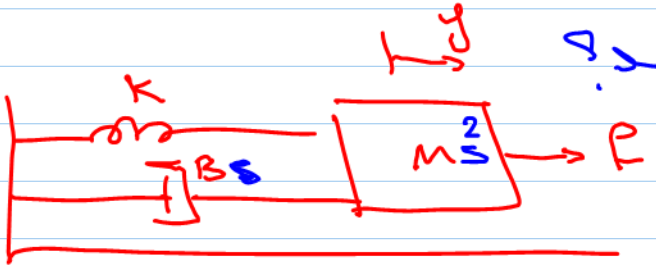
جلسه ۱۱ کنترل خطی

معادله دیفرانسیل سه فضای حالت

انتخاب متغیرهای حالت

* سیستم را در نظر بگیرید و متغیرهای حالت را برای آن بنویسید؟



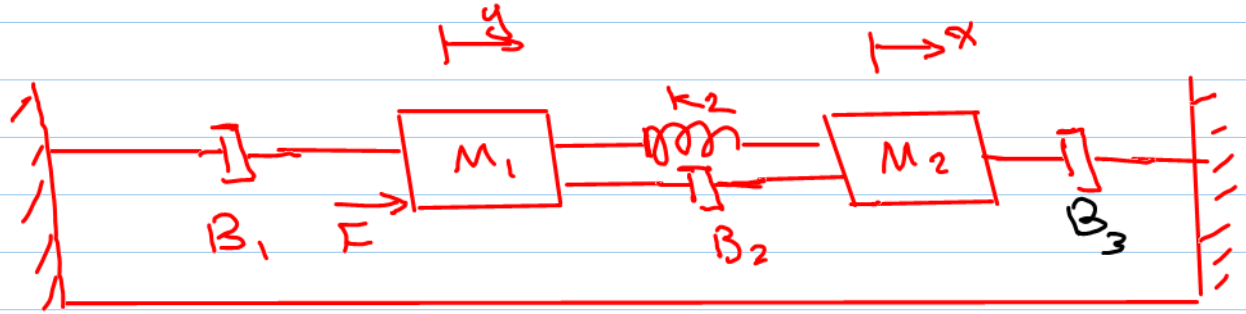
نکته: سیستم را به فضای لاپلاس ببرید.

سپس جدول زیر را کامل کنید.

اعلان	متغیر تأثیرپذیر	مرتبه مشتق	متغیر حالت کاندید	
جرم Ms^2	y	2	y و $\dot{y}$	2
دمپر Bs	y	1	~~$\dot{y}$~~	
فنر K	y	0	y	

از بین متغیرهای حالت کاندید عوامل ذخیره‌ای و وابسته را حذف می‌کنیم.

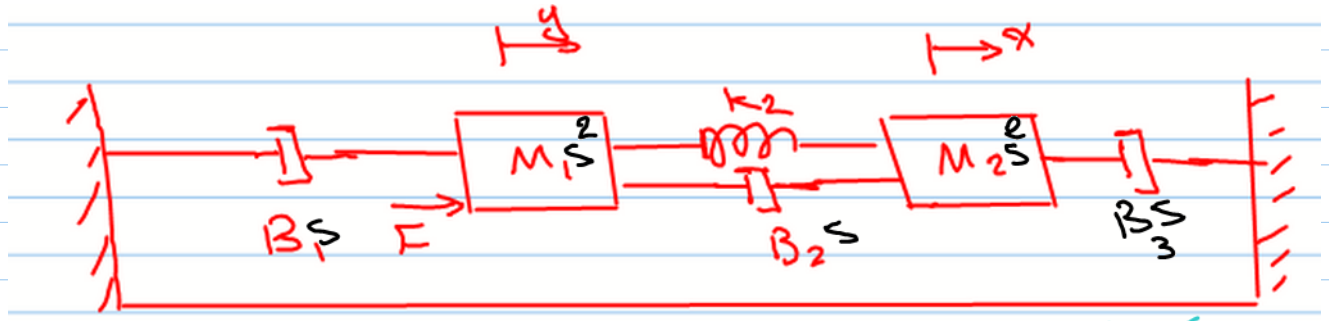
مثال: دو سیستم زیر تعداد متغیرهای حالت را بیابید.



2 (2 3 (1

1 (4 4 (3

حل حل دانشجو:



تعیین طول مثبت
سمتی حائز تردید
برای خود دیر
" " دیر

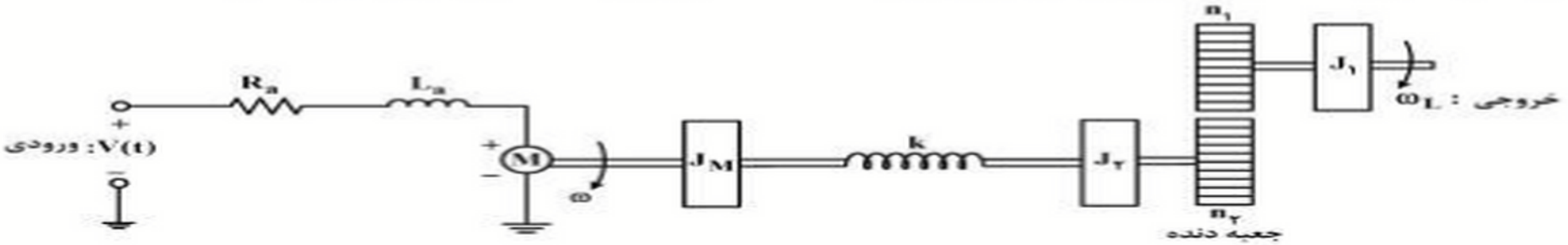
		درجه	مثبت صریح مابقی تکرار از دو بعضی سوادم	
$M_1 s^2$	y	2	y ① $\dot{y}$ ②	
$B_1 s$	y	1	y X	تکراری
K_2	$y - x$	0	X	
$B_2 s$	$y - x$	1	$y - x$ X	وابسته
$M_2 s^2$	x	2	x ③ $\dot{x}$ ④	
$B_3 s$	x	1	x X	تکراری

