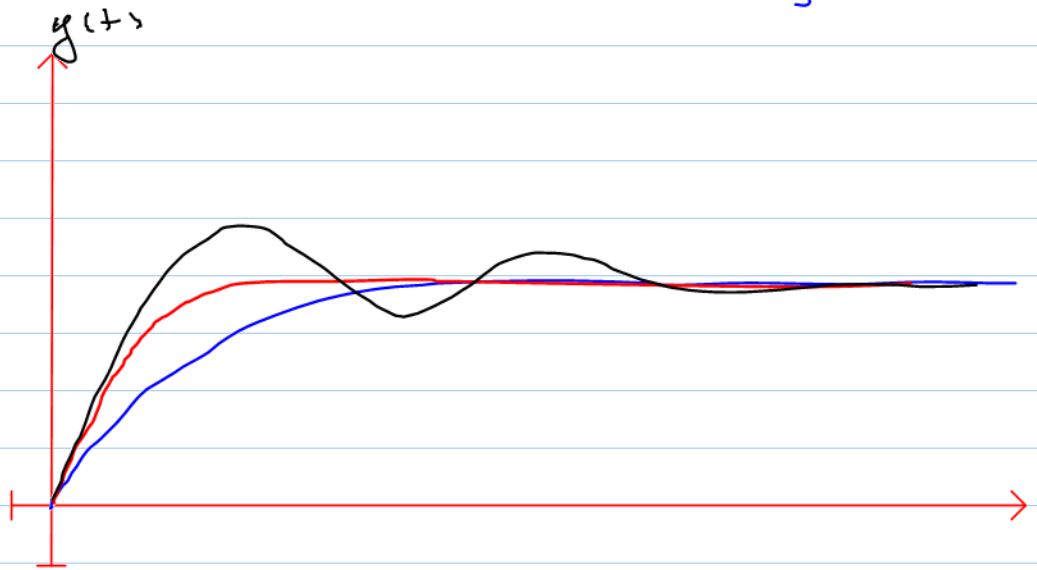
کنترل خطی

تحلیل حالت گذرا



سیستم مرتبه اول: $G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$

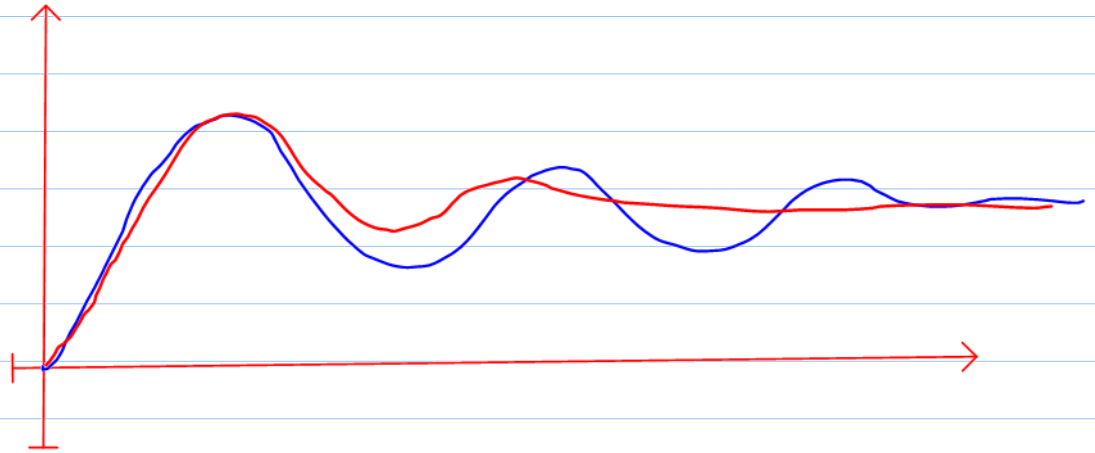
مزیت استاندارد سیستم مرتبه دوم:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + as + b}$$

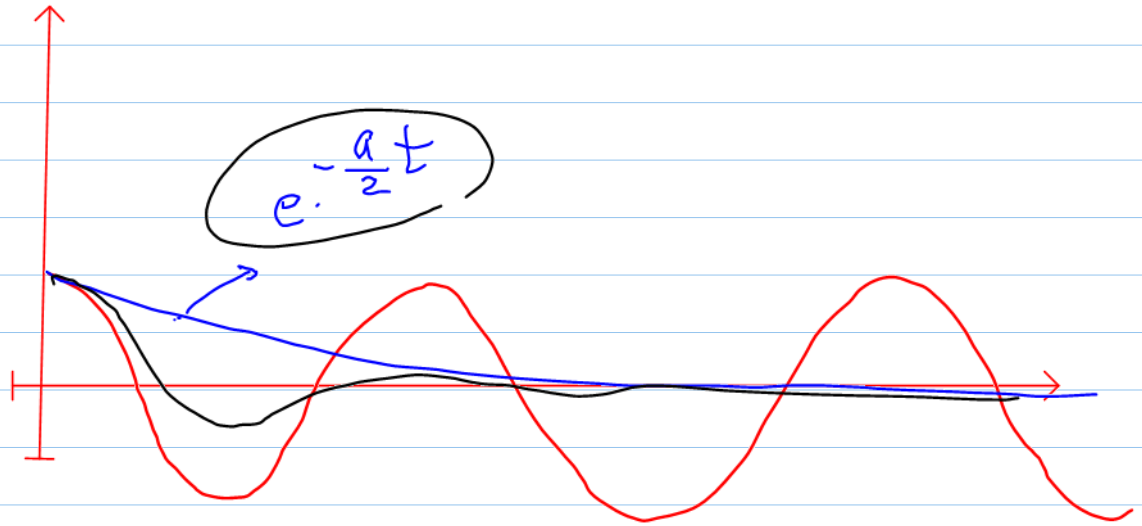
در حالت سوم:

