یادآوری برخی روابط ریاضی مهم:

$$a + bj = \sqrt{a^2 + b^2}\; e^{j \tan^{-1}(b/a)}$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$e^{jn\pi} = (-1)^n$$

$$e^{j\pi/2} = j$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \pi/4)$$

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\theta - \tan^{-1}(B/A)\right)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin a \sin b$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} a q^n = \frac{a q^{n_1}}{1-q} \qquad |q| < 1$$

$$\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$$

سیگنال: هر تابع یا دنباله‌ای که حاوی اطلاعاتی درباره طبیعت یک پدیده فیزیکی باشد.

آرگومان سیگنال: متغیر مستقل که سیگنال وابسته به آن باشد مثل t در $x(t)$.

انواع سیگنال‌ها:

۱- سیگنال حقیقی: سیگنالی که مقدار آن همواره یک عدد حقیقی است مثل $x(t)=\cos(t)$ که t زمان است.

۲- سیگنال مختلط: سیگنالی که مقدار آن یک عدد مختلط می‌باشد مثل $x(t) = \cos(t)+j\sin(t)$

$$x(t) = \underbrace{a(t)}_{\text{بخش حقیقی}} + j\underbrace{b(t)}_{\text{بخش موهومی}} \qquad \underbrace{x^*(t)}_{\text{مزدوج } x(t)} = a(t) - jb(t)$$

$$a(t) = Re(x(t)) = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \qquad b(t) = Im(x(t)) = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$$

$$x(t) = re^{j\theta} \quad ; \quad \text{نمایش قطبی } x(t) \quad x^*(t) = re^{-j\theta}$$

$$r = |x(t)| = \sqrt{a^2(t)+b^2(t)} \quad , \quad \theta = \angle x(t) = \arctan\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)$$

* نکته: اگر سیگنال $x(t)$ حقیقی باشد، نگاه فاز آن برابر ۰ یا $\pm k\pi$ می‌باشد.

* نکته: اگر سیگنال $x(t)$ موهومی باشد، نگاه فاز آن برابر ۰ یا $\pm k\pi+\pi/2$ خواهد بود $x^*(t)=-x(t)$

* نکته: در تمام سیگنال‌ها داریم: $r = |x(t)| = x(t)\, x^*(t)$

۳- سیگنال توان و انرژی:

انرژی سیگنال: انرژی سیگنال در بازه زمانی مشخص عبارت است از:

$$E(t) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

انرژی کل سیگنال E_∞ در بازه زمانی بینهایت بدست می‌آید.

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

انرژی سیگنال گسسته هم به صورت زیر خواهد بود:

$$E[n] = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} |x[n]|^2 \quad , \quad E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

توان سیگنال:

توان لحظه‌ای سیگنال: $p(t) = |x(t)|^2 \quad , \quad p[n] = |x[n]|^2$

توان متوسط: $p(t_1,t_2) = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \quad p[n_1,n_2] = \frac{1}{n_2-n_1}\sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$

توان متوسط کل: $P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T}$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\infty}{2N}$$

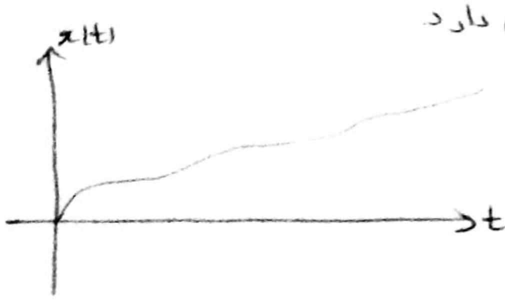
سیگنال انرژی: سیگنالی که انرژی کل آن محدود است $E_\infty < \infty$.

سیگنال توان: " " توان کل آن محدود است $P_\infty < \infty$

سیگنال نه توان نه انرژی: سیگنالی که توان و انرژی کل آن بینهایت است.

نکته:

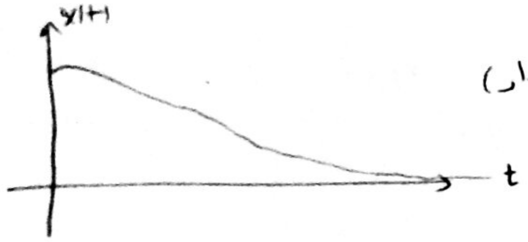
نکته: انرژی سیگنال با مساحت زیر نمودار $|x(t)|$ رابطه مستقیم دارد



در شکل مقابل چون مساحت زیر نمودار ∞ است

پس انرژی $x(t)$ هم ∞ خواهد بود.

