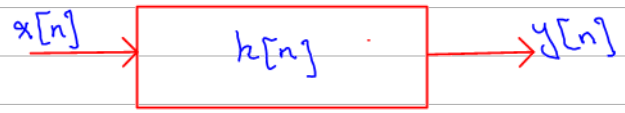
" " " $\neq \pm\infty \rightarrow \frac{1}{a} \in ROC_x$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](1)^n = \infty \rightarrow \frac{1}{1} \notin ROC_x$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-3)^n < \infty \rightarrow \frac{1}{-3} \in ROC_x$$

مرور نکات

* هرگاه در مورد خواص سیستم های LTI زمان گسسته (علی و پایداری) سؤال کنند، بهترین روش استفاده از تبدیل z است.



$Y(z) = H(z)\,X(z)$

* اگر $H(z)$ و ناحیه همگرایی آن را داشته باشیم داریم:

① سیستم علی است اگر و فقط اگر:

* $h[n]$ به ازای زمانهای منفی صفر باشد.

* ناحیه همگرایی $H(z)$، دست راستی باشد و درجه صورت $H(z)$ از مخرج آن کمتر یا مساوی باشد.

توجه: اگر H برحسب z^{-1} است صرفاً اول تبدیل به z کنید. ولی این کار صرفاً برای توان z را پیدا کنید و صورت و مخرج را در کمترین توان (مثبت) ضرب کنید.

$$H(z) = \frac{z^{-2} + z^{-1}}{z^{-1}(1+3z^{-1})(1+4z^{-1})}$$

② سیستم پایدار است اگر و تنها اگر:

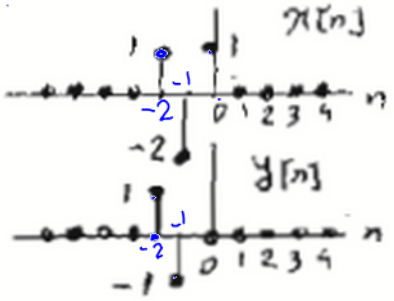
* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

* دایره واحد در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار گیرد.

③ علی و پایدار است اگر و تنها اگر:

* تمام قطبهای $H(z)$ داخل دایره واحد بوده و ROC_H دست راستی باشد و درجه صورت H از مخرج بزرگتر نباشد.

حل تشریحی



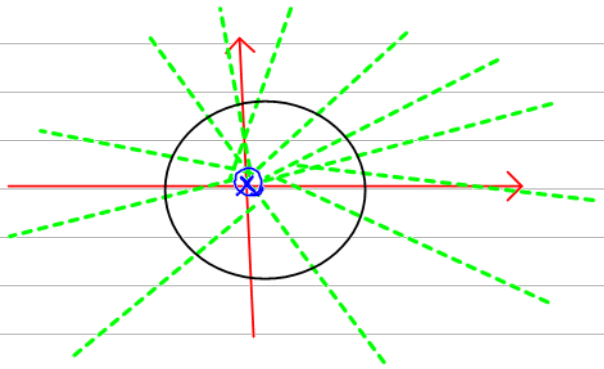
$H(z)$ ← می‌تواند + علّی یا پایداری

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$x[n] = 1\delta[n+2] - 2\delta[n+1] + 1\delta[n] \longrightarrow X(z) = z^2 - 2z^1 + 1$$

$$y[n] = 1\delta[n+2] - 1\delta[n+1] \longrightarrow Y(z) = z^2 - 1z^1$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - z} = \frac{z^1 - 1}{z^1}$$



$$ROC_H = \{z \mid H(z) \neq \pm\infty\} = |z| > 0$$

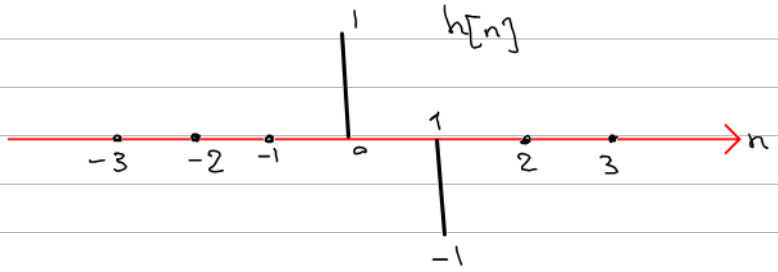
ROC_H دست‌راستی و درجه صورت H مساوی درجه مخرج آن است ← علّی

ROC_H شامل دایره واحد می‌شود ← پایدار

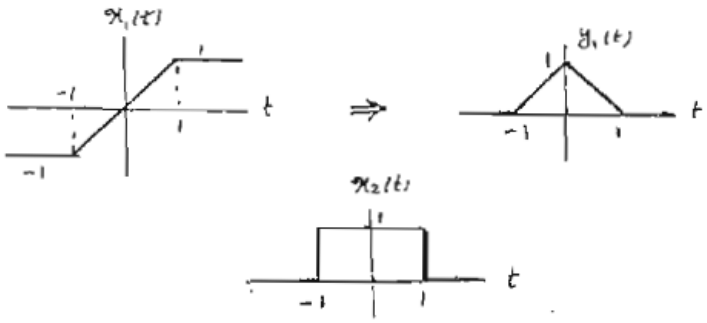
② $H(z) = 1 - z^{-1} \longrightarrow h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

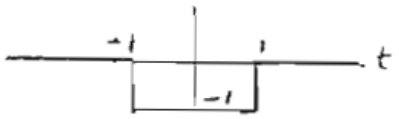
$h[n] = 0 \quad n < 0 \longrightarrow$ علّی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1 + 1 = 2 < \infty \longrightarrow$$ پایدار

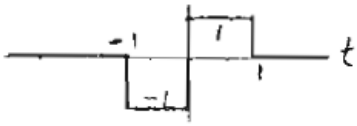


۴ پاسخ یک سیستم بدون حافظه تغییرناپذیر با زمان به ورودی $x_1(t)$ به صورت $y_1(t)$ است. پاسخ این سیستم به ورودی $x_2(t)$ چیست؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

درجه سختی: دشوار

موضوع سوال: خواص سیستم ها

هرگاه مقابل سیستم را ندهد ولی هوای آن را بدهد و ورودی و خروجی را بدهد داریم:

① باقوجه به هوای سیستم عملیات مجاز را تعیین کنید:

* TI ← شیفت زمان مجاز است. هراندازه ورودی را شیفت دهیم، خروجی هم شیفت می‌یابد.

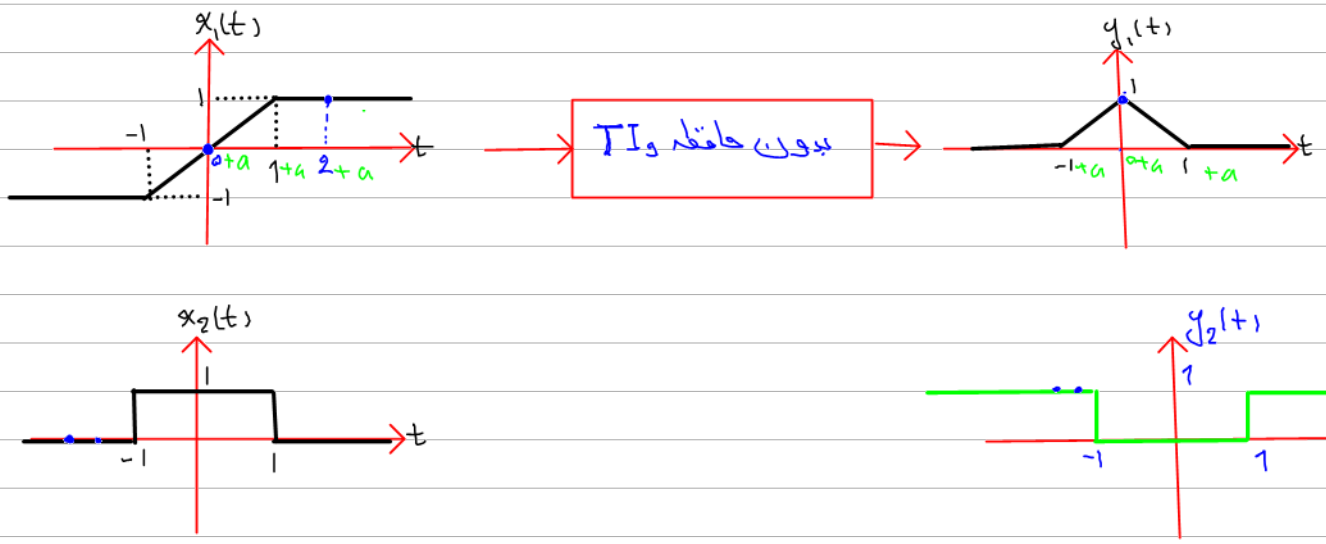
* هوا ← ورودی و خروجی را با توان در یک عدد ضرب کرد.
اگر دوتا ورودی جمع یا منها شوند، خروجی‌ها هم جمع یا منها می‌شوند.