$$y(t) = A + B\, e^{-\frac{a}{2}t} \cos(ct)$$



$\frac{a}{2} = 10$

$\frac{a}{2} = 100$

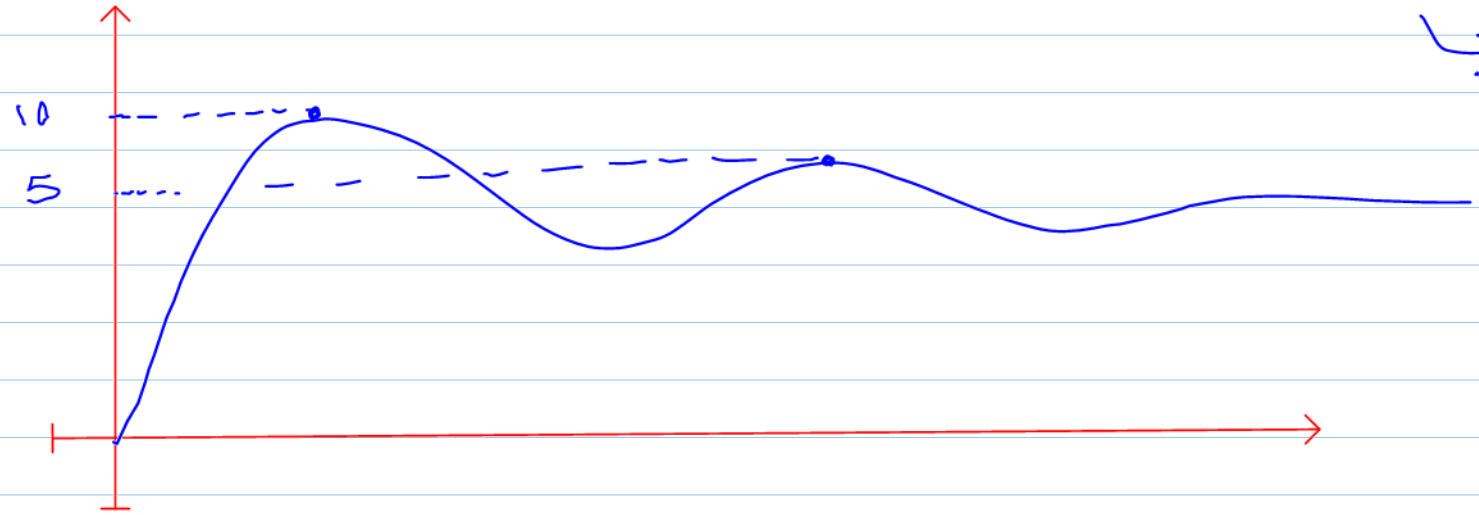


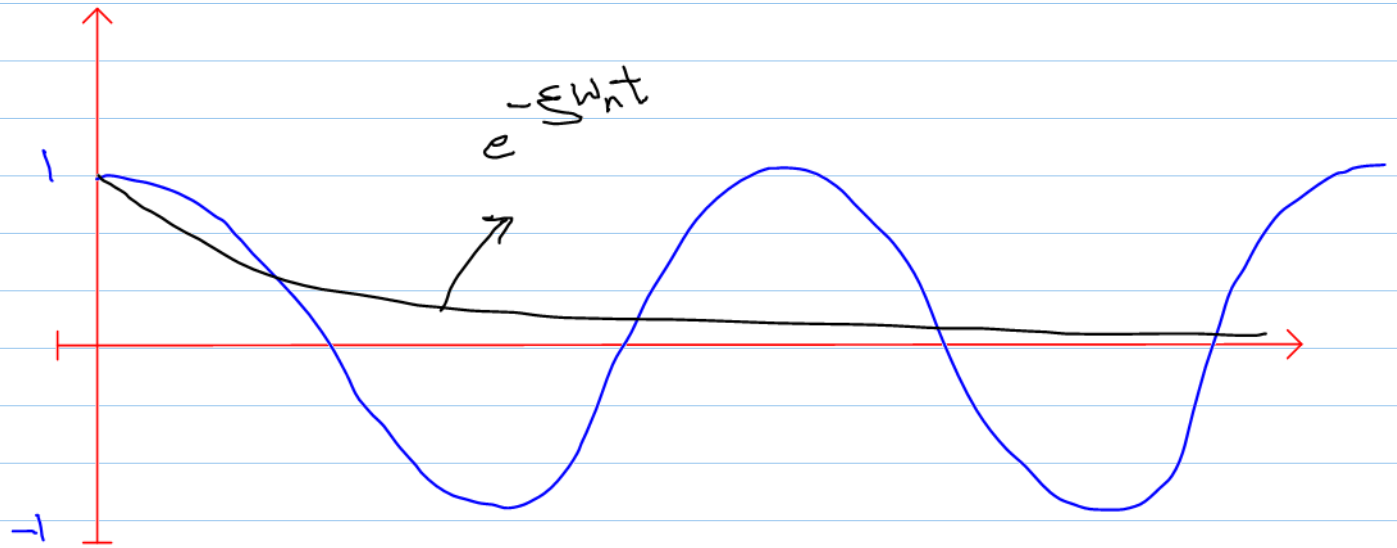
$\frac{a}{2}$ = ضریب اثر مقاومت نرم ضریب میرایی =

