نحوه استفاده از دوره:

① کسانی که درس را کامل مطالعه کرده اند ← از سال ۹۸ شروع کنید.

② " " " " " " " نکرده اند ←

گروه تلگرام درس:

@ Signal Livecamcoz

09120187134 whatsup

حل سوالات سیگنال سیستم

کارشناسی ارشد سال ۱۳۹۸

www.Liveamooz.com

۱ تبدیل لاپلاس یک سیستم LTI علّی به‌صورت $H(s)=\frac{k(s-1)}{s^2+3s+2}$ مفروض است. با فرض $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt=-\frac{1}{2}$ حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh(t)}{dt} e^{3t} dt$$

۱) ۰

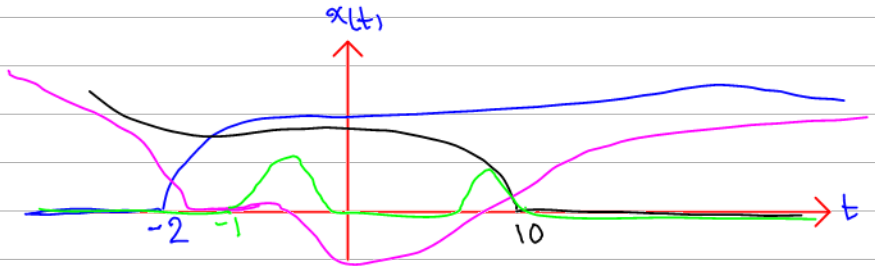
۲) $\frac{3}{10}$

۳) ۶

۴) بی‌نهایت

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل لاپلاس



$x(t)$ دست راستی ← $x(t)=0 \quad \forall t<a$

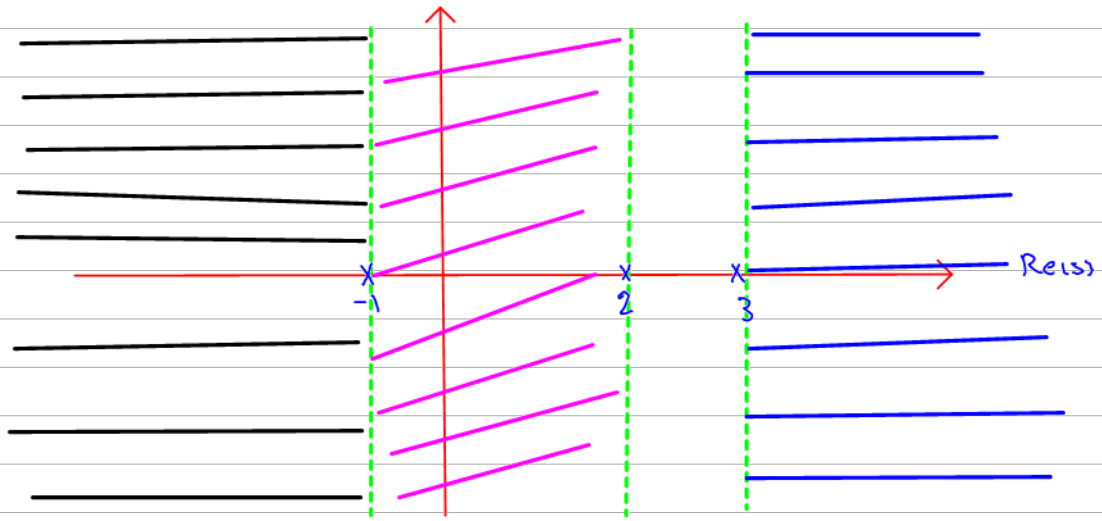
$x(t)$ دست چپی ← $x(t)=a \quad \forall t>a$

$x(t)$ دوطرفه ← $x(-\infty), x(\infty) \neq 0$

$x(t)$ از هر دو طرف محدود ← $x(t)\neq 0 \quad \forall b<t<a$

مثال: ROC_X را بازای $X(s)=\frac{1-s}{(s+1)(s-2)(s-3)}$ در حالتهای زیر تعیین کنید.

الف. دست راستی ب. دست چپی ج. دوطرفه و $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = 2$



الف. $Re(s)>3$

ب. $Re(s)<-1$

ج- هرگاه انتگرال بدهد ← $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-at}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-0t}\,dt = 2$ ← $s=0 \in ROC_X$

اگر خاصیتی یادمان رفته؟

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$

$f(t)=x(t-b) \longrightarrow F(s)$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-b)\,e^{-st}\,dt \qquad t'=t-b \qquad t=t'+b \qquad dt=dt'$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,e^{-s(t'+b)}\,dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,e^{-st'}\,e^{-sb}\,dt'$$

$$= e^{-sb}\int_{-\infty}^{\infty} x(t')\,e^{-st'}\,dt' \quad X(s)$$

مرور نکات

$x(t) \longrightarrow X(s)$ $\qquad X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$

$ROC_x = \{s \mid X(s) \neq \pm\infty\}$

نحوه تعیین ROC :

① قطبهای $X(s)$ را روی صفحه s مشخص کنید.

② روی هر قطب یک خط عمودی رسم کنید.

③ اگر $x(t)$ دست‌راستی باشد ، ROC_x ست راست ، راست‌ترین خط است.

④ " " چپی " " " چپ ، چپ‌ترین " " .

⑤ " " از هر دو طرف محدود باشد و $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt < \infty$ باشد ، ROC_x کل صفحات.

⑥ " " نامحدود باشد ، ROC_x بین دو خط است که توسط اطلاعات تکمیلی تعیین می‌شود.

نکته ! اگر $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-at}\, dt < \infty$ باشد یعنی $s=a$ در ROC_x هست.

" $=\infty$ " " " " " " " نیست.

ارتباط علّی و پایداری با $H(s)$:

سیستم علّی است $\Longleftrightarrow$ ROC_H دست‌راستی بوده و درجه صورت $H(s) \leq$ درجه مخرج $H(s)$

سیستم پایدار است $\Longleftrightarrow$ محور $j\omega$ در ROC_H قرار دارد

سیستم علّی و پایدار است $\Longleftrightarrow$
- ROC_H دست‌راستی
- درجه صورت $H(s) \leq$ درجه مخرج $H(s)$
- تمام قطبهای $H(s)$ ست چپ محور $j\omega$ (ROC_H شامل محور $j\omega$ می‌شود)

خاصیت مشتق‌گیری تبدیل لاپلاس

$x(t) \longrightarrow X(s)$

$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s)$ لاپلاس دوطرفه

$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s) - x(0^-)$ لاپلاس یک‌طرفه

تبدیل لاپلاس یک سیستم LTI علّی به‌صورت $H(s)=\frac{k(s-1)}{s^2+3s+2}$ مفروض است. با فرض $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt=-\frac{1}{2}$

حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh(t)}{dt} e^{3t} dt$$

هرگاه انتگرالی از $x(t)$ را بخواهد می‌توان با تعریف تبدیل لاپلاس حل کرد.

پس در اولین عددی دهیم که قسمت خارجی یکسان شود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{3t} dt = ?$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \qquad s=-3$$

$$X(-3)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{3t} dt$$

$$x(t)=\frac{dh}{dt} \longrightarrow X(s)=sH(s)$$

$$-3H(-3)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{3t} dt$$

باید $H(-3)$ را حساب کنیم.

$$H(s)=\frac{k(s-1)}{s^2+3s+2} \qquad H(-3)=\frac{-4k}{2}=-2k$$

اشتباه رایج ←

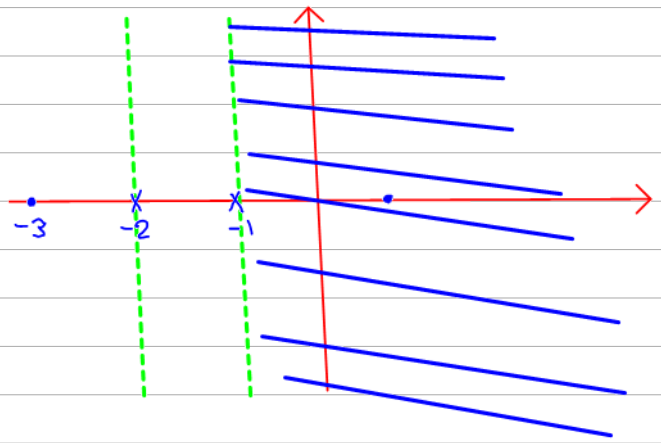
توجه! هرگاه حاصل تبدیل لاپلاس را خواستیم حساب کنیم باید به فرم زیر بنویسیم.

$$H(a)=\begin{cases}\infty & a\notin ROC_H \\ H(a) & a\in ROC_H\end{cases}$$

لذا باید ROC_H را حساب کنیم.