اگر مساحت زیر نمودار از یک جایی به بعد ∞ شود، انرژی سیگنال ∞ است.



در شکل مقابل چون انرژی سیگنال (مساحت زیر نمودار)

محدود است لذا انرژی محدود است.

نکته: اگر یک سیگنال در بازه زمانی محدود مقدار کراندار (غیر ∞) داشته باشد آنگاه سیگنال

انرژی خواهد بود.

اگر سطح زیر نمودار در حال افزایش با دوره زمانی نامحدود باشد، سیگنال دارای توان و انرژی ∞ است

مثال: سراسری ۸۸ آزاد. سیگنال $x(t)=\frac{1}{1+|t|^3}$ چه نوعی است؟ ۱) قدرت ۲) انرژی ۳) قدرت و انرژی

۴) نه قدرت نه انرژی

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\int_0^\infty \frac{1}{(1+|t|^3)^2} dt$$

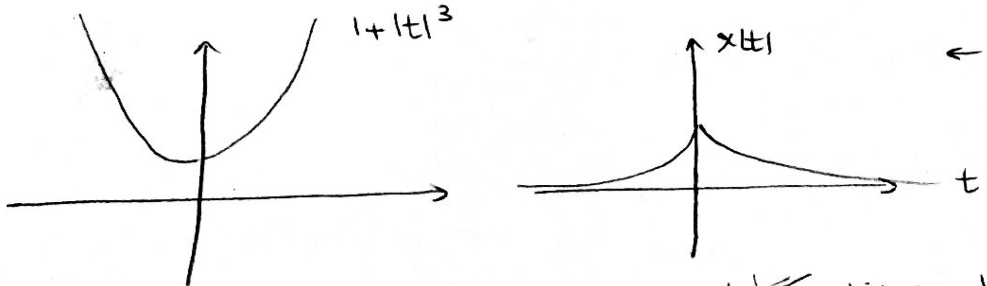
حالت اول: $0<t<1 \longrightarrow 1+|t|^3 > |t|^3 \longrightarrow \frac{1}{1+|t|^3} < \frac{1}{|t|^3}$

$t>1 \longrightarrow 1+|t|^3 > |t|^3 \longrightarrow \frac{1}{1+|t|^3} < \frac{1}{|t|^3}$

گزینه ۱

$$E_\infty \leq 2\int_0^\infty \frac{1}{|t|^6} dt = 2\,\frac{t^{-5}}{-5}\Big|_0^\infty = 0 \rightarrow E_\infty = 0$$

از راه حل نمودار ←



چون طول محدود است لذا سیگنال انرژی خواهد بود.

مثال: دکتری ۹۰. ص ۳۰ س ۴۶. سیگنال $x(t)=(1-e^{-5t})u(t)$ از کدام نوع است؟

۱- انرژی ۲- توان ۳- انرژی نوسانی دارد. ۴) توان و انرژی

حل تشریحی:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{-5t})^2 u^2(t)\, dt = \int_0^\infty 1 + e^{-10t} - 2e^{-5t}\, dt$$

$$= \infty + \frac{e^{-10t}}{-10}\Big|_0^\infty - \frac{2e^{-5t}}{-5}\Big|_0^\infty$$

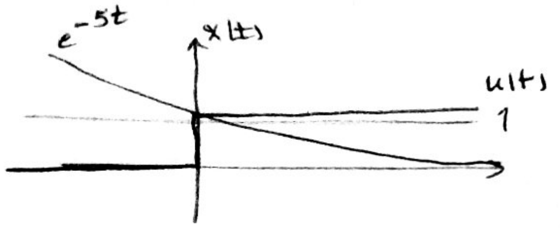
$$= \infty + \frac{-1}{10} - \frac{2}{5} = \infty$$

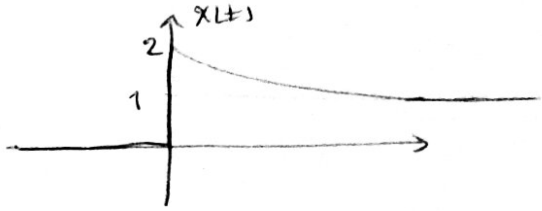
نکته: هرگاه u یا ... داخل انتگرال باشد ابتدا u و 0 را روی حدود انتگرال ساده کنید.

