@Saeed6907

09120187134

@Control_dehghanii

مقدمه

❖ تعریف سیستم

هر مجموعه‌ای از عناصر فیزیکی و غیرفیزیکی که در کنار هم برای رسیدن به هدف واحدی تلاش می‌کنند را سیستم گویند.

هر پدیده ای در طبیعت و فیزیک که کاری انجام می‌دهد، یک سیستم است، مانند سیستم تنفس انسان، سیستم دفاعی بدن انسان، سیستم خودرو، سیستم آموزش دانشگاهی، سیستم نیروی انتظامی و ...

❖ تعریف سیگنال

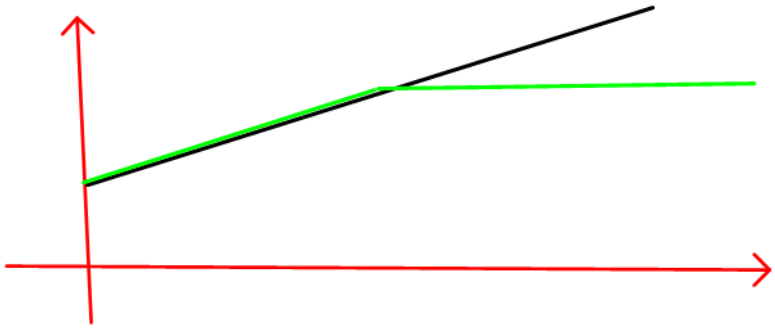
هر مجموعه ای از داده‌ها که توصیف کننده یک پدیده فیزیکی باشند، سیگنال نامیده می‌شود.

مثال ۱

آیا داده‌های زیر که برحسب درجه سانتیگراد است و در یک اتاق ثبت شده است، سیگنال است؟

۵۰	۴۹	۳۵	۲۰	۱۹	۱۶	۱۵	۱۲	۱۰

۵۰	۴۹	۳۵	۲۰	۱۹	۱۶	۱۵	۱۲	۱۰
۱۰:۲۰	۱۰:۱۰	۱۰:۰۰	۹:۵۰	۹:۴۰	۹:۳۰	۹:۲۰	۹:۱۰	۹:۰۰



هر سیگنال در واقع مجموعه‌ای از داده‌ها است که برحسب آرگومان مشخصی توصیف شود و عموماً نیز این آرگومان زمان خواهد بود.

تمرین ۱

سرعت خودرویی که از شهر A به شهر B در حال حرکت است، برحسب کیلومتر برساعت در جدول‌های زیر داده شده است، کدام یک سیگنال است؟

۱۴۰	۱۰۰	۸۰	۳۰	۱۴۰	۵۰	۱۲۰	۱۰	۹۰	۱۲۰	۱۱۰

۱۴۰	۱۰۰	۸۰	۳۰	۱۴۰	۵۰	۱۲۰	۱۰	۹۰	۱۲۰	۱۱۰
۹:۵۰	۹:۲۵	۹:۱۵	۹:۰۵	۹:۴۰	۹:۱۰	۹:۴۵	۹:۰۰	۹:۲۰	۹:۳۰	۹:۳۵

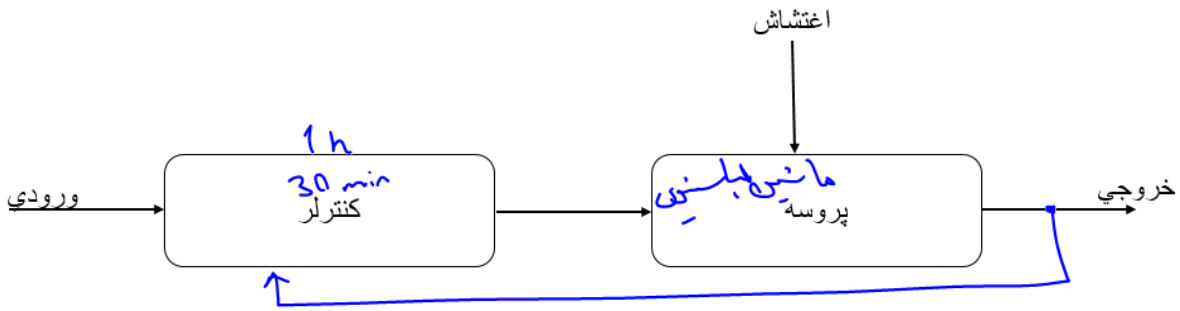
❖ تقسیم بندی سیستم‌ها از نظر کنترلی

- **سیستم‌های کنترل نشده :** تلاش اجزای سیستم برای رسیدن به مقصد نهایی هدفمند نیست و رسیدن به هدف نیز تضمین نشده است.
- **سیستم‌های کنترل شده :** یک مغز متفکر به سیستم اضافه شده است تا تلاش اجزا برای رسیدن به مقصد نهایی را هدفمند کند.

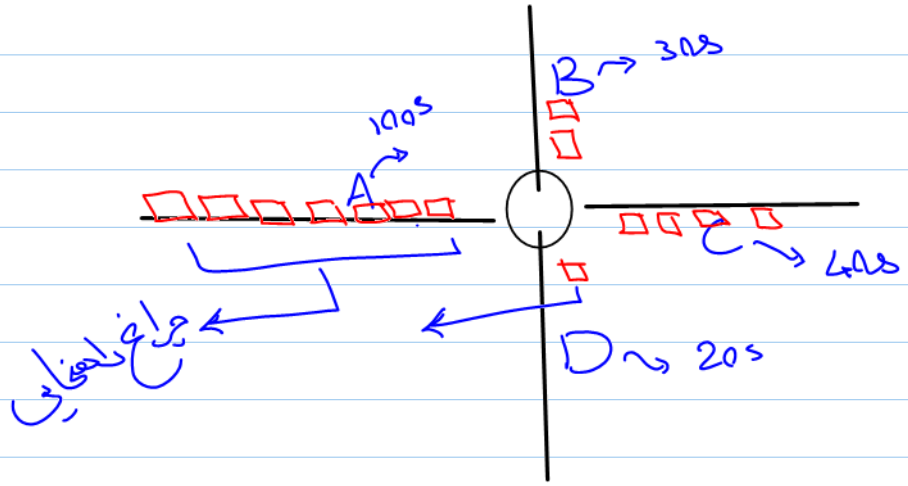
نقش کنترل در سیستم‌ها، نقش مغز در انسان است.

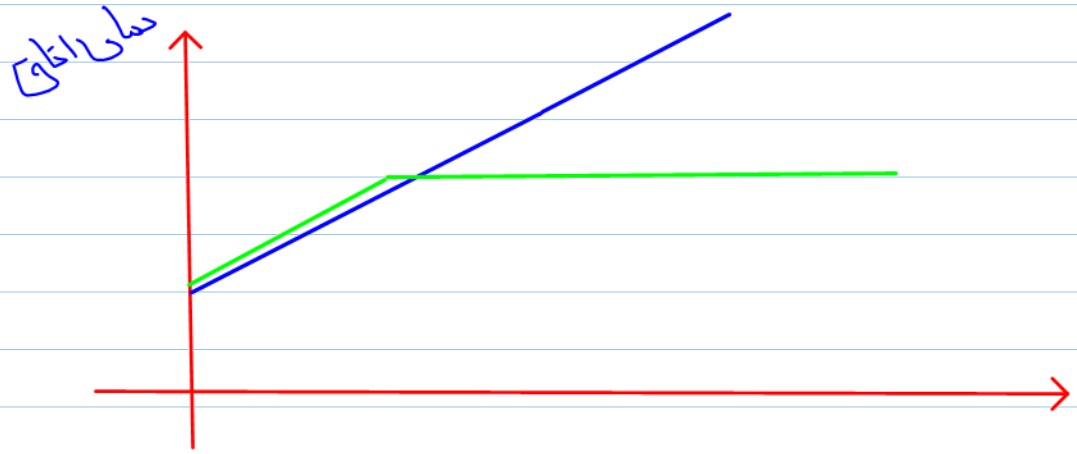
❖ انواع سیستم‌های کنترل شده

- **کنترل پیشخور یا مسیر پیشرو یا** Feedforwared

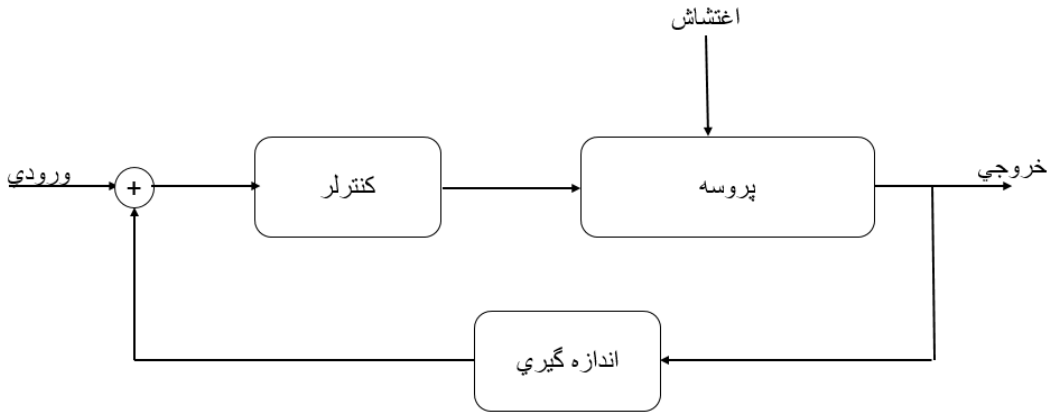


در سیستم کنترل پیشخور، کنترل‌کننده از قبل برنامه‌ریزی شده و دارای شعور کافی جهت درک شرایط جدید نیست، مانند سیستم کنترل ماشین لباسشویی، چراغ راهنمایی رانندگی و ...


B
30s
100s
A
C
40s
D
20s
مراغ الحيلي


سلم الطوق

- **کنترل پسخورد یا فیدبک**



در این نوع کنترل، کنترل‌کننده دارای برنامه ریزی قبلی می‌باشد اما با توجه به شرایط موجود نسبت به هر اتفاقی عکس‌العمل نشان می‌دهد.

مثال ۲

برای درک تفاوت این دو نوع کنترل، یک خانه مسکونی را در نظر بگیرید.

حالت اول: این خانه مسکونی توسط سیستم موتورخانه قدیمی (شوفاژ) گرم می‌شود.

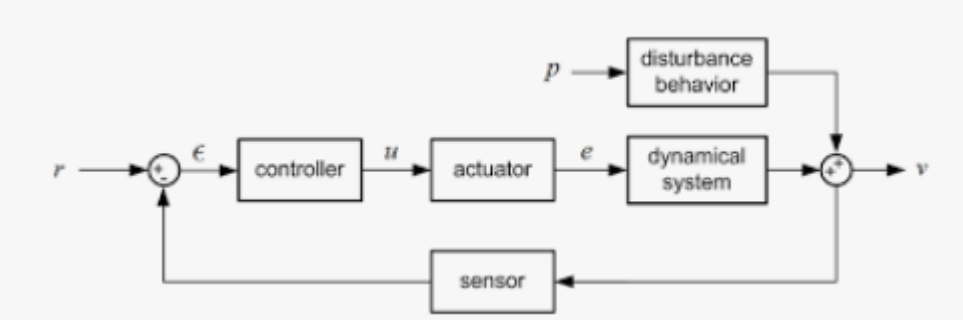
حالت دوم: این خانه مسکونی مجهز به تهویه مطبوع هوشمند است.

نوع کنترل هر یک را مشخص کرده و مزایا و معایب هر کدام را بررسی کنید.

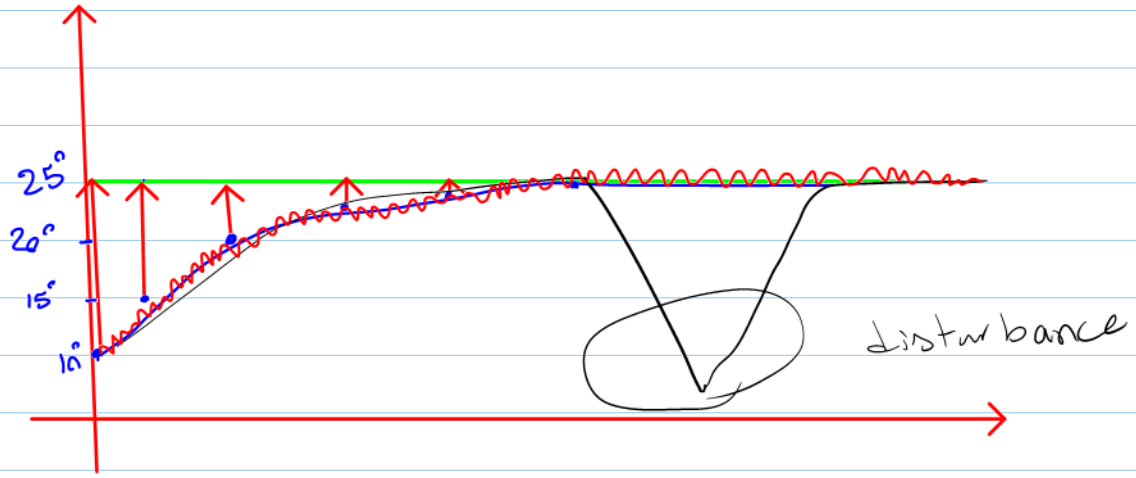
تمرین ۲

در منزل خود حداقل ۲ مثال برای سیستم کنترلی پیشرو و ۲ مثال برای سیستم کنترلی فیدبک پیدا کنید.

❖ اجزای سیستم کنترل پسخور یا فیدبک:



- فرآیند یا پروسه: سیستمی که میخواهیم کنترل کنیم.
- کنترلر: مغز متفکر سیستم بوده و تعیین می‌کند که هر کدام از اجزا و سیگنالهای سیستم در هر لحظه چه تغییراتی داشته باشند.
- عملگر: بازوی اجرایی کنترلر بوده و درخواستهای کنترلر را اجرا می‌کند.
- حسگر: اطلاعات لازم از نحوه تغییرات اجزای سیستم را جمع‌آوری کرده و به کنترلر می‌دهد.
- خروجی : متغیری از سیستم که کنترلر قصد کنترل آن را دارد تا تغییرات آن مطابق با الگوی مشخصی انجام شود.
- ورودی مرجع: الگوی مدنظر جهت رفتار خروجی سیستم که به صورت یک سیگنال ورودی به سیستم داده می‌شود.
- خطا: میزان انحراف خروجی در هر لحظه از ورودی مرجع که به صورت سیگنال خطا به کنترلر داده می‌شود.
- متغیر کنترل‌کننده یا سیگنال کنترلی: سیگنالی که به سیستم اعمال می‌شود تا تغییرات متغیرهای آن در راستای رساندن خروجی به ورودی مرجع قرار گیرد.



15° ⟶ درجه هیتر = 40°

10° ⟶ ~ ~ = 30°

5° ⟶ ~ ~ = 20°

- اغتشاش و نویز: عوامل ناخواسته‌ای که به صورت پیش‌بینی نشده وارد سیستم شده و تغییرات خروجی را از روند مطلوب دور می‌کنند.

مثال ۳

در هر یک از سیستم‌های زیر اجزای سیستم کنترلی را مشخص کنید.

سیستم ۱: راه رفتن انسان در مسیر مشخص

سیستم ۲: گرم کردن هوای یک اتاق با پنجره باز به وسیله یک بخاری

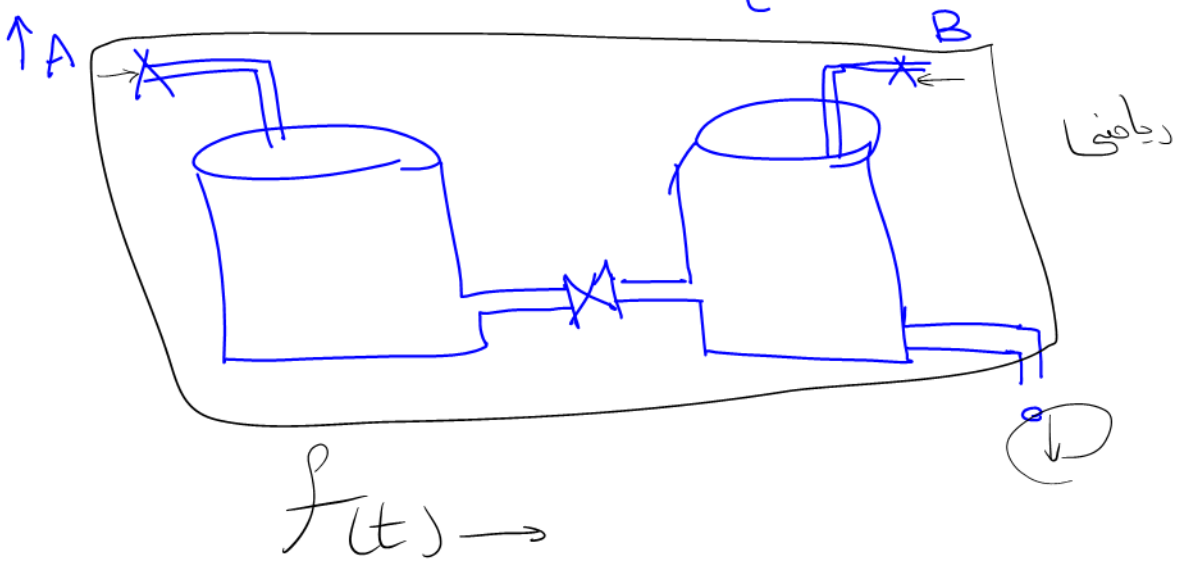
سیستم ۳: سیستم کروز کنترل خودرو

تمرین ۳

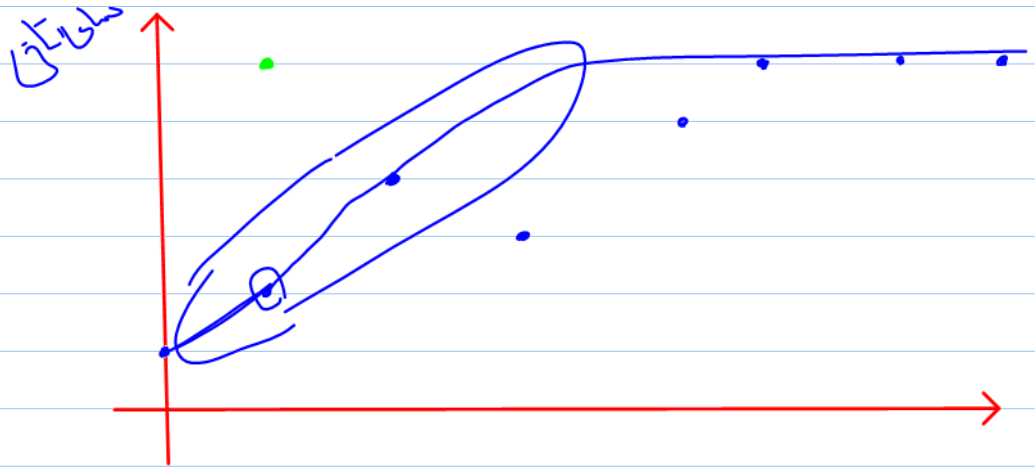
در سیستم کنترل وضعیت دیش ماهواره به وسیله سروو موتور اجزای سیستم کنترلی را مشخص کنید.

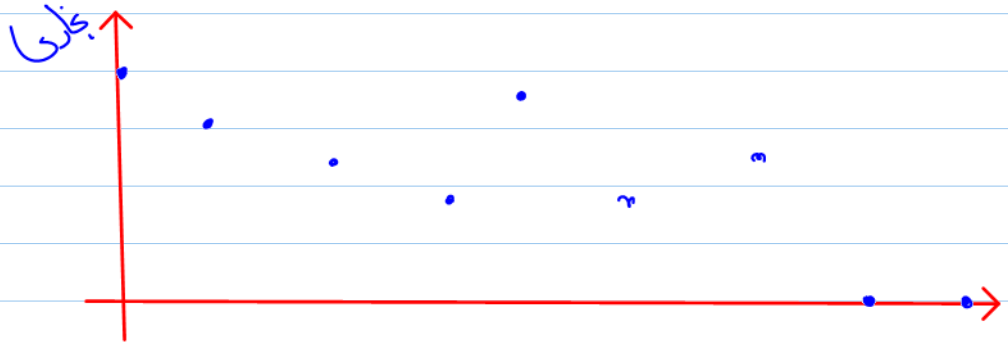
❖ روال طراحی کنترلر در صنعت

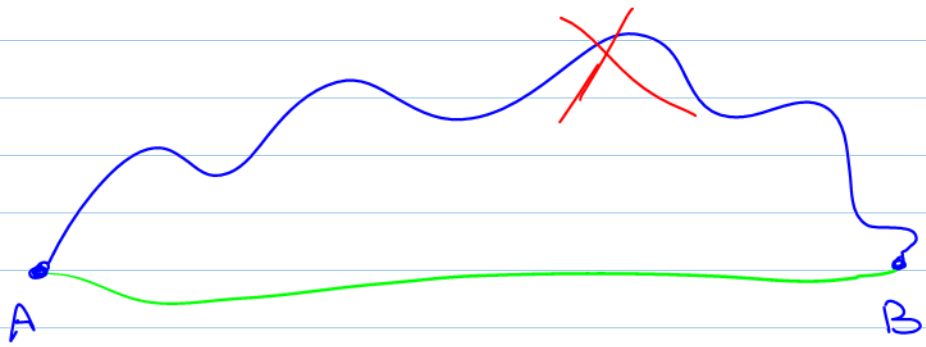
- ✓ شناخت سیستم بدون کنترلر موجود
- ✓ استخراج مدل مناسب از سیستم
- ✓ شبیه‌سازی و شناخت رفتار سیستم در حالتهای مختلف جهت کسب شناخت کافی از سیستم
- ✓ طراحی کنترلر در محیط شبیه سازی و بهینه سازی آن با در نظر گرفتن قیود عملی
- ✓ پیاده سازی کنترلر در عمل
- ✓ بهینه‌سازی رفتار کنترلر در عمل



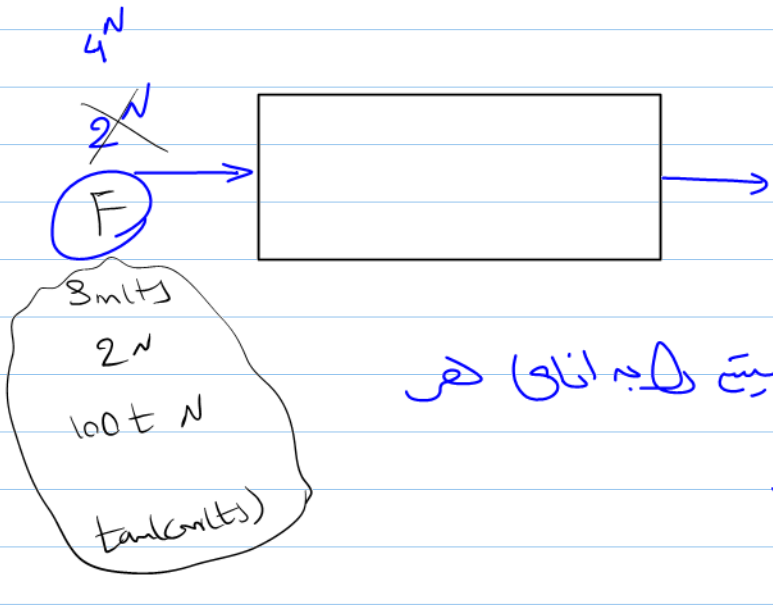
فصل اول: مدلسازی







روند تغییرات ← مشتق



مساحت: رابطه ریاضی که خروجی سیستم باید انالیز هر

ورودی مختلف ما بدهد

❖ مدلسازی سیستم

یعنی روند تغییرات سیستم را به صورت روابط ریاضی بیان کنیم.

