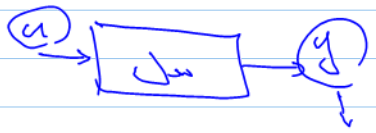
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

تبدیل لاپلاس:

مدلسازی ← معادلات دیفرانسیل در حوزه زمان توصیف کننده سیستم

مثال: $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{dy}{dt} = u(t) + \frac{du(t)}{dt}$



$u(t) = 1 \rightarrow y(t) = ?$ $\quad Y(s)$

حوزه زمان $\xrightarrow{\text{لاپلاس}}$ حوزه s زمانی

↓

روابط ساده و قابل حل می‌شود

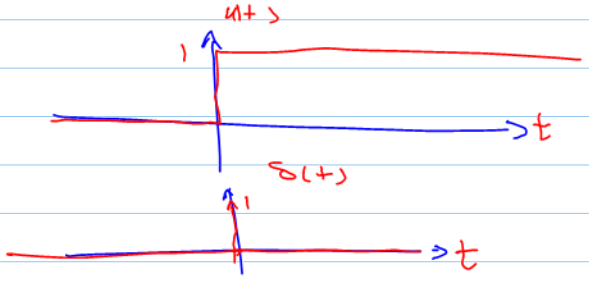
↓

تحلیل انجام شده و خروجی $y(t)$ در حوزه زمان $\xleftarrow{\text{لاپلاس معکوس}}$ خروجی

یادآوری لاپلاس: (L Laplace)

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ $\quad s = j\omega$ $\quad s = \sigma + j\omega$

$* \; X(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt \; *$ $\quad s$: اعداد مختلط



$u(t) \rightarrow \frac{1}{s}$

$\delta(t) \rightarrow 1$

$e^{at}u(t) \rightarrow \frac{1}{s-a}$

$e^{at} \rightarrow \frac{1}{s-a}$ تبدیل لاپلاس پایدار ← فقط در نیمه چپ

$\sin(at) \rightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$\cos(at) \longrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0^+)$ ← مقدار اولیه x در حوزه زمان، $t=0^+$

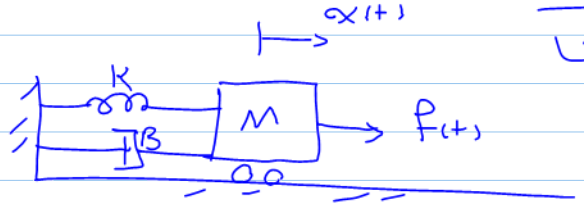
مرتبه مشتق اولیه 0 → $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s)$ ← مرتبه مشتق در حوزه زمان = مرتبه s در حوزه فرکانس

$\mathcal{L}\{x(t-a)\} = e^{-as}X(s)$

$\mathcal{L}\{e^{-at}x(t)\} = X(s+a)$

تابع تبدیل = تبدیل لاپلاس خروجی / تبدیل لاپلاس ورودی



با فرض $y(t) = x(t)$، تابع تبدیل $\frac{Y}{F}$ را بیابید.

$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$ ← معادله دیفرانسیل

$\frac{Y(s)}{F(s)} = ?$ $\quad y(t) = x(t) \rightarrow Y(s) = X(s)$

$\frac{X(s)}{F(s)} = ?$

$\mathcal{L}\left\{M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx(t)\right\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ← f و x در حوزه زمان را بیابید. ↓ وزمان

$\mathcal{L}\left\{M\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{B\frac{dx}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{kx(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$M\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + B\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + K\,\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$M\left(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right) + B\left(sX(s) - x(0^+)\right) + KX(s) = F(s)$$

توضیح:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}$$

h

$$\frac{dx}{dt} = h(t) \rightarrow H(s) = sX(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dh}{dt}\right\} = sH(s) - h(0^+)$$

$$= s\left(sX(s) - x(0^+)\right) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0^+}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^+) - \dot{x}(0^+)$$

معادله دیفرانسیل ← تبدیل لاپلاس

$$Ms^2X(s) - Msx(0^+) - M\dot{x}(0^+) + BsX(s) - Bx(0^+) + KX(s) = F(s)$$

(0) (0)

تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل

نکته: تابع تبدیل با فرض شرایط اولیه صفر بدست می‌آید.