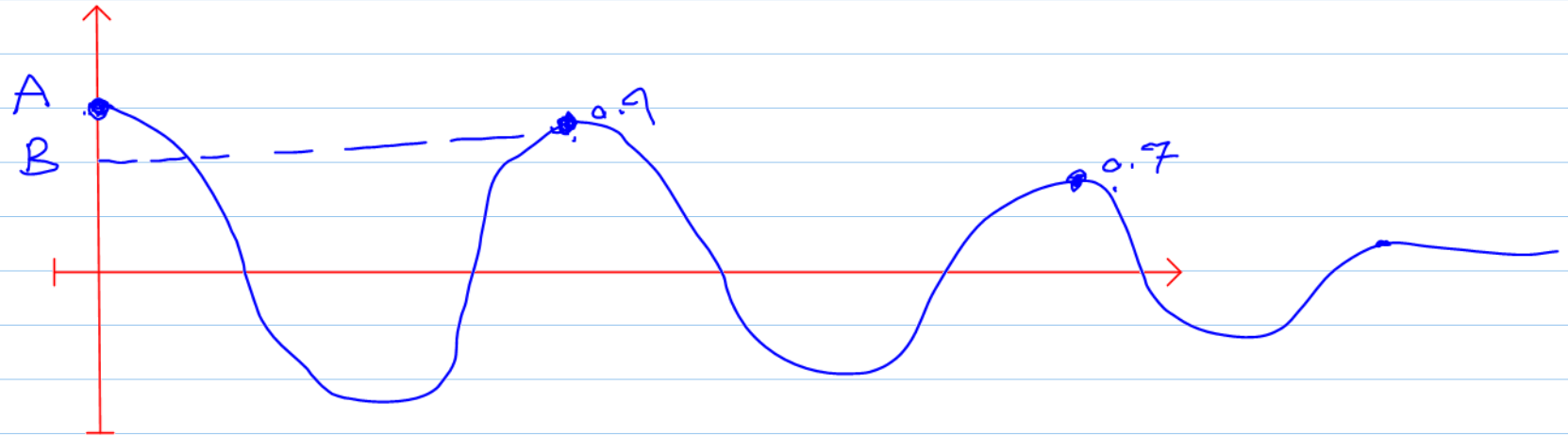
$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

ω_n = فرکانس طبیعی

ξ = نسبت میرایی







$\frac{B}{A}$ = فقط بستگی به ξ دارد.

ω_n : فرکانس طبیعی نامیرا.

توضیح : حالت نوسانی شدن پاسخ (نامیرا)



$$G(s) = \frac{b}{s^2 + a_0 s + b}$$

$a=0 \rightarrow$ حالت نوسانی

$$y(t) = b \cos(\sqrt{b}\, t)$$

در حالت خاص سیستم جرم فنر b نوسان می‌کند.

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

در حالت خاص سیستم جرم فنر $\omega_n = \sqrt{\omega_n^2}$ نوسان می‌کند.

ω_n : فرکانس طبیعی خاص

ω_d = ؟ فرکانس طبیعی میرا

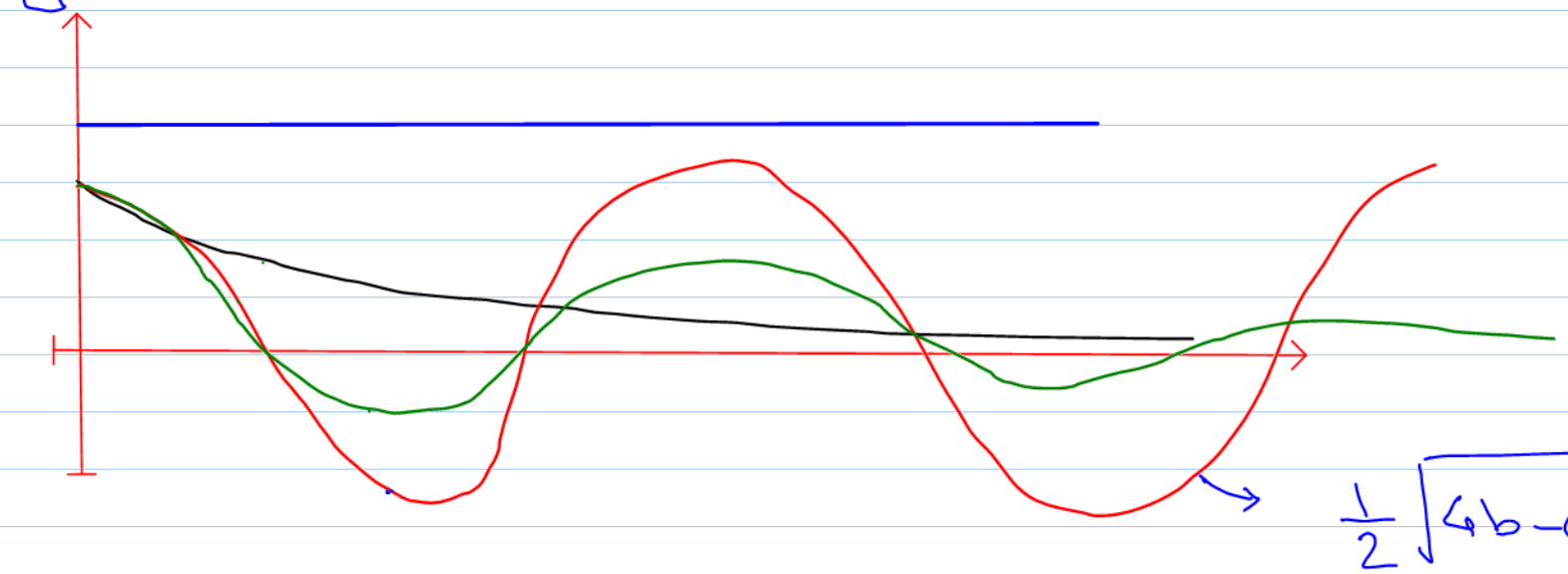
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