برای استخراج مدل ریاضی سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی از قوانین فیزیکی حاکم برآنها استفاده می‌شود و در بخش‌های مختلف در ادامه بررسی شده است.

❖ مدلسازی سیستم‌های مکانیکی با حرکت خطی

در این نوع سیستم‌ها، هدف بیان نحوه تغییرات مکان یک المان در گذر زمان براثر اعمال نیرو بر آن است که برای این منظور از قانون دوم نیوتن استفاده می‌شود.

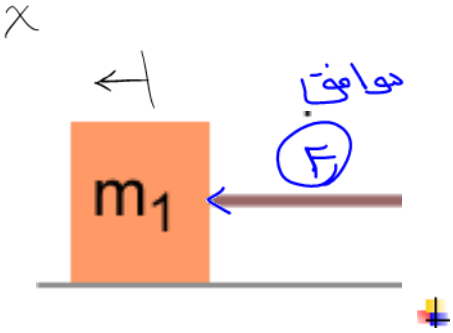
قانون دوم نیوتن

مجموع نیروهای مخالف حرکت − مجموع نیروهای موافق حرکت = شتاب × جرم

با توجه به اینکه تغییرات در گذر زمان در ریاضیات به معنای مشتق است، لذا در واقع می‌خواهیم مشتق متغیرهای سیستم را بر اثر اعمال نیرو به آن استخراج کنیم.

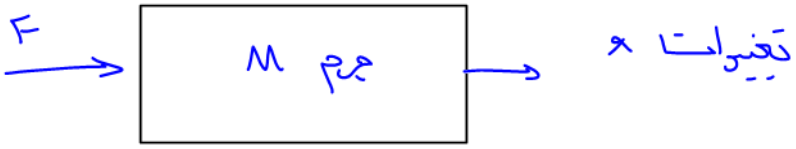
مثال ۱

سیستم زیر را مدل کنید.



تغییرات مکان M با گذر زمان = نحوه حرکت که باید مدلسازی شود.

عملگر مشتق = تغییرات با گذر زمان = $\frac{d(x)}{dt}$



$x =$ مکان جرم M

$\frac{dx}{dt} =$ سرعت جرم M

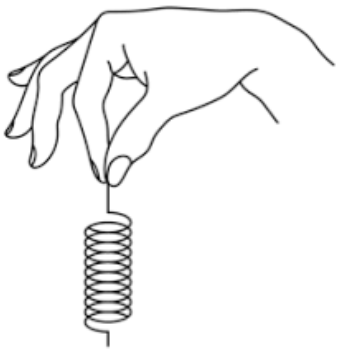
$\frac{d^2x}{dt^2} =$ شتاب جرم M

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F - 0 \rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = F}$$

$F = \delta(t)$ یا $u(t)$ یا $\sin(t)$ یا $10N$ ....

❖ **المان‌های واکنش‌گر:** المان‌هایی که در مقابل حرکت مقاومت می‌کنند، مانند فنر و دمپر.

معرفی فنر: فنر در برابر تغییر طول خود مقاومت می‌کند و تمایل به حفظ حالت اولیه خود دارد.

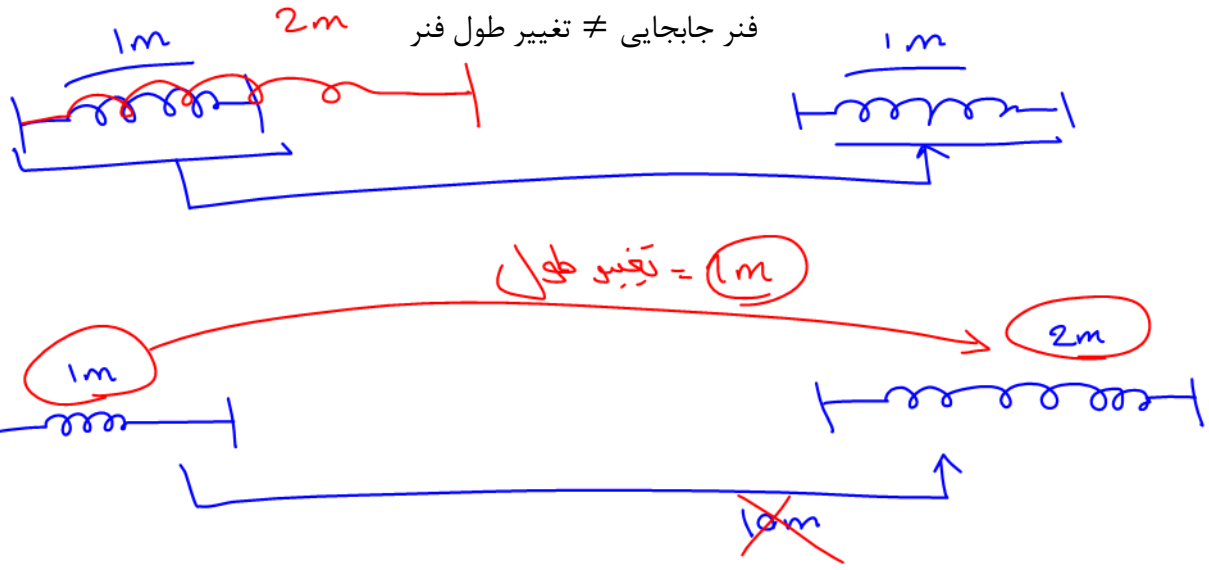


$$\text{ثابت فنر} = K = \frac{N}{\text{واحد جابجایی}} = \frac{N}{m}$$

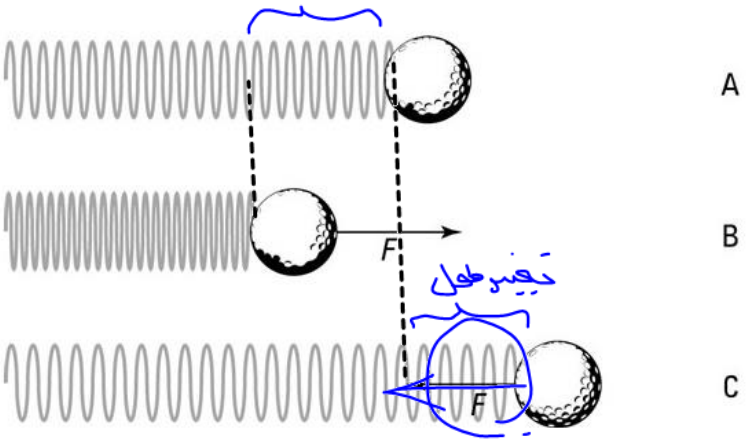
$$\text{نیروی فنر} = f = K \times \text{میزان تغییر طول فنر}$$

✓ نکته

فنر جابجایی ≠ تغییر طول فنر

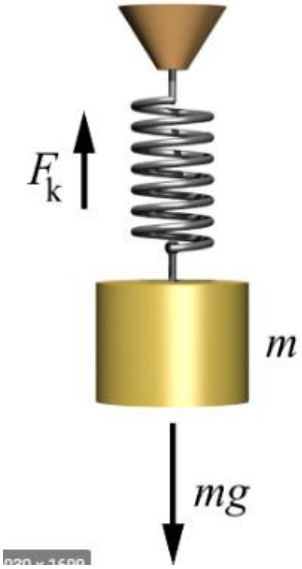


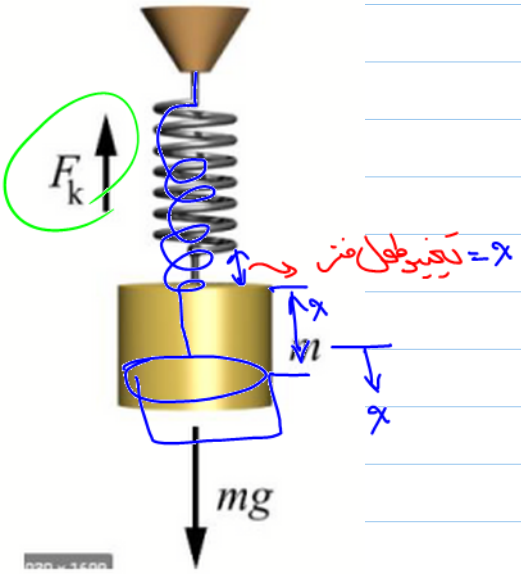
$f = k \times 1$



مثال ۲

در سیستم جرم و فنر زیر، معادلات حرکت سیستم را بنویسید.



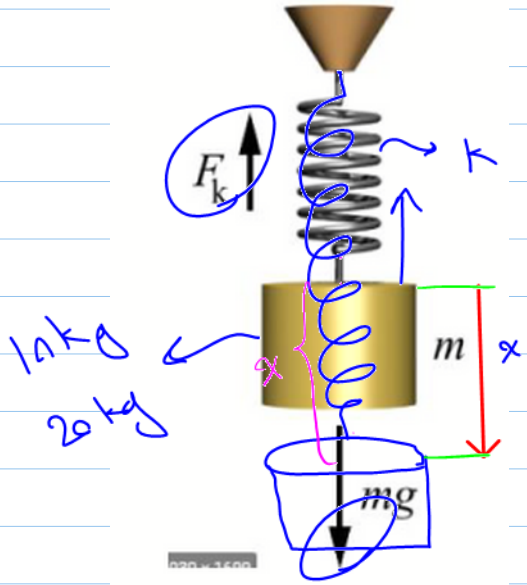


تغییر طول فنر $= x$

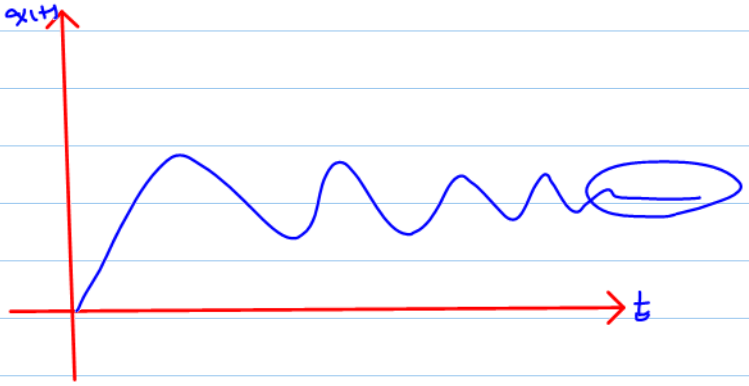
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - F_k$$

$$F_k = k \times x$$

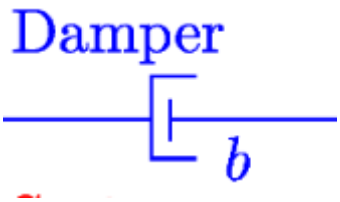
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx}$$



$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx}$$



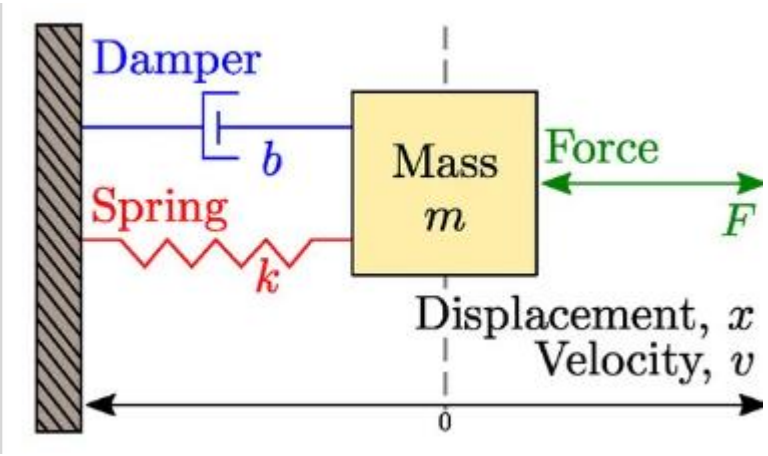
معرفی دمپر: دمپر B در مقابل تغییرات سرعت مقاومت می‌کند و تمایل به حفظ سرعت اولیه خود دارد.

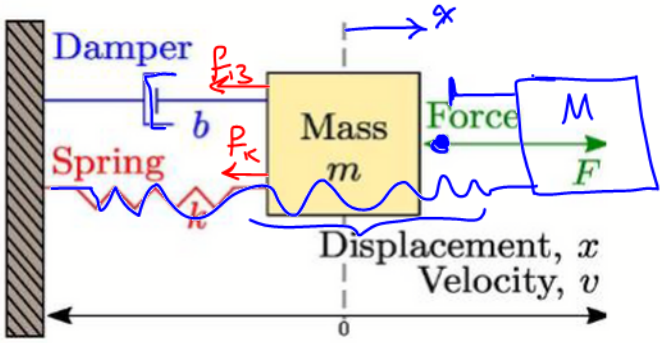


$$\text{نیروی دمپر} = B \times \frac{d(x)}{dt} = B \times \text{مشتق تغییر طول دمپر}$$

مثال ۳

سیستم زیر را با فرض سرعت جرم M به عنوان خروجی سیستم مدل کنید.





تغییر طول فنرها = x

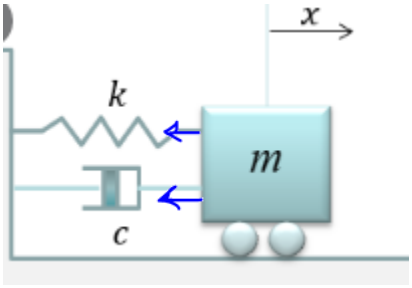
$f_K = k x$ $\quad f_B = b \frac{dx}{dt}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - (f_K + f_b)$$

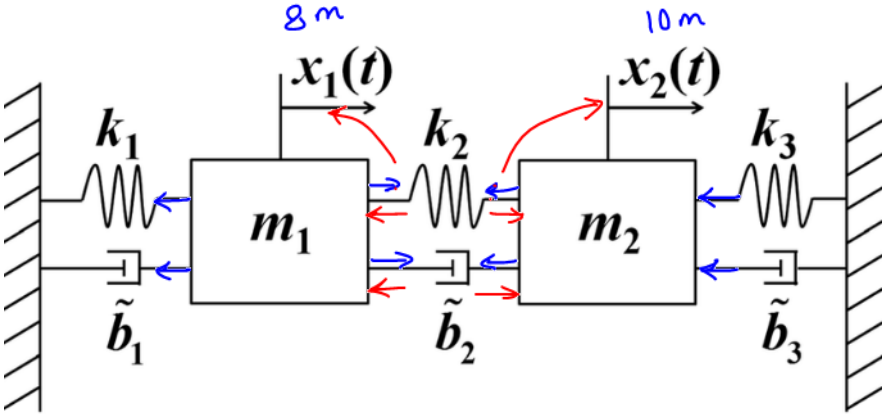
$$\boxed{m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - kx - b \frac{dx}{dt}}$$

✓ **نکته**: برای مدلسازی سیستم‌های مکانیکی، به ازای هر جرم یک معادله دوم نیوتن باید نوشته شود.

✓ **نکته**: فنر و دمپر همواره سعی در حفظ حالت اولیه خود دارند و لذا در صورتی که دو طرف فنر یا دمپر به دو جرم متصل نباشد، نیروی آن به صورت نیروی مخالف روی حرکت جرم متصل به آن عمل خواهد کرد.



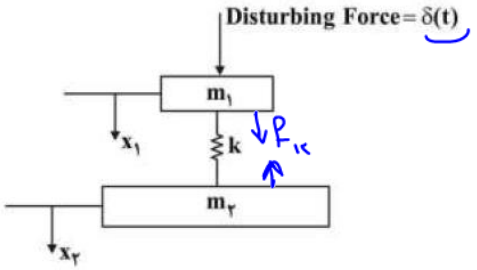
✓ **نکته**: اگر فنر یا دمپر بین دو جرم محصور باشند و دو طرف آنها به دو جرم متصل باشد، نیروی آنها روی یکی از جرمها به عنوان نیروی موافق و روی جرم دیگر به صورت نیروی موافق عمل خواهد کرد.



✓ **نکته**: در استخراج معادلات حرکت سیستم، اگر بیش از یک جرم داریم و بین دو جرم فنر یا دمپر مشترک است، اول مسأله فرض کنید که $x_1>x_2$ یا $x_2>x_1$

مثال ۴

معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.

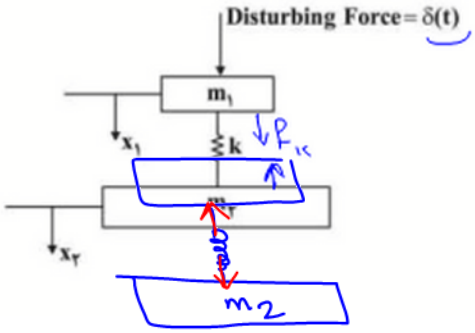


فرض: $x_2 > x_1$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \delta(t) + P_k \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -P_k \end{cases}$$

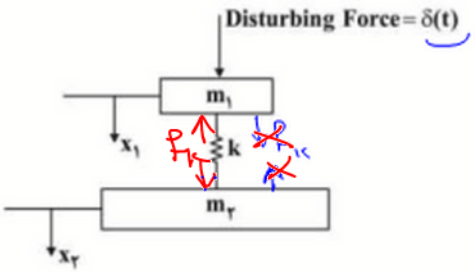
$$P_k = k(x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \delta(t) + k(x_2 - x_1) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$



فرض: $x_1 > x_2$

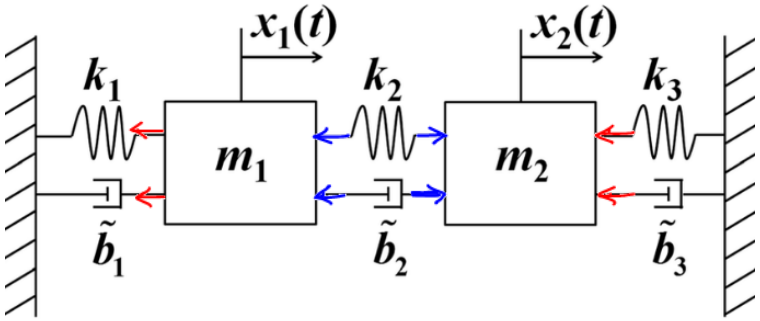
$$P_k = k(x_1 - x_2)$$



$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \delta(t) - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2) \end{cases}$$

مثال ۵

معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج و آن را به صورت فیزیکی برای خود توصیف کنید.



فرض : $x_1 > x_2$

b_1 و k_1 تعریف می‌شوند؟ x_1 ←

b_3 و k_3 ~ ~ = x_2

b_2 و k_2 ~ ~ = $x_1 - x_2$

$f_{k_1} = k_1 x_1$

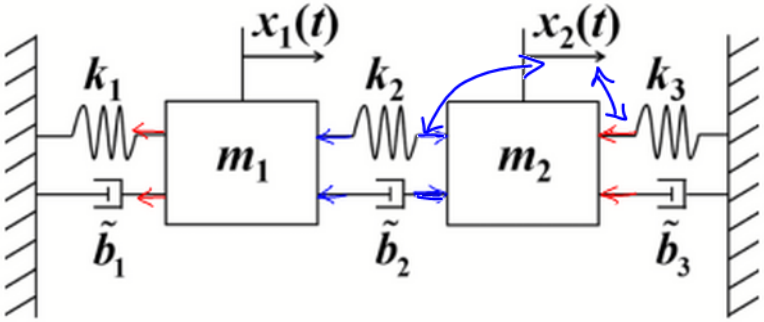
$f_{b_1} = b_1 \frac{dx_1}{dt}$

$f_{k_2} = k_2 x_2$

$f_{b_2} = b_3 \frac{dx_2}{dt}$

$f_{k_2} = k_2 (x_1 - x_2)$

$f_{b_2} = b_2 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)$

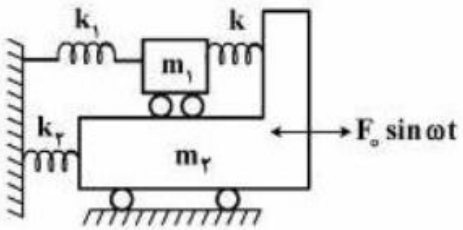


$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\left(k_1x_1 + b_1\dfrac{dx_1}{dt} + k_2(x_1-x_2) + b_2\left(\dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{dx_2}{dt}\right)\right) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = k_2(x_1-x_2) + b_2\left(\dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{dx_2}{dt}\right) - \left(k_3x_2 + b_3\dfrac{dx_2}{dt}\right) \end{cases}$$

با فرض $x_2 > x_1$ معادلات را حل کنید.

مثال ۶ (برق ۸۳)

معادلهٔ حرکت سیستم روبه‌رو، کدام است؟

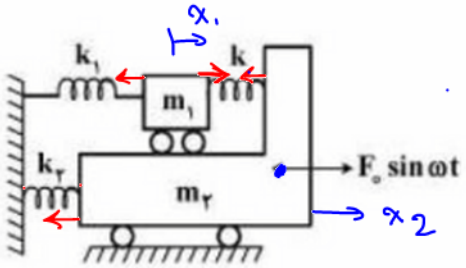


۱) $\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+(k_1+k)x_1-kx_2=0 \\ &m_2\ddot{x}_2-kx_1+(k_2+k)x_2=F_0\sin(\omega t)\end{aligned}$

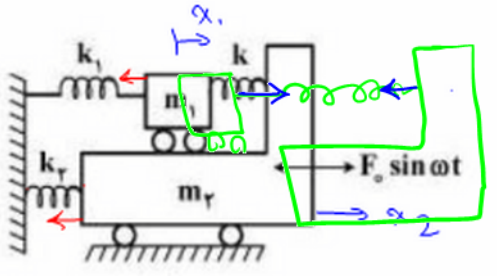
۲) $\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+(k_1-k)x_1+kx_2=0 \\ &m_2\ddot{x}_2+kx_1+(k_2-k)x_2=F_0\sin\omega t\end{aligned}$

۳) $\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+k_1x_1+k_2x_2=0 \\ &m_2\ddot{x}_2+k_2x_1+(k_2+k_1)x_2=F_0\sin\omega t\end{aligned}$

۴) $\begin{aligned} &(m_1+m_2)\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-kx_2=0 \\ &(m_1-m_2)\ddot{x}_2+(k)x_1-(k_1+k)x_2=F_0\sin\omega t\end{aligned}$



$x_2 > x_1$ فرض

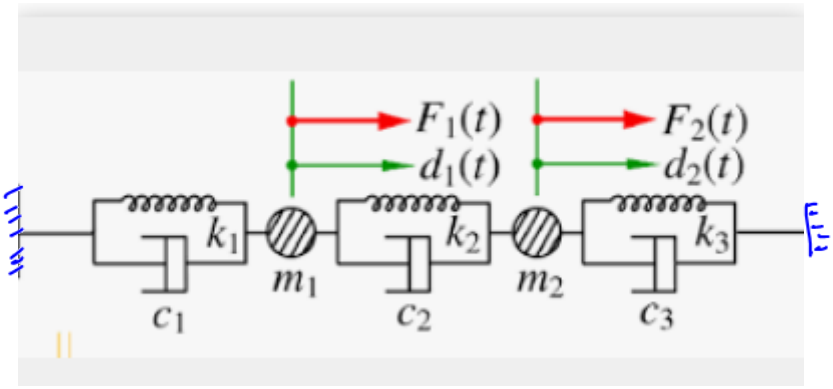


$$f_{k_1} = k_1 x_1 \qquad f_{k_2} = k_2 x_2 \qquad F_k = k(x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = F_0 \sin(\omega t) - \left(k_2 x_2 + k(x_2 - x_1)\right) \end{cases}$$

مثال ۷

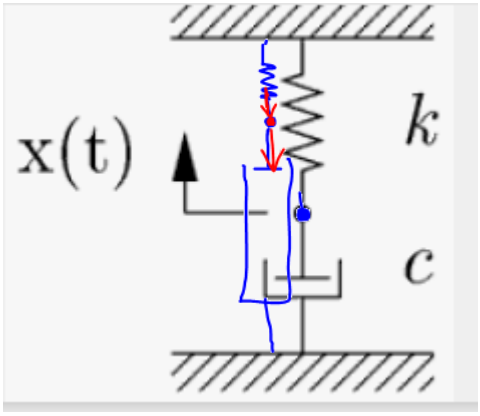
معادلات حرکت سیستم زیر را بدست آورید (تمرین)



نکته: اگر جرم در سیستم وجود نداشته باشد، با فرض $M = 0$ قانون دوم نیوتن برای مجموعه المانها نوشته می‌شود.