② با توجه به عملیات مجاز، ورودی مجهول را از روی ورودی داده شده تعیین کنید.

این عملیات فوق را روی خروجی معلوم انجام دهید تا خروجی مجهول ساخته شود.

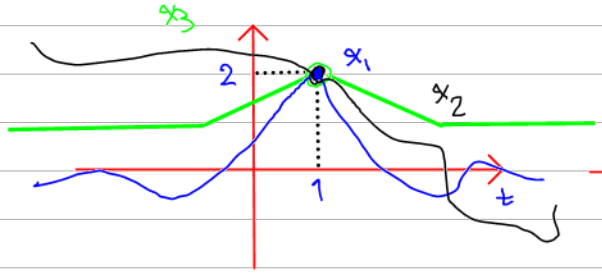
③ اگر با دو مرحله فوق به جواب نرسیدید، از مفهوم هوا داده شده استفاده کنید و باتوجه به مفهوم خروجی مجهول را بسازید.

حل تشریحی



TI ← می توان ورودی سیستم را به مقدار دلخواه شیفت داد (خود زمان) را با عدد دلخواه جمع کرد و خروجی هم به همان اندازه شیفت پیدا می کند.

بدون حافظه ← یعنی خروجی سیستم در هر لحظه فقط به ورودی در آن لحظه وابسته است.



بدون حافظه → y در لحظه $t=1$ برای هر x_3 یکسان است.

دلخواه
مقدار ورودی در لحظه $t=\widehat{a+a}$ برابر a باشد → System → خروجی در لحظه $t=\widehat{a+a}$ برابر 1 است.

دلخواه
مقدار ورودی در لحظه $t=\widehat{2+a}$ برابر 1 باشد → System → خروجی در لحظه $t=\widehat{2+a}$ برابر a است.

a هر عدد دلخواه است.

۵

در مورد سیستمی که رابطهٔ ورودی ـ خروجی آنها به صورت زیر می‌باشد، کدام گزینه نادرست می‌باشد؟

$$y(t)=\begin{cases}0 & x(t)<0\\ x(t)+x(t-2) & x(t)\geq 0\end{cases}$$

۱) این سیستم علّی و پایدار است.

۲) این سیستم غیرخطی و TI است.

۳) این سیستم TI و معکوس‌ناپذیر می‌باشد.

۴) این سیستم معکوس‌پذیر و حافظه‌دار می‌باشد.

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: خواص سیستم ها

مرور نکات

بعضی خواص سیستم:

① خطی بودن: اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد سیستم غیرخطی است و اگرنه، خطی است.

* اگر x توان غیر از ۱+ داشته باشد

* " " داخل عملگر غیرخطی مثل $\sin(x)$ قرار گیرد

* " " در شرط‌ها باشد

② TV یا TI: اگر آرگومان زمان بیرون x باشد و یا داخل x روی آرگومان زمان عملیات غیر از شیفت زمانی انجام شود، سیستم TV است و درغیر این صورت TI است.

$y[n] = 2^{x[n-1]} \times x[-n+1]$ (TV)

$y(t) = x(t-1) + t\,x(t)$

③ حافظه‌دار بودن: اگر داخل x روی آرگومان زمان هرعملیاتی انجام شود حافظه دارد است.

$y(t) = x(t)(t-1)$

$y[n] = x[n-1]$

④ علّی بودن: آرگومان y را بنویسید و آرگومان عام x ها را هم بنویسید.

اگر با رعایت قیدهای سؤال، به ازای عام زمان‌ها آرگومان y بزرگتر یا مساوی آرگومان‌های xها باشد یعنی سیستم علّی است، درغیراین صورت غیرعلّی است.

$y[n] = \begin{cases} x[-n] & n \geq 0 \\ x[n-2] + x[n] & n < 0 \end{cases}$

n ? $\geq$ $-n$; $n \geq 0$ / n ; $n < 0$ / $n-2$; $n < 0$

$n \geq -n$ ✓ ; $n \geq 0$

$n \geq n$ ✓ ; $n < 0$

$n \geq n-2$ ✓ ; $n < 0$

علّی

$y(t) = x(t) + x(t)\,x(|t|-1)$

t ? $\geq$ t / $|t|-1$

$t \geq t$ ✓

$t \geq |t|-1$ ✗

$-10 < 10-1$

غیرعلّی

$y(t) = x^1(t) + x^1(t \cdot \cos(t)) + 1^a$

$y[n] = \underline{Re}\{ x[1] + x[-\sin(n)] \}$

$y(t) = x^1(t) \; x^1(t-1) + \underline{2^{x(t)}}$

x^2

⑤ پایداری: اگر به ازای ورودی محدود، خروجی $\infty \pm$ (در کل زمانها حتی $t=\pm\infty$ یا $n=\pm\infty$) نشود سیستم ناپایدار است و غیر این صورت پایدار است.

اگر x در مخرج باشد یا داخل تابعی باشد که می‌تواند ∞ شود حتماً آن مقدار را بررسی کنید.

در غیر این صورت $x(t)=A$ ($x[n]=A$) گذاشته و y را حساب کنید.

$$y(t)=\tan(|x(t)|)$$

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]}{x[n-1]-2} & x[n-1]\neq 2\\ x[n]\times e^{x[n-1]} & x[n-1]=2\end{cases}$$

$x(t)=\frac{\pi}{2} \longrightarrow y(t)=\tan(\frac{\pi}{2})=\infty$

$x[n]=2^{+}=2+0^{+} \longrightarrow y[n]=\dfrac{2+0^{+}}{2+0^{+}-2}=\dfrac{2^{+}}{0^{+}}=\infty$ ناپایدار

$x[n-1]=2+0^{+}$

⑥ معکوس پذیری:

سیستم معکوس پذیر است اگر و تنها اگر شروط زیر را داشته باشد:

(I) ورودی x در کل زمانها روی خروجی تأثیر داشته باشد ← با آگاهی از x هر عددی بین $+\infty$ و $-\infty$ را بتوان ساخت.

(II) کل مقادیر x روی خروجی تأثیر داشته باشد.

(III) بتوان تابع x بر حسب y را بدون ابهام به صورت یکتا نوشت.

1) $y(t)=x(t)$

2) $y[n]=\dfrac{|x[n]|}{x[n]}$

3) $y[n]=\begin{cases}0 & n>0\\ x^2[n] & n<0\end{cases}$

4) $y(t)=\begin{cases}x(t) & x(t)\geq 0\\ x^2(t) & x(t)<0\end{cases}$

(I) $t \rightarrow$ ✓

(II) $y=x(t)$ ✓

(III) $x(t)=y(t)$ ✓

معکوس پذیر

2) (I) n ✓

(II) $y[n] = \begin{cases} +1 & x[n] \geq 0 \\ -1 & x[n] < 0 \end{cases}$ X معکوس ناپذیر

3) (I) $n \quad ; \quad n < 0$ X معکوس ناپذیر

4) (I) t ✓

(II) $x(t) \geq 0 \longrightarrow y(t) = x(t)$

$x(t) < 0 \longrightarrow y(t) = x^2(t) > 0$ ✓

(III) $x(t) = y(t) \quad ; \quad y(t) \geq 0$

$x(t) = \begin{cases} +\sqrt{y(t)} \\ -\sqrt{y(t)} \checkmark \end{cases}$ $x(t) = -\sqrt{y(t)} \; ; \; y(t) > 0$

$x(t) = \begin{cases} y(t) \\ -\sqrt{y(t)} \end{cases}$ ✓

نکته: اگر بدست آوردن x بر حسب y امکان پذیر نباشد از نکات سمگانه زیر استفاده می‌کنیم.