در حالت سوم (حالت قبل) داشتیم:

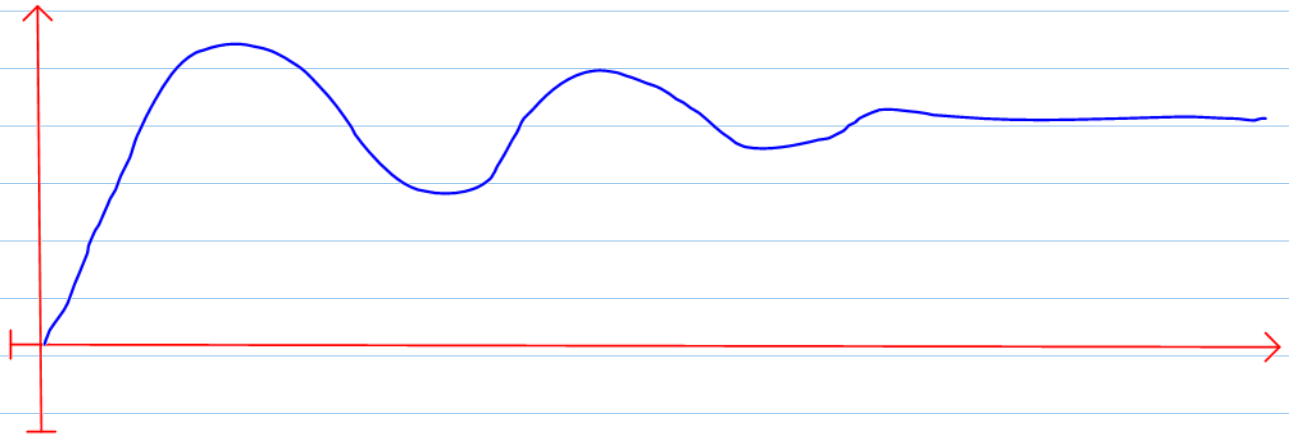
$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \quad ; \quad \Delta < 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$$

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \mp j\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$$

$$y(t) = A + B\, e^{-\frac{a}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\; t\right)$$



$\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$ = فرکانس



فرکانس طبیعی میرا

فرکانس طبیعی میرا = $\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$

$$G(s)=\frac{k}{1s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{b}{1s^2+as+b}$$

فرکانس طبیعی میرا = $\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_n^2-4\xi^2\omega_n^2}=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=\omega_d$

ω_n : اگر سیستم نوسانی شود با فرکانس ω_n نوسان می‌کند.

ω_d : در حالت زیر میرا سیستم با فرکانس ω_d نوسان می‌کند.

ξ : نسبت میرایی

$\xi\omega_n$: ضریب میرایی

ω_n : فرکانس طبیعی نامیرا

ω_d : " " میرا

$$G(s)=\frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

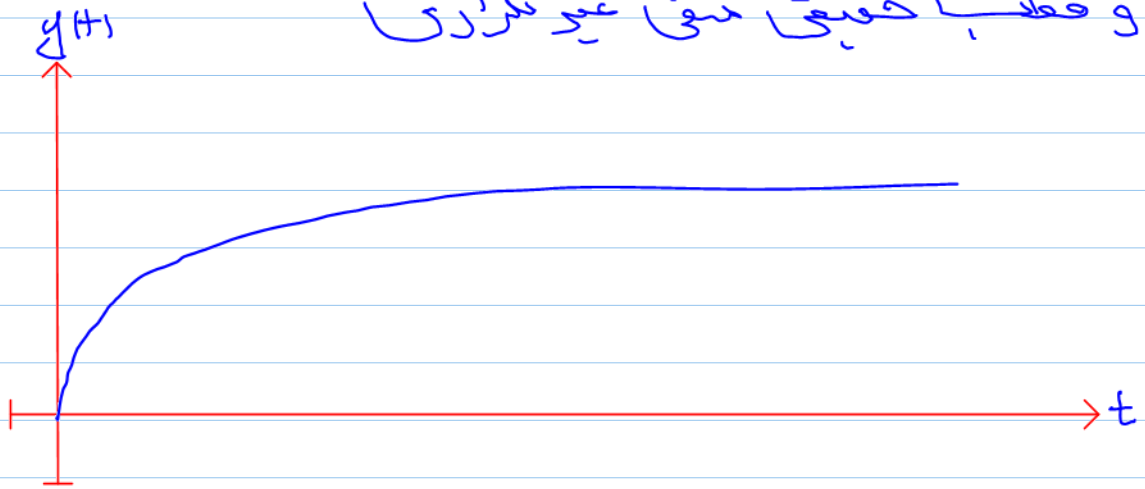
$$G(s) = \frac{2}{1s^2 + 4} = \frac{k}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$2\xi\omega_n = 0$

$$\begin{cases} \omega_n = 2 \\ 2\xi\omega_n = 0 \rightarrow 2\xi \times 2 = 0 \rightarrow \xi = 0 \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\sigma^2} = 2 \end{cases}$$