$$H(s) = \frac{k(s-1)}{(s+2)(s+1)}$$

چون علّی است ← ROC_H دست راستی



$H(-3) = \infty \qquad -3 \notin ROC_H$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{3t}\, dt = -3\, H(-3) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-1t}\, dt = ? = +1 \times H(1) \qquad *$$

$$H(1) = \frac{k(1-1)}{1^2+3\times1+2} = 0 \qquad 1 \in ROC_H$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-2t}\, dt = 2 \times H(2)$$

$$H(2) = \frac{k(2-1)}{12} = \frac{k}{12} \qquad 2 \in ROC_H \qquad k = ?$$

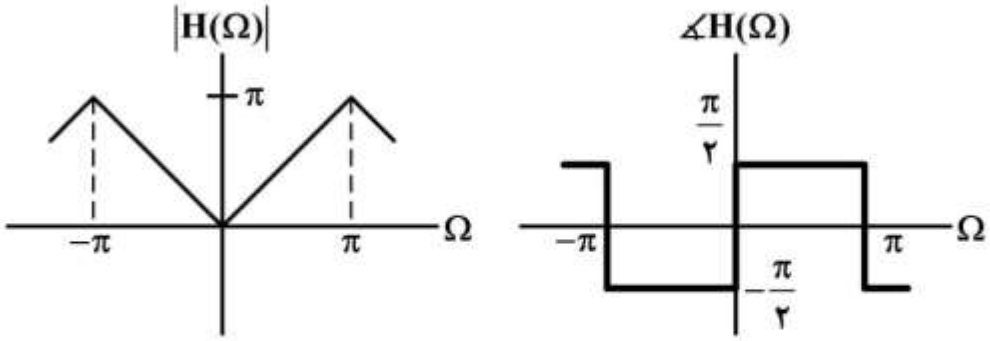
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt = -\frac{1}{2}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-0\times t}\, dt = -\frac{1}{2} \longrightarrow H(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{k(0-1)}{2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow k = 1 \longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{dt} e^{-2t}\, dt = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \checkmark$$

۲ پاسخ فرکانسی یک سیستم زمان گسسته به‌صورت زیر داده شده است. خروجی این سیستم به‌ازای $x[n]=\cos[\Omega_0 n+\theta]\ ;\ -\pi\le\Omega_0\le\pi$، کدام است؟



۱) $y[n]=-\sin[\Omega_0 n+\theta]$

۲) $y[n]=\Omega_0\cos[\Omega_0 n+\theta]$

۳) $y[n]=-|\Omega_0|\sin[\Omega_0 n+\theta]$

۴) $y[n]=-\Omega_0\sin[\Omega_0 n+\theta]$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل فوریه و محاسبه پاسخ سیستم LTI

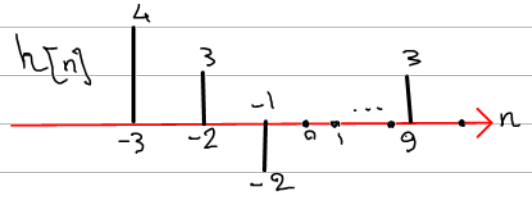
محاسبه پاسخ سیستم LTI در حالت‌های مختلف:

① اگر ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)$ را به صورت شکل بدهد از رابطه کانولوشن حساب می‌کنیم. (فصل دوم)

* سیگنال x یا h را نسبت به محور عمودی قرینه می‌کنیم و محور افقی را τ می‌گذاریم.
* محور افقی سیگنال قرینه‌شده را با t جمع می‌کنیم (تمام اعدادی محور افقی را)
* حاصلضرب سیگنال فوق با سیگنال قرینه‌شده را به‌ازای tهای مختلف حساب می‌کنیم.
* به‌ازای tهای مختلف مساحت سیگنال حاصلضرب را حساب می‌کنیم که برابر خروجی است.

② اگر ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ را به صورت شکل یا ضابطه بدهد که طول پی از نامحدود باشد.

$h[n] = u[n] - u[n-10]$, $x[n] = 2^n + e^n$



$x[n] = 2^n u[-n-1]$ $h[n] = 4\delta[n-(-3)] + 3\delta[n-(-2)] + -2\delta[n-(-1)] + 3\delta[n-9]$

* سیگنال با طول محدود را به صورت جمع ضربه‌ها نوشته و حاصل کانولوشن x و h را حساب می‌کنیم

$$f[n] * a\delta[n-b] = af[n-b]$$

③ x و h را به صورت ضابطه بدهد و x یا h سببی هیچ کدام از سیگنال‌های جدول تبدیل سببی، فوریه، تبدیل لاپلاس و z نباشد. (معمولاً خروجی یک زمان خاص را می‌خواهد)

از ضابطه کانولوشن حساب می‌کنیم.

* تعویف کانولوشن را نوشته و t یا n را برابر با لحظه‌ای قرار می‌دهیم که خروجی را خواسته پس حاصل انتگرال یا $\sum$ را حساب می‌کنیم.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

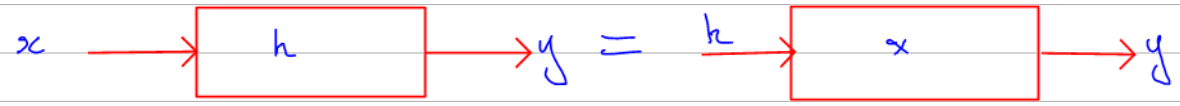
$$g[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k]$$

$$y(10) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(10-\tau) d\tau$$

④ پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ رابدهد یا x یا H به ازای سیگنالهای جدول تبدیل فوریه باشند.

4-1- ورودی x یا پاسخ ضربه به ازای سیگنال تک فرکانس باشند.

* اگر h تک فرکانس باشد جای x و h را عوض می‌کنیم.



تبدیل فوریه پاسخ ضربه را حساب می‌کنیم ($H(j\omega)$) ($X(j\omega)$)

$x(t) = a \longrightarrow y(t) = a H(j0)$

$x[n] = a \longrightarrow y[n] = a H(j0)$

$x(t) = A \overset{\sin}{\cos}(bt+\varphi) \longrightarrow y(t) = A|H(jb)| \overset{\sin}{\cos}(bt+\varphi+\angle H(jb))$

$x[n] = A \overset{\sin}{\cos}[bn+\varphi] \longrightarrow y[n] = A|H(jb)| \overset{\sin}{\cos}[bn+\varphi+\angle H(jb)]$

$x(t) = A e^{j(b\overset{n}{t}+\varphi)} \longrightarrow y(t) = A|H(jb)| e^{j(b\overset{n}{t}+\varphi+\angle H(jb))}$

* اگر ورودی تک فرکانس بوده و n نداشته باشد خروجی هم n نخواهد داشت.

4-2- ورودی دلخواه باشد:

$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega) \Rightarrow Y(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$ یا $y(t)$

4-3- ورودی x یا پاسخ ضربه متناوب باشد:

* اگر پاسخ ضربه متناوب باشد جای x و h را عوض می‌کنیم.

(I) دوره تناوب و فرکانس پایه ω_0 ورودی را حساب می‌کنیم. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ یا $\frac{2\pi}{N_0}$

(II) در $H(j\omega)$ به جای ω عبارت $k\omega_0$ را می‌گذاریم. (k عدد صحیح)

(III) kهایی که $|H(jk\omega_0)| \neq 0$ است را پیدا می‌کنیم.

(IV) ضرایب سری فوریه ورودی یعنی a_k را به ازای kهای فوق حساب می‌کنیم.

(V) ضرایب سری فوریه خروجی y یعنی b_k را حساب می‌کنیم. $b_k = H(jk\omega_0)\, a_k$

(VI) خروجی y را از فرمول سری فوریه حساب می‌کنیم.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \qquad y[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} b_k e^{jk\omega_0 n}$$

⑤ معادله دیفرانسیل سیستم را بدهد و پاسخ سیستم LTI را بخواهد.

در این حالت با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل تابع $H(s)$ را بدست می‌آوریم و ROC_H را با توجه به خواص سیستم LTI گفته شده در سوال یا اطلاعات کمکی حساب می‌کنیم.

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

5-1- ورودی $x(t)$ تک زمانی باشد. (e^{at} یا عددثابت)

$$x(t) = a \longrightarrow y(t) = \begin{cases} \infty & s=0 \notin ROC_H \\ aH(0) & s=0 \in ROC_H \end{cases}$$

$$x(t) = Ae^{bt} \longrightarrow y(t) = \begin{cases} \infty & s=b \notin ROC_H \\ Ae^{bt} H(0) & s=b \in ROC_H \end{cases}$$

5-2- ورودی $x(t)$ تک زمانی نباشد.

* $Y(s)$ را حساب می‌کنیم. $Y(s) = X(s)H(s)$

* ناحیه همگرایی $Y(s)$ را با توجه به ناحیه همگرایی X و H حساب می‌کنیم.

قطبهای $Y(s)$ را حساب می‌کنیم، ROC_y باید به نحوی باشد که با ROC_x و ROC_H اشتراک داشته باشد.

* از روی $Y(s)$ و ROC_y، $y(t)$ را حساب می‌کنیم.