④

$y-x$ از x و y مستقل خواهد بود.

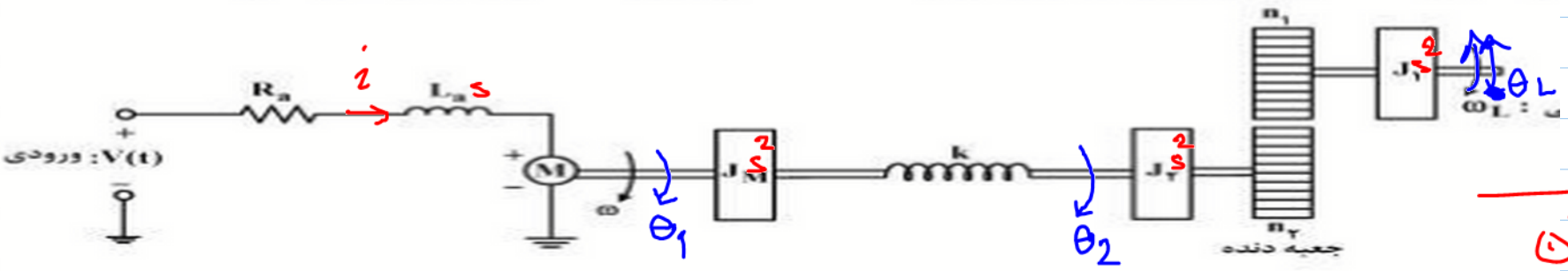
برق ۹۵

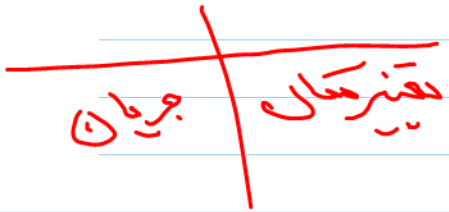
۵۷- سیستم الکترو ـ مکانیکی زیر را درنظر بگیرید. تعداد متغیرهای حالت این سیستم، کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

حل حل دانشجو



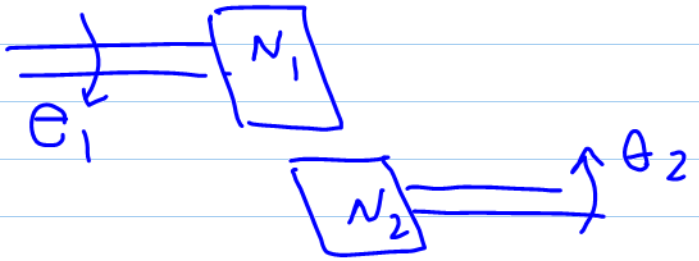


اعلان	متغیر	مرتبه	کاندید ؟
R_a	i	0	X
$L_a s$	$\dot{i}$	1	$\dot{i}$ ①
$J_M s^2$	θ_1	2	θ_1 ② $\dot{\theta}_1$ ③
$J_2 s^2$	θ_2	2	θ_2 ④ $\dot{\theta}_2$ ⑤
$J_1 s^2$	θ_L	2	θ_L X وابسته $\dot{\theta}_L$ X وابسته
K	$\theta_1 - \theta_2$	0	X
چرخ دنده/ندارد	θ_2, θ_L	0	X

5

متغیرهای وابسته

نکته: سرعت‌های دو سمت (جابجایی دورانی) اعضای انتقال دهنده نیرو مثل چرخ دنده‌ها هم وابسته هستند.



$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\theta_1 = \frac{N_2}{N_1}\theta_2$$