(I) اگر سیستم خطی باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که:

اگر خروجی بازای عام زمانهای t_0 باشد بتوان نتیجه گرفت که ورودی در عام زمانهای بوده است.

خطی $y(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t) = x_o(t)$

$x(t) = t^2 \longrightarrow y(t) = 0 \quad \forall t$ معکوس ناپذیر

(II) اگر سیستم بدون حافظه باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که تابع y بر حسب x یک به یک باشد (در همسایگی هر نقطه)

$y(t) = 2x^2(t) + t\,x(t)$

$y = 2x^2 + tx \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

* تابع چند جمله‌ای در همسایگی هر نقطه غیر یک به یک است. $y = x^3 + ax^2 + bx$

(III) اگر آگاهی زمان بیرون x باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک به یک بودن تابع y بر حسب x است.

$y(t) = x(t)\,x(t-1) + x(t-2)^2$

$y = x^2 + x^2 \longrightarrow y = 2x^2 \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

حل تشریحی

$$y(t)=\begin{cases}0 & x(t)<0\\ x(t)+x(t-2) & x(t)\geq 0\end{cases}$$

۱) این سیستم علّی و پایدار است.

۲) این سیستم غیرخطی و TI است.

۳) این سیستم TI و معکوس‌ناپذیر می‌باشد.

۴) ✓ این سیستم معکوس‌پذیر و حافظه‌دار می‌باشد.

① x در شرط ها حضور دارد ← غیرخطی

② TI

③ چون داخل x روی t عملیات انجام شده است پس حافظه دار است.

④ پایداری ✓

$x(t)=A>0 \longrightarrow y(t)=A+A=2A$ ✓

$x(t)=A<0 \longrightarrow y(t)=0$ ✓

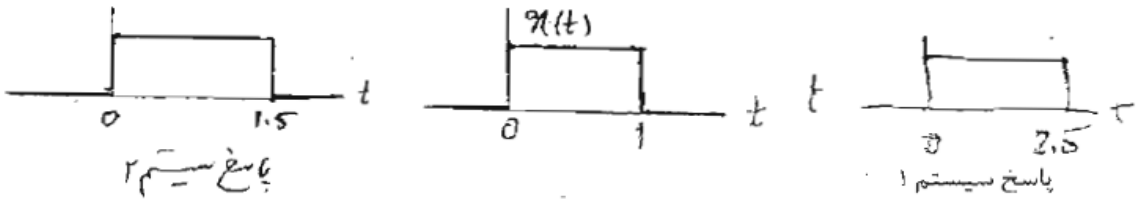
⑤ معکوس پذیری

(I) t ✓

$t-2$ ✓

(II) $x(t)<0 \longrightarrow y(t)=0$ x → معکوس ناپذیر

۶ در شکل زیر ورودی $x(t)$ و پاسخ دو سیستم به این ورودی نشان داده شده است. کدام یک از این دو سیستم می‌تواند یک سیستم LTI باشد؟



۱) فقط سیستم ۱ ۲) فقط سیستم ۲ ۳) هر دو ۴) هیچ کدام

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل فوریه

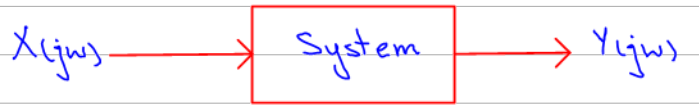
* هرگاه دو کد LTI و می‌توانید رادیک سؤال دیدید باید آنکته زیر حل کنید.

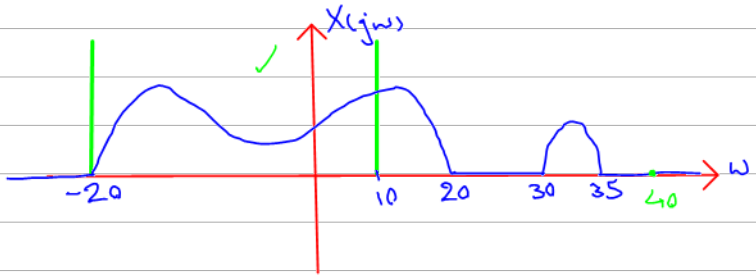
* در سیستم LTI فرکانس جدید تولید نمی‌شود.

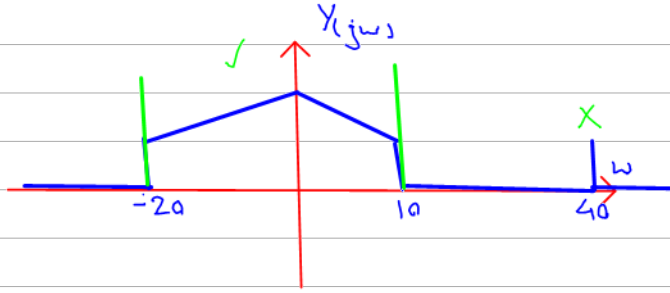
یعنی اول خروجی از فرکانسهایی که تبدیل فوریه ورودی غیر صفر است رابست می‌آورد (مجموعه A_w)

پس " " " " " " " " خروجی " " " " " " (مجموعه B_w)

اگر B_w زیر مجموعه‌ای از A_w باشد سیستم می‌تواند LTI باشد در غیر اینصورت LTI نیست







② اگر سیگنالی در حوزه زمان فشرده شود در حوزه فرکانس گسترده می‌شود.

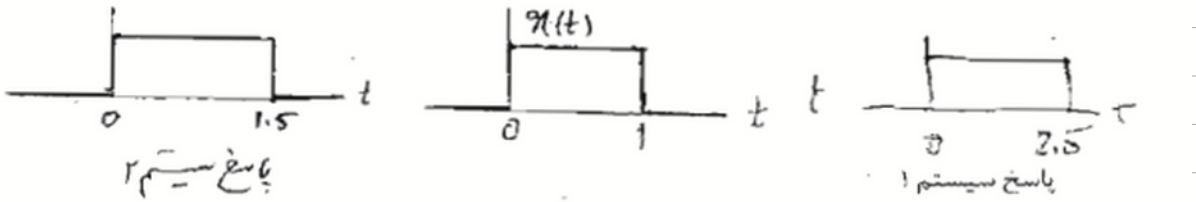
" " " " گسترده " " " فشرده می‌شود.

$x(t) \longrightarrow X(jw)$; $X(jw) \neq 0 \quad -10 < w < 20$

$x(2t) \longrightarrow X(j\frac{w}{2})$; $X(\ ) \neq 0 \quad -10 < \frac{w}{2} < 20 \rightarrow -20 < w < 40$

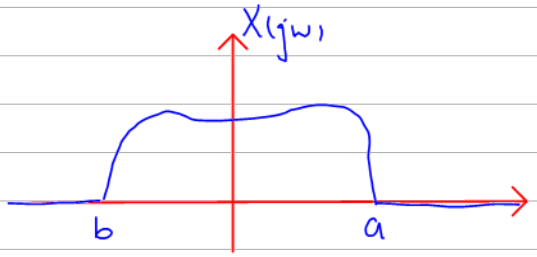
$x(\frac{t}{3}) \longrightarrow$ $\quad -10 < \frac{w}{\frac{1}{3}} < 20 \rightarrow \frac{-10}{3} < w < \frac{20}{3}$

حل تشریحی

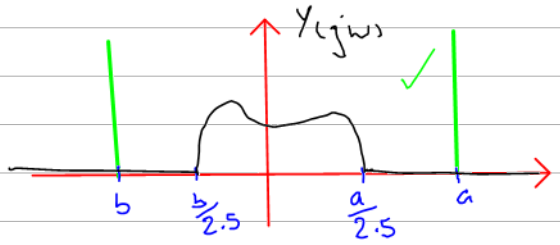




$b < w < a$



$b < \frac{w}{1/2.5} < a \rightarrow \frac{b}{2.5} < w < \frac{a}{2.5}$

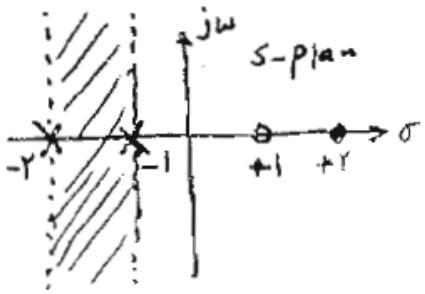


سیستم ۱ می تواند LTI باشد.