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$X(s)\left(Ms^2 + Bs + K\right) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$ تابع تبدیل

* برای بدست آوردن تابع تبدیل، به جای هر مشتق در حوزه زمان یک مرتبه

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

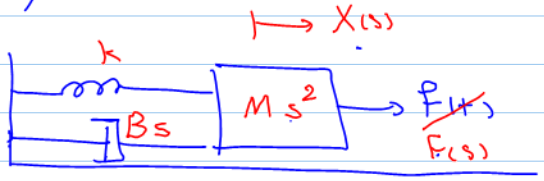
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + kx(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow Ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s) \rightarrow$$

جدول آوردن تابع تبدیل بدون تقریب ساده دینامیکی

در حرکت خطی

مکانیکی	سوزنی
M	Ms^2
B	Bs
k	k

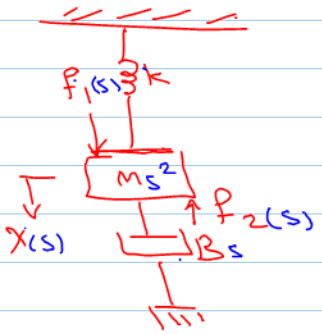


روش ماتریسی ← ① سیستم جرم

[نیروهای فنر - مجموع نیروهای اصطکاک] = [جابجایی جرم] × [مجموع عناصر (اعضا) متصل به جرم]

$$[Ms^2 + Bs + k] \times X(s) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k}$$



$$[Ms^2 + Bs + k] * X(s) = F_1(s) - F_2(s)$$

---

② بیش از یک جرم

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

n : تعداد جرم‌ها

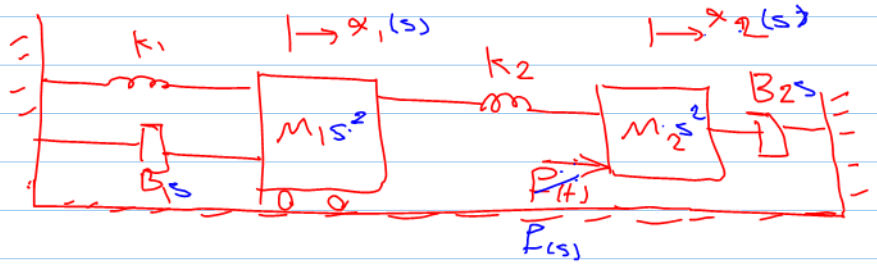
a_{11} = مجموع تمام اعضای ستون اعضای متصل به جرم M_1

$a_{33} = M_3$ اعضای متصل به جرم

a_{22} = مجموع تمام اعضای ستون اعضای متصل به جرم M_2

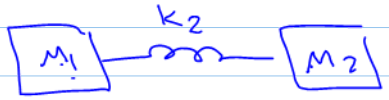
a_{12} = − (مجموع تمام اعضای مشترک بین جرم M_1 و M_2)

a_{13} = − (مجموع تمام اعضای مشترک بین جرم M_1 و M_3)



$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

$a_{11} = M_1 s^2 + k_2 + B_1 s + k_1$



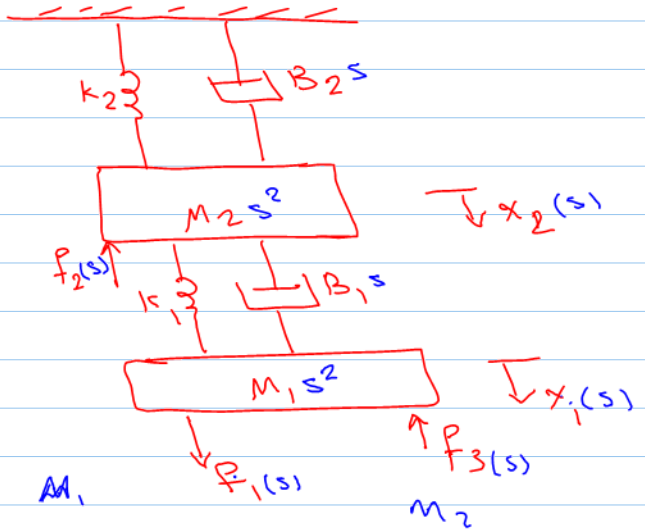
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$a_{22} = M_2 s^2 + B_2 s + k_2 \qquad a_{12} = -(k_2)$

$a_{21} = -(k_2)$

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + B_1 s + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & M_2 s^2 + B_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

معادلات در حوزه لاپلاس



حل تشریحی - تمرین

$$\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} M_1 s^2 + B_1 s + k_1 & -(B_1 s + k_1) \\ -(B_1 s + k_1) & M_2 s^2 + B_1 s + k_1 + B_2 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) - F_3(s) \\ 0 - F_2(s) \end{bmatrix}$$