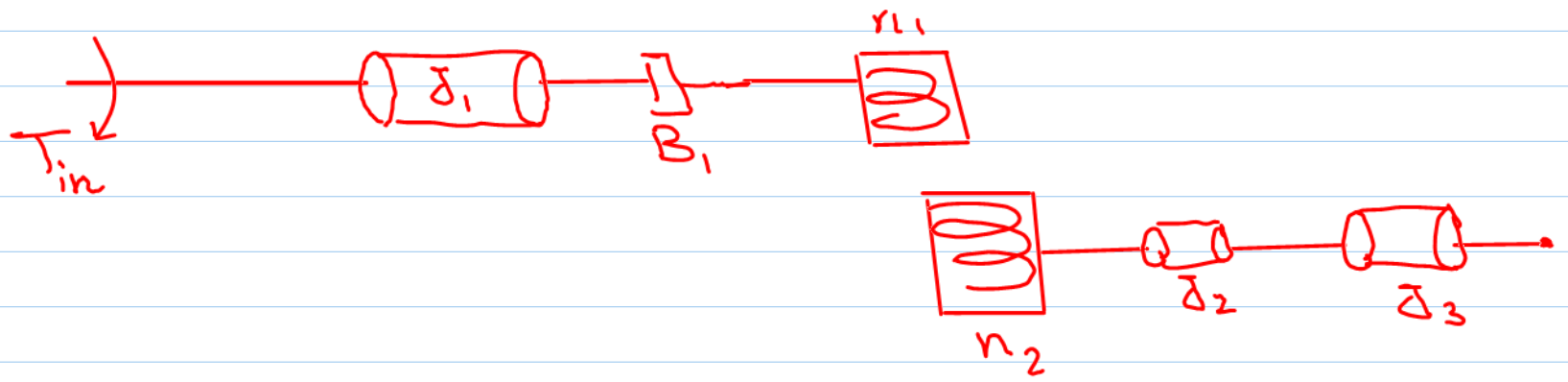
نسبت چرخ دنده

$$\theta_L = \text{نسبت} \times \theta_2$$

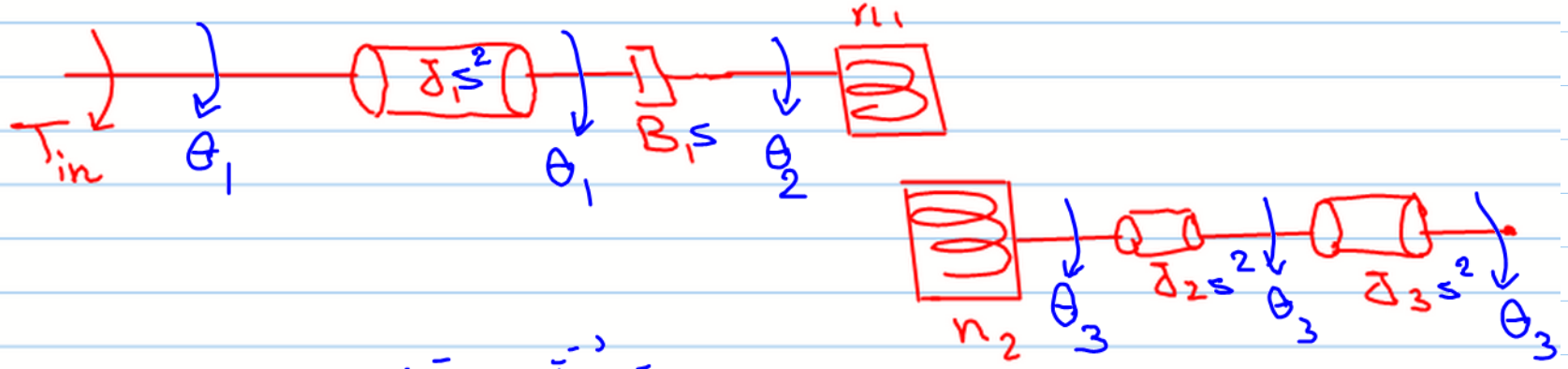
$$\theta_L = \alpha\,\theta_2$$

$$\dot{\theta}_L = \alpha\,\dot{\theta}_2$$

مثال: در سیستم زیر، کدامیک از گزینه‌ها مقدار متغیرهای حالت را به درستی نشان می‌دهد؟



5 (4 4 (3 3 (2 2 (1



	سفر	سرعت مشتق	حاذیذا
$J_1 s^2$	θ_1	2	θ_1 ✓ $\dot{\theta}_1$ ✓
$B_1 s$	$\theta_1 - \theta_2$	1	$\theta_1 - \theta_2$ ✓
$J_2 s^2$	θ_3	2	θ_3 ✗ وابسته $\dot{\theta}_3$ ✓
$J_3 s^2$	θ_3	2	θ_3 ✗ گرادی $\dot{\theta}_3$ ✗ گرادی
مرجع‌ها	θ_2, θ_3	0	✗

θ_2 ، θ_3 به هم وابسته است.

$$\theta_3 = a\,\theta_2$$

$$\theta_1 ,\ \dot{\theta}_1 ,\ \theta_1 - \theta_2$$

$$\theta_2 = \theta_1 - (\theta_1 - \theta_2)$$

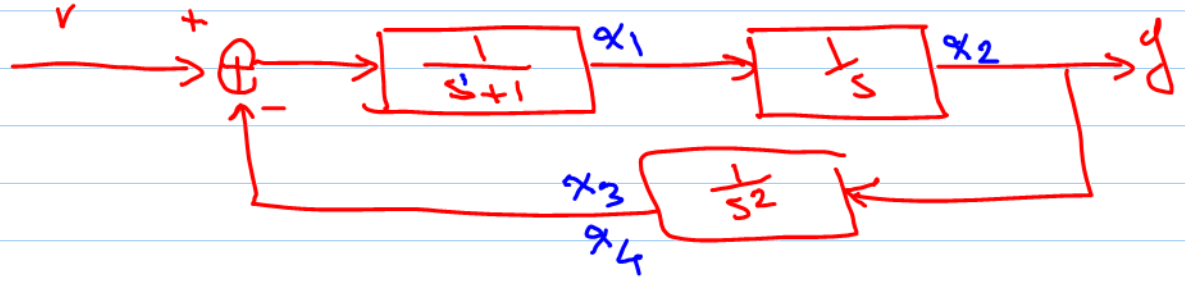
$$\theta_3 = a\beta\,\theta_1 - a(\theta_1 - \theta_2)$$

آیا θ_3 را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از $\theta_1 , \dot{\theta}_1 , \theta_1 - \theta_2$ نوشت؟

$$\theta_3 = a\,\theta_1 - a(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\dot{\theta}_3 = a\dot{\theta}_1 - a(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

چگونه فضای حالت را از روی بلوک دیاگرام به دست آوریم؟



① عامل بلوکهای دارای s ، متغیر حالتند.

