جلسه ۱۲ کنترل خطی

فضای حالت ← معادله دیفرانسیل
← بلوک دیاگرام
← تابع تبدیل *

① اگر مورد شرایط حالت صحبت نکرده باشد:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

فرم کانونیکال استاندارد.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

استخراج فضای حالت از روی تابع تبدیل به فرم زیر:

$$G(s) = \frac{b}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

گام اول: تابع تبدیل را به فرم زیر بنویسید:

$$G(s) = \frac{b}{1s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

$$G(s) = \frac{2}{3s^2 + 2s + 1} = \frac{2/3}{s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}} = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$b = 2/3 \qquad a_1 = 2/3 \qquad a_2 = 1/3$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1\ b}{s^2 + \underset{a_1}{5}s + \underset{a_2}{6}}$$

$$G(s) = \frac{10}{2s^3 + 2s + 3} = \frac{5}{s^3 + s + 3} = \frac{5\ b}{s^3 + \underset{a_1}{0}\times s^2 + \underset{a_2}{1}s + \underset{a_3}{3}}$$

گام دوم:

$$G(s) = \frac{b}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}_{n\times 1} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n}}\, x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}\, u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{2s^3 + 4s^2 + 0\times s + 2}$$

معنای حالت؟

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{5}{2}\,b}{s^3 + 2s^2 + 0\times s + 1}$$

($n=3$; $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

فضای حالت سیستم با تابع تبدیل $G(s)$

و انتخاب متغیرهای حالت استاندارد کدام است؟

$$G(s) = \frac{2b}{1s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

حالت دوم: تابع تبدیل در صورت که داشته باشد:

$$G(s) = \frac{s+2}{1s^3 + 3s + 4}$$

گام اول: استاندارد سازی ← یعنی ضریب بزرگترین توان s در مخرج را یک می‌کنیم.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{4s^3 + 3s + 1} = \frac{\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}}{s^3 + 0s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}}$$

تابع تبدیل را به فرم زیر بازنویسی کنید:

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}}{s^3 + 0s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}} = \frac{0\times s^3 + \frac{1}{4}s^2 + 0\times s + \frac{1}{2}}{s^3 + 0\times s^2 + \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}}$$

(b_0, b_1, b_2, b_3; n; a_1, a_2, a_3)

قدم دوم: محاسبه β ها:

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 & \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 & \beta_1 = \frac{1}{4} - 0\times 0 = \frac{1}{4} \\ \beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 & \beta_2 = 0 - 0\times\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\times 0 = 0 \\ \vdots & \\ \beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \cdots - a_n\beta_0 & \beta_3 = \frac{1}{2} - 0\times 0 - \frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = -3/16 \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\times 0$

گام سوم : انتخاب متغیرهای حالت :

$$
\begin{cases}
x_1 = y - \beta_0 u \\
x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\
x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\
\vdots \\
x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-1} u
\end{cases}
$$

$$
\beta_0 = 0 \qquad \beta_1 = \tfrac{1}{4} \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = -\tfrac{3}{16}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = y - 0 \times u = y \\
x_2 = \dot{y} - 0 \times \dot{u} - \tfrac{1}{4} u = \dot{y} - \tfrac{1}{4} u \\
x_3 = \ddot{y} - 0 \times \ddot{u} - \tfrac{1}{4} \dot{u} - 0\, u = \ddot{y} - \tfrac{1}{4} \dot{u}
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

مثال: معادلات فضای حالت استاندارد تابع تبدیل زیر را بیابید.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^3+3s+1}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{s+1}{s^3+3s+1} \rightarrow s^3 Y + 3sY + Y = sU + U$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$$

$$y \rightarrow \begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases} \qquad u \rightarrow X$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -3x_2 - x_1 + u + \dfrac{du}{dt} \end{cases}$$

u ، x_3 ، x_2 ، x_1 ...

$$\underbrace{\frac{d^3y}{dt^3}}_{\dot{x}_3} + 3\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{x_2} + \underbrace{y}_{x_1} = \frac{du}{dt} + u \qquad \dot{x}_3 + 3x_2 + x_1 = \frac{du}{dt} + u$$

$$G(s) = \frac{s+1}{1s^3 + 3s + 1}$$

$$G(s) = \frac{\overset{b_0}{0}s^3 + \overset{b_1}{0}s^2 + \overset{b_2}{1}s + \overset{b_3}{1}}{1s^3 + \underset{a_1}{0}s^2 + \underset{a_2}{3}s + \underset{a_3}{1}}$$