مثال ۸

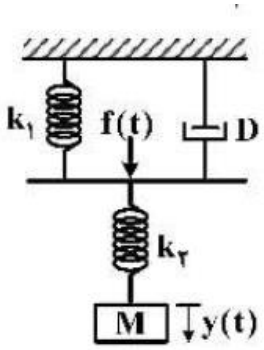
در سیستم زیر معادلات حرکت را استخراج کنید.



$$0 \times \frac{d^2x}{dt^2} = 0 - \left(kx + c\frac{dx}{dt} \right) \longrightarrow \boxed{kx + c\frac{dx}{dt} = 0}$$

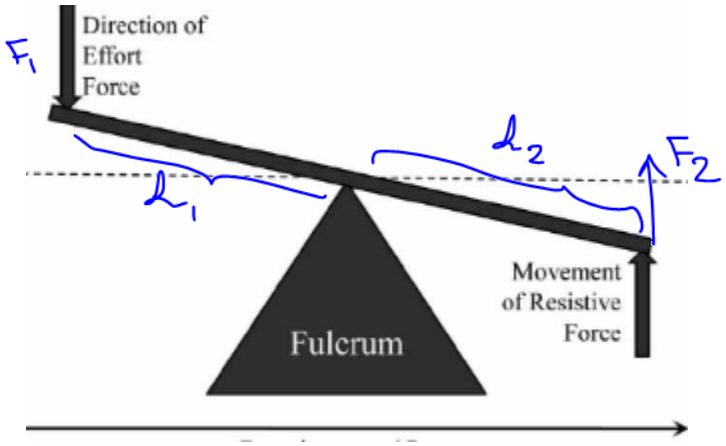
مثال ۹

در سیستم زیر، معادلات حرکت سیستم را بدست آورید. (عین)



❖ المان انتقال دهنده نیرو در حرکت خطی: اهرم

اهرم به عنوان یک المان انتقال دهنده نیرو جهت افزایش یا کاهش میزان نیرو با استفاده از تغییر طول اهرم استفاده می‌شود که روابط آن به صورت زیر می‌باشد:



F_2: اثر F_1 در سمت مقابل اهرم

$$F_1 L_1 = F_2 L_2$$

هرچقدر طول اهرم کمتر باشد نیرو بیشتر است.

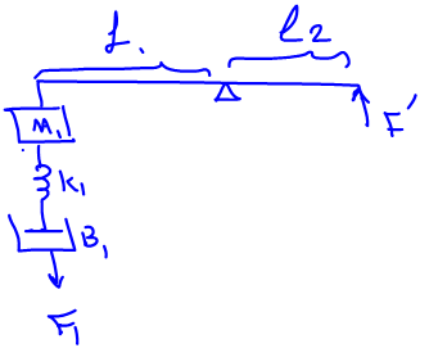
$$F_1 = 10N \quad L_1 = 10m \quad L_2 = 1m \quad F_2 = ? \quad 100\,N$$

طول L_2 ۱۰ برابر کم‌تر از L_1

نیروی سمت L_2 ۱۰ برابر بزرگ‌تر از نیروی سمت L_1

✓ **نکته** اهرم در انتقال نیرو، جهت نیرو و در نتیجه جهت حرکت را معکوس می‌کند.

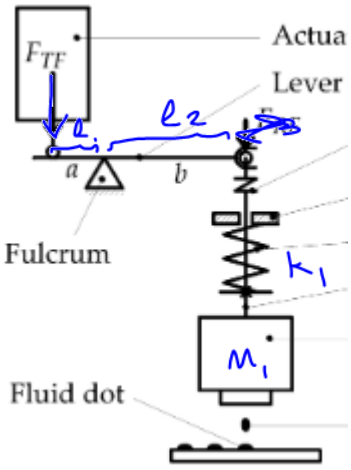
✓ **نکته** هرگاه در مسأله‌ای المان اهرم دیدید، اول تاثیر آن‌را در نظر گرفته و اهرم را حذف کنید. یعنی با استفاده از روابط زیر، المانها را در یک سمت اهرم انتقال دهید.



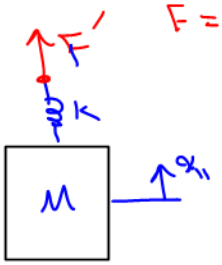
اثر در طرف دوم	المان در طرف اول
$\frac{F_1 L_1}{L_2}$	نیروی F_1
$\frac{M_1 L_1^2}{L_2^2}$	جرم M_1
$\frac{k_1 L_1^2}{L_2^2}$	فنر k_1
$\frac{B_1 L_1^2}{L_2^2}$	دمپر B_1

مثال ۱۰

معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.

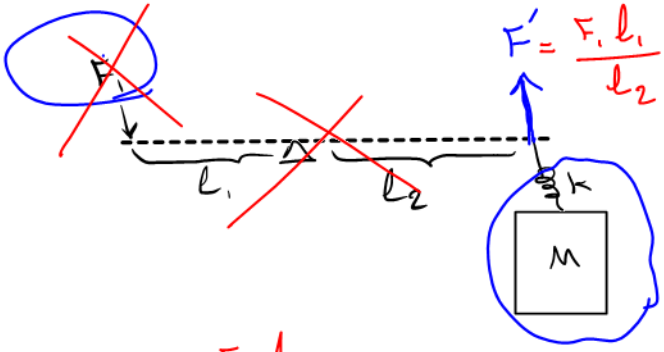


F' = اثر F_1 در طرف دوم $= \frac{F_1 l_1}{l_2}$

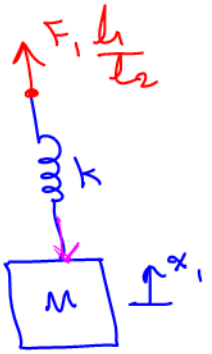


$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = F' - kx_1$$

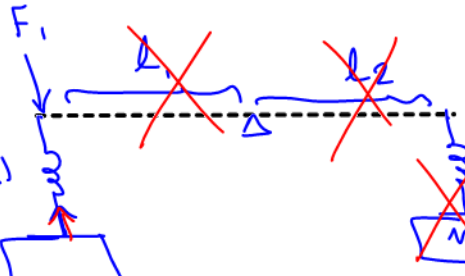
$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_1\frac{l_1}{l_2} - kx_1$$



$F_1 l_1 = F' l_2 \qquad F' = \frac{F_1 l_1}{l_2}$



$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = F_1\frac{l_1}{l_2} - kx_1$$



اثر k در طرف اول

اثر M در طرف اول

معادل جابجایی x_1 در طرف اول

معادل جرم M در طرف اول $= M\frac{l_2^2}{l_1^2}$

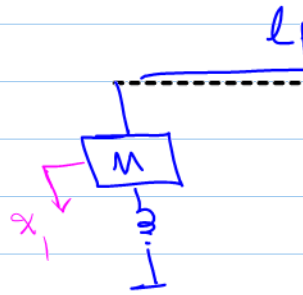
~ ثابت k ~ $= k\frac{l_2^2}{l_1^2}$

~ جابجایی x_1 در طرف اول $= x_1\frac{l_1}{l_2}$

$$M\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\frac{d^2}{dt^2}\left(x_1\frac{l_1}{l_2}\right) = F_1 - k\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\left(x_1\frac{l_1}{l_2}\right)$$

$$\frac{l_1}{l_2}\left(M\,\frac{l_2^2}{l_1^2}\times\frac{l_1}{l_2}\,\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)=\left(F_1-k\,\frac{l_2^2}{l_1^2}\times\frac{l_1}{l_2}\times x_1\right)\frac{l_1}{l_2}$$

$$M\,\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_1\,\frac{l_1}{l_2}-kx_1$$



معامل عزم M بالنسبة لـ h $= M\,\frac{l_f^2}{l_h^2}$

معامل ك، وهي تؤثر بـ x_2 $= k\,\frac{l_f^2}{l_h^2}$

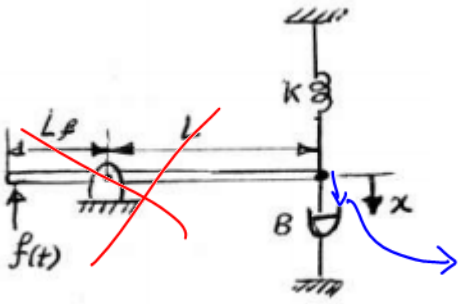
معامل B بالنسبة لـ f $= B\,\frac{l_h^2}{l_f^2}$

معامل x_1 بالنسبة لـ h $= x_1\,\frac{l_h}{l_f}$

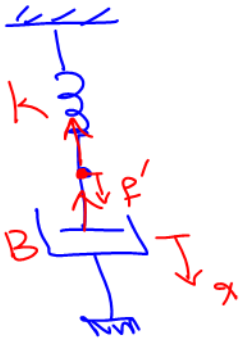
f بالنسبة لـ x_2 $= x_2\,\frac{l_f}{l_h}$

مثال ۱۱

معادلات حرکت سیستم زیر را بدست آورید.



$$F(t)\frac{l_f}{l} = F'$$

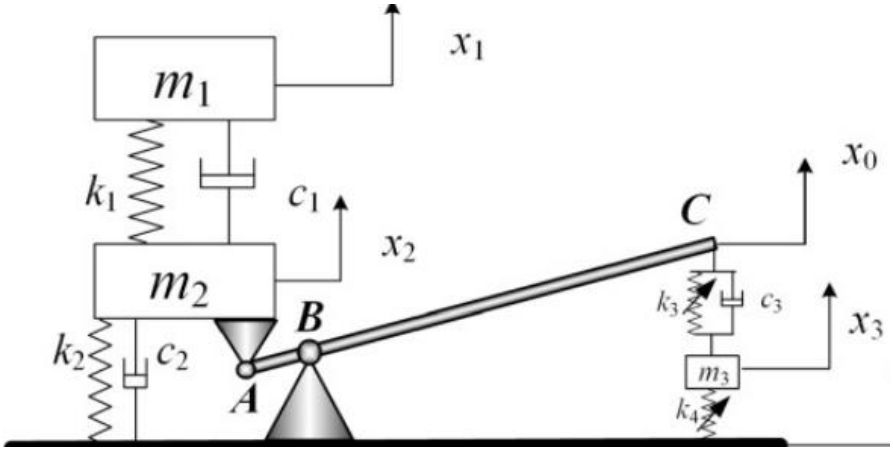


$$0 \times \frac{d^2x}{dt^2} = f(t)\frac{l_f}{l} - \left(kx + B\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\boxed{B\frac{dx}{dt} + kx = \frac{l_f}{l}F(t)}$$

تمرین

معادلات حرکت سیستم زیر را بدست آورید.



یه مرور باهم بکنیم:

۱. مدل‌سازی = قانون دوم نیوتن

۲. نیروی فنر و دمپر متناسب با تغییر طول است نه جابجایی.

۳. اگر بیش از یک جرم داریم برای هر جرم یک قانون نیوتن می‌نویسیم.

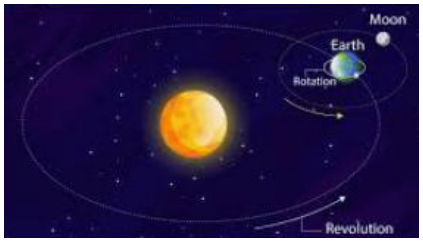
۴. فنر و دمپر اگر بین دو جرم مشترک نباشند، قطعا نیرویی مخالف جهت حرکت ایجاد می‌کنند.

۵. اگر بیش از یک جرم داریم و بین دو جرم فنر یا دمپر مشترک است، اول مسأله فرض کنید که $x_1>x_2$ یا $x_2>x_1$.

۶. فنر یا دمپر اگر بین دو جرم مشترک باشند، نیروی آن برای یک جرم مخالف جهت حرکت و برای دیگری موافق جهت حرکت می‌باشد.

۷. اهرم جهت نیرو و حرکت را معکوس می‌کند.

۸. هرگاه در مسأله‌ای المان اهرم دیدید، اول تاثیر آن‌را در نظر گرفته و اهرم را حذف کنید.



مدلسازی- حرکت دورانی

حرکت دورانی پرکاربردترین نوع حرکت در صنایع مختلف است، چرا که اکثر موتورها به صورت دورانی حرکت می‌کنند و لذا عملگرها در مهندسی عمدتاً دارای حرکت دورانی هستند.

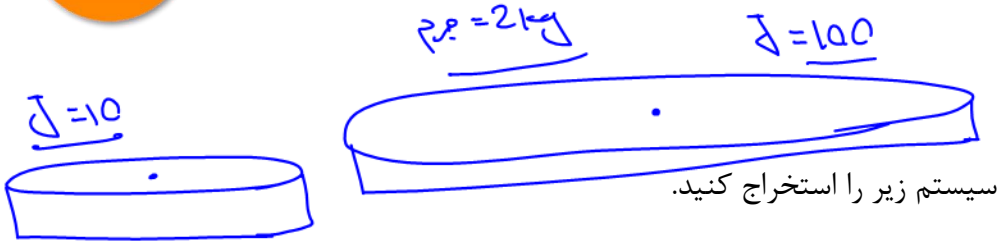
مدلسازی حرکت دورانی نیز کاملاً مشابه حرکت خطی است و از قانون دوم نیوتن استفاده خواهیم کرد، تنها تفاوت در معادلسازی متغیرها می‌باشد که در جدول زیر آورده شده است.

دوراني	خطي
ممان اینرسی J	جرم M
گشتاور T	نیرو F
دوران Θ	جابجایی خطی x
فنر پیچشی K	فنر خطی K
دمپر B	دمپر B

قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی

گشتاورهای مخالف − گشتاورهای موافق = شتاب × ممان

$$\text{جرم} \times \frac{d^2x}{dt^2} = \text{نیروهای موافق} - \text{نیروهای مخالف}$$



مثال ۱۲

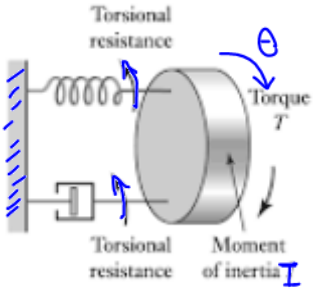
معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.



$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - a \rightarrow J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T$$

مثال ۱۳

معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.



$T_{فنر} = k \times \theta$ $\quad T_{دمپر} = B \frac{d\theta}{dt}$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = T - \left(k\theta + B \frac{d\theta}{dt}\right) \checkmark$$

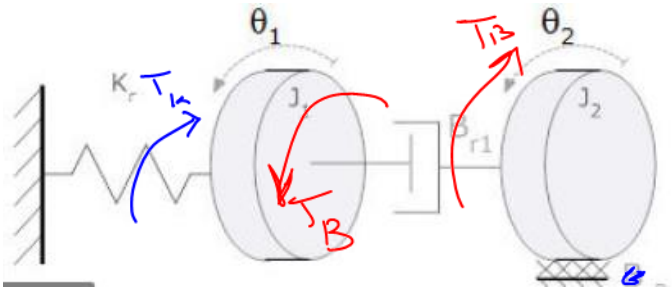
✓ نکته هرگاه بیش از یک ممان اینرسی داشته باشیم، برای هر ممان اینرسی یک معادله نیوتن خواهیم نوشت.

✓ نکته اگر فنر یا دمپر تنها به یک ممان اینرسی متصل باشد، نیروی آن مخالف حرکت خواهد بود.

✓ نکته اگر فنر یا دمپر بین دو ممان اینرسی قرار بگیرد، نیروی آن برای یک ممان اینرسی موافق و برای ممان اینرسی بعدی مخالف جهت حرکت خواهد بود.

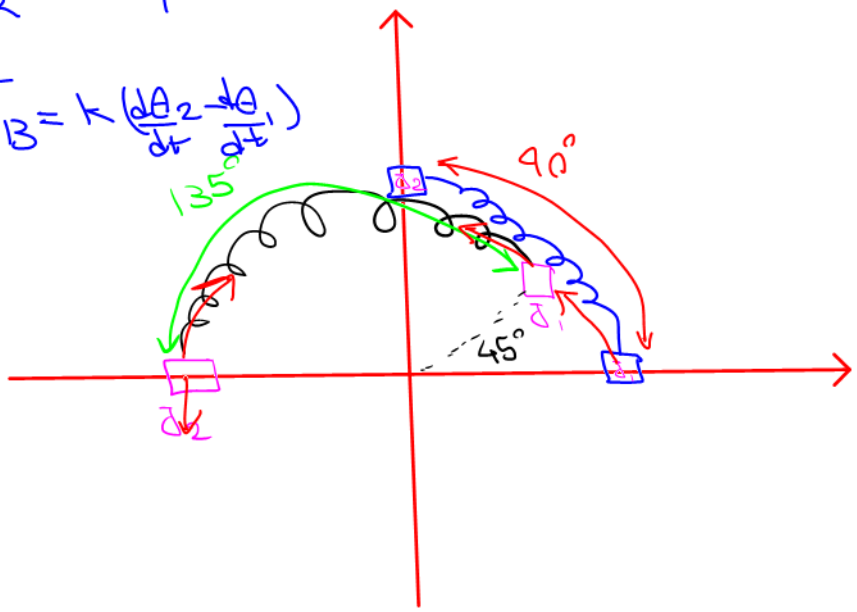
مثال ۱۴

معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.



فرض: $\theta_2 > \theta_1$

$$\begin{cases} T_K = k\,\theta_1 \\ T_B = k\left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt}\right) \end{cases}$$



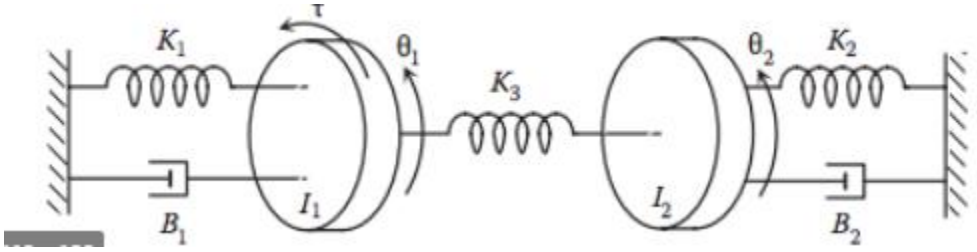
$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = T_B - T_K$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -T_B$$

$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = k\left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt}\right) - k\theta_1 \\ J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -k\left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt}\right) \end{cases}$$

مثال ۱۵

معادلات حرکت سیستم زیر را بدست آورید.



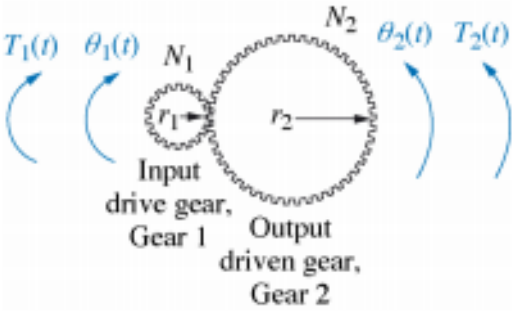
100 Nm ← 1 Nm

المان انتقال دهنده گشتاور: چرخ دنده



چرخ دنده همانند اهرم جهت گشتاور و حرکت دورانی را معکوس می‌کند.

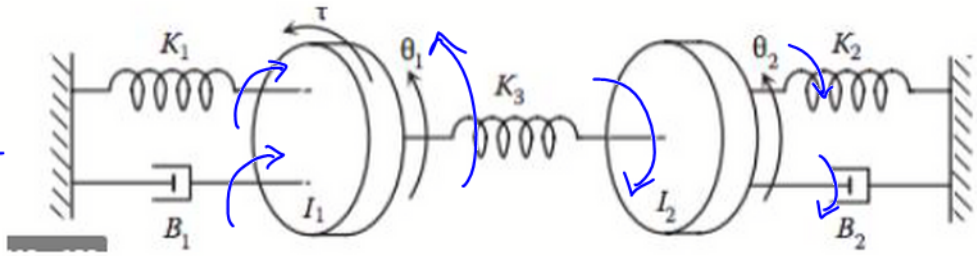
روابط انتقال چرخ‌دنده:



$$\begin{cases} \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{N_2}{N_1} \\ \dfrac{\theta_2}{\theta_1} = \dfrac{N_1}{N_2} \end{cases}$$

$T_{k_1} = k_1 \theta_1$

$T_{B_1} = B_1 \frac{d\theta_1}{dt}$

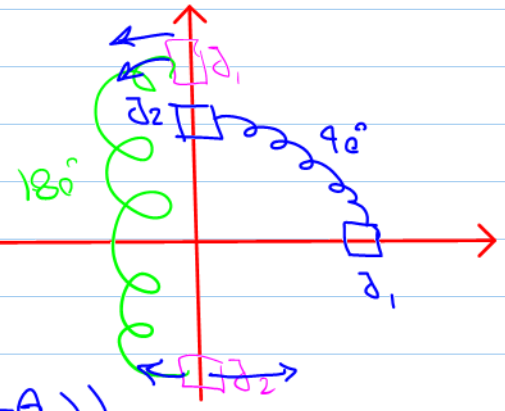


$T_{k_2} = k_2 \theta_2$

$T_{B_2} = B_2 \frac{d\theta_2}{dt}$

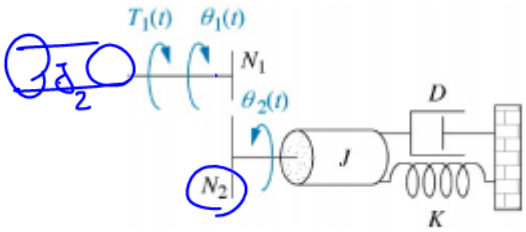
$T_{k_3} = k_3(\theta_2 - \theta_1)$

بفرض: $\theta_2 > \theta_1$



$$\begin{cases} J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = T + k_3(\theta_2 - \theta_1) - (k_1\theta_1 + B_1 \frac{d\theta_1}{dt}) \\ J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -(k_2\theta_2 + B_2 \frac{d\theta_2}{dt} + k_3(\theta_2 - \theta_1)) \end{cases}$$

✓ **نکته** در چرخ‌دنده‌ها بهترین شیوه این است که ابتدا تمام المان‌ها و گشتاورها را به یک سمت منتقل کنید و سپس مساله را همانند حرکت دورانی ساده مدلسازی کنید.