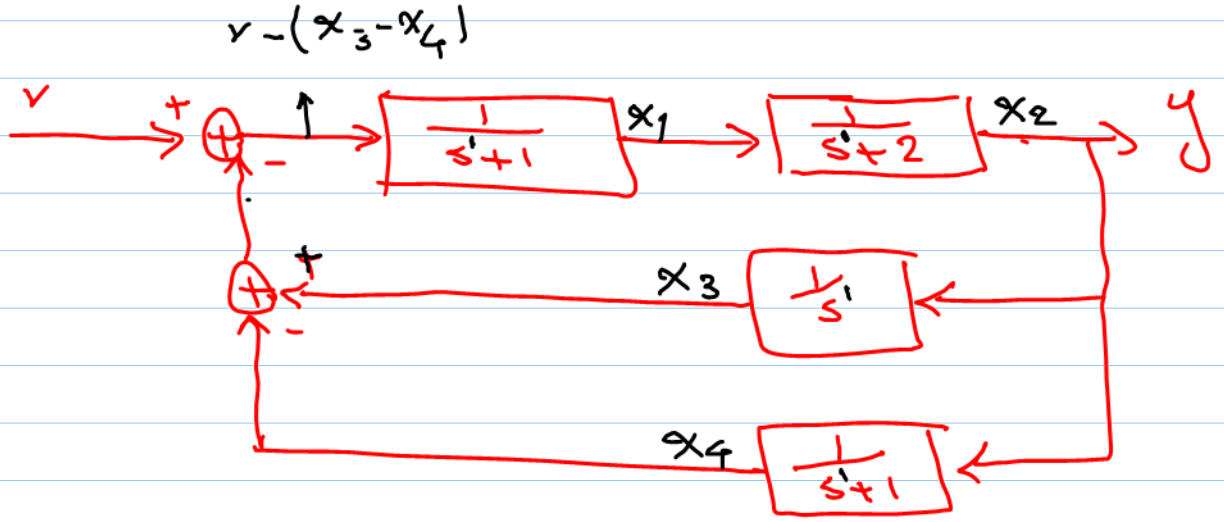
اگر خروج بلوکی دارای s با توان k (درجه مخرج از صورت بیشتر باشد) خروجی بلوک به تعداد درجه s ، متغیر حالت انتخاب می‌شود.

اگر درجه صورت بلوک از مخرج بیشتر باشد ورودی بلوک به تعداد درجه s متغیر حالت در نظر می‌گیریم.



② رابطه ورودی و خروجی هر بلوک را می‌نویسیم.

③ رابطه بلوک به حوزه زمان بردن و $\dot{x}$ ها را بدست می‌آوریم.



① $\dot{x}_1 = \frac{1}{s+1} \times (r - x_3 + x_4)$

② $\dot{x}_2 = \frac{1}{s+2} \dot{x}_1$

③ $\dot{x}_3 = \frac{1}{s} \dot{x}_2$

④ $\dot{x}_4 = \frac{1}{s+1} \dot{x}_2$

① $sx_1 + x_1 = r - x_3 + x_4 \longrightarrow \dot{x}_1(t) + x_1(t) = r(t) - x_3(t) + x_4(t)$

معادله اول $\dot{x}_1 = r(t) - x_1(t) - x_3(t) + x_4(t)$

② $sx_2 + 2x_2 = x_1 \longrightarrow \dot{x}_2 + 2x_2 = x_1$

معادله دوم $\dot{x}_2(t) = x_1 - 2x_2$

③ $x_3 = \frac{1}{s} x_2 \longrightarrow sx_3 = x_2$

معادله سوم $\dot{x}_3(t) = x_2$

④ $x_4 = \frac{1}{s+2} x_2 \longrightarrow sx_4 + 2x_4 = x_2$

معادله چهارم $\dot{x}_4 = x_2 - 2x_4$

معادله خروجی $\longrightarrow y = x_2$

$$\dot{x}_1 = r - x_1 - x_3 + x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$\dot{x}_4 = x_2 - 2x_4$$

$$y = x_2$$

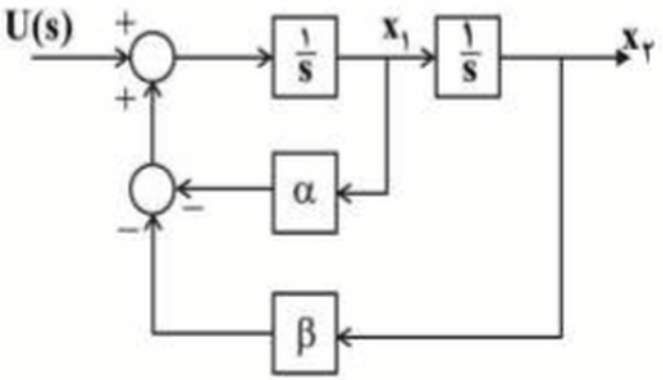
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{4\times4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1} r$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times4} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{1\times1} r$$