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 0 - 0 \times 0 = 0 \\ \beta_2 = 1 - 0 \times 0 - 3 \times 0 = 1 \\ \beta_3 = 1 - 0 \times 1 - 3 \times 0 - 1 \times 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y - 0 \times u = y \\ x_2 = \dot{y} - 0\dot{u} - 0u = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} - 0\ddot{u} - 0\dot{u} - 1u = \ddot{y} - u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} - u \end{cases}$$

$$\ddot{y} = x_3 + u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

β_1 β_2 β_3

بصورت تشریحی:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} - \dot{u} = -x_1 - 3x_2 + u \end{cases}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{x_2} + \underbrace{y}_{x_1} = \dot{u} + u$$

$$\dddot{y} = \dot{x}_3 + \dot{u}$$

$$\dot{x}_3 + \dot{u} + 3x_2 + x_1 = \dot{u} + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 + u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

(2) فرم متغیرهای حالت در صورت سوال تقریب زده باشد.

(الف) متغیرهای حالت $y = x_1$ و $\dot{x}_1 = \dots$ و $\dot{x}_2 = \dots$ ← از روی انتقال به صورت زیر

(ب) تجزیه به کسر های جزئی مخرج ← طبیعه تابع

$$\frac{y}{u} = G(s) = \frac{\text{صورت کسر}}{(s+a)(s+b)\dots(s+f)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s+a} + \frac{b_1}{s+b} + \cdots + \frac{b_m}{s+f}$$

$$Y(s) = b_0 \underbrace{\frac{U(s)}{s+a}}_{x_1} + b_1 \underbrace{\frac{U(s)}{s+b}}_{x_2} + \cdots + b_m \underbrace{\frac{U}{s+f}}_{x_n}$$

$$x_1 = \frac{U}{s+a} \rightarrow sx_1 + ax_1 = U \rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = -ax_1 + U}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{U}{s+f} \rightarrow sx_n + fx_n = U \rightarrow \boxed{\dot{x}_n = -fx_n + U}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+24}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

فضای حالت با جزئیات کسرهای جزئی ساده

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+24}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_0}{s+1} + \frac{b_1}{s+2} + \frac{b_2}{s+3}$$

$$b_0 = \lim_{s \to -1} \frac{Y(s)}{U(s)} \times (s+1) \qquad b_2 = \lim_{s \to -3} \frac{Y}{U} \times (s+3)$$

$$b_1 = \lim_{s \to -2} \frac{Y}{U} \times (s+2)$$

$$b_0 = \lim_{s \to -1} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} \times (s+1) = \frac{-1+4}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{3}{1 \times 2} = 3/2$$

$$b_1 = \lim_{s \to -2} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+2) = \frac{2}{-1 \times 1} = -2$$

$$b_2 = \lim_{s \to -3} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+3) = \frac{1}{-2 \times -1} = 1/2$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3/2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{s+1} = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{u}{s+1}}_{x_1} - 2\underbrace{\frac{u}{s+2}}_{x_2} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{u}{s+3}}_{x_3}$$

$$x_1 = \frac{u}{s+1} \rightarrow sx_1 + x_1 = u \rightarrow \dot{x}_1 + x_1 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_1 = -x_1 + u} \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{u}{s+2} \rightarrow sx_2 + 2x_2 = u \rightarrow \dot{x}_2 + 2x_2 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 = -2x_2 + u} \quad (2)$$

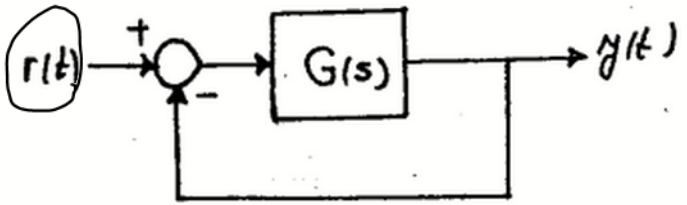
$$x_3 = \frac{u}{s+3} \rightarrow sx_3 + 3x_3 = u \rightarrow \dot{x}_3 + 3x_3 = u \rightarrow \boxed{\dot{x}_3 = -3x_3 + u} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + u \\ y = \frac{3}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

ا تجزیه تابع تبدیل $G(s)$ به کسرهای ساده، یک مدل فضای حالت برای سیستم کنترل زیر عبارتست از :

$$G(s) = \frac{۶s^۲ + ۲۲s + ۱۸}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$$