پس انرژی نیست ولی توان است.

$$P_\infty = \frac{1}{2\times\infty} E_\infty = \frac{\infty}{2\infty} = \frac{1}{2}$$

حل تستی: نمودار $x^2(t)$ را رسم می‌کنیم





چون مساحت زیر نمودار ∞ است پس سیگنال انرژی نیست ولی چون مساحت زیر نمودار در حال رشد (افزایش) نیست و مساحت ثابتی ماند (از یک زمانی به بعد) لذا سیگنال توان است.

آزاد ۷۹ . ص ۴۸ ت ۴ . قدرت سیگنال $x(t)=\begin{cases} 2 & n<-10 \\ 4 & -10\leq n\leq 10 \\ \frac{1}{6} & n\geq 10 \end{cases}$ کدام است؟

۱) 2　　۲) ०　　3) ∞　　4) $\frac{1}{2}$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

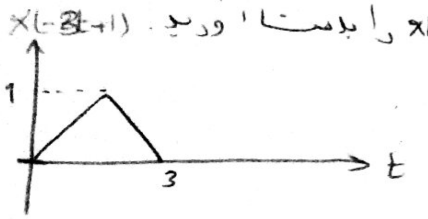
$$= \lim \frac{1}{2N} (E_\infty) \longrightarrow E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{-9} 4 + \sum_{-10}^{10} 16 + \sum_{11}^{\infty} \frac{1}{36}$$

$$E_\infty = 4(-9-(-\infty)+1) + 16(10-(-10)+1) + \cancel{36(\infty-11+1)} \ (\tfrac{1}{36})^{11}/1-\tfrac{1}{36}$$

$$= 4 \times \infty$$

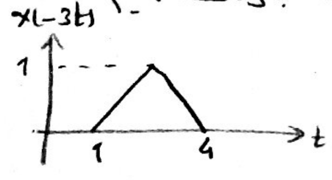
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{4\times\infty}{2N} = 2$$

مثال ۱. سیگنال $x(-3t+1)$ داده شده است. سیگنال $x(t)$ را بدست آورید.

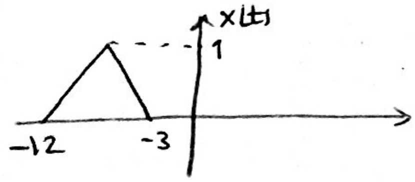


در این مثال برعکس عمل می‌کنیم. یعنی باید تبدیل‌ها را پیدا کنیم

که $x(-3t+1)$ را به $x(t)$ تبدیل کند. برای این کار ابتدا باید ۱ واحد شیفت به راست بدهیم



حال t را به $-t$ تبدیل کرده و باید در $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم تا $x(t)$ بدست آید.



سیگنال‌های متناوب.

هرگاه $T>0$ وجود داشته باشد که $x(t+T)=x(t)$ شود، $x(t)$ را متناوب گوییم و کوچکترین عدد مثبت T را دوره تناوب اصلی گوییم.

همچنین توجه کنید که به ازای هر m صحیح داریم: $x(t+mT)=x(t)$.

سیگنال گسسته $x[n]$ را متناوب گوییم هرگاه $N>0$ و صحیح وجود داشته باشد که $x[n+N]=x[n]$.

کوچکترین N را دوره تناوب اصلی گوییم و به ازای هر m صحیح داریم: $x[n+mN]=x[n]$.

نکته. سیگنال پیوسته و ثابت متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

سیگنال گسسته و ثابت متناوب با دوره تناوب اصلی ۱ است.