مکاتیک ۹۷

۱۰۷- اگر نمودار سیگنال در شکل زیر، به صورت $\dot{X} = AX + BU$ نوشته شود و $X = [x_1\ x_2]^T$ باشد، ماتریس A کدام است؟

فضا حالت



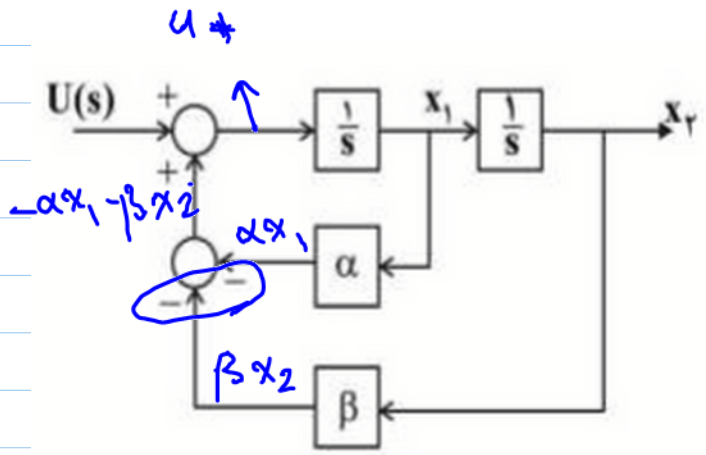
۱) $\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$

حل حل دانشجو



① $x_2 = \frac{1}{s} \times x_1$

② $x_1 = \frac{1}{s} \times (u - \alpha x_1 - \beta x_2)$

① $s x_2 = x_1 \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = x_1}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u$$

② $s x_1 = u - \alpha x_1 - \beta x_2$

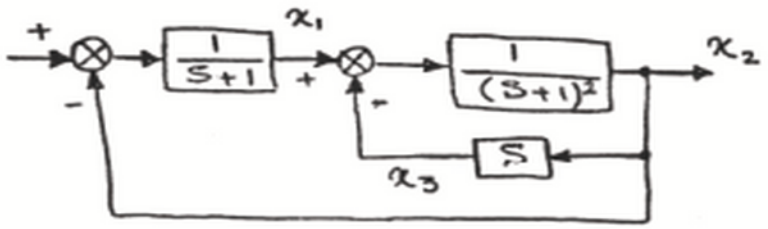
$\rightarrow \dot{x}_1 = u - \alpha x_1 - \beta x_2$

برق ۸۲

۵۹- معادلات حالت سیستم مقابل کدام است؟

معادله حالت $\dot{X} = AX + BU$

خروجی $y = CX + DU$



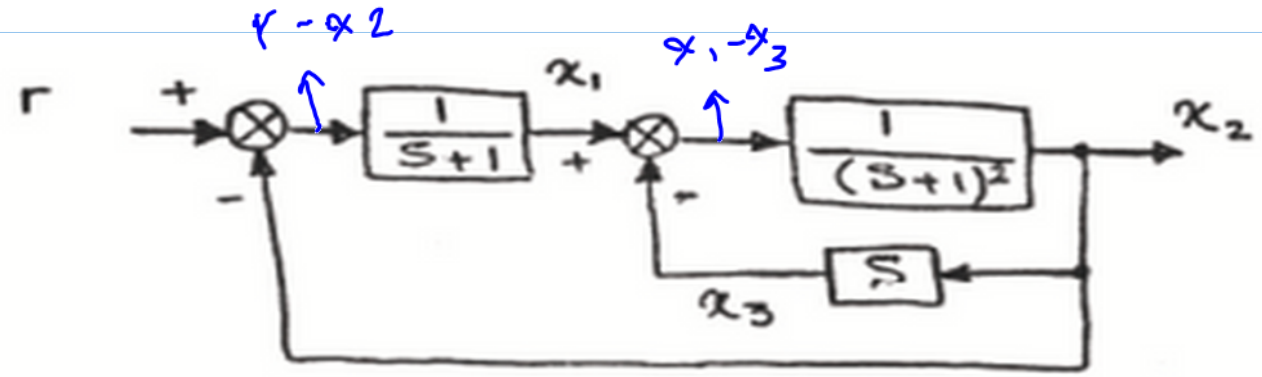
۱) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

۲) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

۳) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

۴) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$

حل دانشجو



① $x_3 = s x_2 \rightarrow \dot{x}_2 = x_3 \rightarrow$ حذف 2 و 3

② $x_1 = \frac{1}{s+1}(r - x_2)$

$s x_1 + x_1 = r - x_2 \rightarrow \dot{x}_1 + x_1 = r - x_2$

سطر اول $\rightarrow \dot{x}_1 = r - x_1 - x_2$

سطر آخر $\dot{x}_3$ ؟

③ $x_2 = \frac{1}{(s+1)^2}(x_1 - x_3)$

$$(s^2+2s+1)x_2 = x_1 - x_3$$

$$s^2 x_2 + 2s x_2 + x_2 = x_1 - x_3$$

$$\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_3$$

حذف $\dot{x}_3$ بر حسب x_1, x_2, x_3 (مرحله ۲).