تحلیل حالت گذرای سیستم مرتبه دوم استاندارد

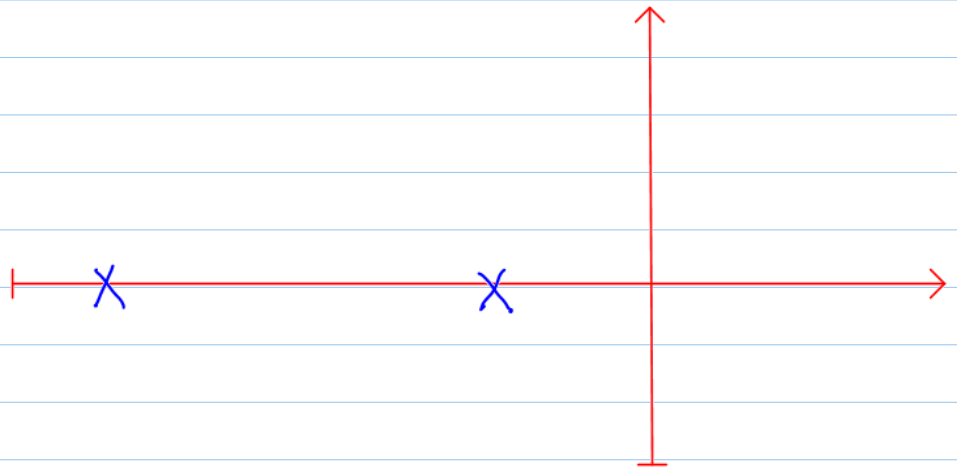
① $\xi > 1$ ← خروجی سیستم ← دو قطب حقیقی منفی غیر تکراری



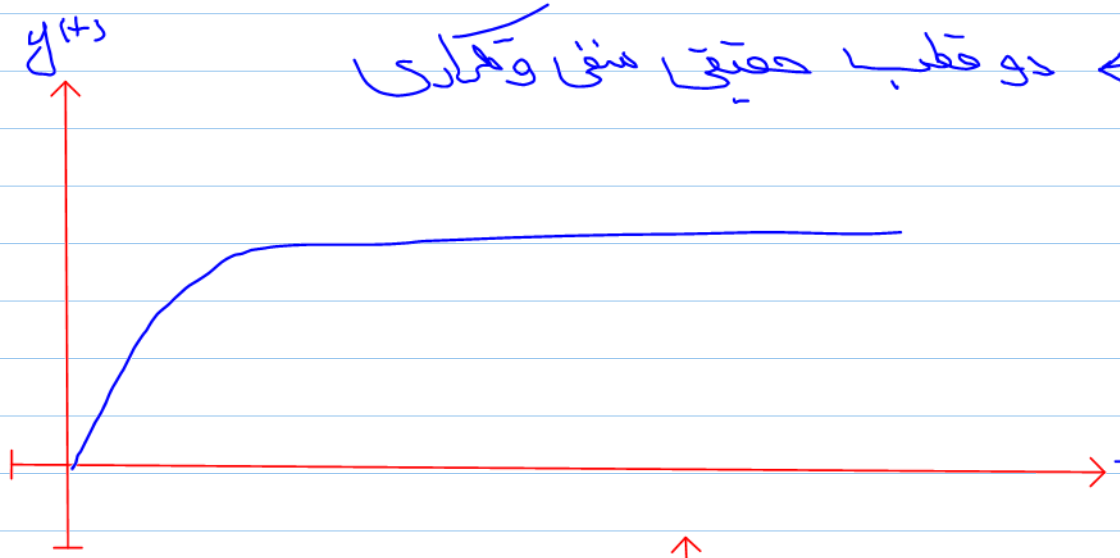
ماسخ بسیار کند

~ آرام و بدون نوسان

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$



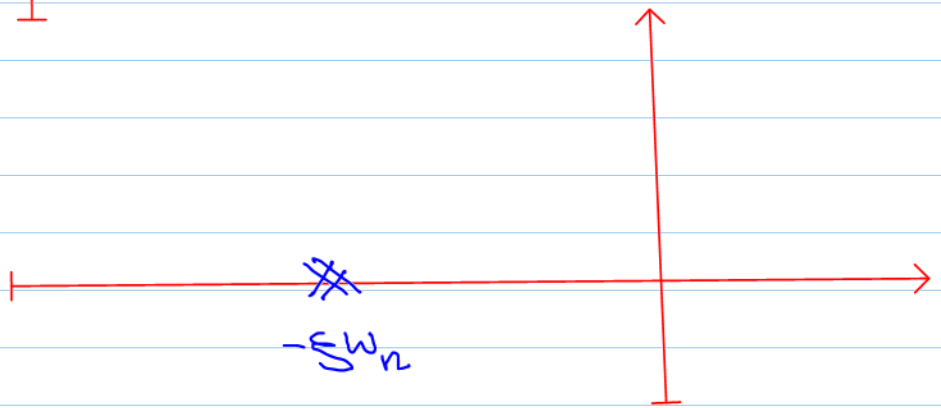
(2) $\xi = 1$ ← میرایی بحرانی ← دو قطب حقیقی منفی و تکراری