نکته. دوره تناوب سیگنال‌های سینوسی: $\cos(at), \sin(at), e^{jat} \rightarrow T=\frac{2\pi}{a}$

نکته. اگر $x(t)$ متناوب با T باشد، $|x(t)|$ دارای تناوب $\frac{T}{2}$ است.

$$|\cos(at)|,\ |\sin(at)|,\ \cot(at),\ \tan(at) \longrightarrow T = \frac{\pi}{a}$$

نکته.
$$\cos(\omega_0 n),\ \sin(\omega_0 n),\ e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0}\ \text{گویا} \rightarrow N = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ \frac{2\pi}{\omega_0}\ \text{غیرگویا} \rightarrow \text{نامتناوب} \end{cases}$$

نکته. اگر $x[n]$ متناوب باشد آنگاه $x[n^2]$ متناوب است.

$$x[n^2] \longrightarrow \begin{cases} N\ \text{مضرب}\ 4 \rightarrow \frac{N}{2} \\ \text{o.w} \longrightarrow N \end{cases}$$

نکته: برای سیگنالهای متناوب داریم:
$$E_\infty = \infty$$

$$P_\infty = P_T = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt, \quad P_\infty = P_N = \frac{1}{N}\sum_{N} |x[n]|^2$$

$$A\cos(at),\ A\sin(at) \longrightarrow P = \frac{|A|^2}{2}$$

نکته!
$$A\cos(an) \longrightarrow \begin{cases} \frac{A^2}{2} & a\ \text{مضرب}\ \pi\ \text{نباشد} \\ A^2 & \text{باشد}\ \text{"} \end{cases}$$

$$A,\ Ae^{jat} \longrightarrow P = |A|^2$$

$$A\sin(an) \longrightarrow \begin{cases} A^2/2 & a \neq k\pi \\ 0 & a = k\pi \end{cases}$$

نکته. اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه $x(at)$ متناوب با $\frac{T}{|a|}$ است.

نکته: اگر $x[n]$ متناوب با دوره تناوب N باشد، $x[an]$ اگر $|a|<1$ و صحیح باشد، متناوب

با دوره تناوب $\frac{N}{|a|}$ است. اما درحالتی که $|a|<1$ باشد نمی‌توان اظهار نظر کرد.

نکته. اگر $x_1(t)$ متناوب با T_1، $x_2(t)$ متناوب با T_2 باشد آنگاه داریم:

(I) $x_1(t)+x_2(t)$ متناوب و دوره تناوب اصلی ک.م.م T_1 و T_2 است.

(II) $x_1(t)x_2(t)$ لزوماً متناوب نیست و برای بررسی باید آن را تبدیل به جمع کنیم و دوره تناوب حاصل

می‌تواند از ک.م.م T_1 و T_2 هم کمتر شود. ← آزاد ۹۰ ص ۵۲ ص ۴۱

مثال ۲۳ کتاب ص ۲۰

گزینه ۱.

توجه: در سیگنال‌های $\cos[an]$ ، $\sin[an]$ و e^{jan} هرگاه a مضربی از π نباشد، سیگنال

نامتناوب است. و شیفت زمانی آن‌ها نیز دوره تناوب ندارد.

در مورد گزینه ۲ داریم:

$$x_2[n]=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)n\right)+\cos\left(\left(\pi/3-\pi/6\right)n\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}n\right]+\cos\left[\frac{\pi}{6}n\right]\rightarrow T_1=4,\ T_2=12\rightarrow T=12\ \checkmark$$

در مورد گزینه ۴ دقت کنید داریم:

$$x_3(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-(\pi t+\pi T)-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi t-\pi T-n}=\sum_{n'=-\infty}^{\infty}e^{-\pi t-n'}\qquad n'=n+\pi T$$

به شرطی که πT عدد صحیح باشد یعنی $T=1/\pi$.

مثال ۲۵ کتاب ص ۲۱

گزینه ۱ نامتناوب است چون $\frac{2\pi}{1/8}=16\pi$ عدد صحیح نیست.

نکته: در دوره تناوب سیگنالها دقت کنید داریم:

اگر $x(t)$ متناوب با T باشد آنگاه

$$x(f(t)+T) = x(f(t))$$

$$x(f(t+T)) \overset{?}{\neq} x(f(t))$$

اگر $f(t)$ متناوب با T باشد آنگاه $x(f(t))$ نیز متناوب با T است.

مثال تألیفی: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (

۱) $x(t)=\sin(t)$ و $f(t)=t^2$ آنگاه $x(f(t))$ متناوب با $T=2\pi$ است.