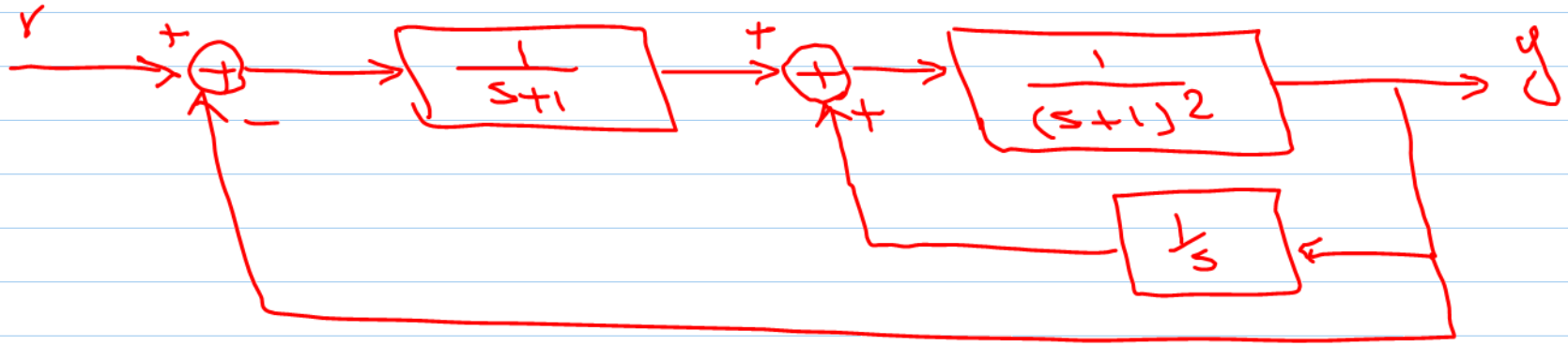
$\dot{x}_2 = x_3$ معادله اول $\quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_3$

$$\dot{x}_3 + 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1 - x_3$$

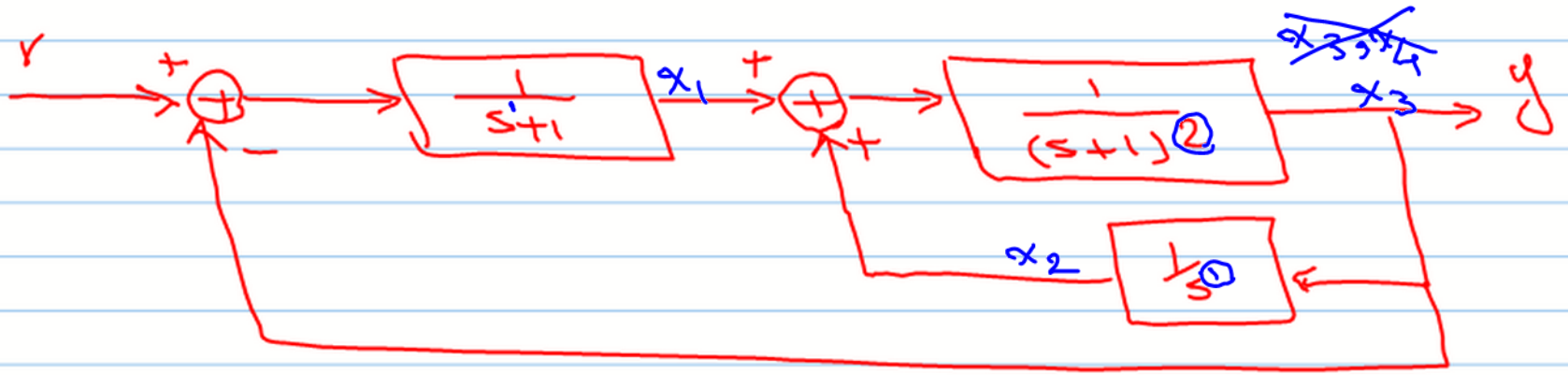
$$\dot{x}_3 + 2x_3 + x_2 = x_1 - x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - 3x_3$$ (مرحله ۳)

مثال، معادلات فضای حالت بلوک دیاگرام زیر را بنویسید.

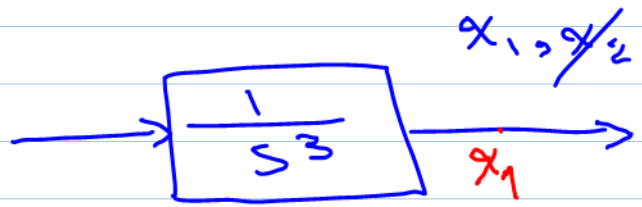


حل دانشجو

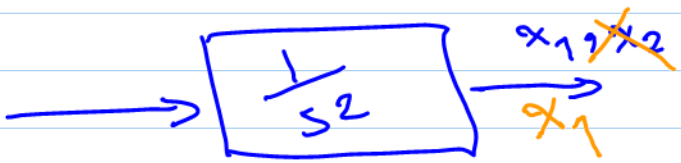


نکته. اگر در مرحله‌ی بعدی بیش از یک متغیر حالت داشتیم باید یکی را به عنوان مرحله‌ی بعدی در نظر بگیریم و دومی را به عنوان مشتق مرحله‌ی بعدی در نظر بگیریم.

