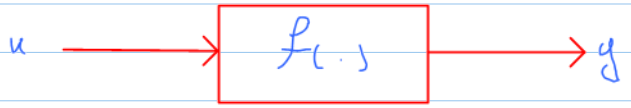
جلسه 7 کنترل فازی

«حساسیت»

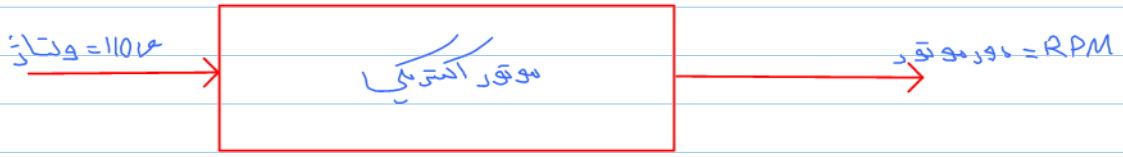
تعریف حساسیت:



$y(t) = f(u(t)) \rightarrow$ $u=10 \rightarrow y=200$

$\downarrow \times 2$ $\quad \downarrow \times 3 \rightarrow$

$u=20 \rightarrow y=?600$



$RPM = f(v, T, i) \rightarrow$ $T=25^\circ$, $v=110 \rightarrow RPM = 1000$

$T=50^\circ$, $v=110 \rightarrow RPM = 1500$

حساسیت RPM به دما = RPM افزایش دور موتور چقدر است؟

$\ll S_\alpha^f = $ حساسیت تابع f نسبت به پارامتر $\alpha = \frac{\alpha}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \alpha} \gg$

$S_\alpha^f > 0 \longleftarrow$ یعنی رابطه α و f مستقیم است.

افزایش $\alpha \longleftarrow$ افزایش f

کاهش $\alpha \longleftarrow$ کاهش f

$S_\alpha^f < 0 \longleftarrow$ " " " " معکوس است.

افزایش $\alpha \longleftarrow$ کاهش f

کاهش $\alpha \longleftarrow$ افزایش f

$T = 25^\circ \rightarrow RPM = 1000$

$\Delta T = 50^\circ$ $\quad \Delta RPM = 100$

$T = 75^\circ \rightarrow RPM = 1100$

$S_\alpha^f = 2 \longleftarrow$

هر واحد افزایش در α موجب 2 واحد افزایش در f می شود و هر واحد کاهش در α موجب 2 واحد کاهش در RPM می شود.

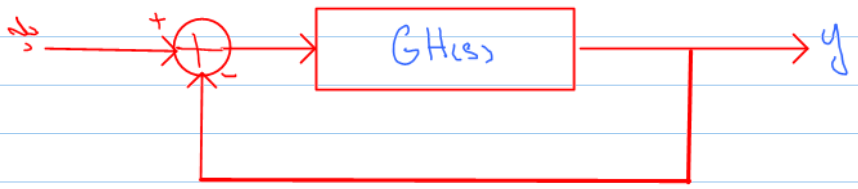
$$S_\alpha^f = \frac{\Delta f}{\Delta \alpha}$$

برق ۸۱

درسیستمی با فیدبک واحد $GH = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$ است.

حساسیت درصد اورشوت به پله واحد نسبت به ζ (S_ζ^{po}) در ζ نامی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

۱) -2π ۲) $-\pi$ ۳) 2π ۴) π



$\%OS = f$ $\qquad S_\xi^f = ?$

$\%OS = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100 = f$ $\qquad S_\xi^f = \frac{\xi}{f} \times \frac{\partial f}{\partial \xi}$

$\frac{\partial f}{\partial \xi} = ?$

$f = e^{h(x)} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dh}{dx} e^{h(x)}$

$f = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ $\qquad h(\xi)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = ? \frac{dh}{d\xi} e^{h(\xi)}$

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{-\pi\sqrt{1-\xi^2} - \left(\frac{-2\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} \times -\pi\xi\right)}{1-\xi^2} = \frac{-\pi\sqrt{1-\xi^2} - \frac{\pi\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}}{(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$= \frac{-\pi}{(1-\xi^2)(\sqrt{1-\xi^2})}$$

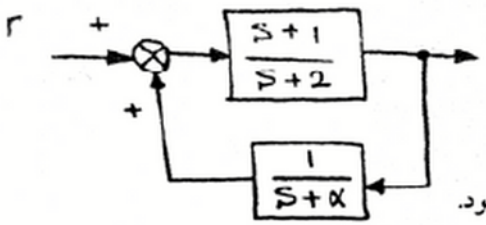
$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{-\pi}{1-\xi^2} e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$S_\xi^f = \frac{\xi}{e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} \times \frac{-\pi}{(1-\xi^2)^{3/2}} e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \frac{-\pi\xi}{(1-\xi^2)^{3/2}} \checkmark$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow S_\xi^f = \frac{-\pi\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} = -2\pi$$

برق ۸۲

۲ در شکل زیر با توجه به مقدار نامی $\alpha = 1$ کدام عبارت درست است؟

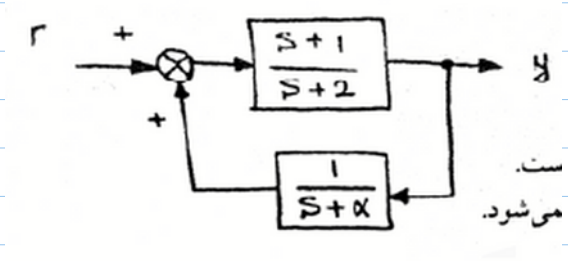


۱) حساسیت خروجی نسبت به α در فرکانس‌های بالا بطرف صفر میل می‌کند.