۲) $x(\cos(t)+2\pi) = x(\cos(t))$

۳) $x(t)=\tan(t)$, $f(t)=t^2$ آنگاه $x(f(t)+\pi) = x(f(t))$

۴) $x(t)=\sin(|t|)$, $f(t)=t^2$ آنگاه $x(f(t+\pi)) = x(f(t))$

گزینه ۱ صحیح نیست چرا که وقتی می‌گوییم $x(f(t))$ متناوب با T است یعنی:

$$x(f(t+T)) = x(f(t))$$

$$\sin((t+2\pi)^2) \neq \sin(t^2) \longrightarrow$$ طبق نکته فوق

گزینه ۲ نیز صحیح نیست چرا که دوره تناوب $x(t)$ را نمی‌دانیم. صورت صحیح رابطه به صورت زیر است:

$$\cancel{x(f(t=}\ x(\cos(t+2\pi)) = x(\cos(t))$$

گزینه ۳ صحیح است: $x(t+\pi) = x(t) \longrightarrow x(f(t)+\pi) = x(f(t))$

گزینه ۴ نیز طبق نکته فوق صحیح نیست.

آزاد ۹۱. درمورد دوره تناوب $x(t) = \sin(200\pi t + 0.5\pi) - \cos(800t)$ بحث کنید.

$$\sin(200\pi t + \pi/2) \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100}$$

$$\cos(800t) \longrightarrow T_2 = \frac{2\pi}{800} = \pi/400$$

$$T_3 = l.c.m\left\{\frac{1}{100}, \frac{\pi}{400}\right\} =$$ وجود ندارد $\rightarrow$ $x(t)$ نامتناوب

مثال: دوره تناوب اصلی سیگنال های $x(t) = e^{j\frac{7}{2}t}\cos(t/2)$ و $y(t) = e^{j\pi t}x(t)$ بحث کنید.

نکته. همواره سعی کنید سیگنال ها را به فرم جمع تبدیل کنید (جمع از sin، cos یا $e^{j\theta}$ ها)

$$\cos(t/2) = \frac{e^{jt/2} + e^{-jt/2}}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})t} + \frac{1}{2}e^{j(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}$$

$$e^{j4t} \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{4} = \pi/2 \quad , \quad e^{j3t} \longrightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$T_x = l.c.m\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\} = \frac{l.c.m(\pi, 2\pi)}{\text{ب.م.م}(2,3)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$y(t) = e^{j\pi t}x(t) = \frac{1}{2}e^{j(4+\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(3+\pi)t}$$

$$e^{j(4+\pi)t} \longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{4+\pi} \longrightarrow l.c.m(T_1, T_2) = \frac{2\pi}{\text{ب.م.م}(4+\pi, 3+\pi)}$$

$$e^{j(3+\pi)t} \longrightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3+\pi}$$

= وجود ندارد

لذا $y(t)$ نامتناوب است.

مثال. کدام گزینه نادرست است؟

۵۸. ... سراسری ۷۷ توان و انرژی سیگنال $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب عبارت است از

۱) $P=\frac{41}{18}$, $E=+\infty$ ۲) $P=0$, $E=+\infty$ ۳) $P=\infty$, $E=\infty$ ۴) $P=0$, $E=\frac{64}{9}$

گزینه ۱. با توجه به شکل سیگنال دوره تناوب آن را بررسی می‌کنیم:

یادآوری: همواره در بحث توان - انرژی به دوره تناوب و متناوب بودن سیگنال دقت کنید.

$$x[n+N] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n+N-2m|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2(m-\frac{N}{2})|}$$

$$\text{if} \quad \frac{N}{2} = \text{عدد صحیح} \Rightarrow \quad x[n+N] = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m'|} = x[n]$$

پس دوره تناوب اصلی $N=2$ است. لذا چون متناوب است انرژی آن بی‌نهایت است.

از طرفی چون سیگنال متناوب غیر صفر است توان آن عددی محدود است. گزینه ۲ و ۳ رد می‌شود.

همچنین گزینه ۴ نیز به دلیل $E=\infty$ نبودن رد می‌شود. پس گزینه ۱ صحیح است.

$$P_\infty = P_N = \frac{1}{N}\left(\sum_N |x[n]|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|x[0]|^2+|x[1]|^2\right)$$

$$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|2m|} = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{+2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2m}$$

$$= \sum_{m'=0}^{\infty} 2^{-2m'} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2m} = 1+2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$= 1 + 2\,\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 1+2\times\frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 5/3$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|1-2m|} = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-1+2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{1-2m}$$

نکته. در حالت گسسته زمان، اگر $x[n]$ متناوب با N باشد آنگاه دوره تناوب $x[mN]$

دوره تناوب برابر با N_1 خواهد بود که N_1 برابر است با صورت کسر ساده شده $\frac{N}{m}$.