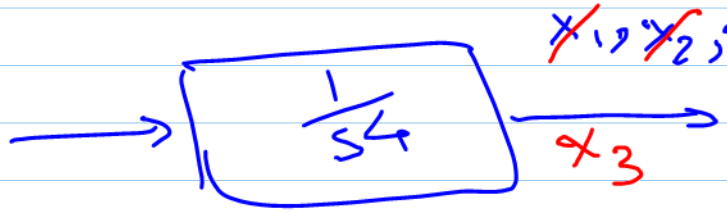
$\dot{x}_3 = x_4$



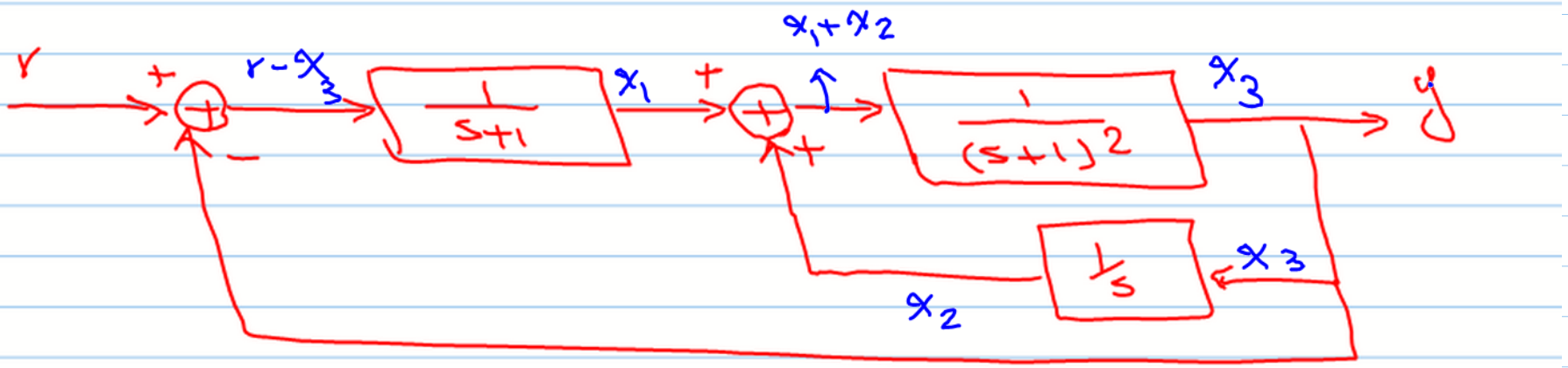
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{x}_1 = x_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_3 \\ x_2 = \ddot{x}_3 \\ x_4 = \dddot{x}_3 \end{cases}$$



$$\boxed{\dot{x}_4 = \dot{x}_3} \qquad \dot{x}_4 = ?$$

① $x_2 = \frac{1}{s} x_3 \longrightarrow sx_2 = x_3 \longrightarrow \boxed{\dot{x}_2 = x_3}$

② $x_1 = \frac{1}{s+1}(r - x_3) \longrightarrow sx_1 + x_1 = r - x_3$

$$\boxed{\dot{x}_1 = r - x_1 - x_3}$$

③ $x_3 = \frac{1}{(s+1)^2}(x_1 + x_2)$

$$(s^2+2s+1)X_3 = X_1 + X_2$$

$\dot{x}_4 = ?$

$$\ddot{x}_3 + 2\dot{x}_3 + x_3 = x_1 + x_2$$

رابطه اول $\longrightarrow$ $x_4 = \dot{x}_3 \longrightarrow \dot{x}_4 = \ddot{x}_3$

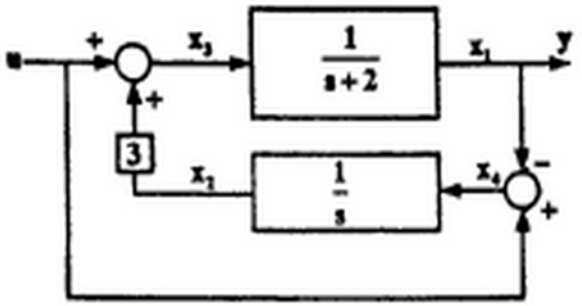
$$\dot{x}_4 + 2x_4 + x_3 = x_1 + x_2 \longrightarrow$$

$$\boxed{\dot{x}_4 = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r - x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$y = x_3$

