Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

جلسه ۱۵ کنترل

n فضای حالت

$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} = u$

انتخاب متغیرهای حالت ← از معادله دیفرانسیل

متغیر حالت ← توصیف کننده سیستم

$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases}$

فاصله و سرعت

قرار ← سقوط ← افتادن

$\begin{cases} \text{فاصله} \\ \text{سرعت} \end{cases} \rightarrow$ برای توصیف حرکت هواپیما

اما نه $\times$ سرعت + فاصله

متغیرهای حالت ← حداقل تعداد متغیرها لازم برای توصیف سیستم

نکته * متغیرهای حالت باید مستقل خطی باشند.

x_1, x_2, x_3

$\boxed{x_3 = x_1 + x_2}$ ← x_1 و x_2 و x_3 مستقل خطی نیستند

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$x, y \rightarrow$ یعنی y را به صورت مزیجی از x و t نمی‌دانیم

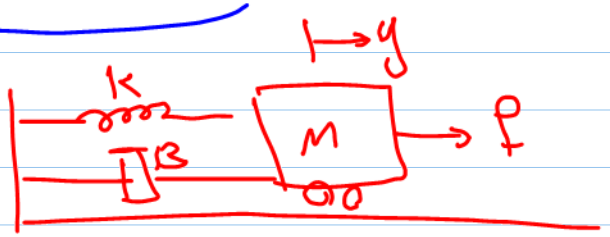
$x, y, z \rightarrow$ $z \neq ax + by$ نمی‌دانیم

z را نمی‌دانیم به صورت مجموع مزیجی از x و y و t

x_1, x_2, x_3 $\dot{x}_3 = x_1 \rightarrow$ x_1 مستقل خطی است؟

$x_1 = \alpha x_2 + \beta x_3$ مشق دلیل بر عدم استقلال خطی است

$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = f$



روش اول $\rightarrow$ $y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \end{cases}$

$x_1 = \square x_2 X$ متغیرهای x_1 و x_2 مستند.

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\begin{cases} y = x_1 \checkmark \\ \dot{y} + y = x_2 \checkmark \end{cases}$$

$x_2 = 1 x_1 + \boxed{\dot{y}}$ ✓

$x_2 - x_1 = \dot{y}$

$\boxed{y \ , \ \dot{y}}$

ازدوی متغیرهای حالت بتوان y , $\dot{y}$ را حساب کرد.

$$\begin{cases} x_1 \longrightarrow y \checkmark \\ x_2 - x_1 \longrightarrow \dot{y} \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + \dot{y} = x_1 \checkmark \\ y - \dot{y} = x_2 \checkmark \end{cases}$$

$x_1 \neq \square \, x_2$ ✓ مستقل خطی ✓

✓ $y = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ✓ $\dot{y} = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

به پیوستگی لازم می توان متغیرحالت انتخاب کرد.

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

متغیرهای حالت کتابی.

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

فرم کانونیکال ← فرم استاندارد ←

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = f$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

گام دوم ← مشتق متغیرهای حالت را براساس متغیرهای حالت و ورودی خارجی حساب کنید

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = f(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + k y = u$$

($\frac{d^2y}{dt^2} = \dot{x}_2$, $\frac{dy}{dt} = x_2$, $y = x_1$)

$$M\dot{x}_2 + Bx_2 + kx_1 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = \frac{1}{M}u - \frac{B}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{B}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \end{cases}$$

خروجی = y

حالت دوم $\rightarrow$ خروجی $= f(x_1, x_2, u) \Rightarrow y = x_1$ ✓ معادله خروجی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{B}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

برق ۵۸. معادلات فضای حالت سیستم زیر (استاندارد) را بنویسید.

$$2\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = u$$

① انتخاب متغیرهای حالت

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

② مشتق متغیرهای حالت برحسب متغیرهای حالت و ورودی خارجی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -2x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

صورت سؤال

$$2\dddot{y} + 3\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = u \quad \checkmark$$

($\dddot{y} = \dot{x}_3$, $\ddot{y} = x_3$, $\dot{y} = x_2$, $y = x_1$)

$$2\dot{x}_3 + 3x_3 + 6x_2 + 4x_1 = u$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}u$$

$y = x_1$ معادله خروجی

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

فضای حالت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$$

* تعداد متغیرهای حالت برابر درجه سیستم است $= n$

تعداد ورودی ها $= m = 1$

" خروجی ها $= k$

A: ماتریس $n \times n$ است.