سیستم ۲ هم می تواند LTI باشد.

۷ دیاگرام صفر و قطب یک سیستم LTI و ناحیهٔ همگرایی آن در شکل روبه‌رو با هاشور نشان داده شده است. $(H(s))$ کدام یک از موارد زیر ناحیه همگرایی سیستم معکوس (وارون) $\left(H_i(s)=\frac{1}{H(s)}\right)$ خواهد بود:



۱) $R_e(s)<1$

۲) $R_e(s)>2$

۳) $1<R_e(s)<2$

۴) هر سه جواب داده شده می‌تواند درست باشد.

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل لاپلاس

$x(t) \longrightarrow X(s)$ $\qquad X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$

$ROC_x = \{ s \mid X(s) \neq \pm\infty \}$

نحوه تعیین ROC :

① قطبهای $X(s)$ را روی صفحه s مشخص کنید.

② روی هر قطب یک خط عمودی رسم کنید.

③ اگر $x(t)$ دست‌راستی باشد، ROC_x سمت راست، راست‌ترین خط است.

④ " " چپی " " " چپ، چپ‌ترین " " .

⑤ " " از هر دو طرف محدود باشد و $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt < \infty$ باشد، ROC_x کل صفحه است.

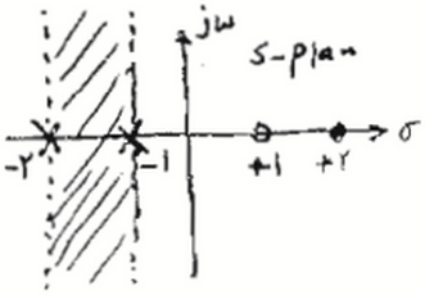
⑥ " " نامحدود باشد، ROC_x بین دو خط است که توسط اطلاعات تکمیلی تعیین می‌شود.

نکته! اگر $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-at}\, dt < \infty$ باشد یعنی $s = a$ در ROC_x هست.

" $= \infty$ " " " " " " " نیست.

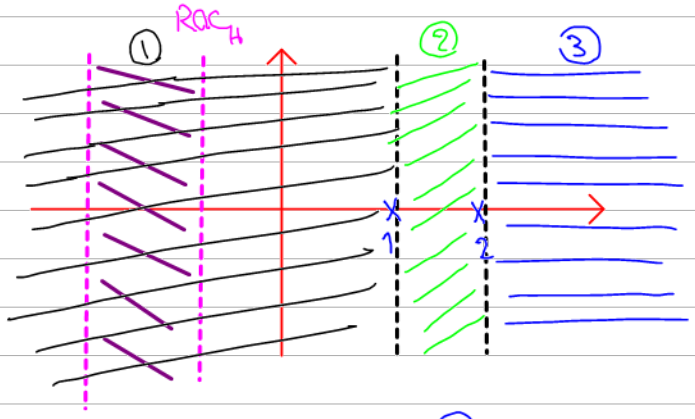
نکته! اگر دو سیگنال مثلاً $X(s)$ و $Y(s)$ در یک عملیات ریاضی شرکت کنند یعنی حتماً ROC_x و ROC_y باهم اشتراک دارند.

حل تشریحی



$$H(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)}$$



ناحیه همگرایی H_i می‌تواند ①، ② یا ③ باشد.

امّا H و H_i در یک محیط دیامغناطیس ویژگی دارند.

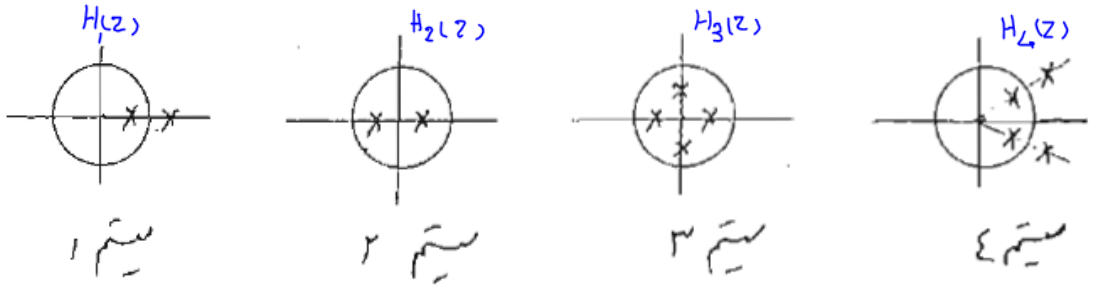
یعنی ROC_H با ROC_{H_i} حتماً اشتراک داشته است.

چون ناحیه ① حتماً با ROC_H اشتراک دارد یعنی

① = ROC_{H_i} است.

① = $Re(s) < 1 \Rightarrow \sigma < 1$

۸ محل قطب‌های چهار سیستم زمان گسسته در صفحه Z در شکل زیر نشان داده شده است (صفرها نشان داده نشده است). شعاع دایره‌ها نیز برابربا واحد است. پاسخ ضربه کدام یک از سیستم‌ها می‌تواند تقارن زوج داشته باشد؟



سیستم ۱ سیستم ۲ سیستم ۳ سیستم ۴

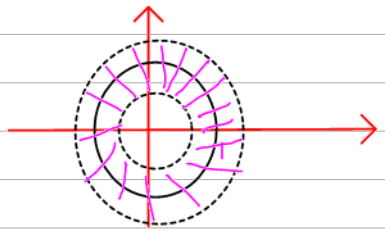
۱) ۲ و ۳
۲) ۱ و ۴
۳) ۳ و ۴
۴) ۱ و ۲

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل Z

مرور نکات

$x[n] \longrightarrow X(z)$



* اگر $x[n]$ زوج (فرد) باشد آنگاه داریم:

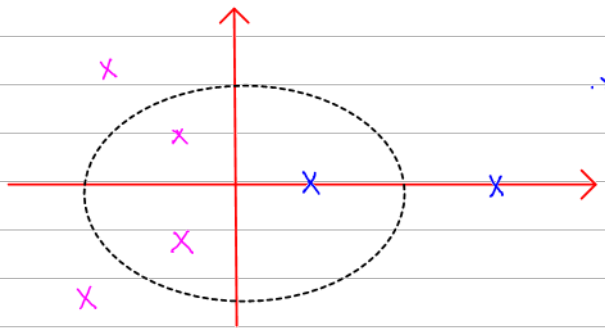
① ROC_x نسبت به دایره واحد قرینه بوده و شامل دایره واحد می‌شود.

② قطبهای $X(z)$ نسبت به دایره واحد قرینه هستند.

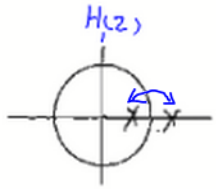
③ $X(z) = X(z^{-1})$ ($X(z) = -X(z^{-1})$) (استباه رایج $X(z) = X(-z)$)

توجه! اگر $x[n]$ بخواهد زوج یا فرد باشد شرط 1 و 2 لازم است و شرط 3 شرط کافی است.

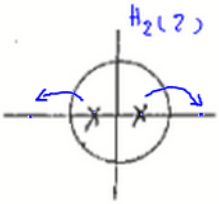
اگر $z = a$ قطب باشد حتماً $z = \frac{1}{a}$ هم قطب است.