⑥ معادله تفاضلی سیستم را بدهد و پاسخ را بخواهد. $y[n-2] + \dots = x[n] - x[n-1]$

ابتدا از معادله تفاضلی تبدیل Z گرفته و $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ را حساب می‌کنیم.

۶-۱- ورودی $x[n]$ تک فرکانس باشد (عدد ثابت یا a^n)

$$x[n]=a \longrightarrow y[n]=\begin{cases}\infty & z=1\notin ROC_H \\ aH(1) & z=1\in ROC_H\end{cases}$$

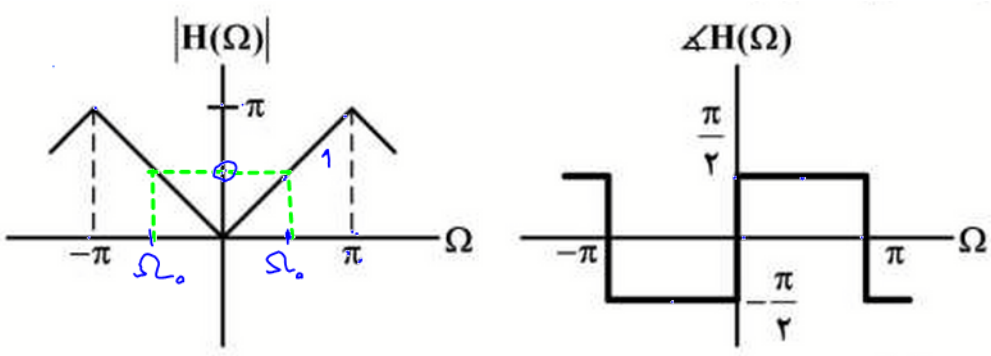
$$x[n]=A\,b^n \longrightarrow y[n]=\begin{cases}\infty & b\notin ROC_H \\ AH(b)\,b^n & b\in ROC_H\end{cases}$$

۶-۲- ورودی x تک فرکانس نباشد.

* $Y(z)$ و ROC_y را محاسبه می‌کنیم. $Y(z)=H(z)X(z)$

ROC_y به نحوی باید باشد که با ROC_x و ROC_H اشتراک داشته باشد.

* از روی $Y(z)$ ، ROC_y ، $y[n]$ را محاسبه می‌کنیم.



$$x[n] = 1\cos(\Omega_0 n + \theta) \quad ; \quad -\pi < \Omega_0 < \pi$$

$$y[n] = 1 \times |H(j\Omega_0)| \cos(\Omega_0 n + \theta + \angle H(j\Omega_0))$$

$$|H(j\Omega_0)| = \begin{cases} \Omega_0 & 0 < \Omega_0 < \pi \\ -\Omega_0 & -\pi < \Omega_0 < 0 \end{cases} \qquad \angle H(j\Omega_0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < \Omega_0 < \pi \\ -\frac{\pi}{2} & -\pi < \Omega_0 < 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} 1 \times \Omega_0 \cos(\overbrace{\Omega_0 n + \theta}^{\alpha} + \frac{\pi}{2}) & 0 < \Omega_0 < \pi \\ 1 \times -\Omega_0 \cos(\overbrace{\Omega_0 n + \theta}^{\alpha} - \frac{\pi}{2}) & -\pi < \Omega_0 < 0 \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) = \sin(\alpha)$$

$$y[n] = \begin{cases} 1 \times \Omega_0 \times -\sin(\Omega_0 n + \theta) & 0 < \Omega_0 < \pi \\ 1 \times -\Omega_0 \sin(\Omega_0 n + \theta) & -\pi < \Omega_0 < 0 \end{cases}$$

$$= -\Omega_0 \sin(\Omega_0 n + \theta)$$

۳ دو سیستم LTI با رابطهٔ ورودی ـ خروجی به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{سیستم ۱}: y_1[n]=\frac{x[n]+x[n-1]}{2}$$

$$\text{سیستم ۲}: y_2[n]=\frac{x[n]-x[n-1]}{2}$$

در مورد این دو سیستم، گزینهٔ صحیح کدام است؟

۱) هر دو سیستم، فیلتر بالاگذر هستند.

۲) هر دو سیستم، فیلتر پایین‌گذر هستند.

۳) سیستم ۱، یک فیلتر پایین‌گذر و سیستم ۲، یک فیلتر بالاگذر است.

۴) سیستم ۱، یک فیلتر بالاگذر و سیستم ۲، یک فیلتر پایین‌گذر است.

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل فوریه و تعیین نوع فیلتر

تعیین نوع فیلترها:

بالاگذر ← اندازه $H(j\omega)$ فقط در فرکانس‌های بالا زیاد بوده و در فرکانس میانی و پایین کوچک است.

پایین‌گذر ← " " " " " " " " پایین " " " " " بالا " " .

میان‌گذر ← " " " " " " " " میانی " " " " بالا و پایین " " .

بالاگذر ← " " " " " " بالا نزدیک صفر بوده و در فرکانس‌های میانی و پایین نزدیک ۱ است.

پایین‌گذر ← " " " " " " " " پایین " " " " " و بالا " " "

میان‌گذر ← " " " " " " " " میانی " " " " بالا و پایین " " .

* فیلترها همانند سیستم‌های LTI هستند. $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

(I) اندازه پاسخ فرکانسی (تبدیل فوریه پاسخ ضربه) یعنی $H(j\omega)$ را رسم می‌کنیم.

(II) در فرکانس‌های بالا، پایین و میانی اندازه پاسخ فرکانسی را تعیین کرده و با توجه به اندازه، با توضیحات فوق برای انواع فیلترها تطبیق می‌دهیم.

نوع فرکانس	سیستم پیوسته	سیستم گسسته	
فرکانس بالا	$\omega = \infty$	هر مضرب فرد از π	$\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$
فرکانس پایین	$\omega = 0$	هر مضرب زوج از π	$0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$
فرکانس میانی	$0 < \omega < \infty$	هر مضرب فرد از $\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

توجه! در سیستم‌های گسسته، $H(j\omega)$ متناوب با دوره تناوب 2π است.

سیستم ۱

سیستم ۱ : $y_1[n]=\frac{x[n]+x[n-1]}{2}$

(I) $H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$x[n-a] \longrightarrow e^{-j\omega a} X(j\omega)$

$Y(j\omega)=\frac{1}{2}X(j\omega)+\frac{1}{2}e^{-j\omega}X(j\omega)$ $\qquad$ $Y(j\omega)=X(j\omega)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)$

$H(j\omega)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$

(II) $\omega=0 \longrightarrow H(j0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \rightarrow |H(j0)|=1$ وکامن پایین

$\omega=\frac{\pi}{2} \longrightarrow H(j\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-j\pi/2} \rightarrow |H(j\frac{\pi}{2})|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7$ بالا

$\omega=\pi \longrightarrow H(j\pi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-j\pi} \rightarrow |H(j\pi)|=0$

سیستم ۱ پایین گذر است.

سیستم 2.

سیستم ۲ : $y_2[n]=\frac{x[n]-x[n-1]}{2}$

(I) $Y(j\omega)=\frac{1}{2}X(j\omega)-\frac{1}{2}e^{-j\omega}X(j\omega)$

$H(j\omega)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}$

(II) $\omega=0 \longrightarrow H(j0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ $\qquad$ $|H(j0)|=0$ پایین

$\omega=\frac{\pi}{2} \longrightarrow H(j\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j$ $\qquad$ $|H(j\frac{\pi}{2})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ بالا

$\omega=\pi \longrightarrow H(j\pi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)=1$ $\qquad$ $|H(j\pi)|=1$ بالا

سیستم۲ بالاگذر است.

۴ مقدار انتگرال زیر، کدام است؟

$$۲\pi\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(۴t)\,\text{sinc}(۱۰t)\,\cos(۶\pi t)dt$$

۱) ۰

۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۵}$

۴) $\frac{\pi}{۱۰}$

درجه سختی: دشوار

موضوع سوال: تبدیل فوریه

جدول تبدیل فوریه

سیگنال حوزه زمان	شرط وجود تبدیل فوریه	تبدیل فوریه
$e^{at}u(t)$	$Re\{a\} < 0$	$\frac{1}{j\omega - a}$
$e^{at}u(-t)$	$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j\omega}$
$\delta(t-a)$	-	$e^{-ja\omega}$
$\delta(t)$	-	1
$u(t)$	-	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
e^{jat}	-	$2\pi\delta(\omega - a)$
1	-	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$a > 0$	$\prod(\frac{\omega}{2a})$
$\prod(\frac{t}{2a})$	-	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
$\Lambda(\frac{t}{2a})$	-	$\frac{1}{2a}\left(\frac{2\sin a\omega}{\omega}\right)^2$
$e^{a\lvert t\rvert}$	$a < 0$	$-\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$sgn\,(t)$		$\frac{2}{j\omega}$

جدول تبدیل فوریه گسسته

سیگنال حوزه زمان	شرط وجود تبدیل فوریه	تبدیل فوریه
$a^n u[n]$	$\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$a^n u[-n]$	$\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{ae^{-j\omega} - 1}$
$\delta[n-a]$	-	$e^{-ja\omega}$
$\delta[n]$	-	1
$u[n]$	-	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega)$
e^{jan}	-	$2\pi\delta(\omega - a)$
1	-	$2\pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin an}{\pi n}$	$a > 0$	$\prod(\frac{\omega}{2a})$
$\prod(\frac{n}{2a})$	-	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
$\Lambda(\frac{n}{2a})$	-	$\frac{1}{2a}\left(\frac{2\sin a\omega}{\omega}\right)^2$
$a^{\lvert n\rvert}$	$\lvert a\rvert < 1$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$
$sgn\,[n]$	-	$\frac{2}{j\omega}$

* هرگاه در سیگنال حامل انتگرال بخواهد یعنی از تبدیل ها استفاده کنید.