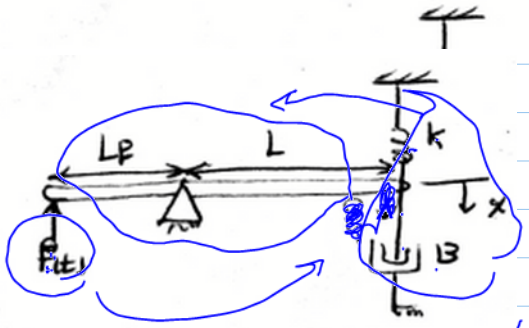
$x \to \theta$, $F \to T$, $M \to J$ ← حرکت دورانی (2)

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

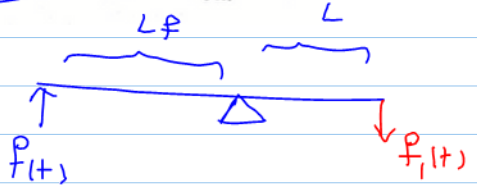
هوافضا ۹۳ س ۴۲۴ - متـــا ـ کدام است؟ جرم اهرم و اصطکاک ناچیز $\frac{X(s)}{F(s)}$ تابع تبدیل

۱۱ $\frac{\frac{Lp}{L}}{k+Bs}$ ✓ ۱۲ $\frac{\frac{L}{Lp}}{Bs+ks}$ ۱۳ $\frac{\frac{Lp}{L}}{Bs+k}$ ۱۴ $\frac{\frac{L}{Lp}}{k+Bs}$

قابل صرف نظر کردن است.

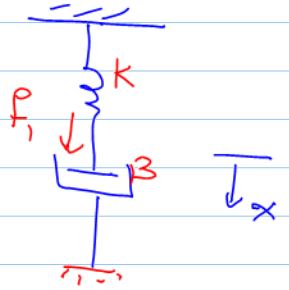


دوش ماتریسی ← پیش نیاز جرم



$f(t)\,Lp = f_1(t)\,L$

$$f_1(t) = f(t)\,\frac{Lp}{L}$$



نیروی دمپر $= B\dot{x}$

فنر $= kx$

$$\text{جرم} \times \ddot{x} = f_1(t) - B\dot{x} - k\dot{x}$$

$$0 \times \ddot{x} = f_1(t) - B\dot{x} - kx$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = ?$$

$$B\dot{x} + kx = f_1(t)$$

$$B\dot{x} + kx = \frac{Lp}{L} f(t)$$

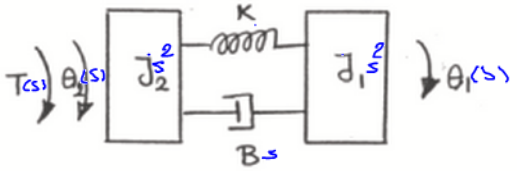
$$BsX(s) + kX(s) = \frac{Lp}{L} F(s)$$

$$(Bs + k)\,X(s) = \frac{Lp}{L} F(s)$$

تابع تبدیل $\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{Lp}{L}}{Bs+k}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

۶۸. در سیستم مکانیکی دورانی شکل مقابل تابع تبدیل $\frac{\theta_1(s)}{T(s)}$ کدام است؟



۱) $\frac{(Bs+k)^2}{(J_1s^2+Bs+k)(J_2s^2+Bs+k)}$

۲) $\frac{(Bs+k)}{(J_1s^2+Bs+k)(J_2s^2+Bs+k)}$

۳) $\frac{(Bs+k)^2}{s^2[(J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$

۴) ✓ $\frac{Bs+k}{s^2[(J_1J_2s^2+(J_1+J_2)Bs+k(J_1+J_2)]}$

J_1 J_2

$$\begin{bmatrix} J_1s^2+Bs+k & -(Bs+k) \\ -(Bs+k) & J_2s^2+Bs+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T(s) \end{bmatrix}$$

$\frac{\theta_1}{T} = ?$ ← معادلات ماتریسی را ساده کنیم.

ضرب ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_{11}b_1+a_{12}b_2 = c_1 \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2 = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s)+(-(Bs+k)\theta_2(s)) \\ -(Bs+k)\theta_1(s)+(J_2s^2+Bs+k)\theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s)-(Bs+k)\theta_2(s) = 0 \\ -(Bs+k)\theta_1(s)+(J_2s^2+Bs+k)\theta_2(s) = T(s) \end{cases}$$

$\frac{\theta_1}{T} = ?$

عامل مشترکم

رابطه‌ای که فقط شامل θ_1 و T باشد.