مثال. انرژی و توان سیگنال $x(t) = 2e^{j3t} + 2e^{j2t}$ با کدام سیگنال زیر برابر است؟

۱) $y(t) = \cos(t)$ ۲) $y(t) = 2\cos(t)$ ۳) $y(t) = 4\cos(0.5t)$

۴) $y(t) = 2\cos(0.5t)$

نکته. اگر اندازه دو سیگنال برابر باشد، انرژی و توان آنها برابر است.

$$x(t) = 2e^{j\left(\frac{2+3}{2}\right)t}\left(e^{-j0.5t} + e^{j0.5t}\right) = 4\cos(0.5t)\,e^{j2.5t}$$

$$|x(t)| = 4\cos(0.5t) \longrightarrow y(t) = 4\cos(0.5t)$$

مثال. اگر $x[n]$ یک سیگنال با دوره تناوب $N=8$ باشد، دوره تناوب $x[3n]$ کدام است؟ ۱) 4 ۲) 8 ۳) $x[3n]$ نامتناوب ۴) نمی‌توان در مورد دوره تناوب

$x[3n]$ اظهار نظر کرد.

$$N=8\ ,\ m=3 \longrightarrow \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \longrightarrow N_1 = 8$$

نکته. اگر $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n-mN]$ یا $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t-mT)$ باشد آنگاه اگر $z[n]$ یا $z(t)$ سیگنال انرژی

باشد، $x[n]$ یا $x(t)$ سیگنال توان خواهد بود و اگر z سیگنال توان باشد احتمالا x توان بینهایت

خواهد بود.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\delta(t)\right)=\frac{d}{dt}(\delta(t)) \Rightarrow -e^{-t}\delta(t)+e^{-t}\delta'(t)=\delta'(t)$$

$$\Rightarrow e^{-t}\delta'(t)=\delta'(t)+\delta(t)$$

گزینه ۲.

تست. اگر $x(t)=\sqrt{\tan(t)}$ بوده و $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-|n-2k|}$ باشد، کدام گزینه در مورد $x(f(t))$ صحیح است؟

۱) نامتناوب ۲) متناوب با $T=1/2$ ۳) متناوب با $T=2$

۴) متناوب، ولی دوره تناوب اصلی برای آن تعریف نمی‌شود

نکته. اگر $x(t)$ یک سیگنال دلخواه و $f(t)$ سیگنالی با دوره تناوب T باشد، $x(f(t))$ متناوب با دوره تناوب T است.

نکته. سیگنال $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{|n-mN|}$ متناوب با دوره تناوب N است.

با توجه به نکات فوق $f(t)$ متناوب با $T=2$ است و $x(f(t))$ هم دارای $T=2$ می‌باشد.

تست. توان کل سیگنال $f(t)=e^{t}u(-t)+2e^{-t}u(t)+u(t)$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) $1/2$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۰

نکته. اگر $x(t)$ یک سیگنال کراندار باشد و $\lim_{t\to\infty}x(t)=A$ و $\lim_{t\to-\infty}x(t)=B$

باشد آنگاه $P_\infty=\frac{A^2+B^2}{2}$ است.

طبق نکته فوق داریم: $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}2e^{-t}+1=1$

۱) دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)=\tan(\sin(t))$ برابر π است.

۲) دوره تناوب اصلی $x(t) = \dfrac{\sin\frac{5}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$ برابر 2π است.

۳) دوره تناوب $x[n] = \cos[\frac{\pi n^2}{8}]$ برابر $\underline{8}$ است.

۴) $x(t) = \dfrac{\sin(5/2\, t)}{\sin(t/2)}$ با $\underline{4\pi}$ متناوب است.

گزینه $\underline{1}$ ← هرگاه بخواهیم درستی گزینه‌ای را بررسی کنیم $x(t+T_0) \stackrel{?}{=} x(t)$ را بررسی کنیم

$$\tan(\sin(t+\pi)) = \tan(-\sin(t)) = -\tan(\sin(t)) \neq x(t)$$

از طرفی می‌دانیم که $x(f(t))$ متناوب با دوره تناوب $f(t)$ است. پس $\tan(\sin(t))$ متناوب با دوره تناوب $\sin(t)$ یعنی $\underline{2\pi}$ است.