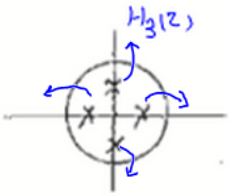
حل تشریحی



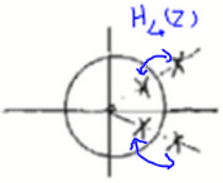
سیستم ۱ ✓



سیستم ۲ ✗



سیستم ۳ ✗



سیستم ۴ ✓

۱) ۲ و ۳
۲) ۱ و ۴ ✓
۳) ۳ و ۴
۴) ۱ و ۲

① روی RoC ← RoC مشخص است.

② ~ قطبها ← ✓

③ روی $H(z)$ ← $H(z)$ را مشخص است.

۹ معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته علّی به صورت زیر داده شده است:

$$y'' - y = x' + 2x$$

پاسخ این سیستم به ورودی‌های $x_1(t) = e^{2t}$ و $x_2(t) = e^{-2t}$ کدام مورد خواهد بود؟

۱) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$ و $y_2(t) = 0$

۲) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}u(t)$ و $y_2(t) = \infty$

۳) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$ و $y_2(t) = \infty$

۴) $y_1(t) = \frac{4}{3}e^{2t}$ و $y_2(t) = 0$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل لاپلاس

مرور نکات

* هرگاه معادله دیفرانسیل بدهد و پاسخ سیستم را بخواهد یعنی از تبدیل لاپلاس حل شود.
* " " تفاضلی " " "

در $H_{(s)}$:

* سیستم علّی است $\Longleftrightarrow$ RQC_H دست‌راستی بوده و درجه صورت $H_{(s)}$ از مخرج آن بیشتر نیست.

* " پایدار است $\Longleftrightarrow$ " شامل هور نیز می‌شود.

* " " علّی و پایدار است $\Longleftrightarrow$ RQC_H دست راستی بوده و درجه صورت $H_{(s)}$ از مخرج بیشتر نیست و قطب‌های $H_{(s)}$ سمت چپ هور نیز است یعنی RQC_H شامل هور نیز می‌شود.

توجه! RQC_H دست‌راستی است $\not\Longleftarrow$ سیستم علّی است

RQC_H دست‌راستی بوده و درجه صورت H از مخرج بیشتر نباشد $\longleftarrow$ علّی است.

حل تشریحی

پاسخ این سیستم به ورودی‌های $x_1(t)=e^{rt}$ و $x_2(t)=e^{-rt}$ کدام مورد خواهد بود؟

۱) $y_1(t)=\frac{۴}{۳}e^{rt}u(t)$ و $y_2(t)=۰$

۲) $y_1(t)=\frac{۴}{۳}e^{rt}u(t)$ و $y_2(t)=\infty$

۳) $y_1(t)=\frac{۴}{۳}e^{rt}$ و $y_2(t)=\infty$ ✓

۴) $y_1(t)=\frac{۴}{۳}e^{rt}$ و $y_2(t)=۰$

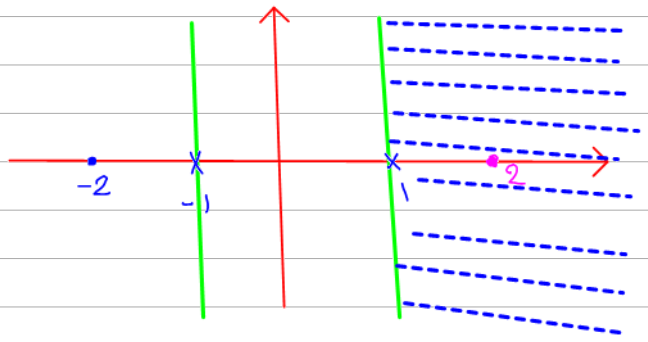
$$y''(t)-y(t)=x'(t)+2x(t)$$

$$e^{at}\longrightarrow y(t)=\begin{cases}\infty & a\notin ROC_H\\ e^{at}H(a) & a\in ROC_H\end{cases}$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}\longrightarrow s^2Y(s)-Y(s)=sX(s)+2X(s)$$

$$(s^2-1)Y(s)=(2s+1)X(s)\longrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+2}{s^2-1}$$

$$H(s)=\frac{s+2}{s^2-1}$$

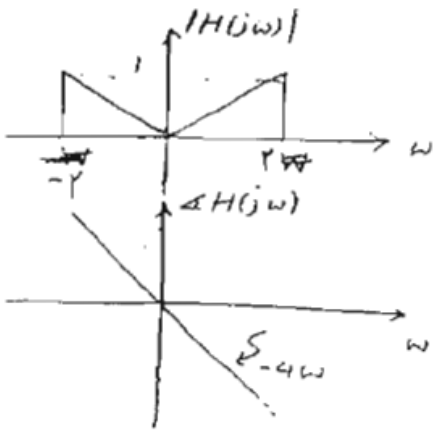


چون سیستم علی است ← ROC_H دست راستی است.

$$x_2(t)=e^{-2t}\xrightarrow{a=-2} y_2(t)=\infty \quad ; \quad -2\notin ROC_H$$

$$x_1(t)=e^{2t}\xrightarrow{a=2} y_1(t)=e^{2t}H(2)=e^{2t}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}e^{2t}$$

۱۰ اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یک فیلتر LTI در شکل مقابل رسم شده است. پاسخ این سیستم به ورودی $x(t) = \sin\left(\frac{t}{۲}\right)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{t}{۲}-۱\right)$

۲) $\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{t}{۲}-۱\right)$

۳) $\frac{۱}{۴}\sin\left(\frac{t}{۲}-۲\right)$

۴) $\frac{۱}{۲}\sin\left(\frac{t}{۲}-۲\right)$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل فوریه

* محاسبه پاسخ سیستم LTI به ورودی تک منظوره:

* اگر ورودی به فرم $x(t)=a$ یا $x(t)=a\cos(bt+\varphi)$ یا $x(t)=a\sin(bt+\varphi)$ یا $x(t)=ae^{j(bt+\varphi)}$ باشد

خروجی نیز از ورودی است.

* اگر ورودی a نداشته باشد خروجی هم a ندارد.

* ~ ~ ~ داشته باشد ~ ~ ~ دارد.

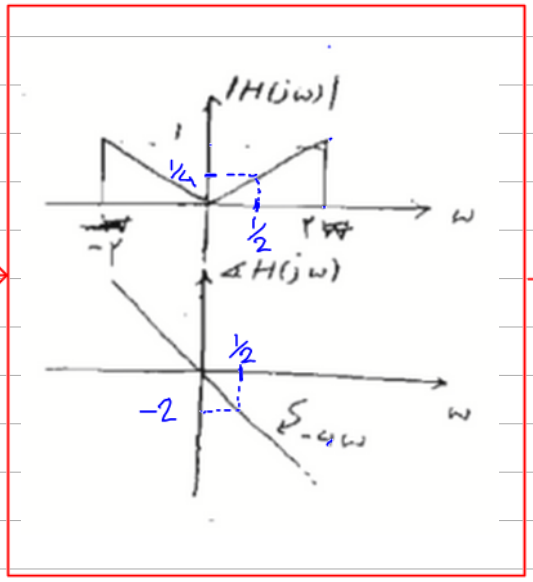
$$x(t)=a \longrightarrow y(t)=a\,|H(j\omega_0)|\,e^{j\angle H(j\omega_0)}$$

$$x(t)=a\sin(bt+\varphi) \longrightarrow y(t)=a\,|H(jb)|\sin(bt+\varphi+\angle H(jb))$$

$$x(t)=a\cos(bt+\varphi) \longrightarrow y(t)=a\,|H(jb)|\cos(bt+\varphi+\angle H(jb))$$

$$x(t)=ae^{j(bt+\varphi)} \longrightarrow y(t)=a\,|H(jb)|\,e^{j(bt+\varphi+\angle H(jb))}$$