* هرگاه انتگرالی از یک سیگنال یا انتگرالی از یک سیگنال و e^{jat} را برحسب زمان بخواهد داریم:

(I) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ یا $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jat}dt$ را بخواهد، تبدیل فوریه $x(t)$ را بنویسید:

$$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$$

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \qquad X(-ja) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{jat}\,dt$$

* اگر تبدیل فوریه $x(t)$ را بلد بودید، ساده‌ترین سیگنال به $x(t)$ را از جدول تبدیل فوریه نوشته و با عملیات ریاضی روی دو طرف تعریف تبدیل فوریه، $x(t)$ را بیابید.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{j2t}\,dt = ?$$

(II) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ یا $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jan}$ را بخواهد.

$$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$$

$$X(j0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \qquad X(-ja) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{jan}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[\overbrace{n-2}^{n'}]\,e^{jan} = ? \quad \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']e^{jan'+ja2} = e^{ja2}\underbrace{\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']e^{jan'}}_{X(-ja)}$$

(III) $\int_{-a}^{a} x(t)\,dt$ یا $\int_{-a}^{a} x(t)e^{jbt}dt$ یا $\sum_{n=-a}^{a} x[n]$ یا $\sum_{n=-a}^{a} x[n]e^{jbn}$ را بخواهد.

* تعریف سری فوریه را بنویسید.

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

* از روی $x(t)$ یا $x[n]$، T_0 (N_0) و ω_0 را حساب کنید و در طرف دوم سری فوریه k را طوری عدد دهید که با انتگرال یا سیگمای خواسته شده یکی شود.

در صورت لزوم از عملیات ریاضی یا تغییر متغیر کمک استفاده کنید.

$x[n] \longrightarrow a_k = 1 - (-1)^k \quad , \quad \omega_0 = \pi$ $\qquad \sum_{n=0}^{1} x[n-10]$

$\downarrow$

تعریف سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} \qquad N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2$$

$$a_k = \frac{1}{2} \sum_{n=<2>} x[n]\, e^{-jk\pi n} \qquad \sum_{n=0}^{1} x[n-10] \overset{n'}{=} \sum_{n'=-10}^{-9} x[n']$$

$n' = n - 10$

$$2a_k = \sum_{n=-10}^{-9} x[n]\, e^{-jk\pi n} \quad (k=0) = \sum_{n'=-10}^{-9} x[n'] \times 1$$

$$2a_0 = \sum_{n=-10}^{-9} x[n]$$

$$2x0 = \sum_{n=-10}^{-9} x[n] = \sum_{n=0}^{1} x[n-10] \quad \checkmark$$

$\sum_{n=0}^{2} x[n] = ?$

$$a_k = \frac{1}{2} \sum_{n=<2>} x[n]\, e^{-jk\pi n} \Rightarrow$$

$$2a_k = \sum_{n=0}^{1} x[n]\, e^{-jk\pi n} \quad (k=0) \qquad 2a_0 = 2x^{e} = \sum_{n=0}^{1} x[n]$$

$$\sum_{n=0}^{2} x[n] = \left(\sum_{n=0}^{1} x[n]\right) + x[2] = 0 + x[2] = 0 + 2 = 2$$

$$x[2] = \sum_{n=<N_0>} a_k\, e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{1} a_k\, e^{jk\pi \frac{2}{n}}$$

$$= a_0 + a_1\, e^{j2\pi} = 0 + 2 \times 1 = 2$$

$x[n] \longrightarrow a_k = 1 - (-1)^k$ و $\omega_0 = \pi$

$\sum_{n=0}^{1} x[n-10] = ?$ $\qquad$ $\sum_{n=0}^{2} x[n] = ?$

(IV) انتگرالی بر حسب ω بخواهد: $\int X(j\omega)e^{jb\omega}d\omega$ یا $\int X(j\omega)d\omega$

① حدود انتگرال اگر ∞ باشد تعریف عکس تبدیل فوریه زمان پیوسته را نوشته و داریم:

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$ $\qquad$ $2\pi x(b) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{jb\omega}d\omega$ $\qquad$ $2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$

② حدود انتگرال محدود باشد عکس تبدیل فوریه گسسته را بنویسید.

$x[n] \longrightarrow X(j\omega)$ $\qquad$ $2\pi x[b] = \int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)e^{jb\omega}d\omega$ $\qquad$ $2\pi x[0] = \int_{\langle 2\pi \rangle} X(j\omega)d\omega$

خواص تبدیل فوریه

خاصیت	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$x(t)+y(t)$ $x[n]+y[n]$	$X(j\omega)+Y(j\omega)$
انتقال زمانی	$x(t+a)$ $x[n+a]$	$X(j\omega)e^{ja\omega}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{jat}$ $x[n]e^{jan}$	$X(j(\omega-a))$
قرینگی زمانی	$x(-t)$ $x[-n]$	$X(-j\omega)$
مزدوجی	$x^*(t)$ $x^*[n]$	$X^*(-j\omega)$
مزدوجی	$x^*(-t)$ $x^*[-n]$	$X^*(j\omega)$
مقیاس دهی زمانی	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{j\omega}{a})$
مقیاس دهی زمانی	$x_{(m)}[n]$	$X(j\omega m)$
مقیاس دهی زمانی	$x[mn]$	$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}X\left(j\left(\frac{\omega}{m}-\frac{2\pi}{i}\right)\right)$
ضرب در حوزه زمان	$x(t)\times y(t)$ $x[n]\times y[n]$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$
ضرب در حوزه فرکانس	$x(t)*y(t)$ $x[n]*y[n]$	$X(j\omega)\times Y(j\omega)$
مشتق گیری در حوزه زمان	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
مشتق گیری در حوزه فرکانس	$tx(t)$ $nx[n]$	$\frac{jdX(j\omega)}{d\omega}$
انتگرال در حوزه زمان	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
سیگما در حوزه زمان	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{X(j\omega)}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(0)\delta(\omega$
دوگانی تبدیل فوریه	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$

حل تشریحی

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\,\cos(6\pi t)\,dt = ? \qquad \cos(6\pi t) = \frac{1}{2}e^{j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j6\pi t}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\left(\frac{1}{2}e^{j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j6\pi t}\right)dt$$

$$I = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\,e^{j6\pi t}\,dt + \pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\,e^{-j6\pi t}\,dt$$

$$\pi X(j\underbrace{-6\pi}_{\omega=-6\pi}) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\,e^{j6\pi t}\,dt$$

$$\pi\, X(-j6\pi) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\,e^{+j6\pi t}\,dt$$

$$\pi\, X(j6\pi) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t)\,e^{-j6\pi t}\,dt$$

$$x(t) = \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t) \longrightarrow X(j\omega)$$

$$I = \pi\, X(j6\pi) + \pi\, X(j6\pi)$$

$$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

؟ $X(j\omega)$ رابطه

$$\frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t} \longrightarrow \frac{1}{4}\Pi\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) \qquad \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t} \times \frac{\sin(10\pi t)}{10\pi t}$$

$$\frac{\sin(10\pi t)}{10\pi t} \longrightarrow \frac{1}{10}\Pi\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$$

$$x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t} \times \frac{\sin(10\pi t)}{10\pi t} \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{4}\Pi\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) * \frac{1}{10}\Pi\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)\right) = X(j\omega)$$