۶- معادلات حالت و معادله خروجی سیستم کنترل شکل مقابل کدام است؟

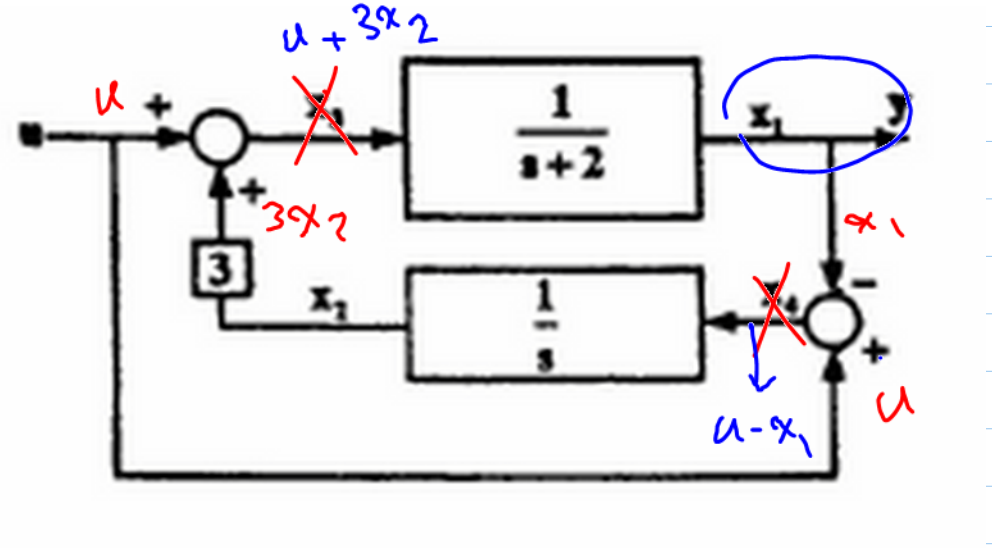


۱) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

۲) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

۳) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

۴) $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



مدل ← ~~تابع~~ تبدیلات

$$\dot{x} = \underset{4\times4}{A}\,x + \underset{4\times1}{B}\,u$$

$$y = \underset{1\times4}{C}\,x + \underset{1\times1}{D}\,u$$

$$\begin{cases} x_4 = u - x_1 \\ x_3 = 3x_2 + u \end{cases}$$

ورودی معلوم

x_4 از x_1، x_2 و ورودی مستقل می‌شود.

$$x_2 = \frac{1}{s}(u - x_1) \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = u - x_1}$$

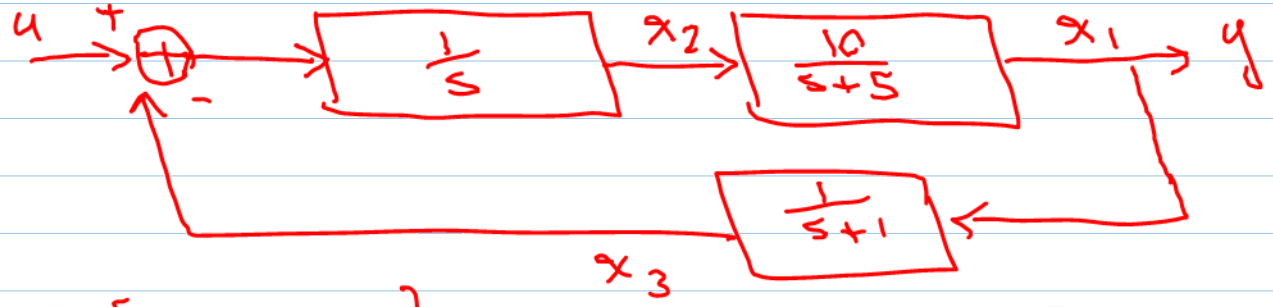
$$x_1 = \frac{1}{s+2}(u + 3x_2) \qquad \dot{x}_1 = u - 2x_1 + 3x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

گزینه ④

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \qquad y = x_1$$

مکانیک ۸۵. سیستم زیر، اگر x_1، x_2 و x_3 به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شوند، ماتریس حالت کدام است؟



(1 $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

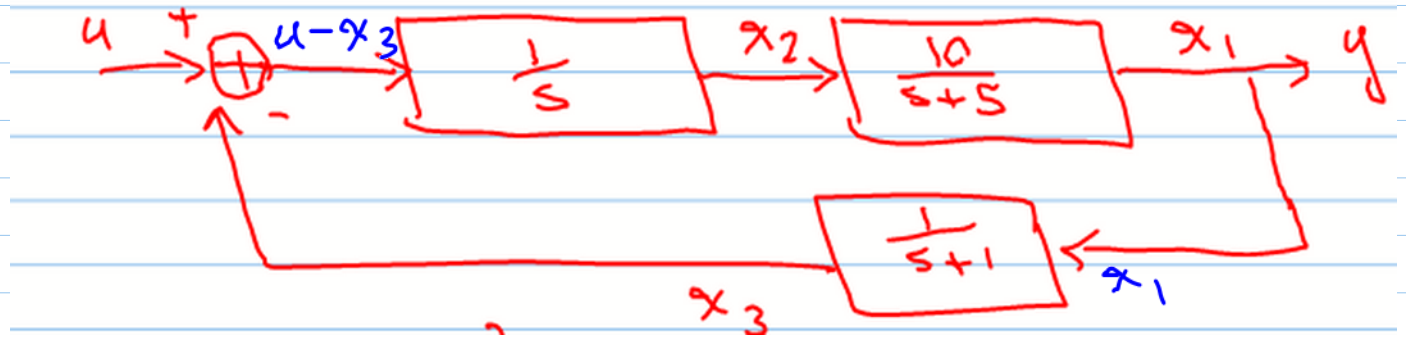
(2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3 $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4

حل دانشجو



① $x_1 = \frac{10}{s+5} x_2 \rightarrow sx_1 + 5x_1 = 10x_2$

$$\boxed{\dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2} \quad ①$$

② $x_2 = \frac{1}{s}(u - x_3) \rightarrow sx_2 = u - x_3$

$$\boxed{\dot{x}_2 = -x_3 + u}$$

③ $x_3 = \frac{1}{s+1} x_1 \rightarrow sx_3 + x_3 = x_1$

$$\boxed{\dot{x}_3 = x_1 - x_3}$$

④ $y = x_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

ماتریس حالت = A

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u \end{cases}$$