$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

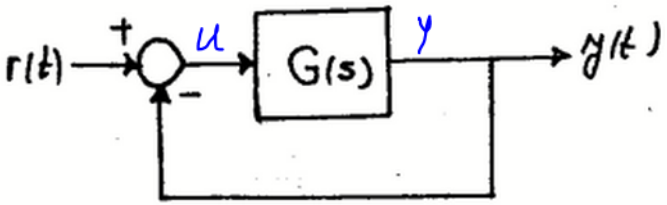
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۲ & -۲ & -۳ \\ -۱ & -۴ & -۳ \\ -۱ & -۲ & -۶ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -۲ & -۲ & -۳ \\ -۱ & -۴ & -۳ \\ -۱ & -۲ & -۶ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۵ \\ ۴ \\ ۱ \end{pmatrix} r \quad \text{و} \quad y = (۱\ ۲\ ۳)x$$

گروه آموزشی مهندس فضلی
تدریس خصوصی دروس دانشگاهی
کنکور ارشد- کنکور کاردانی به کارشناسی
۰۹۱۲-۳۵۷۱۲۰۴
www.pasokh.org

$$G(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_0}{s+1} + \frac{b_1}{s+2} + \frac{b_2}{s+3}$$

$$b_0 = \lim_{s \to -1} \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$b_1 = \lim_{s \to -2} \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+2) = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$b_2 = \lim_{s \to -3} \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)} (s+3) = \frac{+6}{-2 \times -1} = 3$$

$$Y(s) = 1 \underbrace{\frac{U}{s+1}}_{x_1} + 2 \underbrace{\frac{U}{s+2}}_{x_2} + 3 \underbrace{\frac{U}{s+3}}_{x_3}$$

$$x_1 = \frac{U}{s+1} \rightarrow sx_1 + x_1 = U \rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + U$$

$$x_2 = \frac{U}{s+2} \rightarrow \dot{x}_2 = -2x_2 + U$$

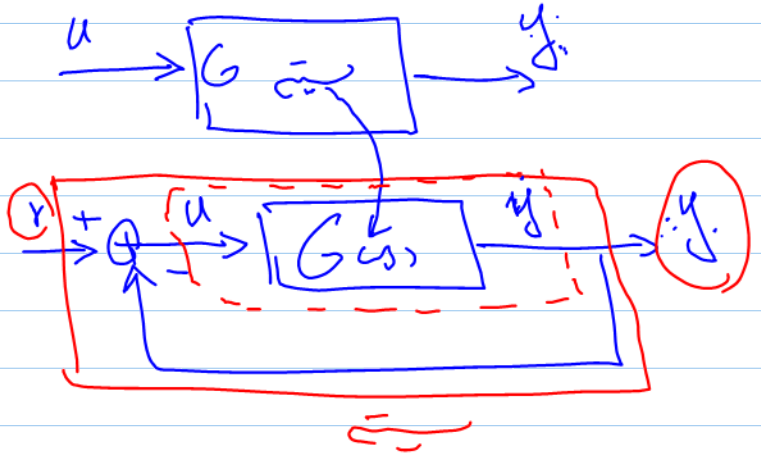
$$x_3 = \frac{U}{s+3} \rightarrow \dot{x}_3 = -3x_3 + U$$

$$y = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

حلقه باز

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X + 0 \times u$$



$$\boxed{u = r - y}$$

$$u = r - (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + r - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + r \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + r - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + r \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + r - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -x_1 - 2x_2 - 6x_3 + r \\ y = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

فضای حالت حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} r \end{cases}$$