θ_2 برحسب θ_1 و T بنویسیم.

$$(J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s) = (Bs+k)\theta_2(s)$$

$Bs+k$ $Bs+k$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\frac{J_1 s^2 + Bs + K}{Bs + K}\,\theta_1(s) = \theta_2(s)$$

$$-(Bs+K)\,\theta_1(s) + (J_2 s^2 + Bs + K)\,\theta_2(s) = T(s)$$

$$-(Bs+K)\,\theta_1(s) + (J_2 s^2 + Bs + K)\,\frac{(J_1 s^2 + Bs + K)}{Bs+K}\,\theta_1(s) = T(s)$$

$$\left[\frac{-(Bs+K)^2 + (J_2 s^2 + Bs + K)(J_1 s^2 + Bs + K)}{Bs + K}\right]\theta_1(s) = T(s)$$

$$\frac{-(Bs+K)^2 + J_2 J_1 s^4 + J_2 s^2 (Bs+K) + (Bs+K) J_1 s^2 + (Bs+K)^2}{Bs + K}\,\theta_1 = T$$

$$\frac{J_2 J_1 s^4 + (Bs+K)(J_1 + J_2)s^2}{Bs+K}\,\theta_1(s) = T(s)$$

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{Bs+K}{s^2\left(J_1 J_2 s^2 + (Bs+K)(J_1 + J_2)\right)}$$

$\frac{\theta_1}{T(s)} = ?$ ← تبديل لابلاس ← معادلات دوجوزيان ← تمرين

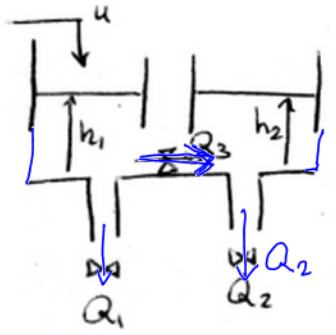
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

مکانیک ۹۳ - فاز ۴

$h_{2(t)}$ ، $h_{1(t)}$ مساوی هم و برابر $A=1$ و مقاومت شیرها مساوی $R=1$ باشد. با فرض

بطری اول

$A=1$ به عنوان ارتفاع سیال در دو مخزن، u دبی ورودی و Q_1 ، Q_2 دبی خروجی و Q_3 دبی بین دو ظرف باشد، با فرض خطی بودن سیستم یعنی $Q_1=\frac{h_1}{R_1}$ ، $Q_2=\frac{h_2}{R_2}$ ، $Q_3=\frac{h_1-h_2}{R_3}$ تابع تبدیل بین u و Q_3 کدام است؟



۱) $\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$ ۲) $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$ ۳) $\frac{1}{(s+1)^2}$ ۴) $\frac{1}{s+3}$

$R_1=1$

~~سطح مقطع~~ × سطح مقطع مخزن = تغییر ارتفاع = مجموع دبی های ورودی − مجموع دبی های خروجی

$$① \quad 1\cdot\frac{dh_1}{dt} = u - (Q_1+Q_3)$$

$$② \quad 1\times dh_2/dt = Q_3 - Q_2$$

$\frac{Q_3}{u}=?$

به دنبال رابطه ای بر حسب ورودی هستیم.

عوامل برنامه: h_1 ، h_2 ، Q_1 ، Q_2

تابع Q_3 بر حسب u بیابید.

$Q_1=h_1$ $\quad Q_2=h_2$ $\quad Q_3=h_1-h_2=Q_1-Q_2$

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} = u - Q_1 - Q_3 \\ \frac{dQ_2}{dt} = Q_3 - Q_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} sQ_1(s) = u(s) - Q_1(s) - Q_3(s) \\ sQ_2(s) = Q_3(s) - Q_2(s) \end{cases}$$

$$sQ_2 + Q_2 = Q_3 \Rightarrow Q_2 = \frac{Q_3}{s+1}$$

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 \longrightarrow Q_3 = Q_1 - \frac{Q_3}{s+1}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\frac{(s+1)Q_3}{s+1} + \frac{Q_3}{s+1} = Q_1 \rightarrow Q_1 = \left(\frac{s+2}{s+1}\right)Q_3$$