$$I = \pi\, X(j6\pi) + \pi\, X(-j6\pi)$$

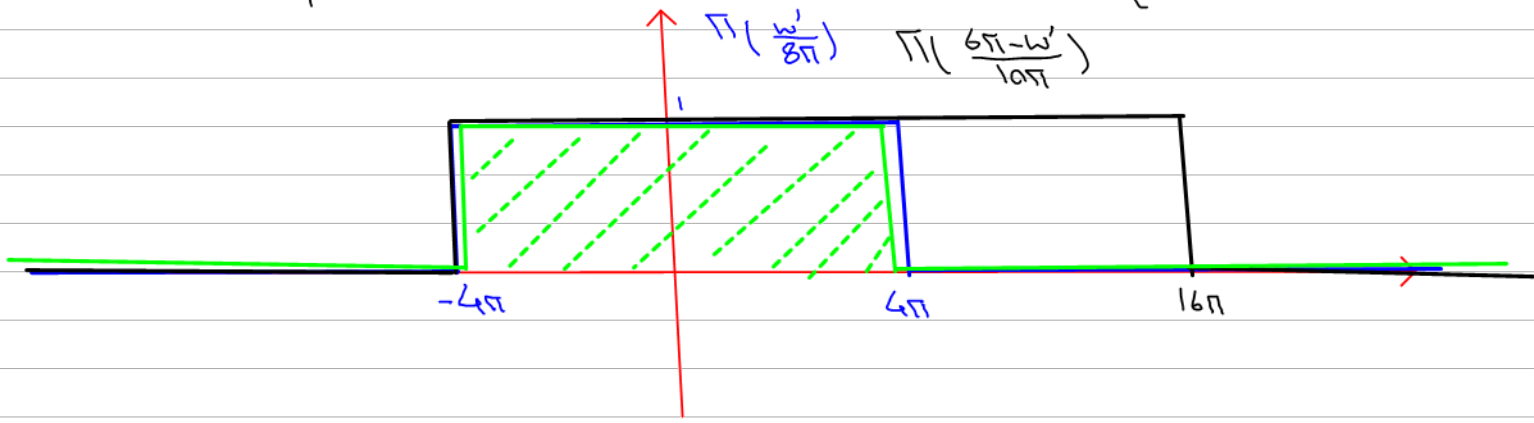
$X(j6\pi) = ?$

$X(-j6\pi) = ?$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\Pi\left(\frac{\omega'}{8\pi}\right) \frac{1}{10}\Pi\left(\frac{\omega-\omega'}{20\pi}\right) d\omega'$$

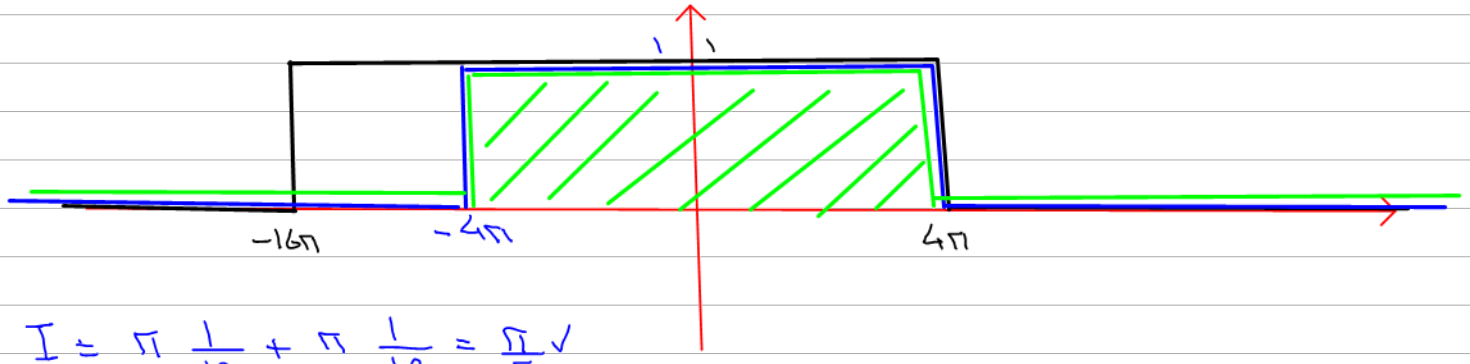
$$X(j6\pi) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{40} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega'}{8\pi}\right) \Pi\left(\frac{6\pi-\omega'}{20\pi}\right) d\omega'$$

$$\Pi\left(\frac{\omega'}{8\pi}\right) = \begin{cases} 1 & -4\pi < \omega' < 4\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad \Pi\left(\frac{6\pi-\omega'}{10\pi}\right) = \begin{cases} 1 & -4\pi < \omega' < 16\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$$X(j6\pi) = \frac{1}{80\pi} \times 8\pi = \frac{1}{10}$$

$$X(-j6\pi) = \frac{1}{80\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega'}{8\pi}\right) \Pi\left(\frac{-6\pi-\omega'}{20\pi}\right) d\omega' = \frac{1}{10}$$



$$I = \pi\,\frac{1}{10} + \pi\,\frac{1}{10} = \frac{\pi}{5}\checkmark$$

حل تشریحی

$x(t) = \text{sinc}(4t)\,\text{sinc}(10t) \longrightarrow X(j\omega)$

$I = \pi X(j6\pi) + \pi X(j6\pi)$

$x(t) =$ زوج $\times$ زوج $=$ زوج $\longrightarrow X(j\omega)$ زوج

$X(j\omega) = X(-j\omega) \qquad X(j6\pi) = X(-j6\pi)$

$I = 2\pi X(j6\pi)$

$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{40}\left(\Pi\left(\frac{\omega}{8\pi}\right) * \Pi\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)\right)$

$X(j\omega) = \frac{1}{80\pi}\left(\int_{-10\pi}^{10\pi} \Pi\left(\frac{\omega-\omega'}{8\pi}\right)\Pi\left(\frac{\omega'}{20\pi}\right)\,d\omega'\right)$

$\Pi\left(\frac{\omega'}{2a}\right) = \begin{cases} 1 & -a < \omega' < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad \Pi\left(\frac{\omega'}{20\pi}\right) = \begin{cases} 1 & -10\pi < \omega' < 10\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$X(j6\pi) = \frac{1}{80\pi}\int_{2\pi}^{10\pi} \Pi\left(\frac{6\pi-\omega'}{8\pi}\right)d\omega'$

$\Pi\left(\frac{6\pi-\omega'}{8\pi}\right) = \begin{cases} 1 & -4\pi < 6\pi-\omega' < 4\pi \rightarrow 2\pi < \omega' < 10\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$X(j6\pi) = \frac{1}{80\pi}\int_{2\pi}^{10\pi} 1\,d\omega' = \frac{1}{10}$

$I = 2\pi \times \frac{1}{10} = \frac{\pi}{5}$ ✓

۵ مقدار تابع زیر کدام است؟

$$I=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2}(\frac{k\pi}{2})}{k^{2}}$$

۱) $\frac{\pi^{2}}{8}$

۲) $\frac{\pi^{2}}{2}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{1}{2}$

درجه سختی: دشوار

موضوع سوال: تبدیل فوریه

رابطه پارسوال: محاسبه انرژی سیگنال با استفاده از تبدیل سیگنال x

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \qquad E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$x(t)$ یا $x[n]$ $\longrightarrow$ $X(j\omega)$

بیان اصلی رابطه پارسوال

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

* در چه مواردی از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم؟

1- $x(t)$ را بدهد و انتگرالی از توان دوم $X(j\omega)$ یا توان دوم $|X(j\omega)|$ را بخواهد.

2- $X(j\omega)$ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ $x(t)$ یا توان دوم $|x(t)|$ ~

3- انتگرالی از حاصلضرب دو سیگنال x و y را بخواهد.

4- ~ ~ ~ ~ تبدیل فوریه $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ ~ ~.

روابط تعمیم یافته پارسوال:

(I)
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(-j\omega) d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\omega) Y(-j\omega) d\omega$$

(II)
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[-n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\omega) Y(j\omega) d\omega$$

(III)
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y^*(-j\omega) d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\omega) Y^*(-j\omega) d\omega$$

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{k\pi}{2})}{k^2} = ?$$

یادآوری سوال

$$\left|\frac{\sin(k\pi/2)}{k}\right| = \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k}$$

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k}\right|^2 = ? = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\frac{\sin(an)}{a\pi} \longrightarrow \Pi(\frac{\omega}{2a})$$

$$\pi \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{\pi \times n} \longrightarrow \pi\,\Pi(\frac{\omega}{\pi}) = X(j\omega)$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)}{n} \longrightarrow \pi\,\Pi(\frac{\omega}{2\pi})$$

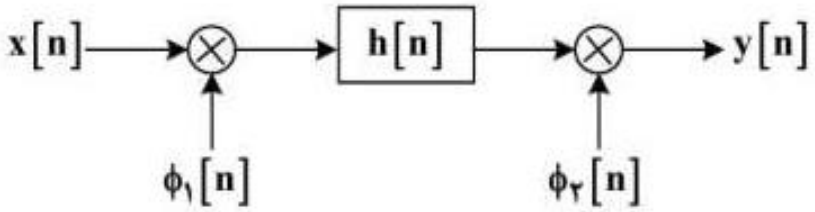
$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} \pi^2\,\Pi(\frac{\omega}{\pi})^2 d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Pi(\frac{\omega}{\pi}) d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\omega$$

$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$

$$\Pi^2(\frac{\omega}{a}) = \Pi(\frac{\omega}{a})$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\, d\omega = \frac{\pi^2}{2}\ \checkmark$$

۶ سیستم کلی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را به‌صورت شکل زیر در نظر بگیرید:



$h[n]$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI زمان گسسته است. کدام گزینه در مورد این سیستم کلی صحیح است؟

۱) این سیستم همواره خطی است ولی برای بعضی از توابع $\phi_1[n]$ و $\phi_2[n]$ می‌تواند تغییرپذیر با زمان باشد.