حل تشریحی

$x(t) = 1 \sin(\frac{1}{2}t)$ →  → $y(t) = ?$

$$y(t) = 1 \times \left|H(j\tfrac{1}{2})\right| \sin\left(\tfrac{1}{2}t + \angle H(j\tfrac{1}{2})\right) = \tfrac{1}{4}\sin\left(\tfrac{1}{2}t + -2\right)$$

۱۱ اگر تبدیل فوریهٔ سیگنال زمان گسسته $x[n]$ به صورت زیر باشد:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

آنگاه $x[6]$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

درجه سختی: دشوار

موضوع سوال: تبدیل فوریه

* تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب:

اگر $x(t)$ یا $x[n]$ متناوب بوده و دارای فرکانس پایه ω_0 باشد و ضرایب سری فوریه آن a_k باشد:

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$x[n] \xrightarrow{F_S} a_k \ , \ \omega_0$$

حل تشریحی

$$X(jw) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(w - kw_0)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

$2\pi a_k = \pi (-1)^k \longrightarrow a_k = \frac{1}{2}(-1)^k$

$kw_0 = k\pi/2 \longrightarrow w_0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow N_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 4$

$x[n]$, $N_0 = 4 \longrightarrow a_k = \frac{1}{2}(-1)^k$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{jkw_0 n}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle 4 \rangle} \frac{1}{2}(-1)^k e^{jk\pi/2 n}$$

$$x[6] = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2}(-1)^k e^{j3\pi k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^1 e^{j3\pi} + \frac{1}{2}(-1)^2 e^{j6\pi} + \frac{1}{2}(-1)^3 e^{j9\pi}$$

$$x[6] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

۱۲

اگر $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \cos\omega & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \\ 0 & 0 \le |\omega| \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشد و $y[n] = (-1)^n x[n]$ ، $y[n]$ پاسخ ضربه یک فیلتر ..... است.

۱) بالاگذر ۲) میان‌گذر ۳) میان‌نگذر ۴) پایین‌گذر

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: تبدیل فوریه

مرور نکات

* در سیگنال هر کجا $(-1)^n$ دیدید به جای آن $e^{j\pi n}$ یا $e^{-j\pi n}$ بگذارید.

* هرگاه یک غایی در یک حوزه ضرب شود معادل شیفت در حوزه مقابل است.

$$x[n] \longrightarrow X(jw)$$

$$e^{jan}x[n] \longrightarrow X(j(w-a))$$

$$x[n+a] \longrightarrow e^{jaw}X(jw)$$

* تعیین نوع فیلتر:

① اندازه پاسخ فرکانسی $(jw)H$ را تعیین کنید.

② در فرکانس بالا، پایین و میانی اندازه H را تعیین کنید.

③ در هر نوع فرکانسی که اندازه کم باشد به آن نوع فرکانس نگذر و گوییم.

④ " گذر " .

انواع فرکانسها:

نوع فرکانس	سیگنال پیوسته	سیگنال گسسته
بالا	$w = \infty$	$w = (2k+1)\pi$
پایین	$w = 0$	$w = 2k\pi$
میانی	$0 < w < \infty$	$2k\pi < w < (2k+1)\pi$

حل تشریحی

① تعیین تبدیل فوریه پاسخ ضربه

پاسخ ضربه $= y[n] = (-1)^n x[n] = e^{j\pi n} x[n]$

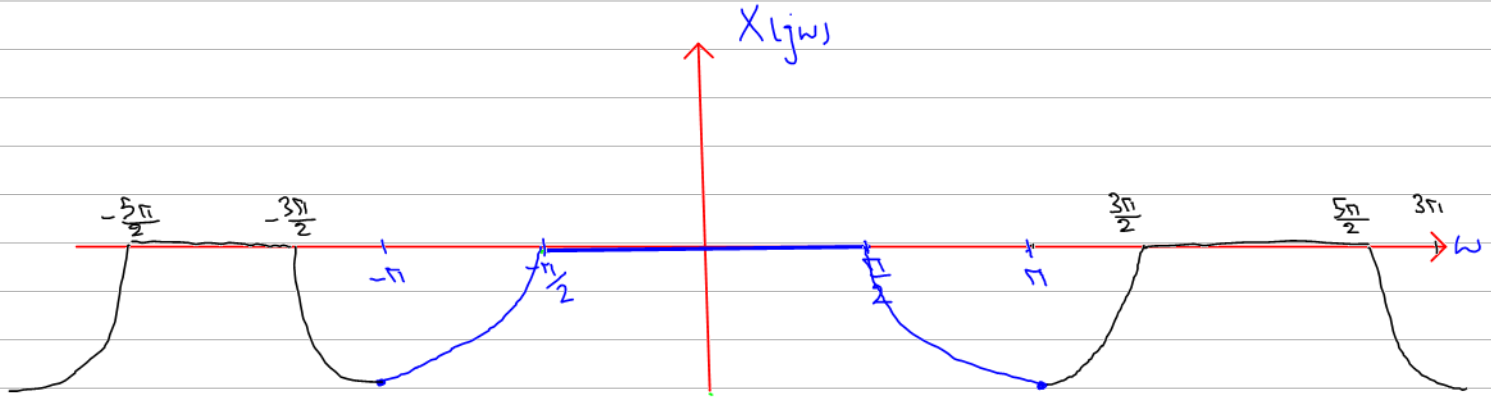
$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$

$e^{j\pi n} x[n] \longrightarrow X(j(\omega-\pi))$

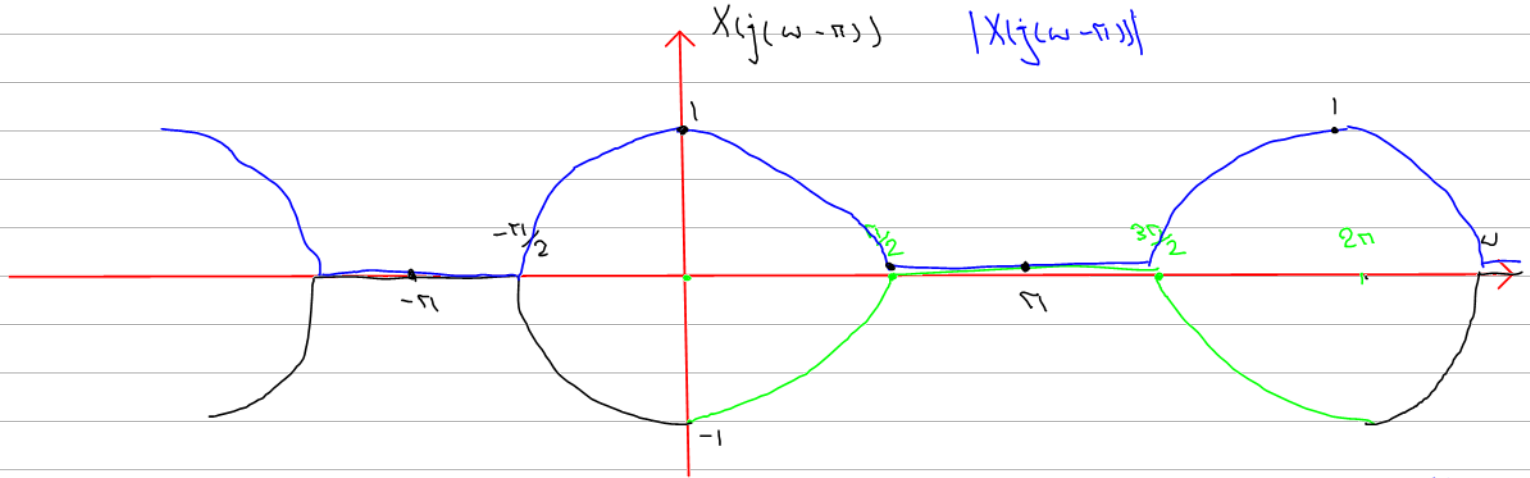
پاسخ ضربه $= X(j(\omega-\pi))$

② تعیین اندازه پاسخ ضربه

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \cos\omega & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \longrightarrow \frac{\pi}{2} < \omega < \pi \text{ یا } -\pi < \omega < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \le |\omega| \le \frac{\pi}{2} \longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



چون $X(j\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته است لذا متناوب با 2π است.