۲) حساسیت خروجی نسبت به α در فرکانس‌های پایین بطرف صفر میل می‌کند.

۳) تابع تبدیل حلقه بسته به α ربطی ندارد فلذا حساسیت خروجی نسبت به α صفر است.

۴) در حالتی که فیدبک مثبت باشد حلقه بسته ناپایدار و در نتیجه حساسیت تعریف نمی‌شود.



$Y(s) \rightarrow \quad S_{\alpha}^{Y} = ?$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1 - \frac{s+1}{s+2} \times \frac{1}{s+\alpha}} = \frac{(s+1)(s+\alpha)}{s^2 + (\alpha+1)s + 2\alpha - 1} = T(s)$$

$Y(s) = T(s)\,R(s)$ با تغییر پارامتر α، دو طرف تغییر می‌کند. پس دو حساسیت خروجی نسبت به α هم اثر می‌گذارد.

$$S_{\alpha}^{Y} = \frac{\alpha}{Y} \times \frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{T(s)\,R(s)} \times R(s) \frac{\partial T(s)}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{T(s)} \frac{\partial T}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{s^2 + \alpha s + s + \alpha}{s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1}\right) = \frac{(s+1)(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1) - (s+2)(s^2 + \alpha s + s + \alpha)}{(s^2 + \alpha s + 2\alpha - 1 + s)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{s^3 + \alpha s^2 + s^2 + 2\alpha s - s + s^2 + \alpha + s + 2\alpha - 1 - (s^3 + \alpha s^2 + s^2 + \alpha s + 2s^2 + 2\alpha s + 2s + 2\alpha)}{(s^2 + \alpha s + 2\alpha - 1 + s)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{-s^2 + (\alpha - 3)s + 2\alpha - 3}{(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1)^2}$$

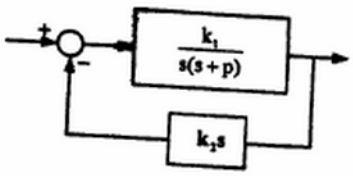
$$S_{\alpha}^{Y} = \frac{\alpha}{\frac{s^2 + \alpha s + s + \alpha}{s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1}} \times \frac{-s^2 + (\alpha - 3)s + 2\alpha - 3}{(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1)^2}$$

$$S_{\alpha}^{Y} = \frac{\alpha(-s^2 + (\alpha - 3)s + 2\alpha - 3)}{(s^2 + \alpha s + s + \alpha)(s^2 + \alpha s + s + 2\alpha - 1)}$$

1) $s \to \infty$ $\quad \left.\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right|_{s=\infty} = \frac{-\alpha \times (\infty)^2}{(\infty)^2 \times (\infty)^2} = 0$

برق ۹۵

حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته سیستم کنترل شکل مقابل نسبت به پارامتر p کدام است؟

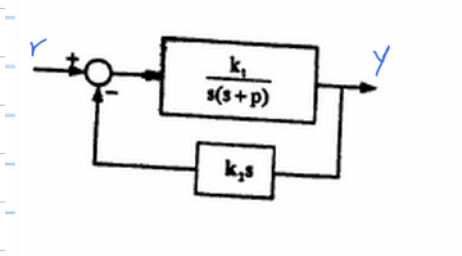


۱) $\frac{-ps}{s+p+k_1k_2}$

۲) $\frac{-p}{s+p+k_1k_2}$

۳) $\frac{-p}{k_1(s+p+k_1k_2)}$

۴) $\frac{-ps}{k_1(s+p+k_1k_2)}$



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_1}{s(s+p)}}{1-\left(\frac{k_1}{s(s+p)} k_2 s \times -1\right)}$$

$$T(s) = \frac{k_1}{s(s+p) + k_1 k_2 s} = \frac{k_1}{s^2 + ps + k_1 k_2 s}$$

$$S_p^T = \frac{p}{T(s)} \times \frac{\partial T}{\partial p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{0 \times (s^2 + ps + k_1 k_2 s) - k_1 \times s}{(s^2 + ps + k_1 k_2 s)^2} = \frac{-k_1}{s(s + p + k_1 k_2)^2}$$

$$S_p^T = \frac{p}{\frac{k_1}{s(s+p+k_1 k_2)}} \times \frac{-k_1}{s(s+p+k_1 k_2)^2} = \frac{-p}{s+p+k_1 k_2}$$