۲) این سیستم همواره غیرخطی است ولی برای بعضی از توابع $\phi_1[n]$ و $\phi_2[n]$ می‌تواند تغییرپذیر با زمان باشد.

۳) این سیستم همواره خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

۴) این سیستم همواره غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: خواص سیستم ها

$y(t) = x'(\tan(t) + t^2) + x'(t)$

$y(t) = \dot{x}(t) + 2x^0$ غير خطي

$y(t) = \frac{dx'}{dt} + 2x'(t) + 2^{x(t)}$ ✓ ✓ ✗

$y(t) = \tan(t^2)\,x(t) + \frac{1}{\sin(t)} \times 2^{|t|}\,x(t)$

$y = \quad \times x' + \quad \times x'$ ✓

بعضی خواص سیستم:

① خطی بودن: اگر یکی از شروط زیر برقرار باشد سیستم غیرخطی است و اگر نه، خطی است.

* اگر x بتوان عبارت x^2 داشته باشد

* " " داخل عملگر غیرخطی مثل $\sin(x)$ قرار گیرد

* " " در شرط‌ها باشد

② TV یا TI: اگر آرگومان زمان بیرون x باشد و یا داخل x روی آرگومان زمان عملیات غیر از شیفت زمانی انجام شود، سیستم TV است و در غیر این صورت TI است.

$y[n] = 2^{x[n-1]} \times x[-n+1]$ (TV)

$y(t) = x(t-1) + t\,x(t)$

③ حافظه‌دار بودن: اگر داخل x روی آرگومان زمان هر عملیات انجام شود حافظه دارد است.

$y(t) = x(t)\,x(t-1)$

$y[n] = x[n-1]$

④ علّی بودن: آرگومان y را بنویسید و آرگومان عام x ها را هم بنویسید.

اگر با رعایت چیزهای سؤال، به ازای عام زمان‌ها آرگومان y بزرگتر یا مساوی آرگومان‌های xها باشد یعنی سیستم علّی است، در غیر این صورت غیرعلّی است.

$y[n] = \begin{cases} x[-n] & n \geq 0 \\ x[n-2] + x[n] & n < 0 \end{cases}$

$n \geq ?$ { $-n$ ✓ ; $n \geq 0$; $n-2$ ✓ ; $n < 0$; n ✓ ; $n < 0$ } علّی

$n \geq -n$ ✓

$n \geq n-2$

$n \geq n$

$y(t) = x(t) + x(t)\,x(|t|-1)$

$t \geq ?$ { t ✓ ; $|t|-1$ ✗ } غیرعلّی

$t \geq t$ ✓

$t \geq |t|-1$ ✗ $\quad -10 < 10-1$

⑤ پایداری: اگر به ازای ورودی محدود، خروجی $\pm\infty$ (در تمام زمانها یا حتی $t=\pm\infty$ یا $n=\pm\infty$) نتیجه دهد سیستم ناپایدار است و غیر این صورت پایدار است.

اگر x در مخرج باشد یا داخل تابعی باشد که می‌تواند ∞ شود حتماً آن مقدار را بررسی کنید.

در غیر این صورت $x(t)=A$ ($x[n]=A$) گذاشته و y را حساب کنید (حتی $t=\pm\infty$)

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{x[n]}{x[n-1]-2} & x[n-1]\neq 2\\ x[n]\times e^{x[n-1]} & x[n-1]=2\end{cases}$$

$y(t)=\tan(|x(t)|)$

$x(t)=\pi/2 \rightarrow y(t)=\infty$ ناپایدار

$x[n]=2+0^+ \qquad x[n-1]=2+0^+$

$y[n]=\dfrac{2+0^+}{2+0^+-2}=\dfrac{2^+}{0^+}=\infty$ ناپایدار

⑥ معکوس پذیری:

سیستم معکوس پذیر است اگر و تنها اگر شرط زیر را داشته باشد:

(I) ورودی x در تمام زمانها روی خروجی تأثیر داشته باشد ← با آگاهی از x هر عددی بین $+\infty$ و $-\infty$ را بتوان ساخت.

(II) تمام مقادیر x روی خروجی تأثیر داشته باشد.

(III) بتوان تابع $x(t)$ برحسب y را بدون ابهام به صورت یکتا نوشت.

1) $y(t)=x(t)$

2) $y[n]=\dfrac{|x[n]|}{x[n]}$

3) $y[n]=\begin{cases}0 & n\geq 0\\ x^2[n] & n<0\end{cases}$

4) $y(t)=\begin{cases}x(t) & x(t)\geq 0\\ x^2(t) & x(t)<0\end{cases}$

(I) $t\rightarrow$ ✓

(II) $y=x(t)$ ✓

(III) $x(t)=y(t)$ ✓

معکوس پذیر

2) $y[n] = \frac{|x[n]|}{x[n]}$

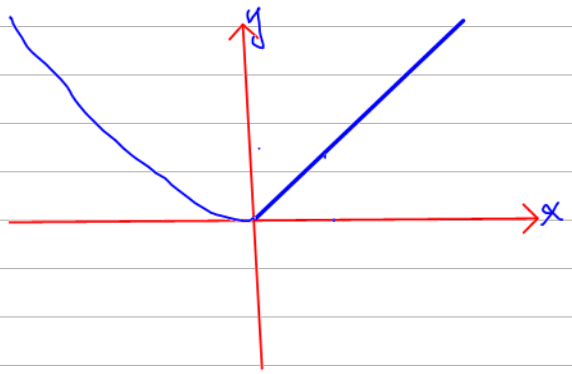
(I) n ✓ (II) $y[n] = \begin{cases} 1 & x[n] > 0 \\ -1 & x[n] < 0 \end{cases}$ $x[n]=2$ ✗ $x[n]=3 \rightarrow y=1$

معکوس ناپذیر

3) $y[n] = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ x^2[n] & n \leq 0 \end{cases}$

(I) n ; $n \leq 0$ منطبق عدد صحیح ✗ معکوس ناپذیر

4) $y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geq 0 \\ x^2(t) & x(t) < 0 \end{cases}$



(I) t ✓ (II) ✓

(III) $\begin{cases} y(t) = x(t) & x(t) \geq 0 \\ y(t) = x^2(t) & x(t) < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = y(t) & y(t) \geq 0 \\ x(t) = -\sqrt{y(t)} & y(t) > 0 \end{cases} \rightarrow x(t) = \begin{cases} y(t) \\ -\sqrt{y(t)} \end{cases}$ ✓

نکته: اگر بدست آوردن x بر حسب y امکان پذیر نباشد از نکات سمگانه زیر استفاده می‌کنیم.

(I) اگر سیستم خطی باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که:

اگر خروجی بازای عامل زمانهای α باشد بتوان نتیجه گرفت که ورودی در عامل زمانهای بوده است.

$$y(t) = \frac{x'(t) - x'(-t)}{2} = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t) = x_o(t)$$ خطی

$x(t) = t^2 \longrightarrow y(t) = 0 \quad \forall t$ معکوس ناپذیر

(II) اگر سیستم بدون حافظه باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که تابع y بر حسب x یک به یک باشد (در فضای مختلط و به ازای عامل زمانهای)

$y = 2x^2 + tx$ $\quad y(x) = 2x^2(x) + t\,x(x)$

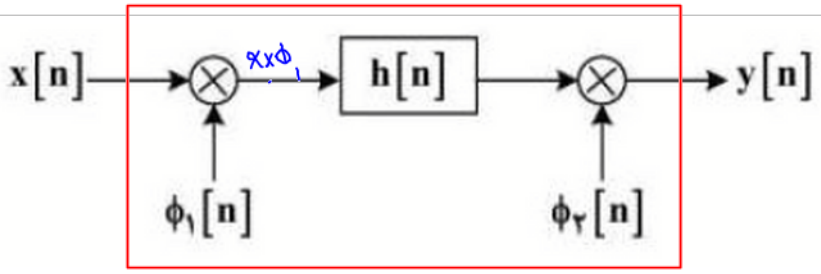
$t=1 \longrightarrow y = 2x^2 + x$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر

* تابع چند جمله‌ای در فضای مختلط غیر یک به یک است. $y = x^3 + 10x^2 + x^1 \quad y = x^1 + x^3$

(III) اگر عامل زمان بیرون x باشد شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک به یک بودن تابع y بر حسب x است. (در فضای مختلط)

$y(t) = x(t)\,x(t-1) + x(t-2)^2$

$y = x^2 + x^2 \longrightarrow y = 2x^2 \longrightarrow$ غیر یک به یک $\longrightarrow$ معکوس ناپذیر



$$y[n] = \Phi_2[n] \times \left((x[n] \times \Phi_1[n]) * h[n] \right)$$

$$y[n] = \text{عدد} \times \left((x[n] \times \text{عدد}) * h[n] \right) \Rightarrow y[n] = (\text{عدد})^2 \left(x[n] * h[n] \right)$$

کانولوشن = عملگر خطی

سیستم همواره خطی است.