* توجه کنید که گزینه های ۲ و ۴ مشابه اما متفاوت هستند. دوره تناوب اصلی یعنی کوچکترین دوره تناوب.

باید ابتدا $x(t)$ را به صورت جمع چند سیگنال بنویسیم.

برای ساده کردن عبارت فوق از سری فرمول هندسی استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\sin(5/2\, t)}{\sin(t/2)} = \frac{e^{j5/2 t} - e^{-j\frac{5t}{2}}}{e^{jt/2} - e^{-jt/2}}$$

پس باید به فرم $\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ باشد.

$$x(t) = \frac{e^{j\frac{5}{2}t}}{e^{jt/2}} \cdot \frac{1-e^{-j5t}}{1-e^{-jt}}$$

$$= e^{j2t}\,\frac{1-(e^{-jt})^5}{1-e^{-jt}} = e^{j2t}(1+e^{-jt}+e^{-j2t}+e^{-j3t}+e^{-j4t})$$

$$= e^{j2t} + e^{jt} + 1 + e^{-jt} + e^{-j2t} \longrightarrow T_x = 2\pi$$

$\downarrow$ π $\downarrow$ 2π $\downarrow$ تعریف نشده $\downarrow$ 2π $\downarrow$ π

نکته. هر سیگنال زمان پیوسته به فرم $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t-mT)$ متناوب با دوره تناوب T است.

نکته. اگر سیگنال زمان گسسته $f[m]$ متناوب با دوره تناوب M باشد آنگاه $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]z(t-mT)$

متناوب با $M\times T$ است.

مثال. دوره تناوب سیگنال $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \cot(\frac{2\pi}{5}m)\delta(t-m)$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 10 ۳) 1 ۴) نامتناوب.

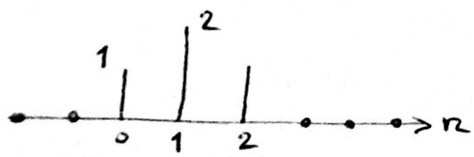
$$f[m]=\cot(\frac{2\pi}{5}m) \longrightarrow M=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}}=5 \quad , T=1 \longrightarrow M\times T=5$$

نکته. در گسترده‌سازی زمانی سیگنال‌های گسسته حتماً اول باید گسترده‌سازی اعمال شود و سپس انتقال زمانی.

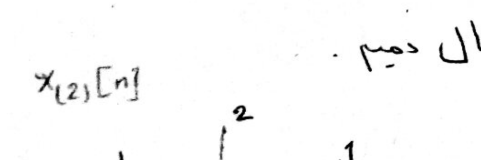
درغیراین صورت پاسخ اشتباه خواهد بود.

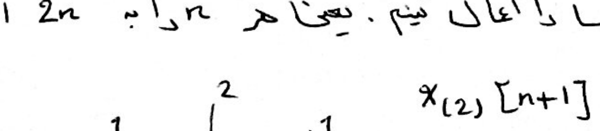
$$x_{(m)}[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{m}] & \text{n مضرب m} \\ 0 & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

مثال تالیفی. اگر سیگنال $x[n]$ به فرم زیر باشد مقدار $z[n]=x_{(2)}[n+1]$ در $n=1$ کدام است؟ ۱) 1 ۲) 0 ۳) 2 ✓ ۴) $\frac{1}{2}$



ابتدا باید گسترده‌سازی را اعمال کنیم. یعنی هر n را به 2n انتقال دهیم.





اگر ابتدا انتقال داده و سپس گسترده‌سازی را اعمال کنیم جواب 0 خواهد بود.

ولی در فشرده‌سازی زمان برعکس عمل می‌کنیم.

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0 \Rightarrow P_\infty = \frac{0^2+1^2}{2} = 1/2$$

سیگنالهای متعامد: دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ را متعامد گوییم هرگاه $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) = 0$ شود.

نکته. سیگنالهای زوج و فرد برهم عمود هستند

نکته. سیگنالهایی که باهم هیچ همپوشانی ندارند متعامد محسوب می‌شوند.

نکته. $\sin(\alpha t)$ و $\sin(\beta t)$ به ازای $\alpha \neq \beta$ متعامد هستند.