$J_2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$

معادل المانها در طرف اول:

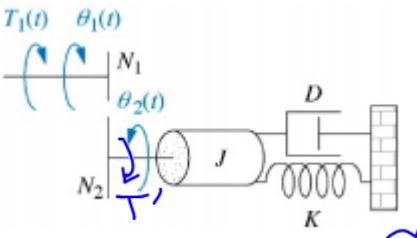
$$J_{eq1} = J \times \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$K_{eq1} = K \times \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$D_{eq1} = D \times \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

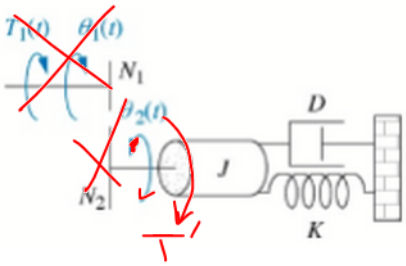
مثال ۱۶

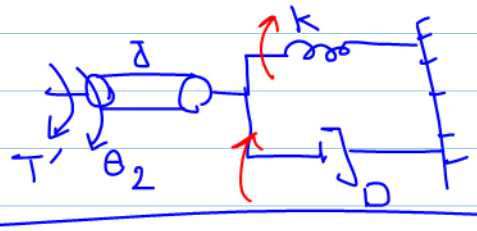
معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.



معادل T_1 در طرف دوم $= T' \rightarrow$

$\frac{T'}{T_1} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow T' = \frac{N_2}{N_1} T_1$



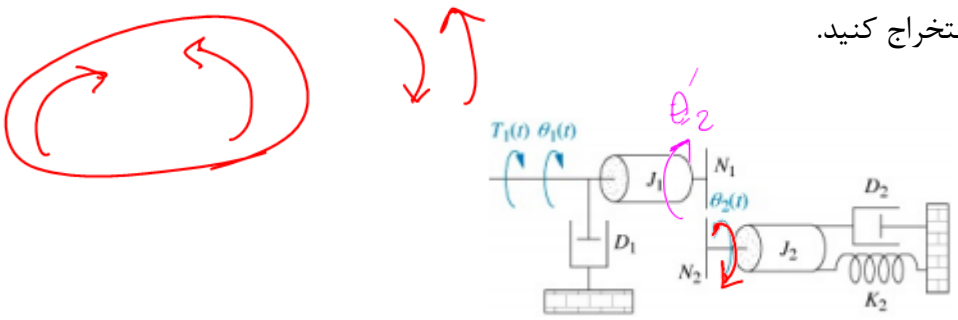


$$J\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = T_1\frac{N_2}{N_1} - k\theta_2 - D\frac{d\theta_2}{dt}$$

تمرین: سعی کنید که المانهای طرف دوم را به طرف اول منتقل کنید.

مثال ۱۷

معادلات حرکت سیستم زیر را استخراج کنید.

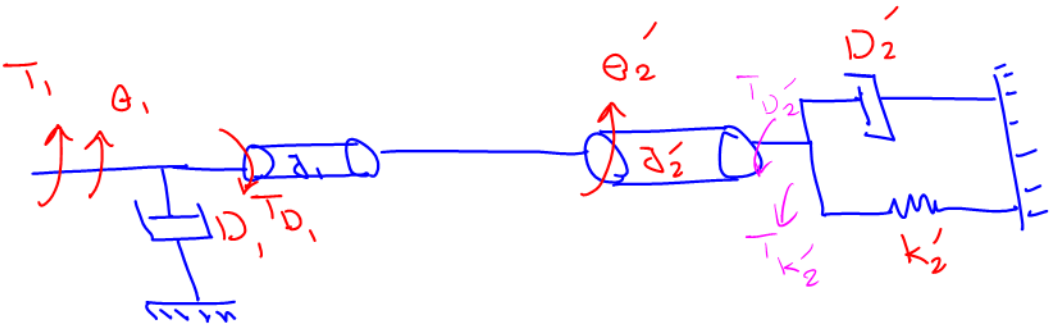


$$J'_2 = J_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \qquad k'_2 = k_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \qquad D'_2 = D_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$\theta'_2 = ? \quad \frac{N_2}{N_1}\theta_2$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

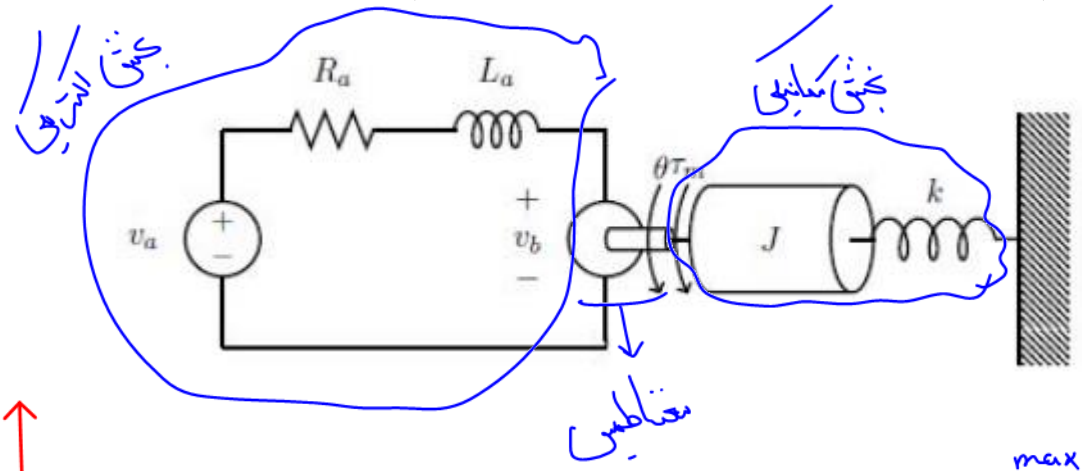
رابطه چرخ دنده

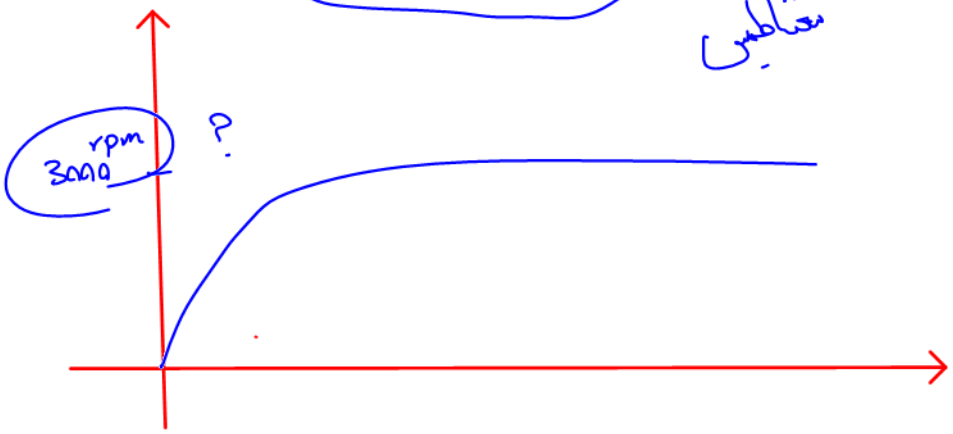


$$\begin{cases} J_1 \dfrac{d^2\theta_1}{dt^2} = T_1 - T_{D_1} \quad ; \quad T_{D_1} = D_1 \dfrac{d\theta_1}{dt} \\ J'_2 \dfrac{d^2\theta_2}{dt} = -\left(D'_2 \dfrac{d\theta'_2}{dt} + k'_2 \theta'_2\right) \; ; \end{cases}$$

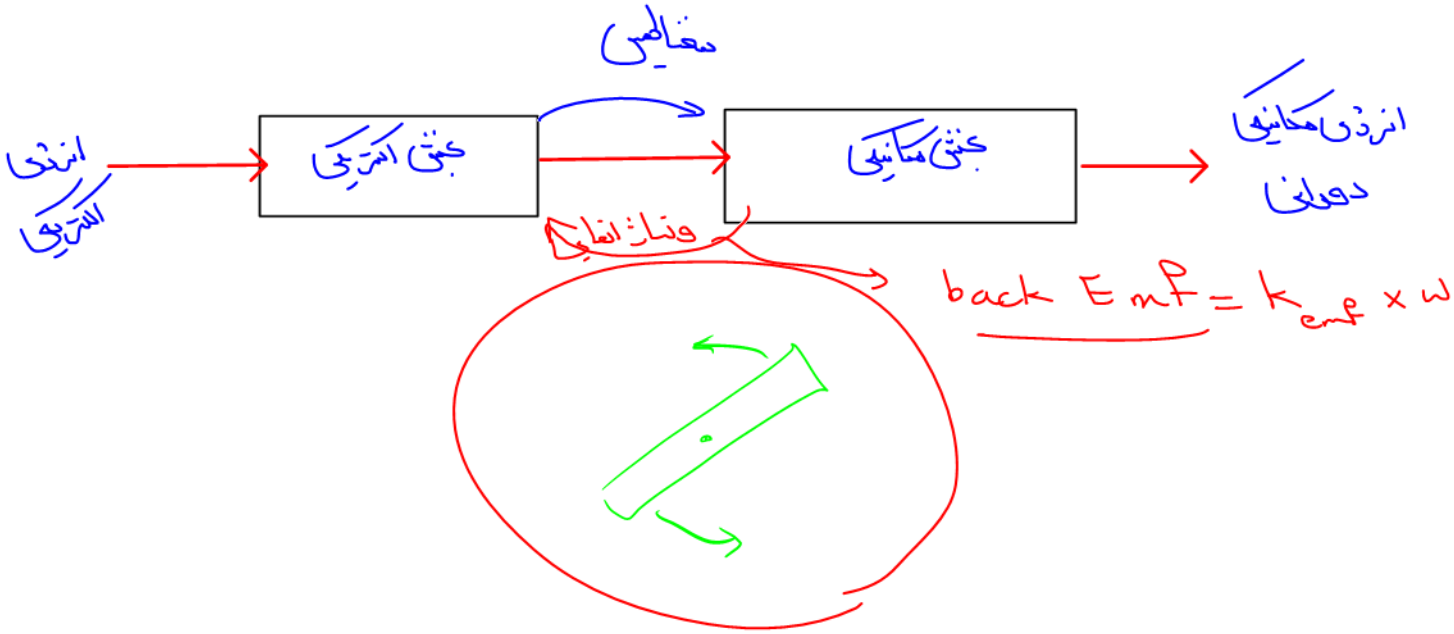
مثال ۱۸

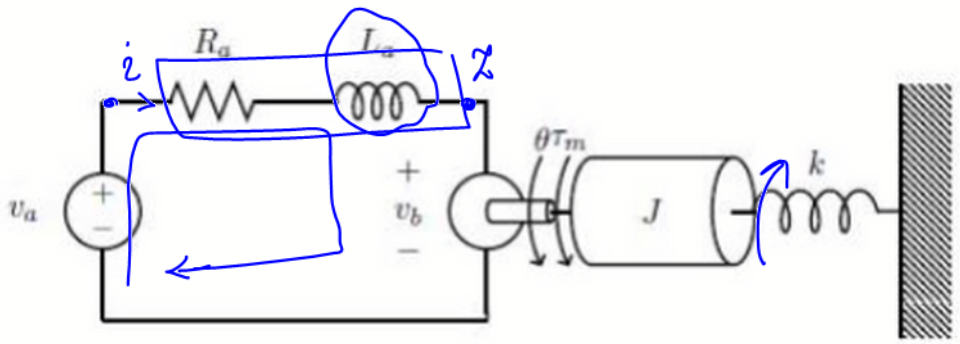
در سیستم سروموتور زیر، معادلات توصیف کننده دینامیک سیستم را بدست آورید.





max: 7000 rpm





$$v_b = k_{emf}\, w$$

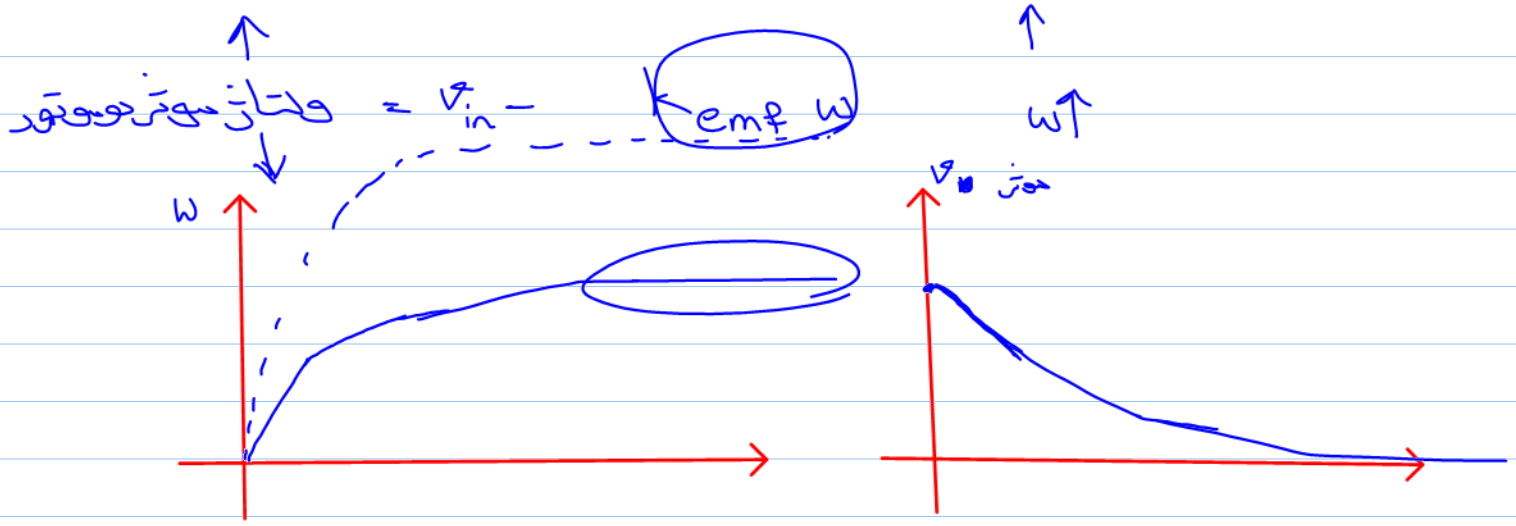
$$w = \frac{d\theta}{dt}$$

$$-v_a - R_a i - L_a \frac{di}{dt} + v_b = 0 \qquad i = \frac{v_a - v_b}{R_a + L_a s}$$

$$\begin{cases} v_a - k_{emf}\, w = R_a i + L_a \dfrac{di}{dt} \\ J \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = k_a i - k\theta \end{cases} \qquad T_m = k_a i$$

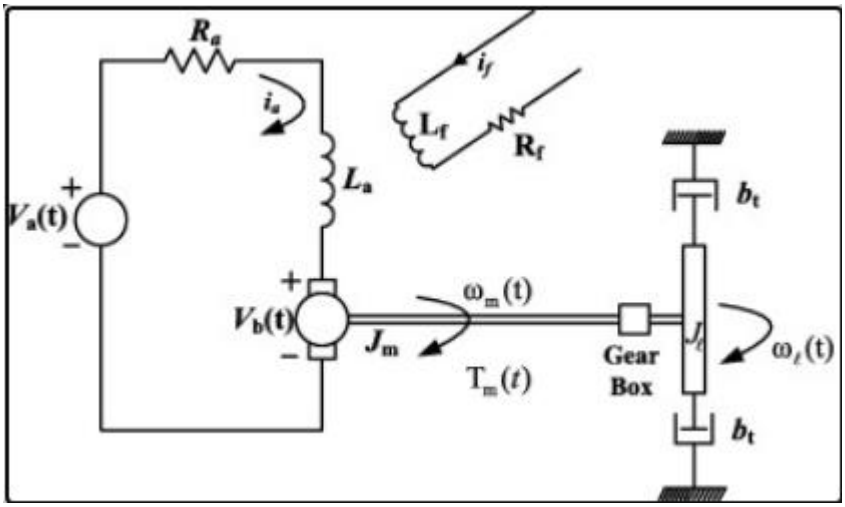
$$v_{in} \longrightarrow i \longrightarrow T_m \longrightarrow w \qquad (v_b \text{ feedback})$$

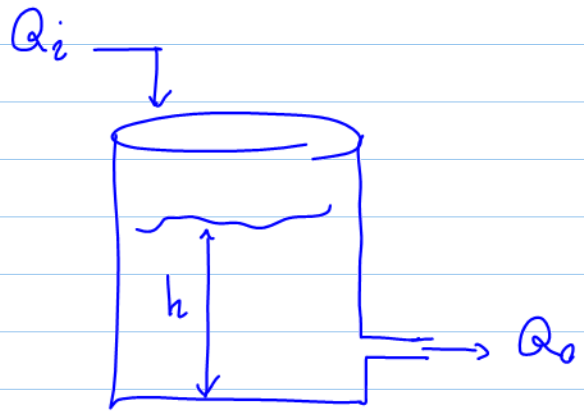
$$\begin{cases} v_{in} - k_{emf}\, w = R_a i + L_a \dfrac{di}{dt} \\ J \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = k_a i \end{cases}$$



تمرین

در سیستم زیر، معادلات دینامیک سیستم را بدست آورید.



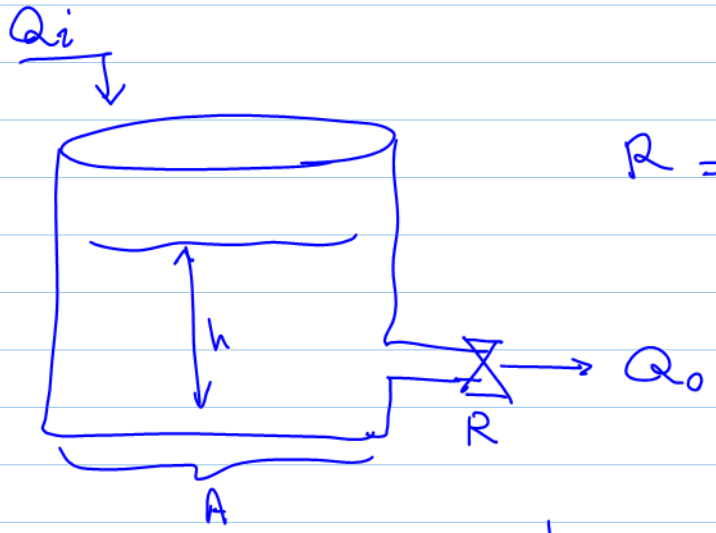


تغيرات حجم مائع ؟

$$V = A \times h \qquad \frac{dV}{dt} = A \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\text{تغيرات حجم } V}{\frac{d}{dt}} = Q_i - Q_o \qquad \frac{dV}{dt} = Q_i - Q_o$$

$$\boxed{A \frac{dh}{dt} = Q_i - Q_o}$$



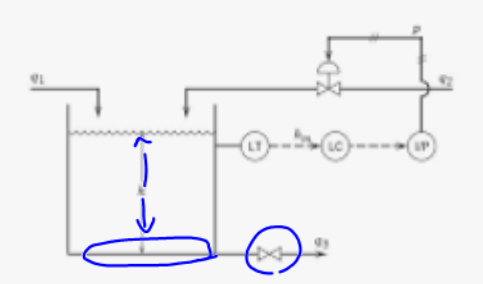
$$R = \begin{cases} \frac{h}{Q} & \text{غير متلاطم} \\ \frac{2h}{Q} & \text{متلاطم} \end{cases}$$

$$2 = R = \frac{h}{Q_o} \qquad \boxed{Q_o = \frac{h}{2}}$$

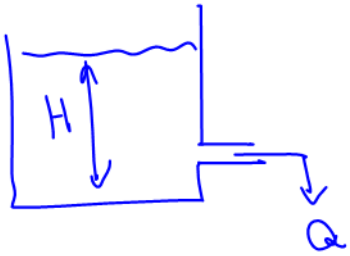
$$A \frac{dh}{dt} = Q_i - \left(\frac{h}{2}\right) \checkmark$$

سیستم های سطح مایع

در این بخش هدف مدلسازی سیستم‌های سطح مایع می‌باشد که در واقع می‌خواهیم میزان تغییرات سطح مایع درون مخازن را به صورت ریاضی بیان کنیم.



❖ مقاومت سیستم های سطح مایع:



$$R = \frac{\text{تغییر اختلاف سطح}}{\text{تغییر آهنگ جریان سیال}}$$

برای رابطه آهنگ جریان و اختلاف سطح دو حالت داریم:

در جریان‌های لایه‌ای(بدون تلاطم) به صورت زیر است:

$$Q = KH$$

که در رابطه فوق،

Q : آهنگ جریان مایع در حالت ماندگار

K : ضریب ثابت

H: ارتفاع در حالت ماندگار

$$R = \frac{H}{Q}$$

بنابراین در این حالت داریم:

$$1 = R = \frac{H}{Q} \longrightarrow Q \times 1 = H \longrightarrow Q = H$$

در جریانهای متلاطم روابط به صورت زیر خواهد بود:

$$Q = K\sqrt{H}$$

و برای مقاومت خواهیم داشت:

$$R = \frac{2H}{Q}$$

برای مدلسازی این سیستم‌ها، باید توجه کرد که هدف مدلسازی تغییرات ارتفاع سطح مایع درون مخازن است.

برای این منظور، از معادل قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:

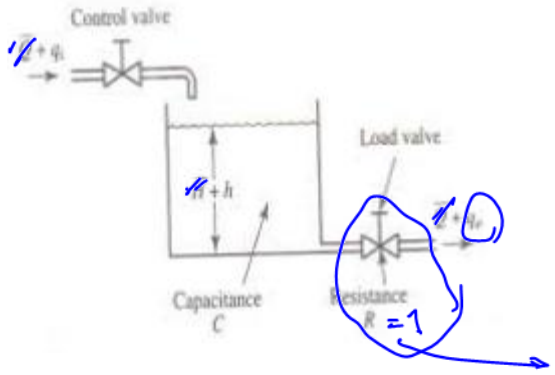
تغییرات حجم مایع درون مخزن = جریانهای ورودی – جریانهای خروجی

و با توجه به اینکه سطح مقطع مخازن ثابت است، لذا خواهیم داشت:

$$A\frac{dh}{dt} = q_i - q_o$$

مثال ۱۹

در سیستم زیر، با فرض جریان لایه‌ای و فرض مقاومت شیر خروجی ثابت ۱ و سطح مقطع ۲ متر مربع، معادلات سیستم را بنویسید.

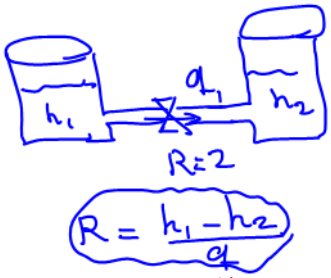


✓ نکته: هرگاه بیش از یک مخزن داشته باشیم، برای هر مخزن، یک معادله خواهیم نوشت.