سریعترین پاسخ بدون بالازدگی

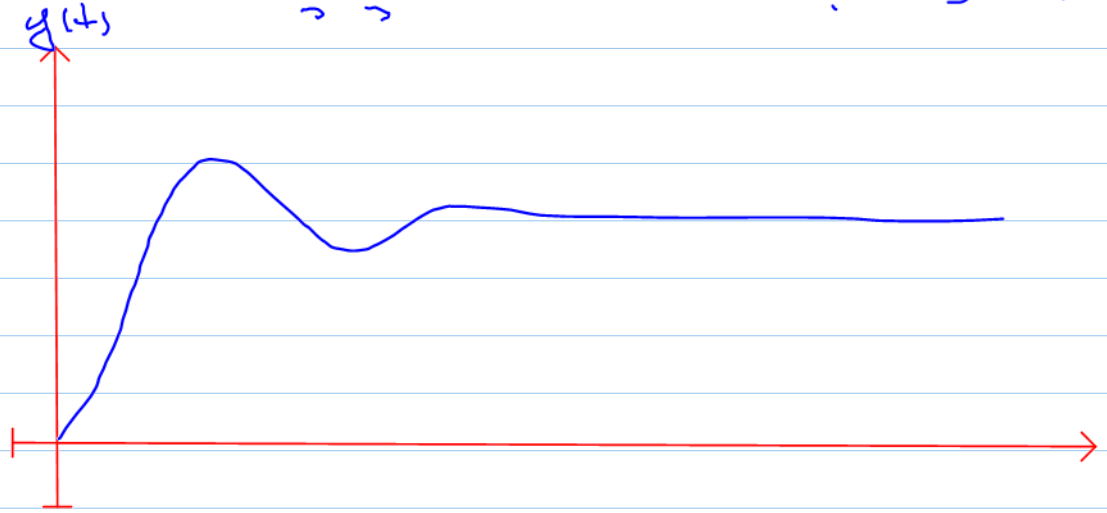
" " " نوسان

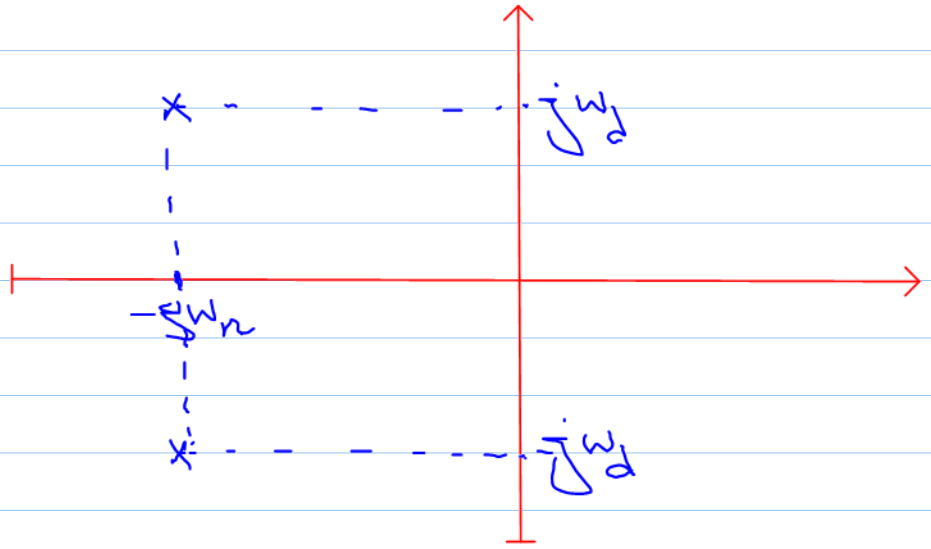
کم ترین انرژی را برای رسیدن به هدف سرمایه گذاری کند.



$$s_{1,2} = -\omega_n$$

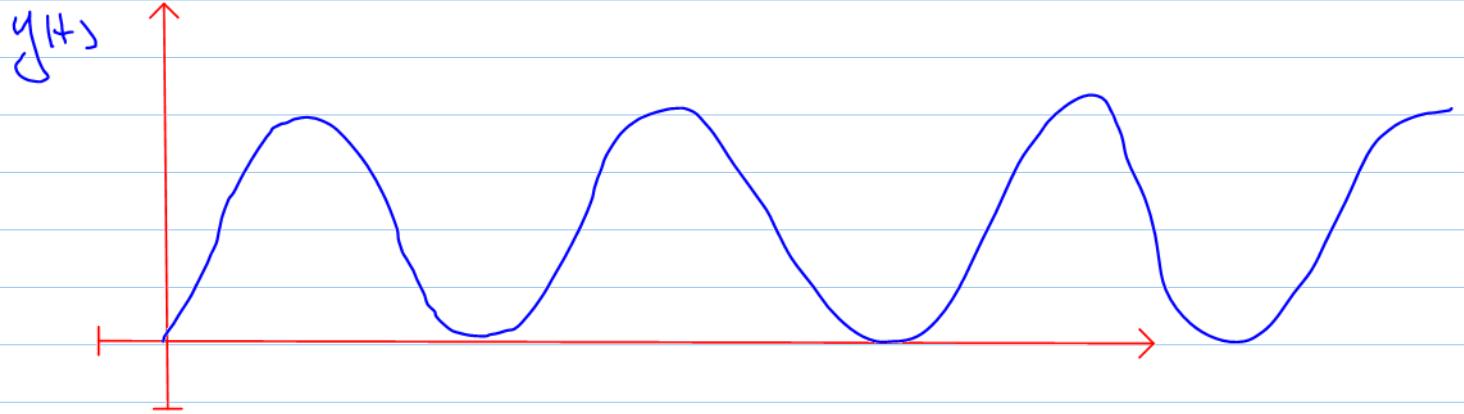
③ $0 < \zeta < 1$ ← زیرمیرا ← دو قطب مختلط سمت چپ