$$\frac{sQ_3 + Q_3 + Q_3}{s+1} = Q_1$$

(1) $$sQ_1 = u - Q_1 - Q_3$$

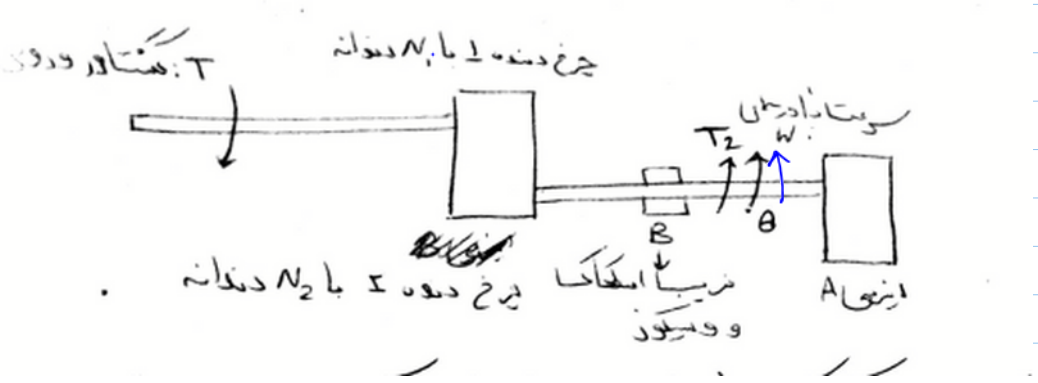
$$(s+1)Q_1 = u - Q_3 \rightarrow \left(\frac{s+2}{s+1}\right)Q_3 = u - Q_3$$

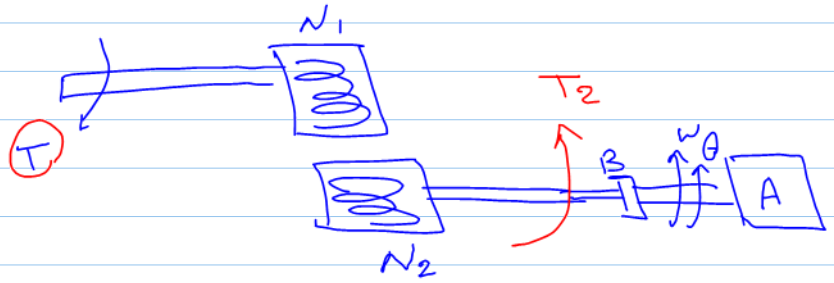
$$(s+2)Q_3 = u - Q_3 \rightarrow (s+3)Q_3 = u$$

$$\frac{Q_3}{U(s)} = \frac{1}{s+3}$$

خواهشا ۹۲- مرتبط ۴۳- تابع تبدیل $\frac{W(s)}{T(s)}$ کدام است؟

۱) $\frac{N_2}{N_1(Bs+A)}$ ۲) $\frac{N_1}{N_2(As+B)}$ ۳) $\frac{N_1}{N_2(Bs+A)}$ ۴) $\frac{N_2}{N_1(Bs+A)}$



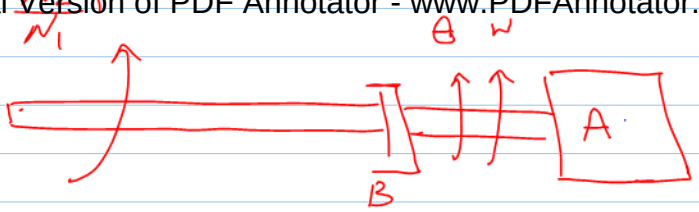


$J = A$

حذف چرخ دنده

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{T}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow \boxed{T_2 = \frac{N_2}{N_1}T}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com



$\frac{w}{T} = ?$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{N_2}{N_1}T - B\frac{d\theta}{dt}$$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} = \frac{N_2}{N_1}T$$

$$As^2\theta(s) + Bs\theta(s) = \frac{N_2}{N_1}T(s)$$

$$(As^2+Bs)\theta(s) = \frac{N_2}{N_1}T(s) \rightarrow \boxed{\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{As^2+Bs}}$$

$\frac{w}{T} = ?$ $\quad w = \frac{d\theta}{dt} \quad W(s) = s\theta(s)$

$$s\frac{\theta(s)}{T(s)} = \not{s} \times \frac{\frac{N_2}{N_1}}{As^{\not 2}+B\not{s}}$$

$$\boxed{\frac{W(s)}{T(s)} = \frac{N_2/N_1}{As+B}}$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