$|X(j(\omega-\pi))|_{\omega=2\pi} = 1 \longrightarrow$ پایین گذر

$|X(j(\omega-\pi))|_{\omega=\pi/2} = 0 \longrightarrow$ بالا نگذر

و $|_{\omega=\pi} = 0 \longrightarrow$ بالا نگذر

۱۳

کدام یک از دو گزاره زیر صحیح است؟

(الف) سیستم LTI زمان گسسته علی با تابع تبدیل $\frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}}$ دارای معکوس پایدار است.

(ب) سیستم با ورودی $x(t)=3\sin(2\pi t)$ و خروجی $y(t)=5\sin^2(\pi t)-2/5$ می‌تواند یک سیستم LTI باشد.

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: تبدیل فوریه و تبدیل Z

تعیین علّی و پایداری از روی $H(z)$

* سیستم علّی است $\Longleftrightarrow$ $ROC_{H(z)}$ دست راستی بودن و درجه صورت $H(z)$ ≥ درجه مخرج $H(z)$

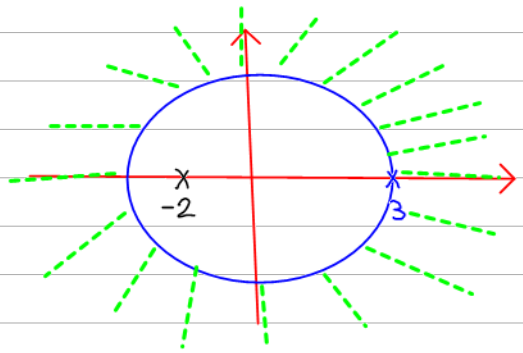
* سیستم پایدار است $\Longleftrightarrow$ $ROC_{H(z)} \ni |z| = 1$

* سیستم علّی و پایدار است $\Longleftrightarrow$ ROC_H دست راستی و درجه مخرج H ≥ درجه صورت H و تمام قطبهای H داخل دایره واحد است ($ROC_H \ni |z| = 1$)

حل تشریحی

الف -

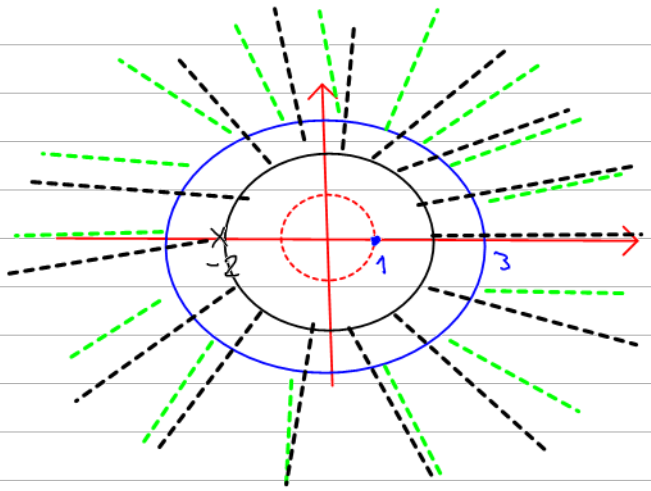
$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-3z^{-1}} \times \frac{z^2}{z^2} \quad \text{یا} \quad H(z) = \frac{z+2}{z-3}$$



$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \rightarrow H_i(z) = \frac{z-3}{z+2}$$

$$ROC_H \cap ROC_{H_i} \neq \Phi$$

$z=1 \notin ROC_{H_i} \rightarrow$ ناپایدار است H_i



(ب) سیستم با ورودی $x(t) = 3\sin(2\pi t)$ و خروجی $y(t) = 5\sin^2(\pi t) - 2/5$ می‌تواند یک سیستم LTI باشد.

در سیستم LTI فرکانس جدید تولید نمی‌شود.



$x(t) = 3\sin(2\pi t) \rightarrow$ ورودی تنها فرکانس $\omega=2$ دارد.

$$y(t) = 2.5(2\sin^2(\pi t) - 1) = 2\cos(2\pi t) \rightarrow \omega = 2\pi$$

فرکانس 2π در خروجی تولید شده است درحالی که در ورودی فرکانس 2π نداریم ←

لذا این سیستم نمی‌تواند LTI باشد.

۱۴

معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته به صورت $y'' - y' - 2y = x$ داده شده است. این سیستم نمی‌تواند ..... باشد.

۱) ناپایدار و غیرعلّی ۲) ناپایدار و علّی ۳) پایدار و علّی ۴) پایدار و غیرعلّی

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل لاپلاس

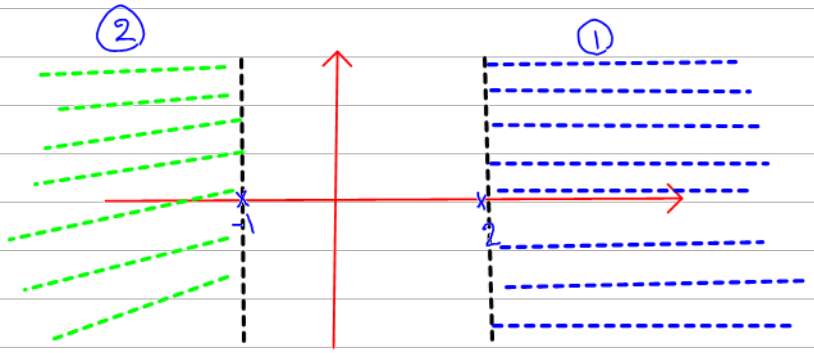
حل تشریحی

$y'' - y' - 2y = x$ معادله علی و پایداری ← تبدیل لاپلاس $H(s)$

$s^2 Y(s) - s Y(s) - 2 Y(s) = X(s) \longrightarrow H = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2}$

$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \longrightarrow$ قطبها $= -1, 2$

در این تیپ سوالات خاصیت اول را درست مزمن می‌کنیم و خاصیت دوم را بعدی می‌کنیم.



1و2) ناپایدار ← علی یا غیرعلی؟

با فرض ناپایداری ROC_H می‌تواند ① یا ② باشد.

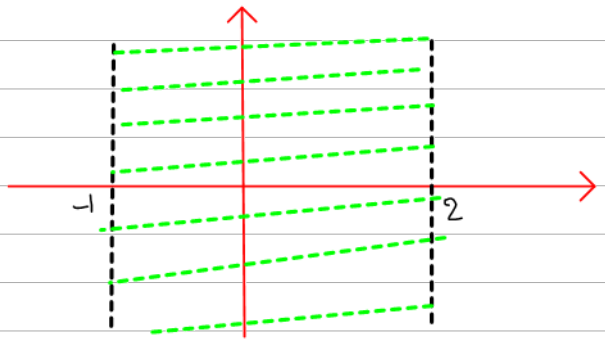
اگر ② $= ROC_H$ ← چون دست چپی است

لذا سیستم می‌تواند غیرعلی باشد.

اگر ① $= ROC_H$ ← سیستم می‌تواند علی باشد.

لذا این سیستم می‌تواند ناپایدار و علی یا ناپایدار و غیرعلی باشد.

3و4) مزمن پایدار ← علی یا غیرعلی؟



چون ROC_H دست راستی هست می‌تواند پایدار و علی باشد.