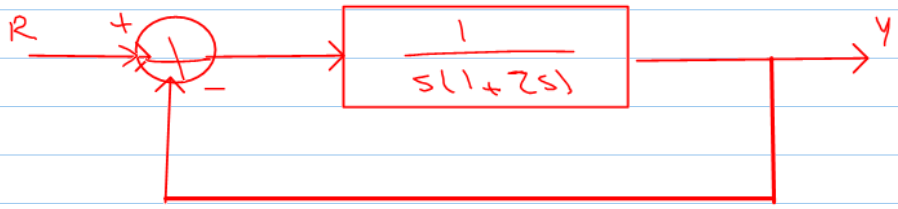
۰ سیستمی فیدبک واحد منفی با $G(s) = \frac{1}{s(1+\tau s)}$ چنانچه τ به میزان ۰٪ افزایش یابد:

ξ به میزان ۵ درصد کاهش می‌یابد.

۲) ξ به میزان ۵ درصد افزایش می‌یابد.

ξ به میزان ۱۰ درصد کاهش می‌یابد.

۴) ξ به میزان ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.



τ را ۱۵٪ زیاد کنیم ← ζ چقدر تغییر می‌کند؟

$$\text{حساسیت } \zeta \text{ به } \tau = \frac{\Delta\zeta}{\Delta\tau} = \frac{?}{0.15} = S_\tau^\zeta = \frac{\tau}{\zeta} \times \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{\tau s^2 + s + 1} \quad \not\times \quad \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{1}{\tau}} = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{\tau} \rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{\tau} \rightarrow \zeta = \frac{1}{\tau} \times \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{\tau}}} = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = \frac{0 \times 2\sqrt{\tau} - 1 \times \frac{2}{2\sqrt{\tau}}}{4\tau} = \frac{-1}{4\tau\sqrt{\tau}}$$

$$S_\tau^\zeta = \frac{\tau}{\frac{1}{2\sqrt{\tau}}} \times \frac{-1}{4\tau\sqrt{\tau}} = -\frac{1}{2} = \frac{\Delta\zeta}{\Delta\tau} \rightarrow \frac{\Delta\zeta}{10\%} = -\frac{1}{2}$$

τ را ۱۵٪ افزایش دهیم ← ζ ۵٪ کاهش می‌یابد

در یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$، وقتی میرائی سیستم از نوع بحرانی است، حساسیت **پاسخ ضربه** واحد سیستم نسبت به ω_n پس از گذشت یک ثانیه از اعمال ضربه کدام مورد است؟

۱) ۰ ۲) $-\omega_n$ ۳) $-2\omega_n$ ۴) $\frac{2}{\omega_n}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \xi = 1 \;,\; R(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2} \Rightarrow S_{\omega_n}^{C(s)}\Big|_{t=1} = ?$$

$$C(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \;,\; = \omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t} = (t\,\omega_n^2)(e^{-\omega_n t})$$

$$\omega_n^2\, t\, u(t) \longrightarrow \omega_n^2 \frac{1}{s^2}$$

$$\times e^{-\omega_n t} \downarrow \qquad \downarrow s \to s+\omega_n$$

$$\omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t} \longrightarrow \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

$$S_{\omega_n}^{C(t)} = \frac{\omega_n}{\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}} \times \frac{\partial C}{\partial \omega_n}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \omega_n} = 2t\omega_n e^{-\omega_n t} + (-t e^{-\omega_n t} \times t\omega_n^2)$$

$$S_{\omega_n}^{C} = \frac{\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n^2}\, t\, \cancel{e^{-\omega_n t}}} \times \left(2\cancel{t}\,\cancel{\omega_n}\,\cancel{e^{-\omega_n t}} - t^{\cancel{2}}\,\omega_n^{\cancel{2}}\,\cancel{e^{-\omega_n t}}\right)$$

$$t=1 \longrightarrow S_{\omega_n}^{C} = 2 - \omega_n$$

برق ۹۱

در دیاگرام بودی $(S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2)^{-1}$ در فرکانس زاویه‌ای $\omega = \omega_r$ دامنه به حداکثر مقدار خود می‌رسد. حساسیت این فرکانس زاویه‌ای نسبت به ζ ($S_{\zeta}^{\omega_r}$) در ζ نامی $\frac{1}{2}$ کدام گزینه زیر است؟

۱) -1

۲) 1

۳) $0/5$

۴) $-0/5$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \qquad \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_\xi^{\omega_r} = \frac{\xi}{\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}} \times \frac{\partial \omega_r}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \xi} = \omega_n \frac{-4\xi}{2\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{-2\xi\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

$$S_\xi^{\omega_r} = \frac{\xi}{\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}} \times \frac{-2\xi\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}} = \frac{-2\xi^2}{1-2\xi^2}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \rightarrow S_\xi^{\omega_r} = -1$$

"اعلم كشل ضلا"