چون آرگومان n بیرون x یعنی $\Phi_1[n]$ و $\Phi_2[n]$ دیده نمی‌شود لذا TV است.

۷ سیستم کلی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ به‌صورت شکل زیر را در نظر بگیرید؛ که در آن رابطهٔ ورودی و خروجی هر سیستم به‌صورت زیر داده شده است:

سیستم ۱: $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{۲}\right], & n \text{ is even} \\ ۰, & n \text{ is odd} \end{cases}$

سیستم ۲: $y[n]=x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۱]+\frac{۱}{۴}x[n-۲]$

سیستم ۳: $y[n]=x[۲n]$

کدام گزینه رابطهٔ ورودی ـ خروجی سیستم کلی را نشان می‌دهد؟

$x[n] \rightarrow$ سیستم ۱ $\rightarrow$ سیستم ۲ $\rightarrow$ سیستم ۳ $\rightarrow y[n]$

۱) $y[n]=\begin{cases} x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۱]+\frac{۱}{۴}x[x-۲], & n \text{ is even} \\ ۰, & n \text{ is odd} \end{cases}$

۲) $y[n]=\begin{cases} x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۲]+\frac{۱}{۴}x[n-۴], & n \text{ is even} \\ ۰, & n \text{ is odd} \end{cases}$

۳) $y[n]=x[n]+\frac{۱}{۴}x[n-۱]$

۴) $y[n]=x[n]+\frac{۱}{۲}x[n-۱]+\frac{۱}{۴}x[n-۲]$

درجه سختی: ساده

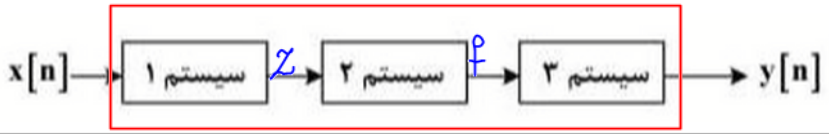
موضوع سوال: تعریف سیستم

حل تشریحی

سیستم ۱: $y[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \text{ is even} \\ 0 & n \text{ is odd} \end{cases}$ (ورودی)

سیستم ۲: $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{4}x[n-2]$

سیستم ۳: $y[n]=x[2n]$



$x[n]$ → سیستم ۱ → $z[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$

$z[n]$ → سیستم ۲ → $f[n]=z[n]+\frac{1}{2}z[n-1]+\frac{1}{4}z[n-2]$

$f[n]$ → سیستم ۳ → $y[n]=f[2n]$

$$y[n]=z[2n]+\frac{1}{2}z[2n-1]+\frac{1}{4}z[2n-2]$$

$$z[n]=\begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases} \longrightarrow z[2n]=x[n]$$

$z[2n-1]=0$

$z[2n-2]=x\left[\frac{2n-2}{2}\right]=x[n-1]$

$y[n]=x[n]+0+\frac{1}{4}x[n-1]$ خانه‌ی

۸ سیستم زمان گسسته با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را در نظر بگیرید. رابطهٔ بین تبدیل فوریهٔ این دو سیگنال به‌صورت رابطهٔ زیر داده شده است:

$$Y(\Omega)=2X(\Omega)+e^{-j\Omega}X(\Omega)-\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟

۱) خطی ـ تغییرپذیر با زمان
۲) خطی ـ تغییرناپذیر با زمان
۳) غیر خطی ـ تغییرپذیر با زمان
۴) غیر خطی ـ تغییرناپذیر با زمان

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل فوریه و خواص سیستم

$$Y(\Omega) = 2X(\Omega) + e^{-j\Omega}X(\Omega) - \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

$y[n] \longrightarrow Y(j\Omega)$

$x[n] \longrightarrow X(j\Omega)$

$x[n+a] \longrightarrow e^{ja\omega} X(j\omega)$

$x[n-1] \longrightarrow e^{-j\Omega} X(j\Omega)$

$\frac{1}{j} n x[n] \longrightarrow \frac{1}{j} j \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$

$y[n] = 2x'[n] + x'[n-1] - \frac{1}{j} n x'[n]$

$y = 2x' + x' - \text{مشتق } x' \longrightarrow$ خطی

n برون x دلتا $\longrightarrow$ تا

۹ $\delta(t^2-1)$ برابر کدام است؟

۱) $\delta(t-1)+\delta(t+1)$

۲) $\delta(t-1)-\delta(t+1)$

۳) $\frac{1}{2}\delta(t-1)-\frac{1}{2}\delta(t+1)$

۴) $\frac{1}{2}\delta(t-1)+\frac{1}{2}\delta(t+1)$

درجه سختی: ساده

موضوع سوال: خواص تابع ضربه

خواص تابع ضربه:

$$\delta[f[n]] = \begin{cases} 1 & f[n]=0 \\ 0 & f[n]\neq 0 \end{cases} \qquad \delta(f(t)) = \begin{cases} 1 & f(t)=0 \\ 0 & f(t)\neq 0 \end{cases}$$

$$x[n]\,\delta[n\pm a] = x[a]\,\delta[n\pm a] \qquad x(t)\,\delta(t\pm a) = x(a)\,\delta(t-a) \quad (t=a)$$

$$x[n] * \delta[n-a] = x[n\pm a] \qquad x(t) * \delta(t\pm a) = x(t\pm a)$$

$$\sum_{a}^{b} \delta[n-c] = \begin{cases} 1 & c\in[a,b] \\ 0 & c\notin[a,b] \end{cases} \qquad \int_a^b \delta(t-c)\,dt = \begin{cases} 1 & c\in[a,b] \\ 0 & c\notin[a,b] \end{cases}$$

$$\delta[af[n]] = \delta[f[n]] \qquad \delta(af(t)) = \frac{1}{|a|}\delta(f(t))$$

* t_i: ریشه‌های $f(t)=0$ * $\delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}$

* خاصیت غربالگری فقط در حالت $\delta(t\mp a)$ قابل استفاده است.

$$x(t)\delta(2t-4) = x(t)\,\delta(2(t-2)) = x(t)\times\frac{1}{2}\delta(t-2) = \frac{1}{2}x(t)\delta(t-2) \quad (t=2)$$

$$\frac{1}{2}x(2)\delta(t-2)$$

$$x[n-10]\,\delta[2n-4] = x[n-10]\,\delta[2(n-2)] = x[n-10]\,\delta[n-2] \quad (n=2) = x[-8]\delta[n-2]$$

$$x(t)\,\delta(t^2-1) = ?$$

* برای نوشتن هر کجا داخل δ عبارتی غیر خطی از t باشد (نه $at+b$) از فرمول $\delta(t\mp a)$ استفاده می‌کنیم.

آن به صورت δ های بامزم

$$\delta(t^2-1) \longrightarrow f(t)=t^2-1 \longrightarrow t^2-1=0 \longrightarrow \begin{cases} t_1=+1 \\ t_2=-1 \end{cases}$$

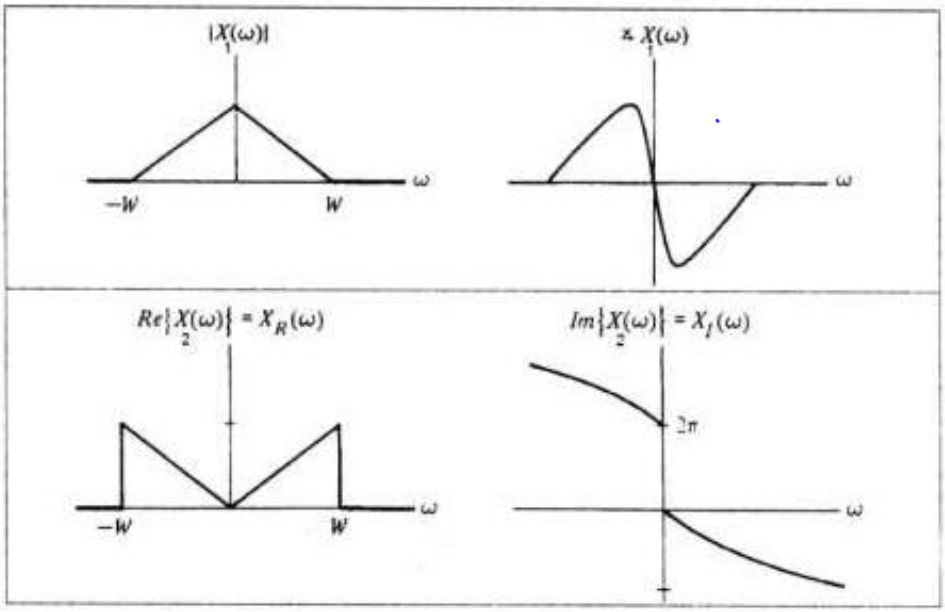
$$f'(t)=2t$$

$$\delta(t^2-1)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}=\frac{\delta(t-1)}{|2\times 1|}+\frac{\delta(t-(-1))}{|2\times -1|}=\frac{1}{2}\delta(t-1)+\frac{1}{2}\delta(t+1)$$

۱۰

اطلاعات تبدیل فوریهٔ دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در شکل زیر داده شده است.