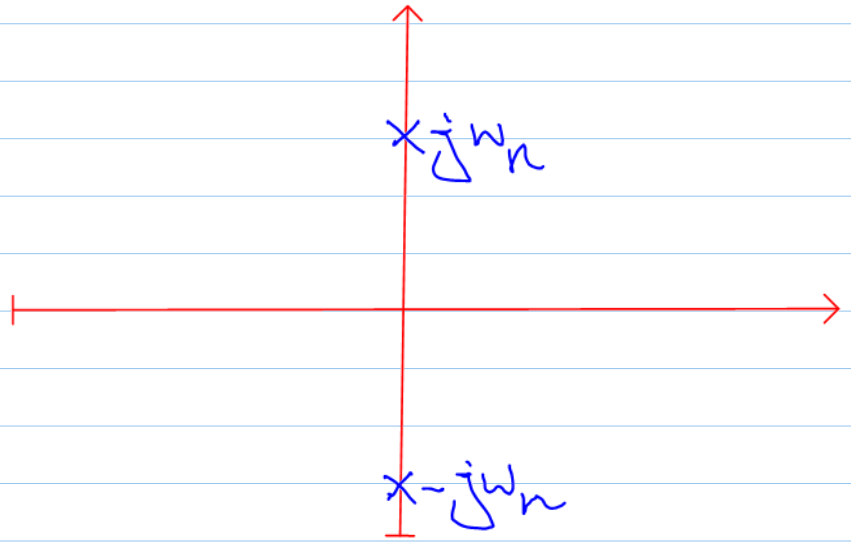




$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

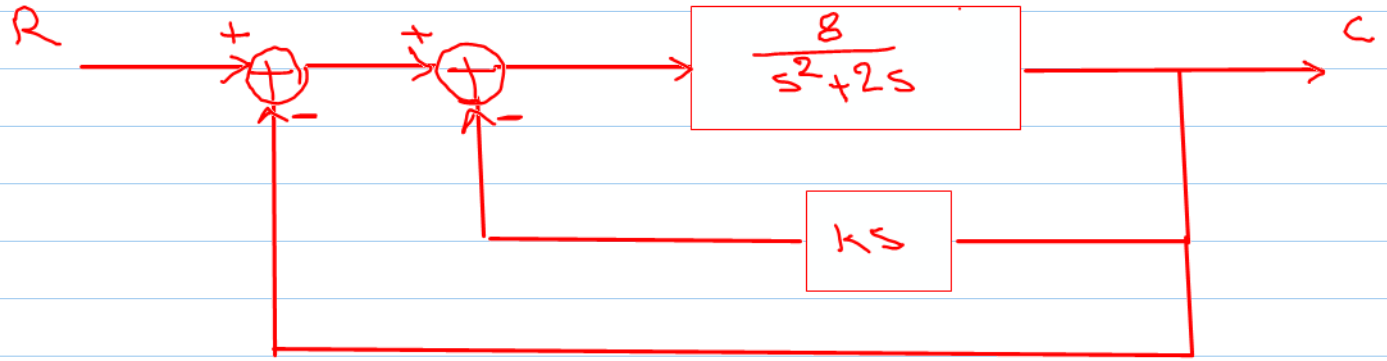
④ $\zeta = 0$ ← نوسانی ← دو قطب روی محور $j\omega$





ناپایدار ← $\zeta < 0$ ⑤

مثال: در سیستم زیر به ازای چه مقدار k، سیستم دارای نسبت میرایی 0.8 خواهد بود؟



$\zeta = 0.8$ که $\rightarrow k = ?$

$\frac{C(s)}{R(s)} = ?$

حلقه‌ها: $l_1 = -ks \times \frac{8}{s^2+2s} = -\frac{8k}{s+2}$

$$l_2 = -\frac{8}{s^2+2s}$$

مسیرها: $P_1 = \frac{8}{s^2+2s} \rightarrow \Delta_1 = 1$

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{8k}{s+2} - \frac{8}{s^2+2s} \right)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{8}{s^2+2s} \times 1}{1 + \frac{8k}{s+2} + \frac{8}{s^2+2s}} = \frac{8}{s^2+2s+8ks+8} = \frac{8}{s^2+(8k+2)s+8}$$

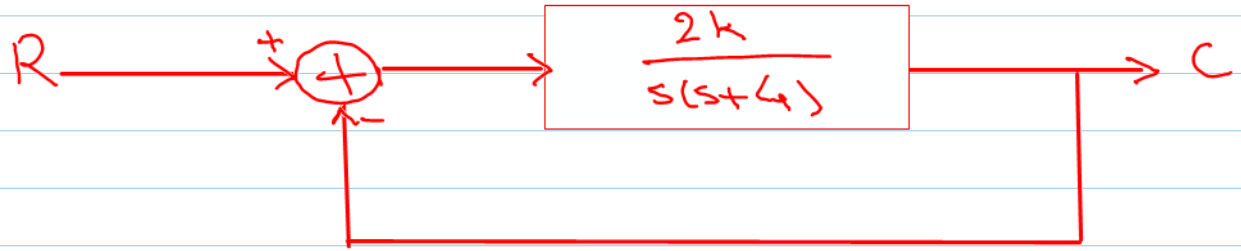
$$G(s) = \frac{8}{1s^2 + (8k+2)s + 8} = \frac{k}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = 8 \longrightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$$

$$2\xi \times 2\sqrt{2} = 8k+2 \longrightarrow 2 \times 0.8 \times 2\sqrt{2} = 8k+2$$

$$8k = 3.2\sqrt{2} - 2 \longrightarrow k = \frac{3.2\sqrt{2} - 2}{8} \longrightarrow \xi = 0.8$$