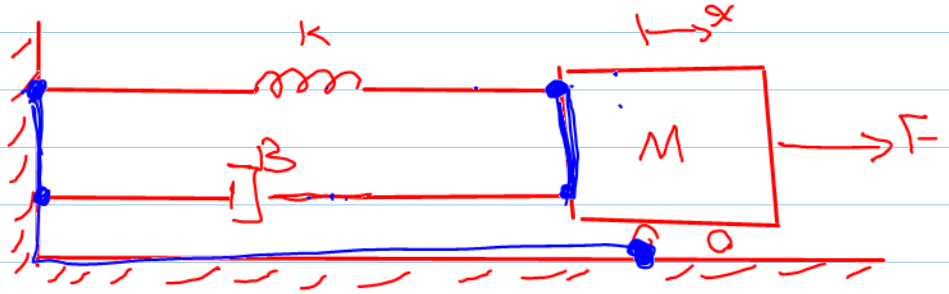
جواب

تبدیل عناصر مکانیکی به الکتریکی

معادل الکتریکی سیستم مکانیکی؟

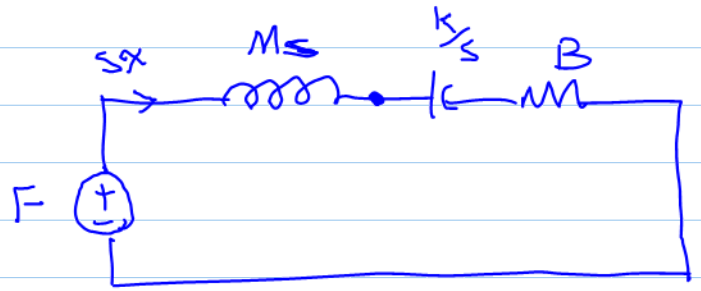


الکتریکی	مکانیکی
جرم یا اینرسی L یا M_2	جرم M یا اینرسی J
خازن $\frac{K}{S}$	فنر K
مقاومت B	دمپر B
منبع ولتاژ با فرمان V_2 یا I_2	نیروی F یا گشتاور T
جریان I_x	سرعت $\dot{x}$
موازی	انتقال سری
سری	موازی

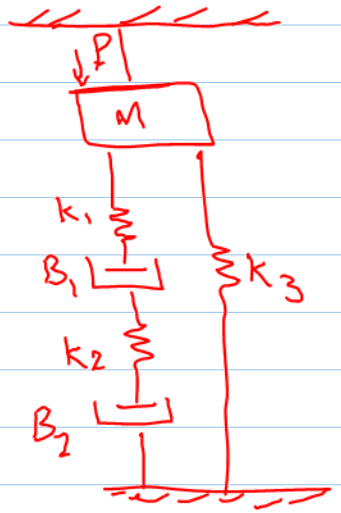


جرم و فنر ← سوالی

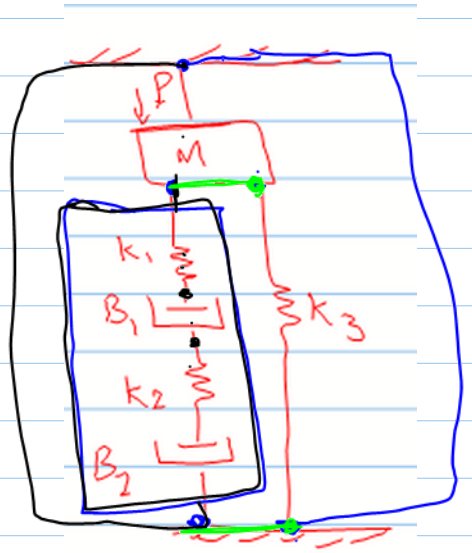
سیستم { سیستم دینامیکی / سوالی
سیستم دینامیکی

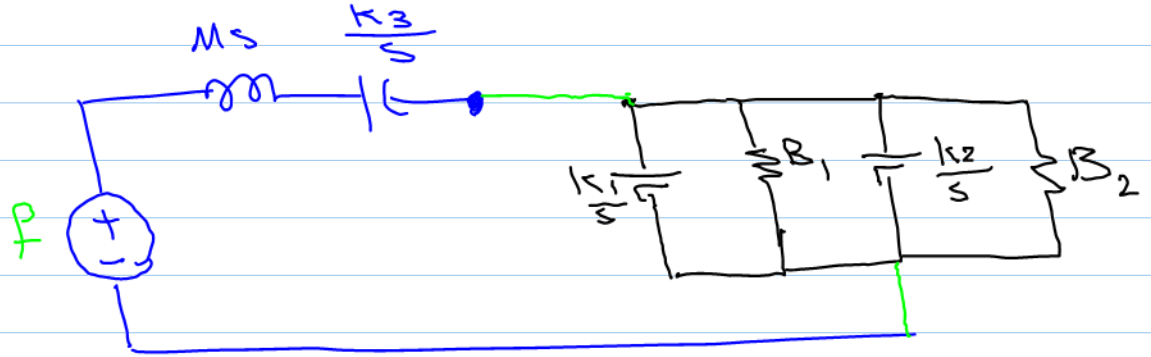


مکانیک ۳۳ . معادل الکتریکی سیستم زیر را بیابید .



حل دانشجو





آغاز فصل اول کنترل خطا

شتاب‌های فصل اول

اولین جلسه آنلاین ← هفته ← شتاب‌های ثابت

شتاب‌های درجه‌ی ← نظرات شما

پاسخگویی به اشکالات درسی

بدون محدودیت