✓ نکته: هر گاه شیری بین دو مخزن قرار گیرد، خواهیم داشت:

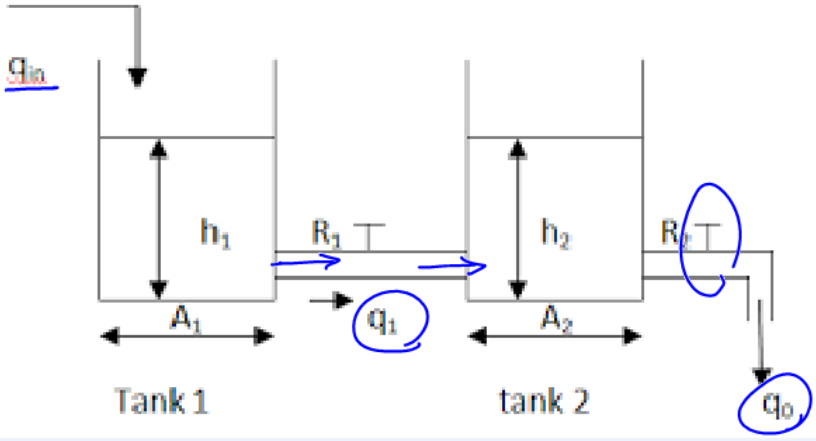
در حالت جریان لایه ای $R = \frac{\text{اختلاف ارتفاع دو طرف مخزن}}{\text{جریان خروجی – جریان ورودی}}$

در حالت جریان متلاطم $R = \frac{2(\text{اختلاف ارتفاع دو طرف مخزن})}{\text{جریان خروجی – جریان ورودی}}$



مثال ۲۰

در سیستم سطح مایع زیر، با فرض اینکه $A_1 = 1\,m^2.\ A_2 = 2m^2.\ R_1 = R_2 = 1$ باشد، یکبار با فرض جریان لایه ای و یکبار با فرض جریان متلاطم، معادلات دیفرانسیل توصیف کننده تغییرات سطح مایع را بنویسید.



$$\begin{cases} A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1 \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_o \end{cases}$$

$R = \frac{\Delta h}{q}$ ← جریان لایه ای: فرض

$R_1 = \frac{h_1 - h_2}{q_1}$, $R_2 = \frac{h_2}{q_o}$

$$1 = \frac{h_1 - h_2}{q_1} \longrightarrow \boxed{q_1 = h_1 - h_2}$$

$$1 = \frac{h_2}{q_0} \qquad \boxed{q_0 = h_2}$$

$$\begin{cases} 1\ \dfrac{dh_1}{dt} = q_{in} - (h_1 - h_2) \\ 2\ \dfrac{dh_2}{dt} = h_1 - h_2 - h_2 \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2\,\Delta h}{q_1} = \frac{2(h_1 - h_2)}{q_1} = 1$$

حزن متلاطم:

$$\boxed{q_1 = 2(h_1 - h_2)}$$

$$R_2 = \frac{2h_2}{q_0} = 1 \longrightarrow \boxed{q_0 = 2h_2}$$

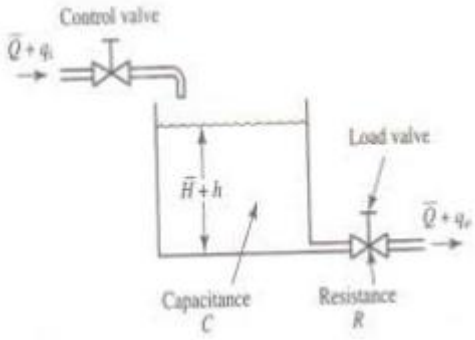
$$\begin{cases} 1\ \dfrac{dh_1}{dt} = q_{in} - 2(h_1 - h_2) \\ 2\ \dfrac{dh_2}{dt} = 2(h_1 - h_2) - 2h_2 \end{cases}$$

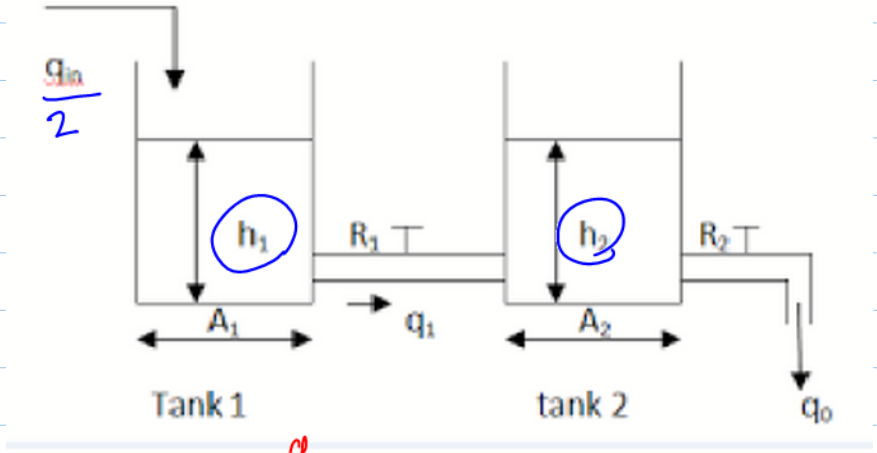
مثال ۲۱ عَرِن

در سیستم سطح مایع شکل زیر فرض کنید آهنگ خروج مایع Q از شیر و ارتفاع H به صورت زیر مرتبط هستند.

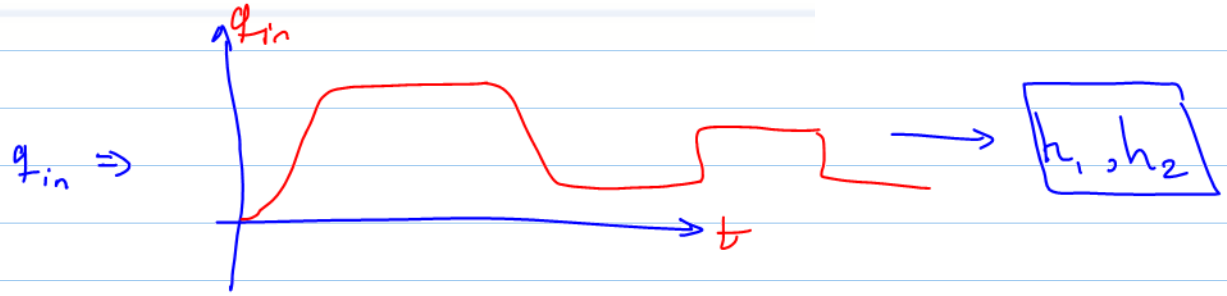
$$Q = 0.01\sqrt{H}$$

و فرض کنید که آهنگ جریان ورودی $0.015\ m^3/sec$ است، و ارتفاع ثابت می ماند. در $t = 0$ شیر ورودی بسته می‌شود و در نتیجه برای زمانهای بعدی جریان ورودی صفر است. زمان لازم برای رسیدن ارتفاع به نصف مقدار اولیه را با فرض سطح مقطع $2m^2$ را پیدا کنید.

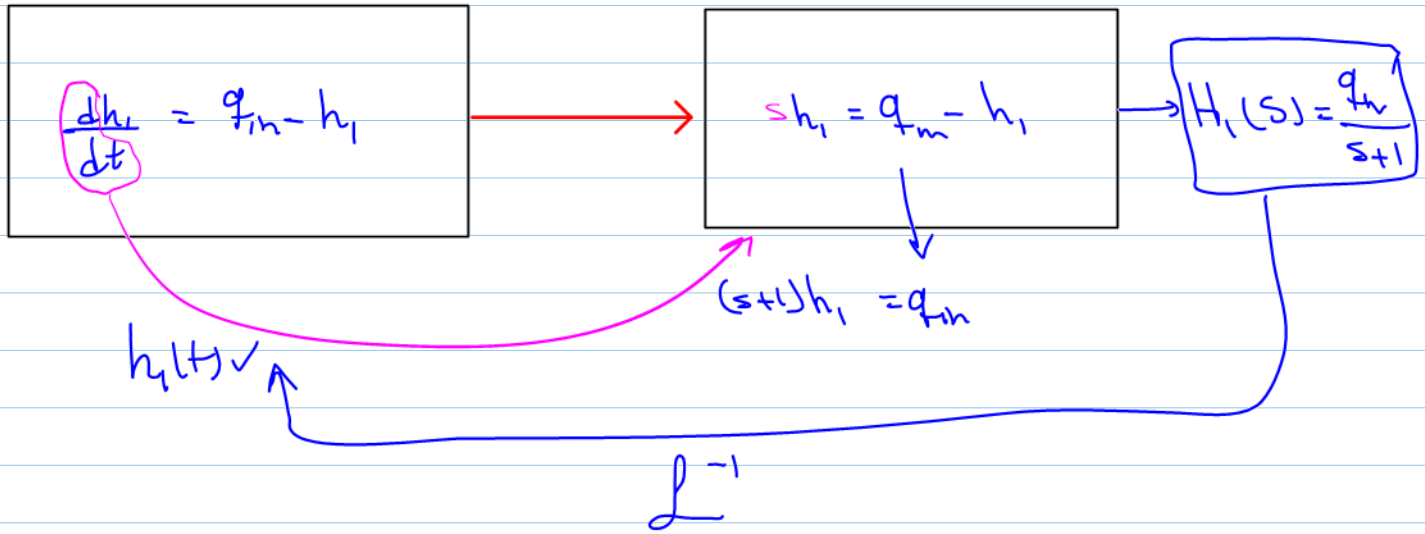


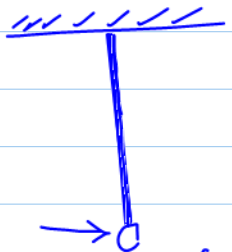


$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - h_1 + h_2 \\ 2\frac{dh_2}{dt} = h_1 - 2h_2 \end{cases}$$



$h_1(t) = ?$





2s 1 N

چیست؟

0.5 s

فرکانس طبیعی 0.25 s

فرکانس؟



120 km/h ?

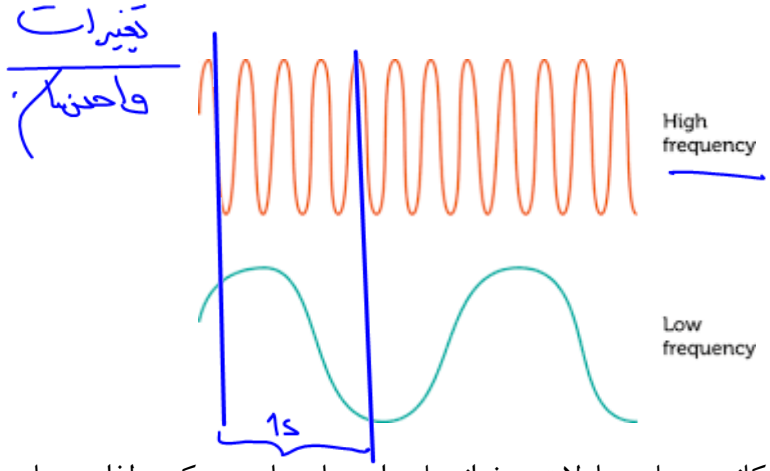
مسیل مرتبط

920 rpm

110 km/h ⟶ 150 km/h

نمایش تابع تبدیل و مقدمه تبدیل لاپلاس

❖ مفهوم فرکانس میزان تغییرات در واحد زمان



انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس، حل معادلات دیفرانسیل را بسیار ساده می‌کند. لذا به جای نمایش معادله دیفرانسیل، از نمایش حوزه فرکانس استفاده می‌شود.

مدل‌سازی: معادلات دیفرانسیل حوزه زمان توصیف کننده سیستم را بدست آوردیم. اما هدف نهایی از این معادلات چیست؟

مثال: $\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{dy}{dt} = u(t) + \frac{du(t)}{dt}$

روابط ساده و قابل حل می‌شود. $\rightarrow$ فرکانس حوزه s $\xrightarrow{\text{لاپلاس}}$ حوزه زمان

$y(t)$ خروجی در حوزه زمان $\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}}$ تحلیل انجام شده و خروجی تعیین می‌شود. $\rightarrow$

یادآوری لاپلاس: L (Laplace)

S: اعداد مختلط

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s)$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt$$

$$u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1$$

$$e^{at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s-a}$$

$$\sin(at) \xrightarrow{L} \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\cos(at) \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(0^+) \rightarrow \text{مقدار اولیه } x \text{ در حوزه زمان}$$

$$L\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) \rightarrow \text{فرض شرایط اولیه صفر}$$

$$L\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = s^n X(s) \rightarrow \text{هر مشتق در حوزه زمان} = \text{یک } s \text{ در حوزه فرکانس}$$

$$L(x(t-a)) = e^{-as}X(s)$$

$$L\left(e^{-at}x(t)\right) = X(s+a)$$

$$\text{تابع تبدیل} = \frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}$$

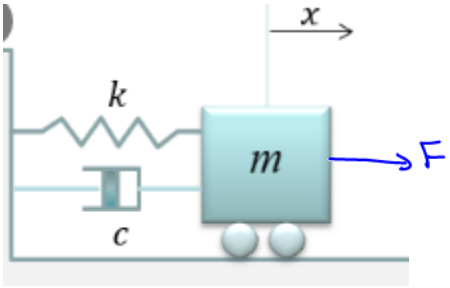
بنابراین به ازای هر ورودی و خروجی مشخص، یک تابع تبدیل بدست خواهد آمد.

مثال ۲۲

در سیستم زیر در حالتهای زیر تابع تبدیل سیستم را بدست آورید.

جابجایی جرم M به عنوان خروجی سیستم،

سرعت جرم M به عنوان خروجی سیستم،



تابع تبدیل خروجی نسبت به ورودی

بدست آوردن

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - kx(t) - c\dot{x}(t)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = ?$$

$$\begin{cases} x(t) \longrightarrow X(s) \\ F(t) \longrightarrow F(s) \end{cases}$$

$$ms^2X(s) = F(s) - kX(s) - csX(s)$$

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}}$$

✓ نکته: تابع تبدیل با فرض شرایط اولیه صفر به دست می‌آید.

نکته برای به دست آوردن تابع تبدیل، به جای هر مشتق در حوزه زمان یک s ضرب می‌کنیم.

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$$

نکته مهم : به دست آوردن تابع تبدیل بدون تعیین معادله دیفرانسیل در حرکت خطی:

فرکانس	حوزه زمان
Ms^2	M
Bs	B
K	K
Js^2	J

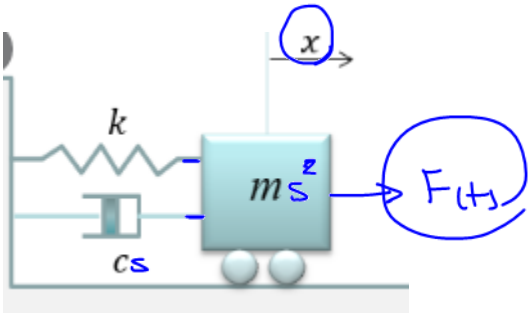
✓ روش ماتریسی تعیین تابع تبدیل بدون معادله دیفرانسیل

✓ یک جرم:

[نیروهای خارجی مخالف − مجموع نیروهای خارجی موافق] = جابجایی جرم × [مجموع تمام المان‌های متصل به جرم]

مثال ۲۳

در سیستم زیر با استفاده از روش ماتریسی و فرض جابجایی x به عنوان خروجی سیستم، تابع تبدیل را بدست آورید.



$$(ms^2+cs+k)X(s)=F(s)-0$$

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+cs+k}$$

✓ بیش از یک جرم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{bmatrix}$$

n: تعداد جرم‌ها

$$\begin{matrix} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11}: مجموع تمام المان‌های متصل به جرم M_1.

a_{22}: مجموع تمام المان‌های متصل به جرم M_2.

a_{22}: مجموع تمام المان‌های متصل به جرم M_3.

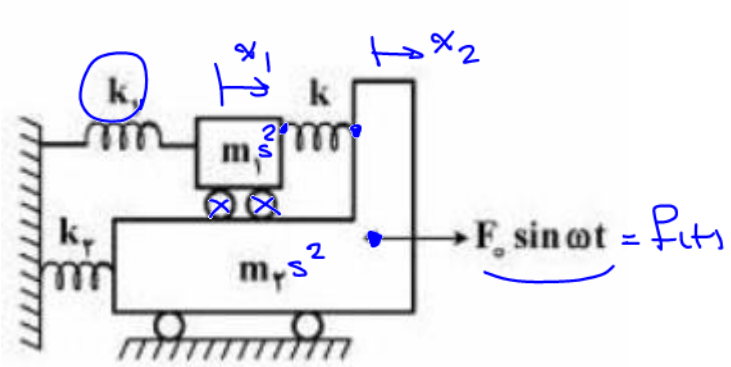
a_{12}: مجموع تمام المان‌های مشترک بین جرم M_1 و M_2. ×

a_{13}: مجموع تمام المان‌های مشترک بین جرم M_1 و M_3 ×

f_i: مجموع نیروهای خارجی مخالف حرکت وارد بر جرم iام-مجموع نیروهای خارجی موافق حرکت وارد بر جرم i ام

مثال ۲۴

در سیستم زیر با استفاده از روش ماتریسی و فرض جابجایی x_2 به عنوان خروجی سیستم، تابع تبدیل را بدست آورید.



$$\begin{matrix} & m_1 & m_2 \\ m_1 & \left[m_1 s^2 + k + k_1 \right] & \left[-k \right] \\ m_2 & \left[-k \right] & \left[m_2 s^2 + k + k_2 \right] \end{matrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = ?$$

$$\begin{bmatrix} (m_1 s^2 + k + k_1) X_1(s) - k X_2(s) \\ -k X_1(s) + (m_2 s^2 + k + k_2) X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (m_1 s^2 + k + k_1) X_1(s) = k X_2(s) \\ -k X_1(s) + (m_2 s^2 + k + k_2) X_2(s) = F(s) \end{cases}$$

$$X_1(s) = \frac{k X_2(s)}{m_1 s^2 + k + k_1}$$

$X_1(s)$?

$$-k\frac{k\,X_2(s)}{m_1 s^2+k+k_1}+(m_2 s^2+k+k_2)\,X_2(s)=F(s)$$

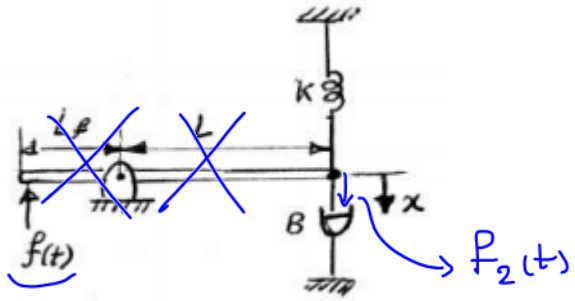
$$\left(\frac{-k^2}{m_1 s^2+k+k_1}+m_2 s^2+k+k_2\right)X_2(s)=F(s)$$

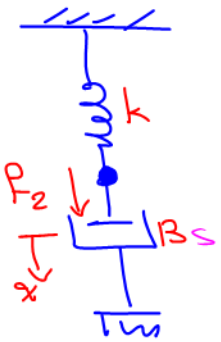
$$\frac{X_2(s)}{F(s)}=\frac{1}{\frac{-k^2}{m_1 s^2+k+k_1}+m_2 s^2+k+k_2}$$

مثال ۲۵(هوافضا ۹۳)

در سیستم شکل زیر تابع تبدیل $\frac{X(s)}{F(s)}$ کدام است؟ (جرم اهرم و اصطکاک تکیه‌گاه قابل صرف نظر کردن است.)

۱. $\frac{\frac{L_f}{L}}{K+Bs}$ ۲. $\frac{\frac{L}{L_f}}{Ks+B}$ ۳. $\frac{\frac{L_f}{L}}{Ks+B}$ ۴. $\frac{\frac{L}{L_f}}{K+Bs}$





$$f(t)\,L_f = f_2(t)\,L \longrightarrow f_2(t) = \frac{L_f}{L} f(t)$$

$$F_2(s) = \frac{L_f}{L} F(s)$$

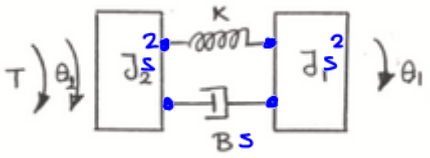
$$\left[\, 0 + Bs + k \,\right] X(s) = F_2(s)$$

$$X(s) = \frac{F_2(s)}{Bs+k} \longrightarrow X(s) = \frac{\frac{L_f}{L} F(s)}{Bs+k}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{L_f}{L}}{Bs+k} \checkmark$$

مثال ۲۶(برق ۸۳)

در سیستم دورانی شکل مقابل تابع تبدیل $\frac{\theta(s)}{T(s)}$ کدام است؟



J_1 J_2

$$\begin{bmatrix} J_1s^2+Bs+k & -(Bs+k) \\ -(Bs+k) & J_2s^2+Bs+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T(s) \end{bmatrix}$$

۱. $\frac{(Bs+K)^2}{(J_1s^2+Bs+K)(J_2s^2+K+Bs)}$ ✗

۲. $\frac{(Bs+K)}{(J_1s^2+Bs+K)(J_2s^2+K+Bs)}$

۳. $\frac{(Bs+K)^2}{s^2(J_1J_2s^2+Bs(J_1+J_2)+K(J_1+J_2))}$ ✗

۴. $\frac{(Bs+K)}{s^2(J_1J_2s^2+Bs(J_1+J_2)+K(J_1+J_2))}$ ✓

$$(J_1s^2+Bs+k)\theta_1(s) = (Bs+k)\theta_2(s)$$

$$-(Bs+k)\theta_1 + (J_2s^2+Bs+k)\theta_2 = T(s)$$

$$\theta_1 = \frac{Bs+k}{J_1s^2+Bs+k}\theta_2$$

$$-(Bs+k)\frac{(Bs+k)}{J_1s^2+Bs+k}\theta_2(s) + (J_2s^2+Bs+k)\theta_2 = T(s)$$

$$\left[\frac{-(Bs+k)^2}{J_1s^2+Bs+k} + J_2s^2+Bs+k\right]\theta_2 = T(s)$$

$$\frac{-(Bs+k)^2 + (Bs+k)^2 + J_1J_2s^4 + (J_1+J_2)s(Bs+k)}{J_1s^2+Bs+k}\theta_2 = T(s)$$

$$\frac{J_1 J_2 s^4 + (J_1+J_2) B s^3 + (J_1+J_2) k s^2}{J_1 s^2 + B s + k} \quad \theta_2(s) = T(s)$$

$$\frac{\theta_2}{T(s)} = \frac{J_1 s^2 + B s + k}{J_1 J_2 s^4 + (J_1+J_2) B s^3 + (J_1+J_2) k s^2}$$

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = ? \qquad \theta_1 = \frac{Bs+k}{J_1 s^2 + Bs + k}\theta_2 \rightarrow \theta_2 = \frac{J_1 s^2 + Bs + k}{Bs+k}\theta_1$$

$$\frac{J_1 J_2 s^4 + (J_1+J_2) B s^3 + (J_1+J_2) k s^2}{J_1 s^2 + Bs + k} \quad \frac{J_1 s^2 + Bs + k}{Bs+k}\theta_1 = T(s)$$

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{Bs+k}{J_1 J_2 s^4 + (J_1+J_2) B s^3 + (J_1+J_2) k s^2}$$

$$= \frac{Bs+k}{s^2\left(J_1 J_2 s^2 + (J_1+J_2) B s + (J_1+J_2) k \right)}$$

مثال ۲۷(مکانیک ۹۲)

سیستم شکل زیر شامل دو مخزن است. اگر سطح مقطع مخازن مساوی هم و برابر $A=1\ m^2$ و مقاومت شیرها مساوی $R=1$ باشد، با فرض $h_1(t)$ و $h_2(t)$ به عنوان ارتفاع سیال در دو مخزن، u دبی ورودی به ظرف اول، Q_1 و Q_2 دبی خروجی و Q_3 دبی بین دو ظرف باشد، با فرض خطی بودن سیستم یعنی $Q_1 = \frac{h_1}{R}$ و $Q_2 = \frac{h_2}{R}$ و $Q_3 = \frac{h_1 - h_2}{R}$ ، تابع تبدیل بین u و Q_3 کدام است؟