تعريفات

① درجة بسط: بزرگترین توان s در تابع تبدیل ← درجه بسط = 2

② درجه مخرج: اختلاف درجه صورت و مخرج = 1 − 2

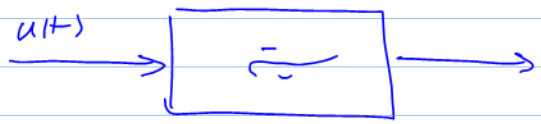
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

صفر ؟ قطب:

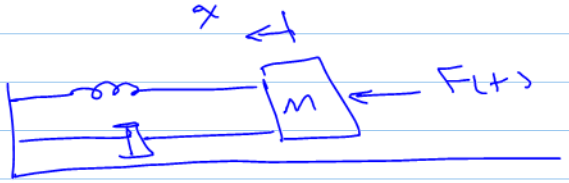
$\frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s+1}$

$s=-2$ صفر سیستمای معمولی تابع تبدیل را صفر میکنه.

← یعنی اگر ورودی با فرکانس 2 به سیستم اعمال شود خروجی صفر است.



$u(t) = \sin(2t + \pi/6)$



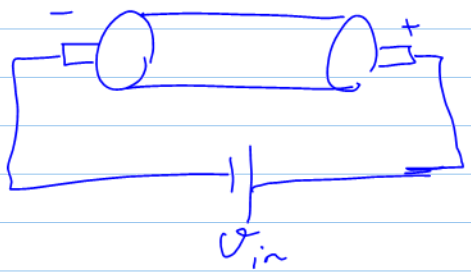
$s=2$ $f(t) = e^{2t}$ → $y(t) = 0 = x(t)$

سیستمای مکانیکی ← $\cos\omega t$ ، $\sin\omega t$ ، e^{at}

$\frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s+1}$ قطب سیستم ریشه‌های مخرج

$s+1 = 0$ $s=-1$ → قطب سیستم

اگر ورودی با فرکانس قطب سیستم به سیستم اعمال شود خروجی به سمت ∞ میرود.



تابع تبدیل $= \frac{W(s)}{V_{in}} = \frac{1}{s+2}$ خروجی

$V_{in} = \sin(-2t + \pi/2)$

* حالت دوم:

معادلات دیفرانسیل → لاپلاس → تابع شرایط اولیه صفر

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

فرض شرایط اولیه صفر

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

معادلات دیفرانسیل ←

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = 1 \times U(s)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

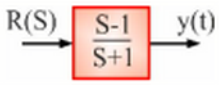
در حوزه زمان

لاپلاس

$$s^2 Y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+) + 2\left(sY(s) - y(0^+)\right) + Y(s) = U(s)$$

تابع تبدیل ← معادلات دیفرانسیل ← لاپلاس با فرض شرایط اولیه صفر

۶۳. در سیستم روبه‌رو، تحت چه شرایطی $y(s) \equiv 0$ می‌شود.



۱) $R(t) = e^{+t}$ و $y(0) = 1$

۲) $R(t) = e^{-t}$ و $y(0) = 0$ ✗

۳) $R(t) = e^{+t}$ و $y(0) = -1$

۴) $R(t) = e^{-t}$ و $y(0) =$ هر عدد ✗

شرایط اولیه

$$R(t) = \begin{cases} e^{1t} \checkmark \rightarrow & \text{فرکانس } +1 \\ e^{-1t} \rightarrow & -1 \sim \end{cases}$$

صفر سیستم $\rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{s+1} \rightarrow s = 1$

فرکانس ورودی $= 1 \rightarrow$ فرکانس صفر $= 0$

تابع تبدیل ← معادلات دیفرانسیل ← لاپلاس

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{s+1} \rightarrow sY(s) + Y(s) = sR(s) - R(s)$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = \frac{dr(t)}{dt} - r(t)$$

$r(t) = e^{t}u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s-1}$

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = sR(s) - r(0) - R(s)$$

$$(s+1)Y(s) = sR(s) - R(s) - r(0) + y(0)$$

صورت سوال $\Rightarrow$ 0

$$0 = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{s-1} - 0 + y(0)$$

$$=$$

ورودی متداریه نداره. چون صورت و مخرج کسر درجه‌شون برابره. شرط علت بودن

$$r(0^+) = r(0^-) = 0$$

$r(t) = e^{t}$

$$0 = \frac{s-1}{s-1} - 0 + y(0) \rightarrow y(0) = -1$$

$Y(0) = 0$ ✓