۱۵ اگر ورودی یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $۳\pi \frac{rad}{sec}$ به صورت زیر باشد:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[۲(-۱)^k \delta(t-\frac{k}{۲})-\delta(t-\frac{۱}{۲}-k)]$$

آنگاه خروجی فیلتر کدام است؟

۱) $y(t)=(۱۰\cos ۲\pi t)-۱$

۲) $y(t)=(۵\cos ۲\pi t)-۱$

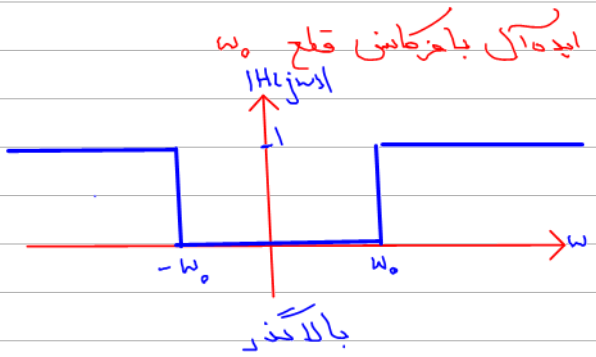
۳) $y(t)=(-\cos ۲\pi t)+۵$

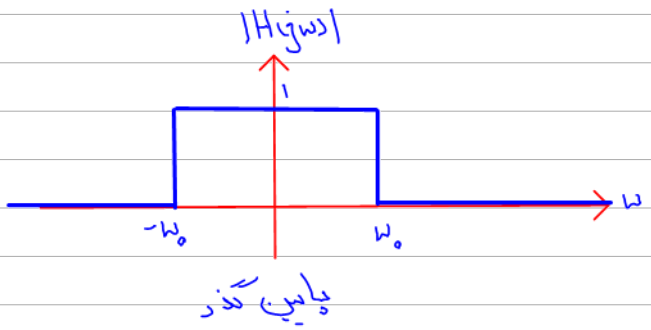
۴) $y(t)=(-۲\cos ۲\pi t)+۵$

درجه سختی: دشوار

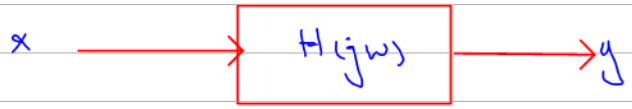
موضوع سوال: تبدیل و سری فوریه

فیلتر های ایده‌آل با فرکانس قطع ω_0





محاسبه خروجی سیستم LTI یا فیلتر با ورودی متناوب:



هرگاه ورودی x متناوب باشد برای محاسبه خروجی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

① از روی x، فرکانس پایه ω_0 را حساب می‌کنیم. $(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0})$

② $|H(j\omega)|$ را برای $\omega = k\omega_0$ حساب می‌کنیم.

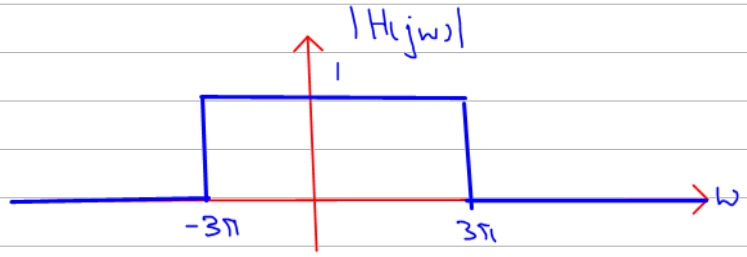
③ k هایی که $|H(jk\omega_0)| \neq 0$ را استخراج کنید.

④ به ازای k های مرحله ③، ضرایب سری فوریه x (a_k) را حساب کنید.

⑤ ضرایب سری فوریه خروجی y را حساب کنید. $b_k = a_k H(jk\omega_0)$

⑥ خروجی y را از عکس سری فوریه حساب کنید.

حل تشریحی



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[2(-1)^k\,\delta\left(t-\frac{k}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{1}{2}-k\right)\right]$$

$$x(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,\delta\left(t-\frac{k}{2}\right)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{1}{2}-k\right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_{(m)}\,\delta(t-mT_1)\longrightarrow T_0=f_{(m)}\text{ دوره متناوب}\times T_1$$

نکته

$$x[k]=e^{jak}\longrightarrow N_0=\frac{2\pi}{a}$$

$$x[n]=1\longrightarrow N_0=1$$

$x[n]$ یا $x(t)$ $\longrightarrow T_0$

* مشتق‌گیری زمانی تأثیری روی دوره متناوب ندارد.

$$x[n\mp a]\text{ یا }x(t\mp a)\longrightarrow T_0$$

$$x(at)\longrightarrow\frac{T_0}{a}$$

$$x\longrightarrow T_1\quad\text{و}\quad y\longrightarrow T_2$$

$$x\mp y\longrightarrow\text{ک.م.م}\{T_1,T_2\}$$

$$x_1(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\pi k}\,\delta\left(t-\frac{1}{2}k\right)\longrightarrow T_1=2\times\frac{1}{2}=1$$

$$x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}1\,\delta(t-k)\longrightarrow T_0=1\times1=1$$

$$f_{(m)}=1\longrightarrow 1=N_0$$

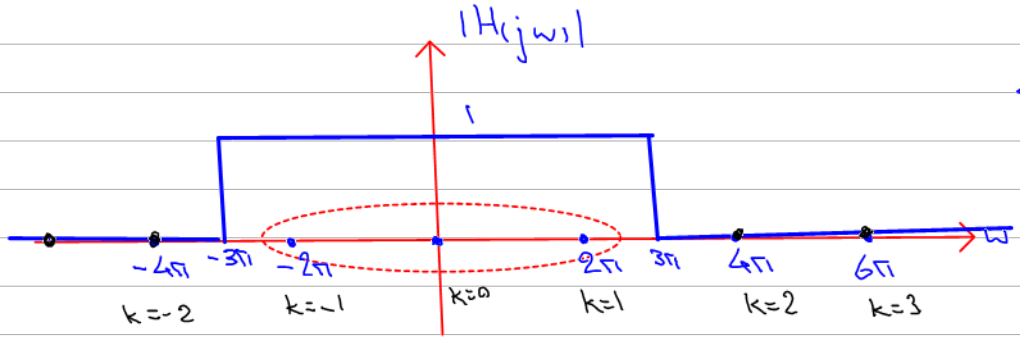
$$x_3(t)=x_2\left(t-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{1}{2}-k\right)\longrightarrow T_2=T_0=1$$

$x(t) = x_1(t) - x_3(t)$ $\qquad T_x = \text{ک.م.م}\{T_1, T_2\} = 1$

T_1 $\qquad T_2$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ②

$\leftarrow |H(jk\times 2\pi)| \neq 0$ ③



$\omega = k\omega_0 = k\times 2\pi$

$$|H(jk\omega_0)| = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, -1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$x(t) \longrightarrow a_k$ $\qquad$ ④ a_0 ، a_1 ، a_{-1} را بیابید.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_0 k) \longrightarrow f_k = \frac{1}{T_0}$$

نکته!

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - kT_0) \longrightarrow d_k = \frac{1}{2T_0}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$x(t)$ ، $\omega_0 \longrightarrow a_k$

$x(t-b)$ ، $\omega_0 \longrightarrow e^{jbk\omega_0} a_k$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\times 1) \longrightarrow f_k = \frac{1}{1} = 1$$

$$x(t-\tfrac{1}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tfrac{1}{2} - k) \longrightarrow h_k = 1\times e^{j\frac{1}{2}k\times 2\pi} = e^{j\pi k} = (-1)^k \quad \omega_0 = 2\pi$$

$$2\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - \tfrac{1}{2}k) \longrightarrow d_k = 2\times\frac{1}{1}\left(1 - (-1)^k\right), \quad \omega_0 = 2\pi$$

اگر دو سیگنال دارای فرکانس پایه یکسان باشند می توان ضرایب سری فوریه آنها را جمع یا تفریق کرد.

$$x = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \delta\left(t-\frac{k}{2}\right) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{1}{2}-k\right) \longrightarrow 2-2(-1)^k-(-1)^k = a_k$$

$$x(t) \longrightarrow a_k = 2-3(-1)^k$$

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 5$$

$$a_{-1} = 5$$

$$b_k = H(jk\omega_0)\,a_k = \begin{cases} 1 & k=0,1,-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \times a_k$$

$$b_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ 5 & k=1,-1 \\ 0 & k\neq 0,1,-1 \end{cases}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\times 2\pi\times t} = b_0 e^{j0} + b_1 e^{j2\pi t} + b_{-1} e^{-j2\pi t}$$

$$y(t) = 2 + 5e^{j2\pi t} + 5e^{-j2\pi t}$$

$$y(t) = 2 + 5\times 2\left(\frac{e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}}{2}\right) = 2 + 10\cos(2\pi t)$$