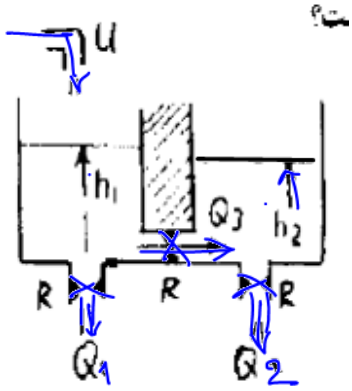
$\frac{Q_3(s)}{U(s)} = ?$

۱. $\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$

۲. $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$

۳. $\frac{1}{(s+1)^2}$

۴. $\frac{1}{(s+3)}$ ✓



$h_1, h_2 : L$
$A : L^2$
$R : T/L^2$
$Q, U, : L^3/T$

$$\begin{cases} 1\dfrac{dh_1}{dt} = u - Q_1 - Q_3 \\ 1\dfrac{dh_2}{dt} = Q_3 - Q_2 \end{cases}$$

$$Q_1 = \frac{h_1}{1} \rightarrow \boxed{Q_1 = h_1} \qquad Q_2 = \frac{h_2}{1}$$

$$Q_3 = \frac{h_1 - h_2}{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dh_1}{dt} = u - 2h_1 + h_2 \\ \dfrac{dh_2}{dt} = h_1 - 2h_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sH_1(s) = U(s) - 2H_1(s) + H_2(s) \\ sH_2(s) = H_1(s) - 2H_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_2(s) = \dfrac{H_1(s)}{s+2} \\ (s+2)H_1(s) - \dfrac{H_1(s)}{s+2} = U(s) \rightarrow \left(\dfrac{s^2+4s+4-1}{s+2}\right)H_1 = U \end{cases}$$

$$\underline{Q_3} = H_1(s) - H_2(s) \;,$$

$$\begin{cases} H_1(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+3}\,U(s) \\ H_2 = \dfrac{1}{s+2}H_1 = \dfrac{1}{s+2}\,\dfrac{s+2}{s^2+4s+3}\,U = \dfrac{U}{s^2+4s+3} \end{cases}$$

$$Q_3 = \frac{s+2}{s^2+4s+3}\,U - \frac{1}{s^2+4s+3}\,U$$

$$Q_3 = \left(\frac{s+2-1}{s^2+4s+3}\right)U(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)}\,U(s)$$

$$Q_3(s) = \frac{1}{s+3}\,U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{Q_3(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}}$$

مثال ۲۸(هوافضا ۹۲)

تابع تبدیل $\frac{W(s)}{T(s)}$ کدام است؟

۱. $\frac{N_2}{N_1\ (Bs+\ A)}$

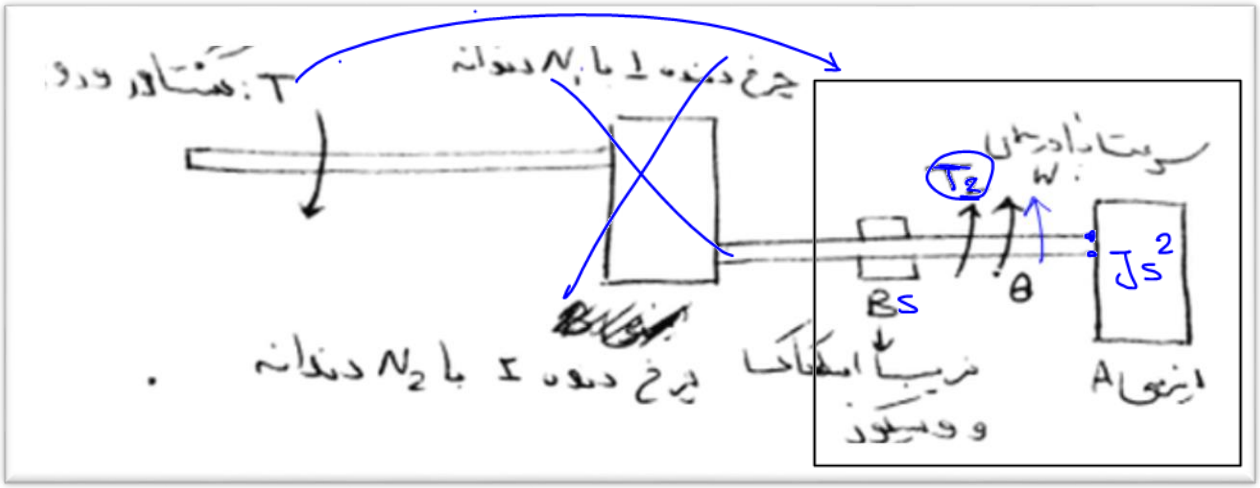
۲. $\frac{N_1}{N_2\ (As+\ B)}$

۳. $\frac{N_1}{N_2\ (Bs+\ A)}$

۴. ✓ $\frac{N_2}{N_1\ (As+\ B)}$

$w(s)$: سرعت زاویه‌ای

A اینرسی



$$\frac{T(s)}{T_2(s)} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow T_2(s) = \frac{N_2}{N_1} T(s)$$

$$\left[Js^2 + Bs\right]\theta(s) = \left[T_2(s)\right]$$

$w(s) = ?$

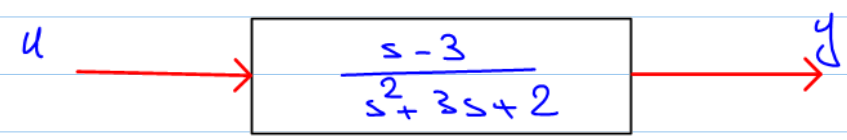
$$w = \frac{d\theta}{dt} \qquad w(s) = s\theta(s)$$

$$\theta(s) = \frac{w}{s}$$

$$(Js^2 + Bs)\frac{w}{s} = \frac{N_2}{N_1} T(s)$$

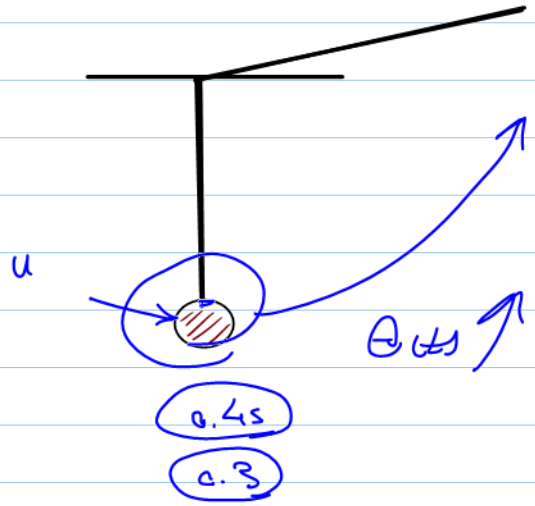
$$\frac{w(s)}{T(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{Js + B}$$

آونگ



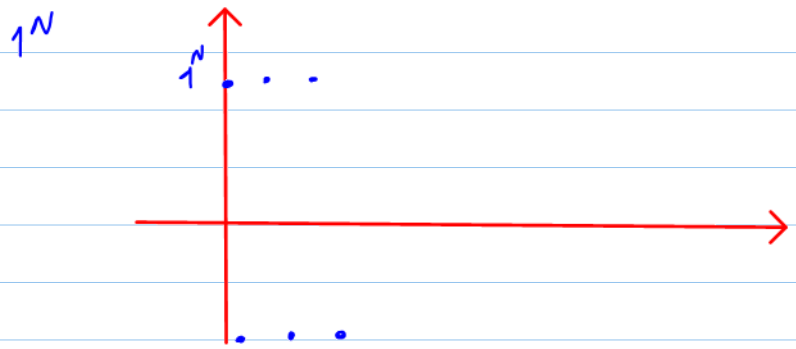
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)}$$

صفر سیستم = (3)



$u(t) = 1\sin(3t) \;\underline{!}\; \cos(3t)$

e^{j3t}



$s = -1, -2$

$u(t) = 1^N \sin(1t)$ ⟶ خروجی ∝

s=-2

$$\frac{Y(s)}{T(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

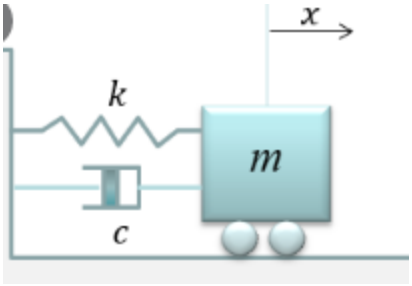
2-1=1

۱. درجه سیستم: بزرگترین توان s در تابع تبدیل را گویند. در تابع تبدیل بالا درجه سیستم ۲ است.

۲. درجه نسبی: اختلاف درجه مخرج و صورت را گویند. در تابع تبدیل بالا درجه نسبی ۱ است.

۳. صفر سیستم: ریشه‌های صورت تابع تبدیل را صفر می‌گویند. در این تابع صفر عبارت است از $s=-2$

یعنی اگر یک ورودی با فرکانس -2 به سیستم اعمال شود خروجی صفر است.



$$f(t) = e^{-2t} \rightarrow y(t) = 0$$

قطب سیستم: ریشه‌های مخرج تابع تبدیل را گویند.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+1)}$$

در تابع تبدیل بالا قطب سیستم $s=-1$ است.

اگر ورودی با فرکانس قطب سیستم به سیستم اعمال شود، خروجی به سمت ∞ میل می‌کند.

یادآوری:

تابع تبدیل ← معادلات دیفرانسیل $\xrightarrow{\mathcal{L} \text{ با شرایط اولیه } 0}$ حوزه زمان

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{u(t)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

✓ نکته : هرگاه بخواهیم شرایط اولیه را در حل مساله ای در کنترل خطی دخیل کنیم، باید حتماً معادلات دیفرانسیل آن را بدست آورده و مجدداً از معادلات دیفرانسیل با فرض شرایط اولیه مخالف صفر، تبدیل لاپلاس بگیریم.

✓ تابع تبدیل ← معادلات دیفرانسیل ← لاپلاس با فرض شرایط اولیه مخالف صفر

$$\frac{Y(s)}{u(t)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

معادلات دیفرانسیل:

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = u(t)$$ حوزه زمان

$$s^2Y(s) - sy(0^+) - y(0^+) + 2\left(sY(s) - y(0^+)\right) + Y(s) = U(s)$$

مثال ۲۹ (برق ۹۲)

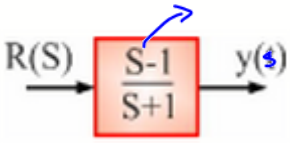
در سیستم روبه‌رو، تحت چه شرایطی $y(s)=0$ می‌شود؟

۱. $R(t) = e^{+t}, y(0) = 1$ ✓

۲. $R(t) = e^{+t}, y(0) = -1$

۳. $R(t) = e^{-t}$, $y(0) =$ آزاد

۴. $R(t) = e^{-t}, y(0) = 0$



$$Y(s) = \frac{s-1}{s+1} R(s)$$

$$sY(s) + Y(s) = sR(s) - R(s)$$

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = \frac{dr}{dt} - r(t)$$

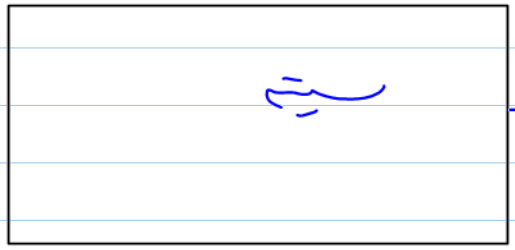
$$sY(s) - y(0) + Y(s) = sR(s) - r(0) - R(s)$$

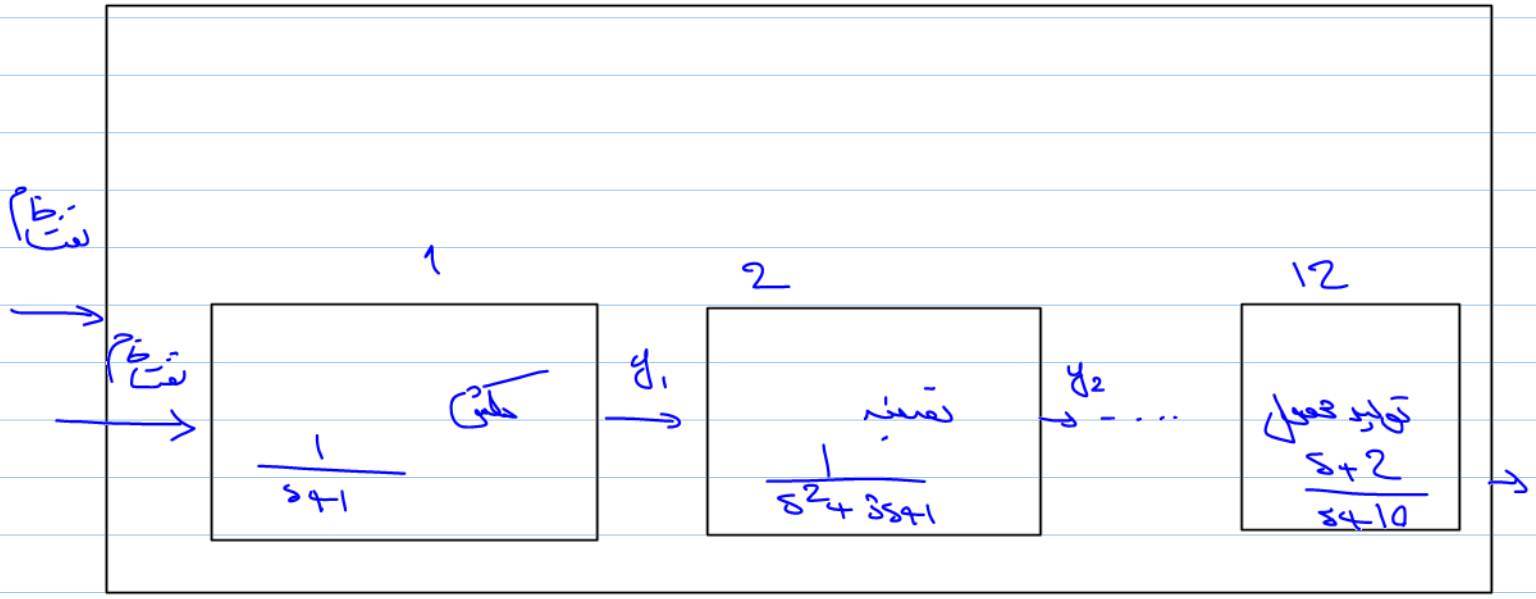
$$0 = Y(s) = \frac{(s-1)R(s)}{s+1} - \frac{r(0)}{s+1} - \frac{y(0)}{s+1}$$

$$r(t) = e^{t}u(t) \longrightarrow r(0^-) = e^{1\times 0^-} \times y(0^-) = 0$$

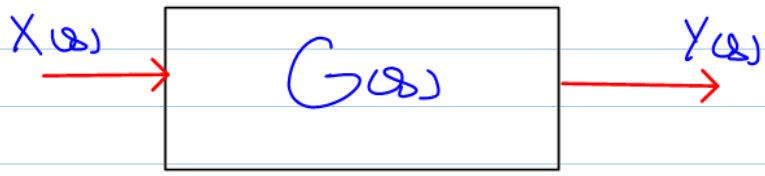
$$R(s) = \frac{1}{s-1} \qquad Y(s) = \frac{(s-1)\frac{1}{s-1}}{s+1} - \frac{y(0)}{s+1} = \frac{1-y(0)}{s+1} = 0$$

$$y(0) = 1$$





$$\frac{\text{بنزین}}{\text{نفت خام}} = \frac{}{s^{24} + 23s^{21} + \cdots}$$

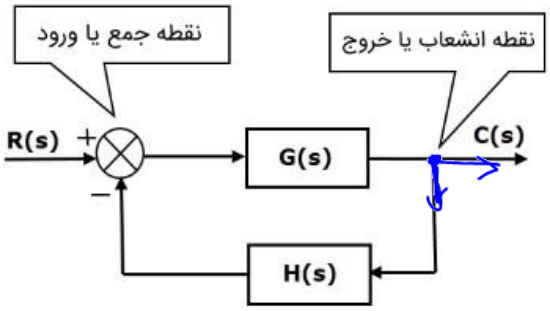


$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

نمایش بلوک دیاگرام

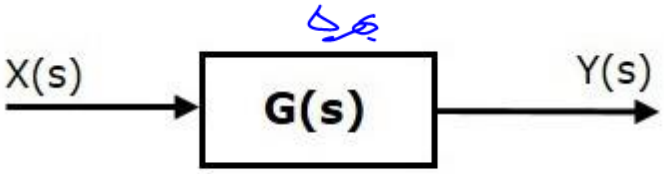
بلوک دیاگرام یا نمودار بلوکی یکی از ابزارهای مفید برای نمایش تصویری سیستم‌ها و به‌ویژه سیستم‌های کنترل است که رابطه علت و معلولی بین ورودی‌ها و خروجی‌ها را نمایش می‌دهد. گاهی سیستم‌ها پیچیده هستند و از زیرسیستم‌های دیگر تشکیل می‌شوند. به‌دلیل این پیچیدگی، ابتدا زیرسیستم‌ها را نمایش می‌دهند و سپس به یکدیگر متصل می‌کنند. با استفاده از نمودار بلوکی، می‌توان زیرسیستم‌ها را به‌سادگی نمایش داد و با ترکیب آن‌ها نمایش سیستم اصلی را ارائه کرد و با ساده‌سازی آن، به تابع تبدیل سیستم دست یافت .

اجزای اساسی یک نمودار بلوکی، بلوک‌ها، نقاط جمع و نقاط انشعاب هستند. شکل زیر، نمودار بلوکی یک سیستم کنترل حلقه‌بسته را نشان می‌دهد که در آن، اجزا مشخص شده‌اند.



❖ بلوک

تابع تبدیل یک بخش از سیستم با یک بلوک نشان داده می‌شود. بلوک یک ورودی و یک خروجی دارد. شکل زیر، یک بلوک را با ورودی X و خروجی Y و تابع تبدیل $G(s)$ نشان می‌دهد.



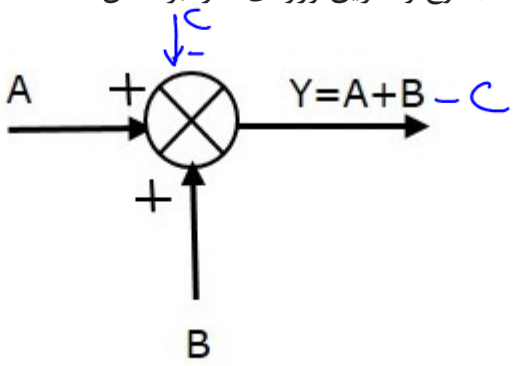
تابع تبدیل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

خروجی را می‌توان با ضرب تابع تبدیل در ورودی به‌دست آورد:

$$Y(s)=G(s)X(s)$$

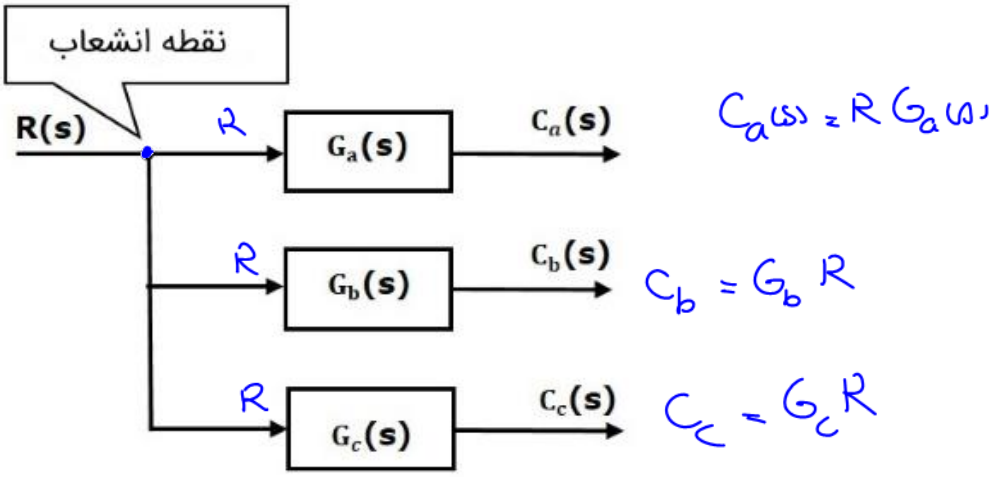
❖ نقطه جمع

نقطه جم(Summing Point) ، با یک دایره و علامت ضربدر (×) داخل آن نمایش داده می‌شود و دو یا چند ورودی و یک خروجی دارد. این بخش از نمودار بلوکی، جمع جبری ورودی‌ها را تولید می‌کند. در واقع، نقطه جمع، مجموع، تفریق یا ترکیبِ مجموع و تفریق ورودی‌ها را براساس علامت آن‌ها محاسبه می‌کند .



❖ نقطه انشعاب

نقطه انشعاب (Take-off Point) یا خروج، نقطه‌ای است که ورودی آن می‌تواند به چند شاخه تقسیم شود. این بدین معنی است که با کمک نقطه انشعاب می‌توان یک ورودی را به یک یا چند بلوک یا نقطه جمع اعمال کرد. در شکل زیر، از نقطه انشعاب برای برقراری ارتباط ورودی R با سه بلوک دیگر استفاده شده است.

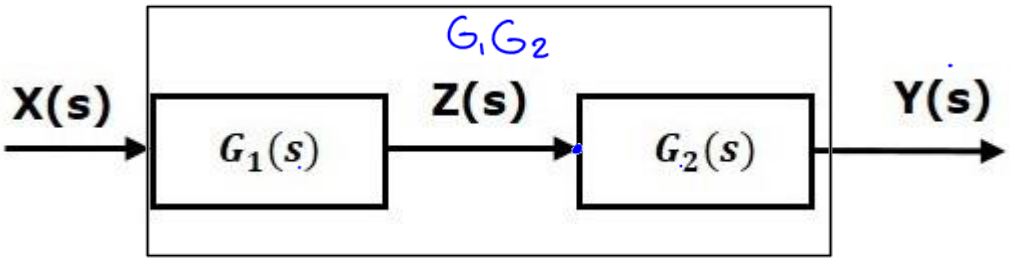


❖ تصالات پایه بلوک‌ها

جبر نمودار بلوکی، چیزی جز نمایش تصویری معادلات جبری و روابط بین بلوک‌ها نیست. در ادامه چند مورد از اتصالات مهم بلوک‌ها را بررسی می‌کنیم.

❖ اتصال سری یا متوالی

اتصال سری که اتصال آبشاری نیز نامیده می‌شود، بین دو تابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ در شکل زیر نشان داده شده است.

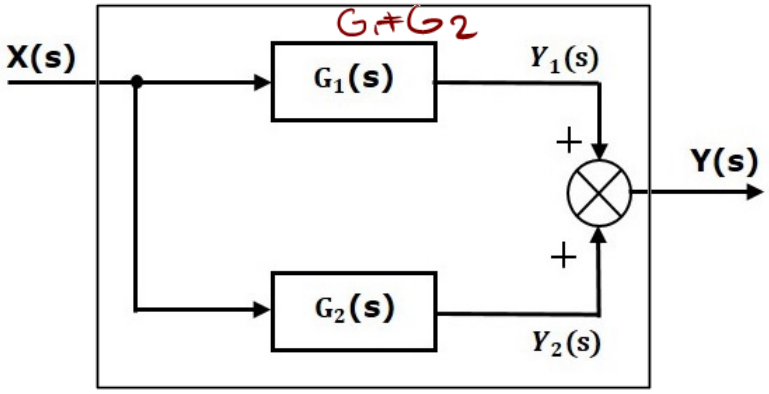


در این نوع اتصال، خروجی $Y(s)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

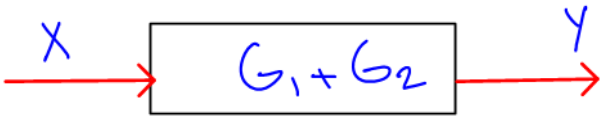
$$\begin{cases} Y(s) = G_2 Z \\ Z = G_1 X \end{cases} \qquad Y(s) = G_2 G_1 X \rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = G_1 G_2$$

❖ اتصال موازی

ورودی دو بلوک موازی، یکسان است. در شکل زیر، دو بلوک موازی با دو تابع تبدیل $G_1(s)$ و $G_2(s)$ نشان داده شده است. خروجی این دو تابع تبدیل به نقطه جمع وارد می‌شود.