B: " $n \times m$ " "

C: $k \times n$

D: $k \times m$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u \\ y = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$n = 2 \qquad m = 1$

$k = 1$

$A : n \times n = 2 \times 2$: X

$B : n \times m = 2 \times 1$

$C : k \times n = 1 \times 2$

$D : k \times m = 1 \times 1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \end{bmatrix} u$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

قواعد ماتریس ها:

عدد دوتا آرایه ها ماتریس مربعی شود ← ماتریس × عدد

$$2 \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{a \times b} \times \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{c \times d}$$

a: سطر ، b: ستون

باید $c = b$ باشد

ماتریس $a \times d$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \times \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 3 = 1 \\ 1 \times 1 + 2 \times 3 = 7 \end{bmatrix}$$

ستون ۱

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} u$$

2×2 $\quad$ 2×1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e u \\ f u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 + b x_2 + e u \\ c x_1 + d x_2 + f u \end{bmatrix}$$

2×1 $\quad$ 2×1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 + b x_2 + e u = x_2 \\ \dot{x}_2 = c x_1 + d x_2 + f u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u \end{cases}$$

$(a=0,\ b=1,\ e=0;\ c=-1,\ d=1,\ f=1)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

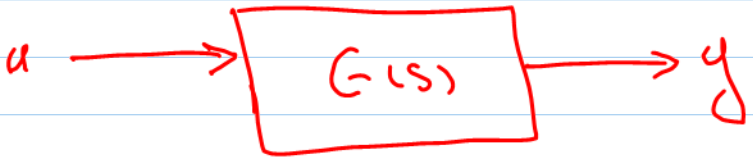
$$\dot{x}_1 = x_2 + c x x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u$$

$$y = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \quad 2\times 1 \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{D} u \end{cases}$$

مثال: نتایج تبدیل سیستم زیر برابر $G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 1}$ می‌باشد. نمایش فضای حالت استاندارد این سیستم را بدست آورید.



درجه سیستم = 3

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3+2s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \text{معادله دیفرانسیل}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$s^3 Y(s) + 2s^2 Y(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = u(t) \rightarrow y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases}$$

معادله فوق

$$y = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \quad \checkmark \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \quad \checkmark \\ \dot{x}_3 = \frac{d^3y}{dt^3} = -x_1 - 2x_3 + u \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\ddot{y} + y = u \rightarrow \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + u \end{cases} \qquad y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3\times 1} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{1\times 1} u$$

سئوال: برای M در صورتی که در سیستم زیر از متغیرهای حالت جدید $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ استفاده شود، ماتریس P که $Z = PX$ است را بدست آورید.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_1$$

$$\rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_3 = f(x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$y = x_1 - x_2 + (-x_1 + x_3) - (-x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\dot{y} = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ y = x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{y} = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \\ \dot{x}_2 = \\ \dot{x}_3 = \end{cases} \left\{ x_3, x_2, x_1 \right\}$$

$$y = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

برق ۵۸. تحقق معادلات $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3+6s^2+11s+6}$ با مزمن تحقق استاندارد را به دست آورید.

$$s^3 Y(s) + 6s^2 Y(s) + 11s\, Y(s) + 6\, Y(s) = 2\, U(s)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y(t) = 2u(t)$$

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = \dot{x}_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{d^3y}{dt^3} = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \end{cases}$$

$$\dot{x}_3 + 6x_3 + 11x_2 + 6x_1 = u$$

$$y = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3\times 1} \times u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com