کدام گزینه در مورد این دو سیگنال صحیح است؟



۱) سیگنال $x_2(t)$ حقیقی است و سیگنال $x_1(t)$ حقیقی نیست.

۲) سیگنال $x_1(t)$ حقیقی است و سیگنال $x_2(t)$ حقیقی نیست.

۳) هر دو سیگنال حقیقی است.

۴) هر دو سیگنال حقیقی نیست.

درجه سختی: متوسط

موضوع سوال: تبدیل فوریه

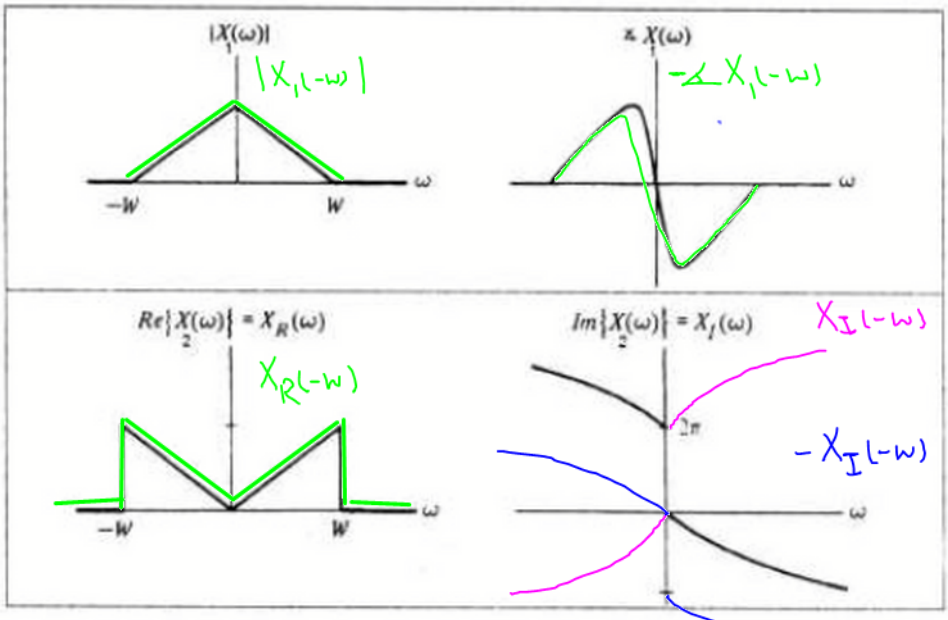
$x(t) \longrightarrow X(\omega)$

$x^*(t) \longrightarrow (X(-\omega))^*$

$x(t)$ حقیقی $\quad x(t) = x^*(t)$

$X(\omega) = (X(-\omega))^*$

یعنی اگر $X(\omega) = X^*(-\omega)$ باشد یعنی $x(t)$ حقیقی است.



$X_1(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)}$

$X_2(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$

1) $X_1(\omega) \stackrel{?}{=} (X_1(-\omega))^*$

$X_1(-\omega) = |X_1(-\omega)| e^{j\angle X_1(-\omega)}$

$|X_1(\omega)| e^{j\angle X_1(\omega)} \stackrel{?}{=} |X_1(-\omega)| e^{-j\angle X_1(-\omega)}$ ✓

$\begin{cases} |X_1(\omega)| = |X_1(-\omega)| \ \checkmark \\ \angle X_1(\omega) = -\angle X_1(-\omega) \ \checkmark \end{cases} \longrightarrow X_1(\omega) = (X_1(-\omega))^*$ → x_1 حقیقی است.

$X_2(\omega) \stackrel{?}{\neq} (X_2(-\omega))^*$

$X_2^*(-\omega) = X_R(-\omega) \mp jX_I(-\omega)$

$X_R(\omega) + jX_I(\omega) \stackrel{?}{\neq} X_R(-\omega) - jX_I(-\omega)$

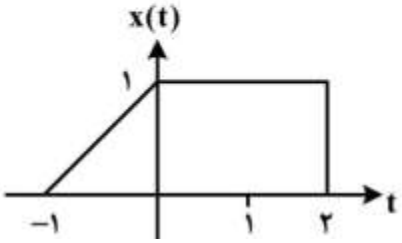
$X_R(\omega) = X_R(-\omega)$ ✓

$X_I(\omega) \neq -X_I(-\omega)$ ✗

x_2 حقیقی نیست

۱۱ برای سیگنال $x(t)$، مقدار انتگرال روبه‌رو، کدام است؟

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} X^{۲}(j\omega)d\omega$$



۱) π

۲) ۲π

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

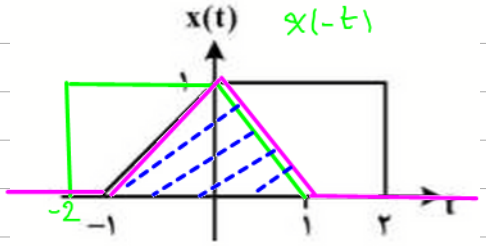
درجه سختی: ساده

موضوع سوال: تبدیل فوریه و رابطه پارسوال

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(j\omega)\, d\omega$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(-t)\, dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, X(j\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(j\omega)\, d\omega$$

$$I = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(-t)\, dt$$



$$= 2\pi \left(1 \times \frac{2}{2} \right) = 2\pi \checkmark$$

۱۲ در یک سیستم LTI برای ورودی‌هایی که خارج از بازهٔ $0 \le n \le 5$ صفر هستند، پاسخ سیستم در خارج از بازه $-1 \le n \le 5$ همواره صفر است. اگر به ورودی $x[n] = \begin{cases} 2^{|n|} & |n| \le 3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ اعمال شود، $y[0] = 4$ و $y[3] = -16$ می‌شود. مقدار $y[2]$ کدام است؟

۱) ۱۶

۲) ۴

۳) -4

۴) -8

درجه سختی: متوسط

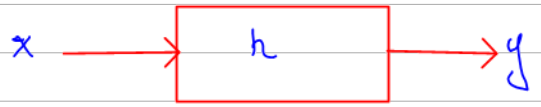
موضوع سوال: سیستم های LTI

$$y = x * h$$

نقطه شروع y = نقطه شروع x + نقطه شروع h

" پایان " = " پایان " + " پایان "

طول y = طول x + طول h



هرگاه h یا x را ندهد و y و h یا y و x را بدهد برای یافتن x یا h ، ابتدا از روابط فوق مختصات سیگنال مجهول را استخراج می کنیم و سپس از تئوری کانولوشن استفاده می کنیم.

در یک سیستم LTI برای ورودی‌هایی (x) که خارج از بازهٔ $-1 \le n \le 5$ صفر هستند، پاسخ سیستم (y) در خارج از بازه $-1 \le n \le 5$ همواره صفر است. اگر به ورودی $x[n]=\begin{cases}2^{|n|} & |n|\le 3 \\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$ اعمال شود، $y[0]=4$ و $y[3]=-16$ می‌شود. مقدار $y[2]$ کدام است؟

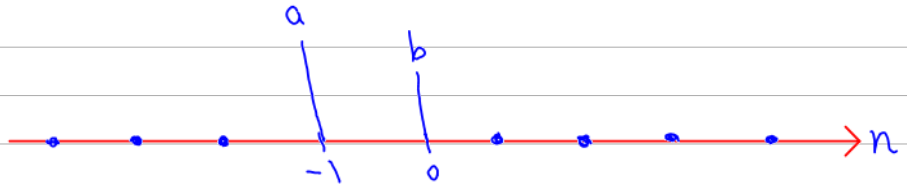
نقطه پایان x = 5 نقطه شروع x = 0

y ~ ~ = 5 y ~ ~ = -1

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

نقطه شروع y = نقطه شروع x + نقطه شروع h → نقطه شروع h = -1

پایان y ~ = پایان ~ ~ + پایان h ~ → نقطه پایان h = 0



$$h[n] = a\delta[n+1] + b\delta[n]$$

$$y[n] = x[n] * (a\delta[n+1] + b\delta[n]) = a\,x[n]*\delta[n+1] + b\,x[n]*\delta[n]$$

$$y[n] = a\,x[n+1] + b\,x[n]$$

$$x[n] = \begin{cases} 2^{|n|} & |n|\le 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad x[n+1] = \begin{cases} 2^{|n+1|} & |n+1|\le 3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$y[0] = a\,x[1] + b\,x[0] = a\times 2^{|1|} + b\,2^{|0|} = 2a + b = 4 \rightarrow a=3$$

$$y[3] = a\,x[4] + b\,x[3] = a\times 0 + b\times 2^{|3|} = 8b = -16 \rightarrow b=-2$$

$$y[2] = 3\,x[3] + -2\,x[2] = 3\times 2^{|3|} + (-2)\times 2^{|2|} = 24 - 8 = 16 \checkmark$$