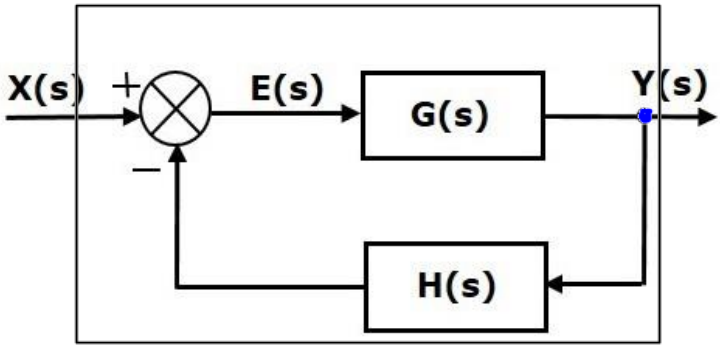


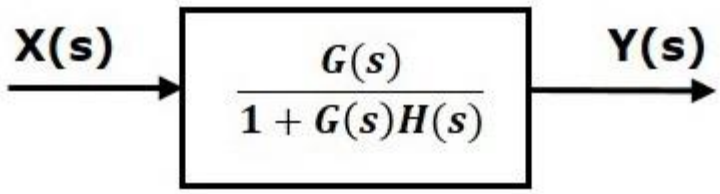
برای این ترکیب، خروجی $Y(s)Y(s)$به‌صورت زیر خواهد بود:



❖ اتصال فیدبک

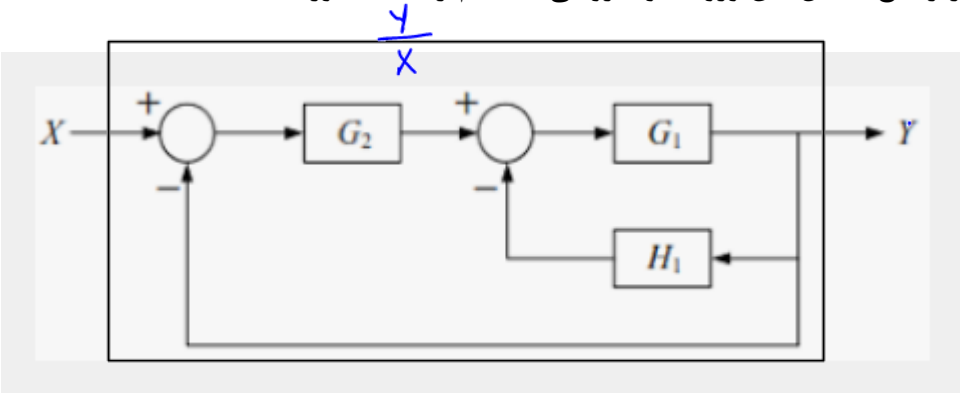
همان‌طور که در آموزش مربوط به فیدبک در سیستم‌های کنترل اشاره کردیم، دو نوع فیدبک مثبت و فیدبک منفی وجود دارد. شکل زیر، نمودار بلوکی یک سیتم کنترل با فیدبک منفی را نشان می‌دهد. در این نمودار، دو تابع تبدیل G(s) و H(s) یک سیستم حلقه‌بسته را تشکیل می‌دهند.



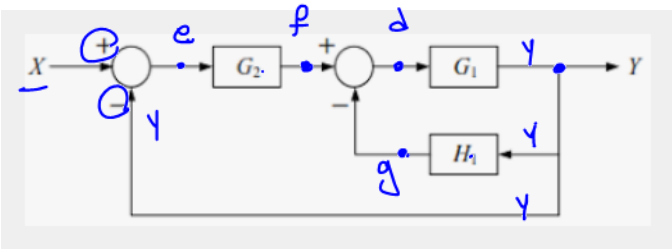


مثال ۳۰

در سیستم زیر تابع تبدیل بین ورودی و خروجی سیستم را بدست آورید.



۱-ابتدا برای تمام خطوط یک اسم در نظر بگیرید.



۲-روابط را از خروجی شروع کرده و رابطه هر بلوک را بنویسید.

① $Y = G_1 d$

② $d = f - H_1 Y$

③ $f = G_2 e$

④ $e = X - Y$

۳-با جایگذاری روابط فوق، رابطه بین ورودی و خروجی را پیدا کنید.(از آخر به اول)

$$Y = G_1\left(G_2(X-Y) - H_1 Y\right)$$

$$d = G_2(X-Y) - H_1 Y$$

$$f = G_2(X-Y)$$

① $Y = G_1 d$

② $d = f - H_1 Y$

③ $f = G_2 e$

④ $e = X - Y$

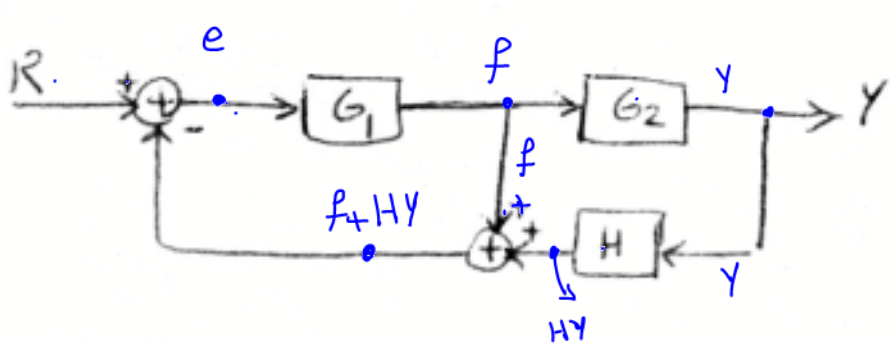
$$\therefore Y = G_1G_2X - G_1G_2Y - G_1H_1Y$$

$$Y\left[1 + G_1G_2 + G_1H_1\right] = G_1G_2X$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2 + G_1H_1}$$

مثال ۳۱(مکانیک ۷۸)

تابع تبدیل بلوک دیاگرام شکل زیر را بیابید.



$$① \quad Y = G_2 f$$

$$② \quad f = G_1 e$$

$$③ \quad e = R - (f - HY)$$

$$f = G_1(R - f + HY)$$

$$f = G_1 R - G_1 f + G_1 H Y$$

$$(1+G_1) f = G_1 R + G_1 H Y$$

$$f = \frac{G_1}{1+G_1} R + \frac{G_1 H}{1+G_1} Y$$

$$Y = G_2\left(\frac{G_1}{1+G_1} R + \frac{G_1 H}{1+G_1} Y\right)$$

$$Y - \frac{G_2 G_1 H}{1+G_1} Y = \frac{G_1 G_2}{1+G_1} R$$

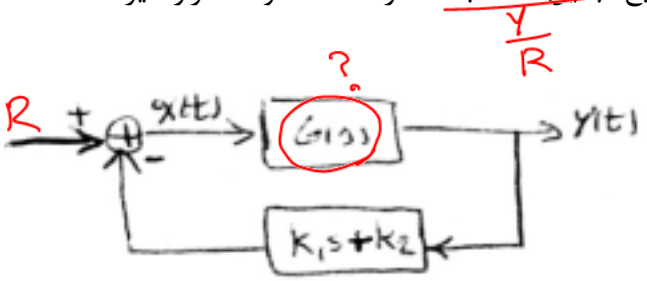
$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{G_1 G_2}{1+G_1}}{1+G_1 - G_2 G_1 H} = \frac{G_1 G_2}{1+G_1-G_1 G_2 H}$$

مثال ۳۲

معادله دینامیک سیستم حلقه باز G(s) به صورت زیر است:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

ضرایب K_1, K_2 چه مقدار باشد تا قطبهای تابع تبدیل حلقه بسته در نقاط *1-* و *3-* قرار گیرد؟

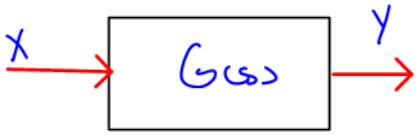


۱. $K_1 = 7$ و $K_2 = 1$

۲. $K_1 = 5$ و $K_2 = 3$

۳. $K_1 = 16$ و $K_2 = 5$

۴. $K_1 = 13$ و $K_2 = 3$

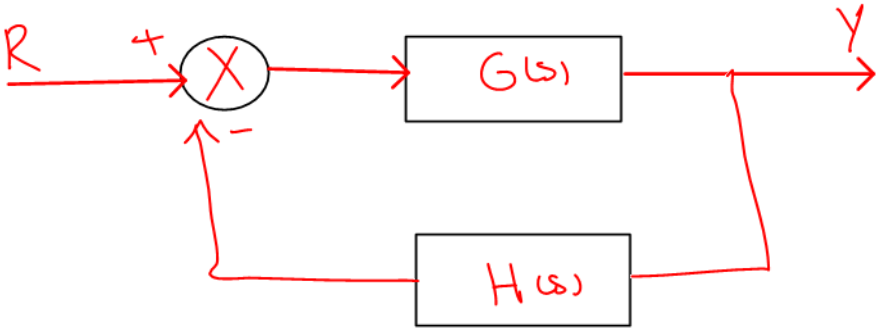


$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow s^2 Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y}{X}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = G(s)$$



$$\frac{Y}{R} = \frac{G}{1 + GH} \quad ; \quad G = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \quad , \quad H = k_1 s + k_2$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{1}{s^2-3s+2}}{1+\frac{1}{s^2-3s+2}(k_1 s+k_2)} = \frac{1}{s^2-3s+2+k_1 s+k_2}$$

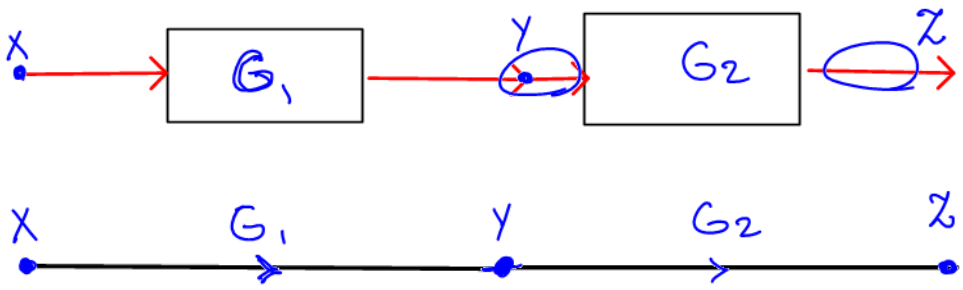
$$\frac{Y}{R} = \frac{1}{s^2+(k_1-3)s+k_2+2}$$

$$(s-(-1))(s-(-3)) = 0 \longrightarrow s^2+(k_1-3)s+k_2+2 = (s+1)(s+3)$$

$$s^2+(k_1-3)s+k_2+2 = s^2+4s+3$$

$$k_1-3 = 4 \quad , \quad k_2+2 = 3 \longrightarrow \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_1 = 7 \end{cases}$$

- ✓ نکته هرگاه تغییری در نمایش بلوک دیاگرام اتفاق افتد، باید بهره مسیر مستقیم از هر ورودی به هر خروجی ثابت بماند.
- ✓ نکته در نمایش بلوک دیاگرام به تعداد دلخواه می‌توان خروجی به سیستم اضافه کرد، ولی امکان اضافه کردن ورودی وجود ندارد.



نمایش نمودار گذر سیگنال(SFG)

اگر تعداد بلوک‌های سیستم زیاد باشد، ساده‌سازی نمودار بلوکی کاری دشوار است. یکی دیگر از ابزارهای مفید برای نمایش تصویری سیستم‌ها، نمودار گذر سیگنال است که به‌جای ساده‌سازی، با استفاده از یک فرمول می‌توان تابع تبدیل سیستم مرتبط با آن را به‌دست آورد.

گره و شاخه، اجزای اصلی یک نمودار گذر سیگنال هستند.

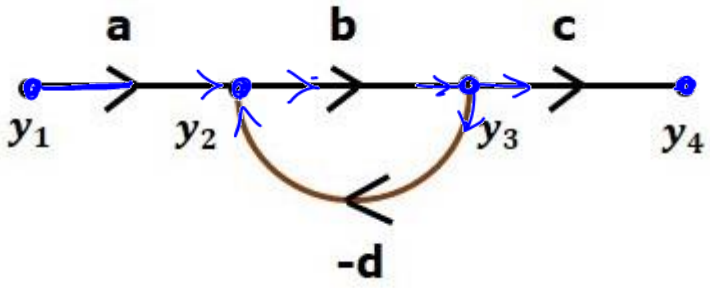
❖ گره

گره (Node) نقطه‌ای است که یک متغیر یا یک سیگنال را نمایش می‌دهد. سه نوع گره مختلف وجود دارد:

- **گره ورودی :**گره‌ای است که فقط یک شاخه خروجی دارد.
- **گره خروجی :**گره‌ای است که فقط یک شاخه ورودی دارد.
- **گره ترکیبی :**گره‌ای است که شاخه‌ها، هم به آن وارد و هم از آن خارج می‌شوند.

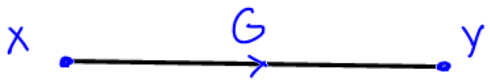
مثال ۳۳

نمودار گذر سیگنال شکل زیر را در نظر بگیرید، انواع گره ها را روی شکل زیر مشخص کنید.



❖ شاخه

شاخه(Branch) ، پاره‌خطی است که دو گره را به یکدیگر ارتباط می‌دهد و هم بهره دارد هم جهت که معادل یک بلوک است.



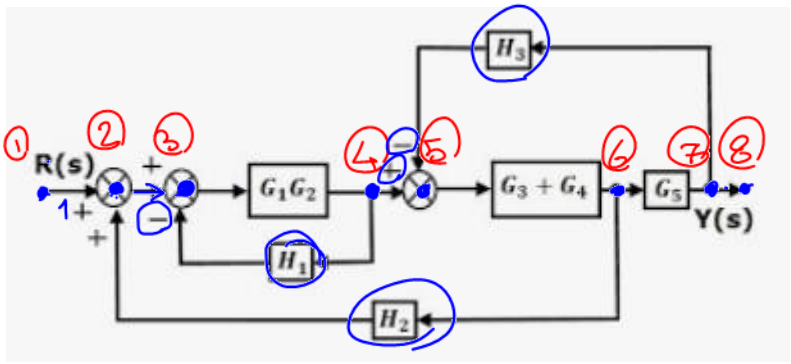
تبدیل نمودارهای بلوکی به نمودارهای گذر سیگنال

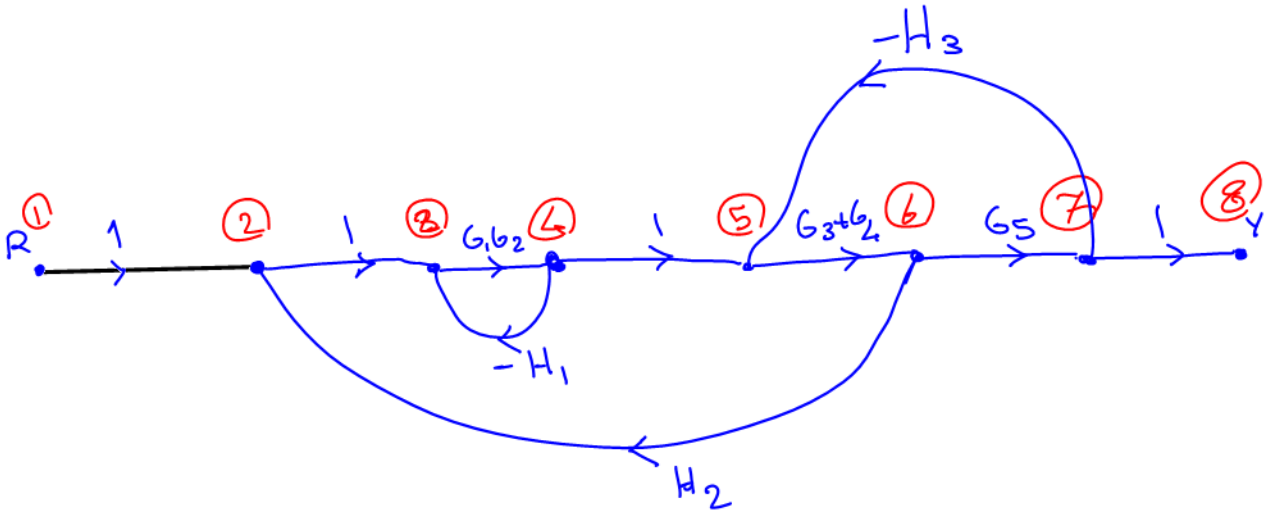
با انجام گام‌های زیر می‌توان یک نمودار بلوکی را به نمودار گذر سیگنال معادل آن تبدیل کرد:

- به‌جای هریک از سیگنال‌ها، متغیرها، نقاط جمع و نقاط انشعاب نمودار بلوکی، یک **گره** در نمودار گذر سیگنال قرار دهید.
- به‌جای هریک از بلوک‌های نمودار بلوکی، یک **شاخه** در نمودار گذر سیگنال قرار دهید.
- تابع تبدیل درون بلوک‌های نمودار بلوکی را به‌عنوان بهره شاخه‌های نمودار گذر سیگنال در نظر بگیرید.
- گره‌ها را با توجه به نمودار بلوکی به یکدیگر متصل کنید. اگر اتصالی بین دو گره وجود دارد (اما بلوکی بین آن‌ها نیست)، بهره شاخه را برابر با یک قرار دهید. برای مثال، بین نقاط جمع، نقاط جمع و انشاب، ورودی و نقاط جمع، و نقاط انشعاب و خروجی شاخه‌ای با بهره یک قرار می‌گیرد.

مثال ۳۴

نمودار بلوکی شکل زیر را در نظر بگیرید. نمودار SFG معادل را رسم کنید.



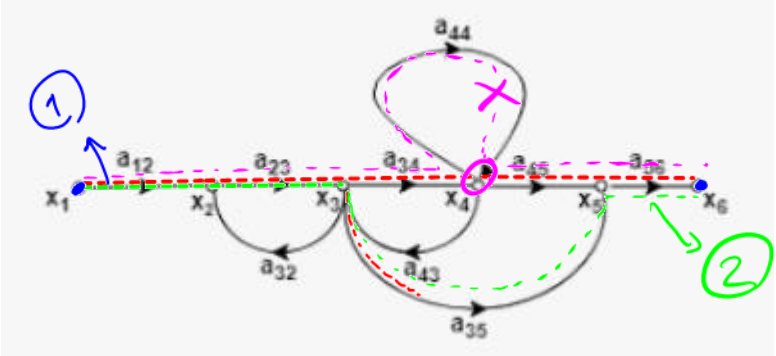


❖ تعریف مسیر مستقیم

مسیر مستقیم یعنی رسیدن از نقطه مرجع به نقطه مقصد در جهت شاخه ها بدون عبور از گره یا شاخه تکراری.

مثال ۳۵

در شکل زیر، مسیرهای مستقیم از ورودی به خروجی را مشخص کنید.



$P_1 : a_{12}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{45}\, a_{56}$

$P_2 : a_{12} a_{23}\, a_{35}\, a_{56}$

❖ تعریف حلقه

یعنی از یک نقطه روی نمودار شروع کرده و بدون عبور از گره یا شاخه تکراری به نقطه اول برسیم.

❖ بهره حلقه

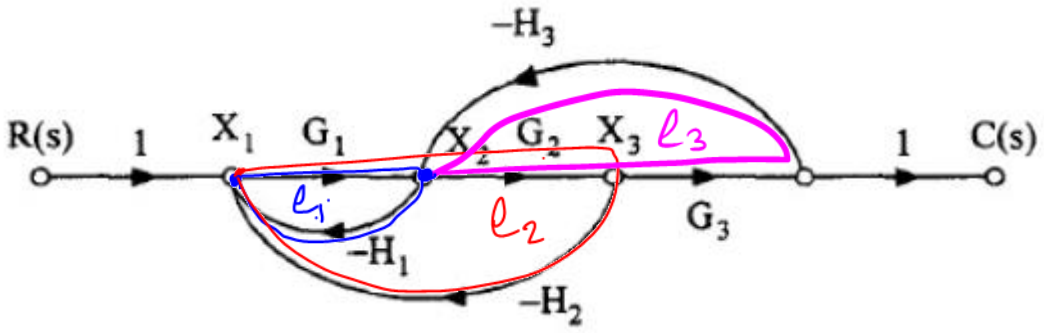
با ضرب بهره مربوط به شاخه‌های یک حلقه در یکدیگر، بهره حلقه به‌دست می‌آید.

❖ حلقه‌های مستقل

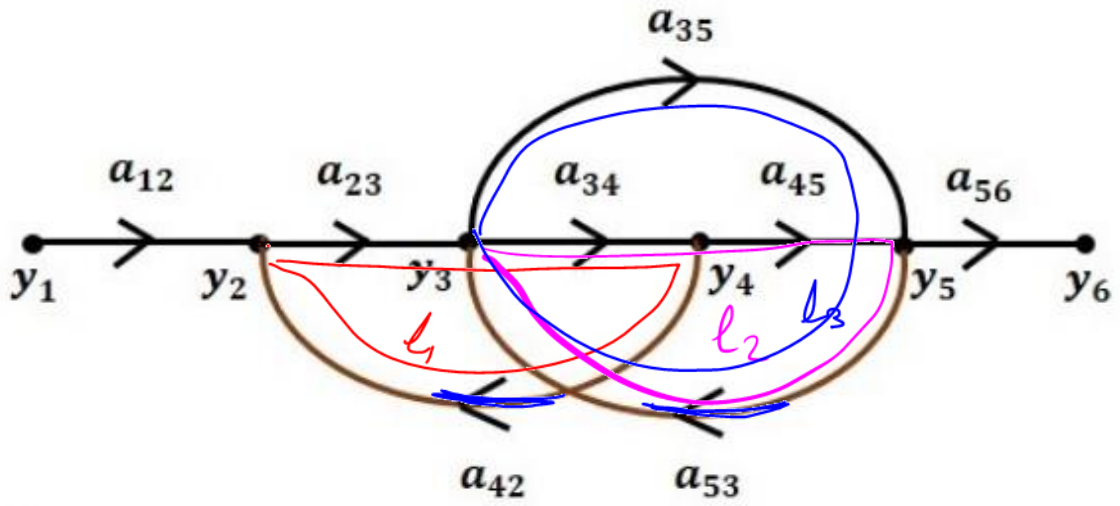
حلقه‌هایی که هیچ گره یا شاخه مشترکی ندارند، حلقه مستقل نامیده می‌شوند.

مثال ۳۶

در شکل‌های زیر حلقه ها را مشخص کنید.