در سیستم زیر k چقدر باشد تا سریعترین پاسخ بدون بالازدگی را داشته باشیم؟



سریعترین پاسخ بدون بالازدگی = میرای بحرانی $\rightarrow \zeta = 1$

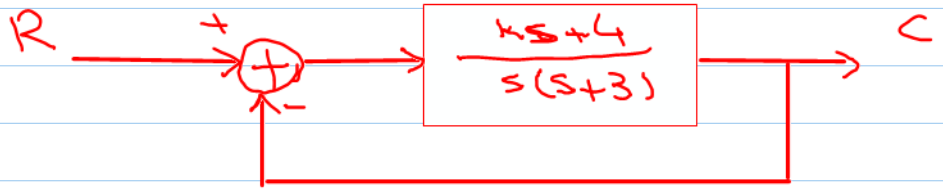
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k}{1s^2+4s+2k} = \frac{k'}{1s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$2\zeta\omega_n = 4 \rightarrow 2\times 1\times\omega_n = 4 \rightarrow \omega_n = 2$$

$$\omega_n^2 = 2k \rightarrow 4 = 2k \rightarrow \boxed{k=2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2+4s+4} = \frac{4}{(s+2)^2}$$ میرای بحرانی

مثال: در سیستم زیر مقدار مزیب سیلی برابر با $\xi = 2$ است. نوع رفتار سیستم در حالت گذرا را تعیین کنید.



$$\xi w_n = 2 \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ks+4}{s(s+3)+ks+4} = \frac{ks+4}{s^2+(3+k)s+4}$$

$$G(s) = \frac{k'}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2} \neq \frac{\cancel{ks+4}}{s^2+(3+k)s+4}$$

نوع رفتار حالت گذرا فقط توسط مقادیر یقین می‌شود و برای تحلیل حالت گذرا، صفرها را در نظر نمی‌گیریم.

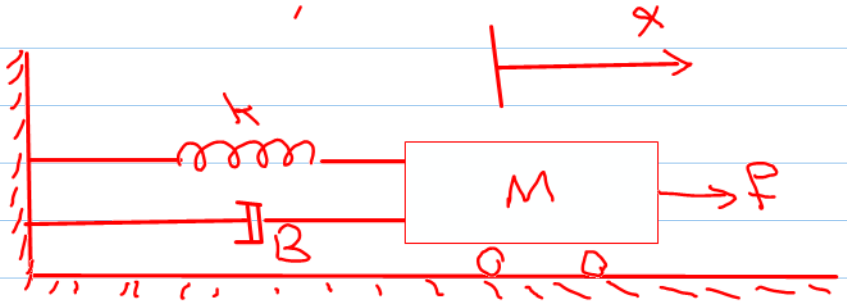
$$\begin{cases} 2\xi w_n = 3+k \\ w_n^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \boxed{w_n = 2}$$

$\zeta \omega_n = 2 \rightarrow \zeta \times 2 = 2 \rightarrow \zeta = 1 \rightarrow$ میرای بحرانی

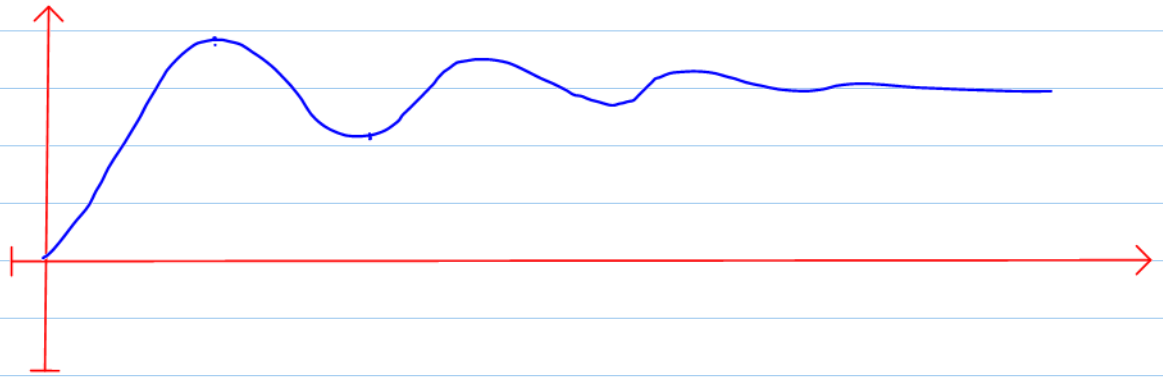
مثال:

در سیستم زیر اگر جرم $M = 10kg$ ، $B = 20$ باشد ضریب سختی فنر را به نحوی تعیین کنید

که فرکانس نوسانات مشاهده شده در اثر نیروی یک واحد برابر $2 \frac{rad}{s}$ باشد.



$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + k} = \frac{1}{10s^2 + 20s + k}$$



نوسانات میرا = نوسانات قابل مشاهده = ω_d

فرکانس طبیعی نامیرا ω_n ← اگر سیستم نوسانی شود قابل مشاهده است.

$$\omega_d = 2 \rightarrow \quad k = ?$$

$$\frac{1}{10s^2 + 20s + k} = \frac{k'}{1s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{s^2 + 2s + \frac{k}{10}} = \frac{k'}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 2 \Rightarrow \xi\omega_n = 1 \\ \omega_n^2 = \frac{k}{10} \\ \omega_d = 2 = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi w_n = 1 \\ w_n^2 = \frac{k}{10} \\ w_n^2 - w_n^2 \xi^2 = 4 \end{cases}$$

$$\frac{k}{10} - (w_n \xi)^2 = 4 \rightarrow \frac{k}{10} - 1^2 = 4 \rightarrow \boxed{k = 50}$$

$$w_d = 2 \checkmark$$

جلسه بعد حل مسئله این جلسه.