$l_1 : -G_1H_1$ $\quad l_2 = G_1G_2(-H_2)$ $\quad l_3 = -G_2G_3H_3$



$l_1 : a_{23}\, a_{34}\, a_{42}$

$l_2 : a_{34}\, a_{45}\, a_{53}$

$l_3 = a_{35}\, a_{53}$

قاعده میسون: استخراج تابع تبدیل از هر ورودی به هر خروجی.

$$\frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

P_i: بهره مسیر iام از ورودی مدنظر به خروجی مدنظر

$$\Delta = 1 - (\text{مجموع بهره تمام حلقه‌ها}) + (\text{مجموع حاصل ضرب حلقه‌های دو به دو مستقل})$$
$$- (\text{مجموع حاصل ضرب بهره حلقه‌های سه به سه مستقل}) + \dots$$

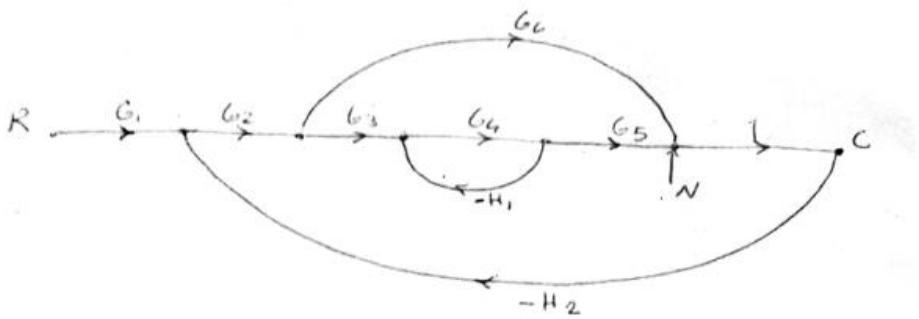
Δ_i =. سپس Δ را بنویسید (تمام شاخه‌ها و گره‌ها) مسیر P_i را حذف کنید

مراحل استفاده از قاعده میسون

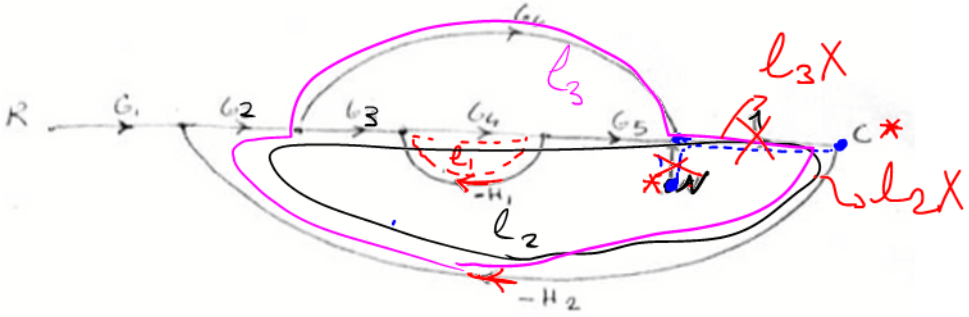
- ابتدا ورودی و خروجی مورد نظر را مشخص کنید.
- حلقه‌ها را مشخص کنید.
- شاخه‌های برگشتی را مش nخص کنید.
- حلقه‌هایی که می‌توان با شاخه‌های برگشتی ساخت را تعیین کنید.
- حلقه‌های مستقل را مشخص کنید.

مثال ۳۷ (برق ۷۸)

تابع انتقال سیستم بین خروجی و اغتشاش کدام است؟



$\frac{C}{N} = ?$



$P_1 = 1 \times 1 = 1$

$l_1 = -G_4 H_1$ $\quad l_2 = G_2 G_3 G_4 G_5 \times 1 \times -H_2$ $\quad l_3 = G_2 G_6 \times 1 \times -H$

l_1, l_3 ✓

$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3) + (l_1 l_3)$

$P_1 \rightarrow \Delta_1 = 1 - (l_1 + 0 + 0) + (l_1 \times 0) = 1 - l_1$

$$\frac{C}{N} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{1 \times (1 - l_1)}{1 - (l_1 + l_2 + l_3) + l_1 l_3}$$ ✓

مثال ۳۸ (برق ۷۹)

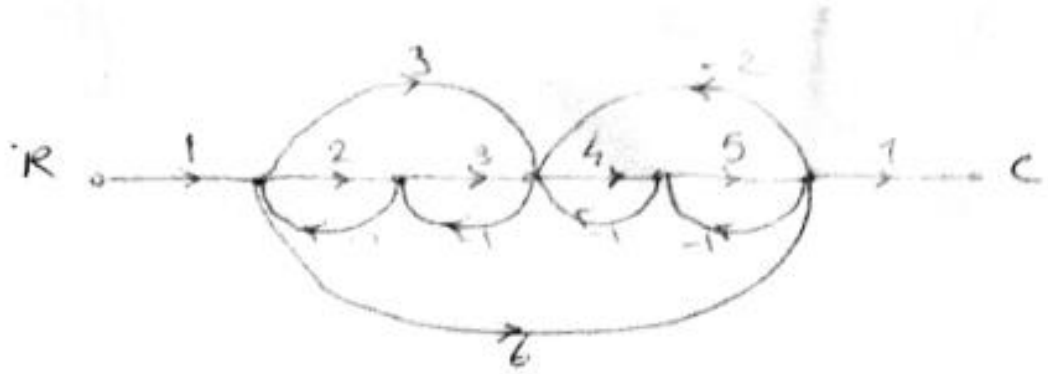
بهره کل *SFG* مقابل چند است؟ $\frac{C}{R}=?$

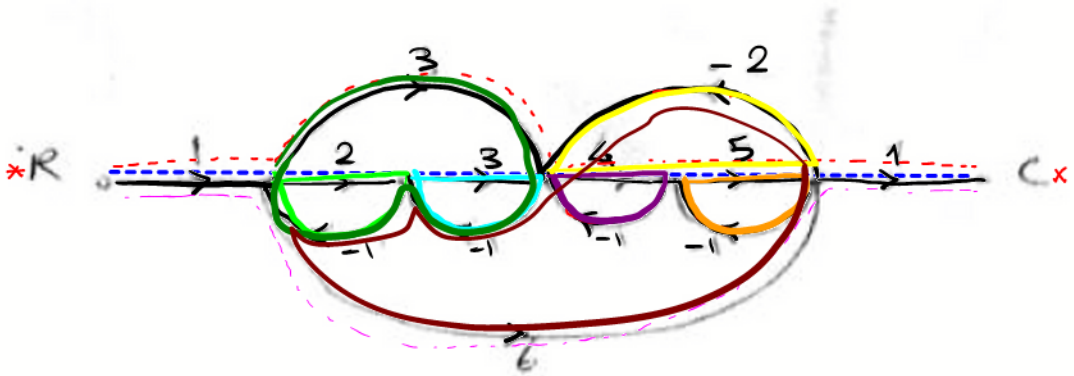
۱. $\frac{19}{13}$

۲. 7

۳. $\frac{133}{90}$

۴. $\frac{229}{156}$

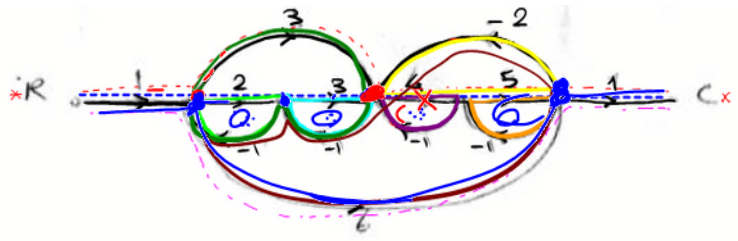




$P_1=120$ $P_2=60$ $P_3=6$

$\ell_1=-2$, $\ell_2=-3$ $\ell_3=-4$ $\ell_4=-5$

$\ell_5=-40$ $\ell_6=3$ $\ell_7=-12$



$P_1 = 120 \quad P_2 = 60 \quad P_3 = 6$

$\ell_1 = -2 \;,\; \ell_2 = -3 \quad \ell_3 = -4 \quad \ell_4 = -5$

$\ell_5 = -40 \quad \ell_6 = 3 \quad \ell_7 = -12$

$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7$

$\ell_1, \ell_2, \ell_6, \ell_7, \ell_3, \ell_4, \ell_5$

$\ell_1, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7$

$(\ell_1, \ell_3) \;,\; (\ell_1, \ell_4) \;,\; (\ell_2, \ell_4) \;,\; (\ell_4, \ell_6)$

(ℓ_5, ℓ_1)

$$\Delta = 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6 + \ell_7) + (\ell_1\ell_3 + \ell_1\ell_4 + \ell_2\ell_4 + \ell_4\ell_6 + \ell_5\ell_1)$$

$P_1 \longrightarrow \Delta_1 = 1 - 0 + 0 = 1$

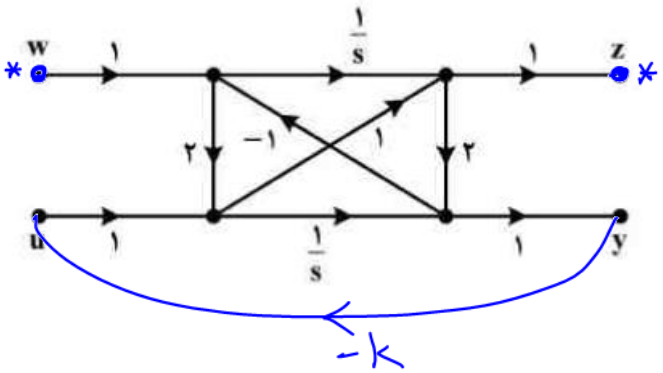
$P_2 \longrightarrow \Delta_2 = 1 - 0 + 0 = 1$

$P_3 \longrightarrow \Delta_3 = 1 - (\ell_2 + \ell_3) + 0 = 1 - \ell_2 - \ell_3$

$$\frac{y}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta}$$

مثال ۳۹ (برق ۹۴)

شکل زیر یک سیستم دو دهانه را نشان می‌دهد. اگر قانون کنترلی به شکل $u=-Ky$ تعریف گردد، تابع تبدیل $\frac{z}{w}$ کدام است؟

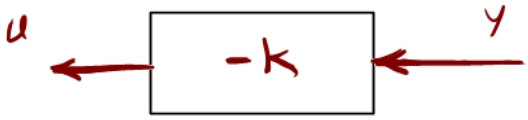


۱. $\frac{s+K}{s^2+(K+4)s}$

۲. $\frac{2s^2+s+K}{5s^2+Ks}$

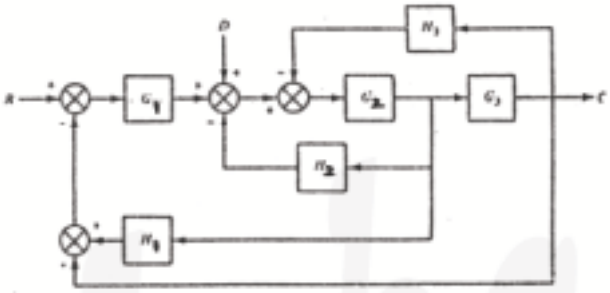
۳. $\frac{2s^2+s+K}{5s^2+(K+4)s}$

۴. $\frac{2s^2+s+K}{(5+2K)s^2+(K+4)s}$



مثال ۴۰(برق ۸۱)

دیاگرام بلوکی سیستمی مطابق شکل می‌باشد. تابع تبدیل $\frac{C}{D}$ کدام است؟

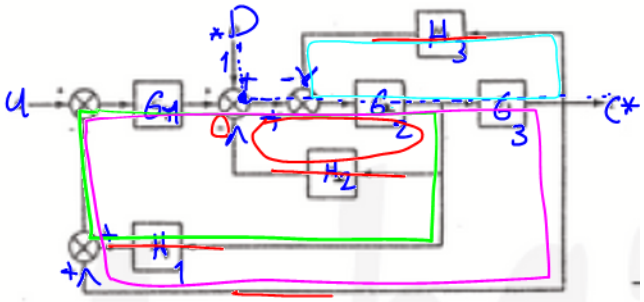


۱. $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1}$

۲. $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_1H_1+G_1G_2G_3}$

۳. $\frac{G_2G_3}{1-G_2H_2-G_2G_3H_3-G_1G_2H_1-G_1G_2G_3}$

۴. $\frac{G_2G_3}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$ ✓



$P_1 = G_2G_3$

$l_1 = -G_2H_2$

$l_2 = -G_2G_3H_3$

$l_3 = -G_1G_2H_1$

$l_4 = -G_1G_2G_3$

$\Delta = 1-(l_1+l_2+l_3+l_4)+0$

$P_1 \longrightarrow \Delta_1 = 1-(0) = 1$

$\frac{C}{D} = \frac{G_2G_3 \times 1}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3}$

$\frac{Y}{R} = \frac{s+2}{s^2+3s+4}$ → معادله مشخصه

❖ معادله مشخصه:

معادله‌ای که ریشه‌های آن قطب‌های سیستم است. یعنی مخرج تابع تبدیل سیستم.

معادله مشخصه $\Delta =$

$$\frac{y}{R} = \frac{\sum_i P_i \Delta_i}{\Delta}$$

مثال ۴۱ (برق ۹۰)

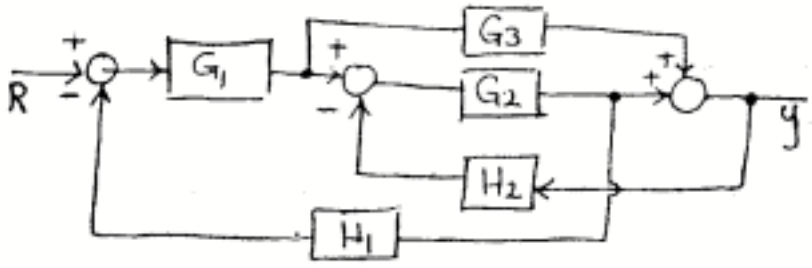
معاله مشخصه سیستم حلقه بسته زیر در کدام گزینه صحیح است؟

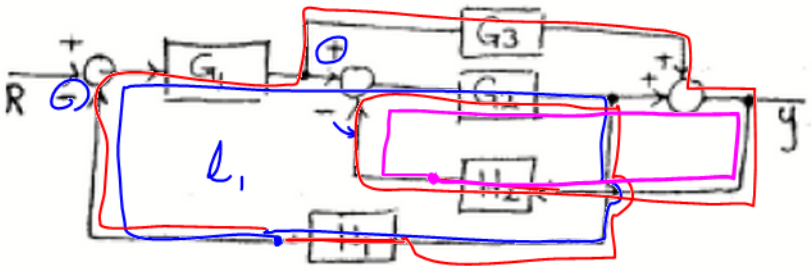
۱. $1 + G_2H_1 + G_1G_2H_1 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۲. $1 + G_1G_2H_2 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۳. $1 + G_2H_2 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۴. ✓ $1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1 - G_1G_2G_3H_1H_2$





$l_1 = -G_1G_2H_1$ $\quad l_2 = --G_1G_3H_2G_2H_1 = G_1G_2G_3H_1H_2$

$l_3 = -G_2H_2$

$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3) = 1 + G_1G_2H_1 + G_2H_2 - G_1G_2G_3H_1H_2$

تمرین (برق ۹۳)

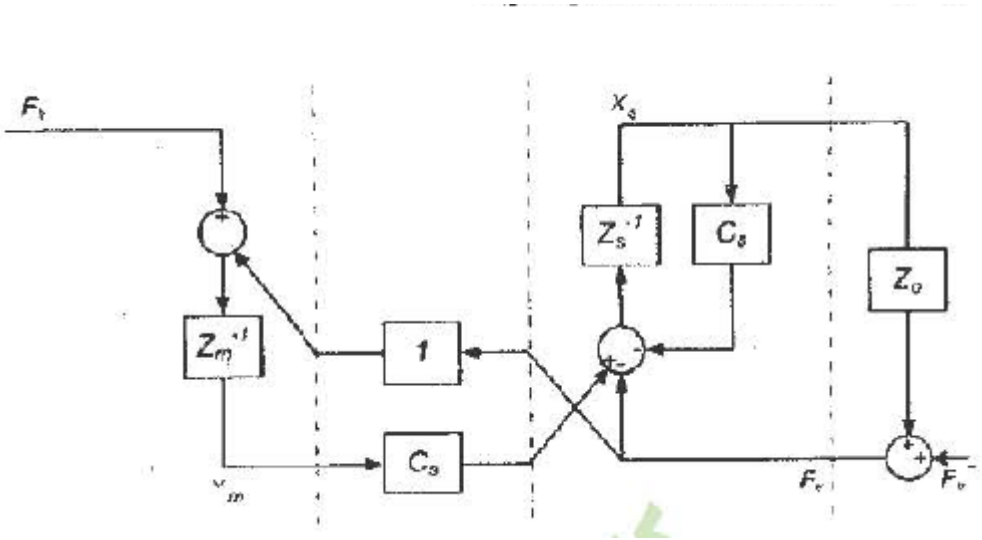
سیستم تله اپراتوری زیر را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $\frac{y_m}{F_n}$ کدام است؟

۱. $\frac{Z_s}{Z_m\ (Z_s+\ C_s+\ Z_e)+ C_s\ Z_e}$

۲. $\frac{(Z_s\ +\ C_s)\ Z_e}{Z_m\ (Z_s+\ +\ C_s+\ Z_e)+\ C_s Z_e}$

۳. $\frac{Z_s\ +\ C_s+\ Z_e}{Z_m\ (Z_s+\ +\ C_s+\ Z_e)}$

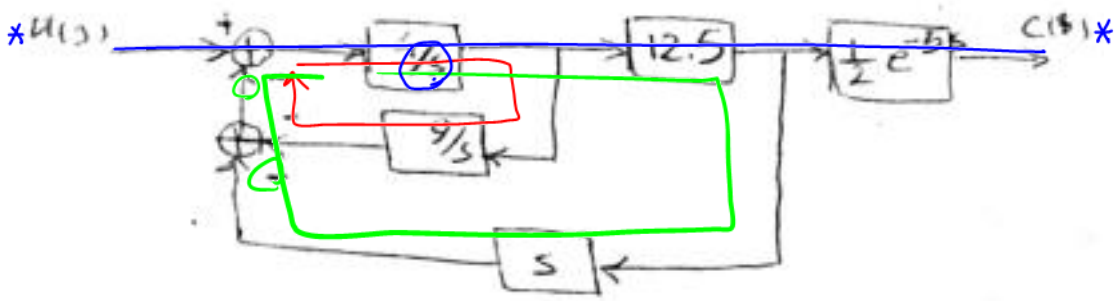
۴. $\frac{Z_s\ +\ C_s+\ Z_e}{Z_m\ (Z_s+\ +\ C_s+\ Z_e)+\ C_s Z_e}$



مثال ۴۲(برق ۷۹)

پاسخ ضربه سیستم زیر کدام است؟

$\frac{C(s)}{U(s)} = ?$



$$P_1 = \frac{4}{s} \times 12.5 \times \frac{1}{2} e^{-5s} \qquad \ell_1 = -\frac{4}{s} \times \frac{9}{s}$$

$$\ell_2 = \frac{4}{s} \times 12.5 \times s$$

$$\Delta = 1 + \frac{36}{s^2} - 50 = \frac{36}{s^2} - 49$$

$$\Delta_1 = 1$$

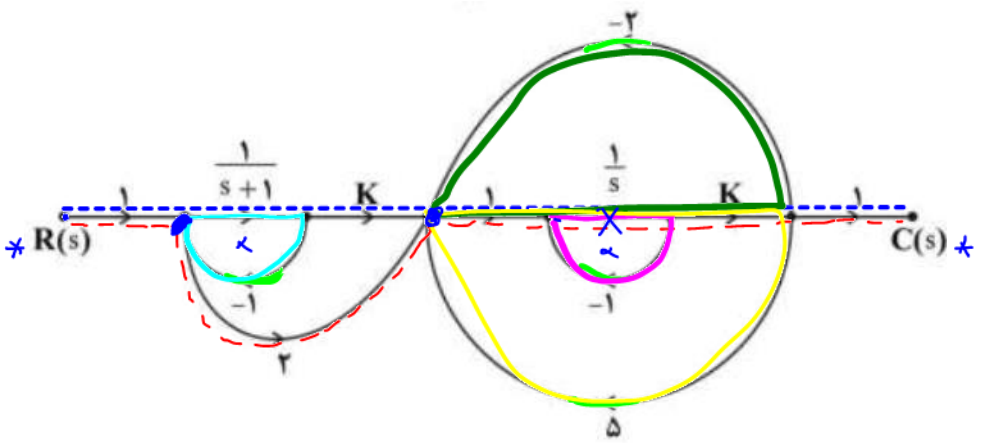
$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{\frac{25}{s} e^{-5s}}{\frac{36}{s^2} - 49} = \frac{25 e^{-5s}}{\frac{36}{s} - 49s} = \frac{25 s e^{-5s}}{36 - 49 s^2}$$

$u(t) = \delta(t) \longrightarrow U(s) = 1 \longrightarrow$ $\boxed{C(s) = \frac{25 s e^{-5s}}{36 - 49 s^2}}$

$C(t) = ?$

مثال ۴۳(برق ۹۷)

در سیستم زیر تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ را پیدا کنید.



$$P_1 = \frac{k^2}{s(s+1)} \qquad P_2 = \frac{2k}{s}$$

$$l_1 = -\frac{1}{s+1} \qquad l_2 = -\frac{1}{s} \qquad l_3 = -\frac{2k}{s}$$

(l_1, l_2) (l_1, l_3) (l_1, l_4)

$$l_4 = \frac{5k}{s}$$

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_1 l_4$$

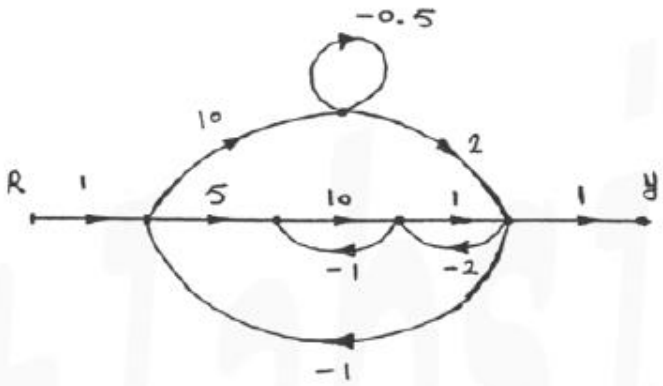
$$P_1 \rightarrow \Delta_1 = 1 - (0+0+0+0) + (0+0+0+0) = 1$$

$$P_2 \rightarrow \Delta_2 = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

مثال ۴۴ (برق ۸۳) عین

۶۶ تابع تبدیل $\frac{Y}{R}$ در گراف جریان حالت (Signal Flow Graph) شکل زیر کدام است؟



۱) $\frac{۵۴۰}{۶۲۹}$

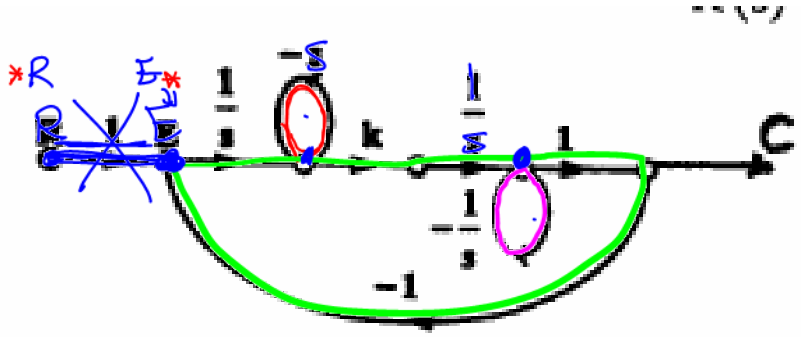
۲) $\frac{۵۹۰}{۵۷۹}$

۳) $\frac{۵۹۰}{۶۲۹}$

۴) $\frac{۵۴۰}{۵۷۹}$

مثال ۴۵ (برق ۸۴)

در نمودار SFG زیر، تابع تبدیل $\frac{E(s)}{R(s)}$ را بدست آورید.



$P_1 = 1$ $\quad \ell_1 = -S$ $\quad \ell_2 = -\frac{1}{S}$ $\quad \ell_3 = \frac{1}{S} \times k \times \frac{1}{S} \times 1 \times -1$

(ℓ_1, ℓ_2)

$\Delta = 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + (\ell_1 \ell_2)$

$P_1 \rightarrow \Delta_1 = 1 - (\ell_1 + \ell_2 + 0) + \ell_1 \ell_2$

$$\frac{E}{R} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta}$$