نکته. $\cos(\alpha t)$ و $\cos(\beta t)$ نیز عمود برهم هستند.

نکته. $e^{j\alpha t}$ بر $\sin(\beta t)$ و $\cos(\beta t)$ عمود است. $(\alpha \neq \pm\beta)$

نکته. اگر $x(t)$ و $y(t)$ برهم عمود باشند، آنگاه

$$E\{x(t)+y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\}$$

$$P\{x(t)+y(t)\} = P\{x(t)\} + P\{y(t)\}$$

آزاد ۸۸ . ص ۱۵ . ت ۲۹ .

تألیفی. انرژی و توان کل سیگنال $x(t) = 2\cos(3t) + e^{j4t} + \sin(t)$ کدام است؟

۱) $\infty, 2.5$ ۲) $\infty, 3.5$ ۳) $3.5, \infty$ ۴) ∞, ∞

با توجه به نکات هر سه سیگنال برهم عمود هستند.

$$P\{2\cos 3t + \sin t + e^{j4t}\}$$

$$= P\{2\cos 3t\} + P\{\sin t\} + P\{e^{j4t}\} = \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} + 1^2 = 3.5$$

چون سیگنالها متناوب و غیر صفر هستند انرژی آنها بی‌نهایت است.

در مورد گزینه های ۲، ۳ و ۴ داریم:

$$x[n] = \cos[\frac{\pi}{8} n]$$

$$N = \frac{2\pi}{\pi/8} = 16 \longrightarrow$$ چون $x[n]$ متناوب با $N=16$ است و N مضرب ۲ است

طبق نکته، $x[n^2]$ متناوب با $\frac{N}{2}$ یعنی 8 است

سیگنال زوج و فرد

سیگنال هایی که نسبت به محور عمودی متقارن هستند را زوج گوئیم یعنی:

$x(-t) = x(t)$

$x[-n] = x[n]$

و سیگنالهایی که نسبت به مبدأ متقارن هستند را فرد گوئیم یعنی

$x(-t) = -x(t)$

$x[-n] = -x[n]$

نکته. سیگنالهای فرد حتماً در مبدأ صفر هستند یعنی $x(0)=0$ است.

هر سیگنالی دارای قسمت زوج و فردی باشد یعنی:

$$x(t) = \overbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}^{\text{زوج}} + \overbrace{\frac{x(t)-x(-t)}{2}}^{\text{فرد}} = x_e(t) + x_o(t)$$

نکته. اگر $x(t)$ یا $x[n]$ فرد باشد داریم:

$$x(0) = 0 \ , \ \int_{-a}^{a} x(t)dt = 0$$

$$x[0] = 0 \ , \ \sum_{-m}^{m} x[n] = 0$$

و اگر $x(t)$ یا $x[n]$ زوج باشد داریم:

$$\int_{-a}^{a} x(t)dt = 2\int_{0}^{a} x(t)dt$$

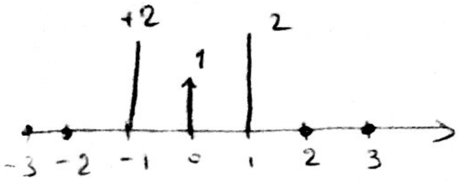
$$\sum_{-m}^{m} x[n] = 2\sum_{0}^{m} x[n] - x[0]$$

نکته: حاصلضرب دو سیگنال زوج ← زوج

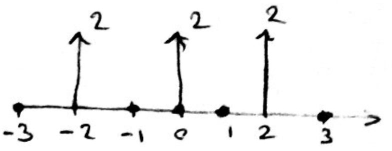
دو سیگنال زوج و فرد ← فرد

دو سیگنال فرد ← زوج

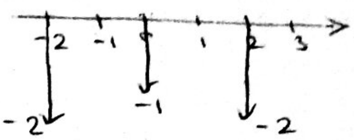
مثال. اگر $x[n]$ به صورت شکل زیر باشد $x[2n+4]$ کدام است؟



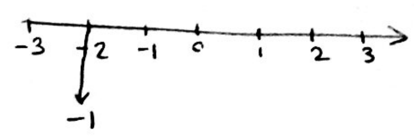
1)



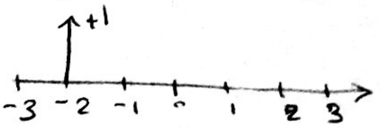
2)



3)

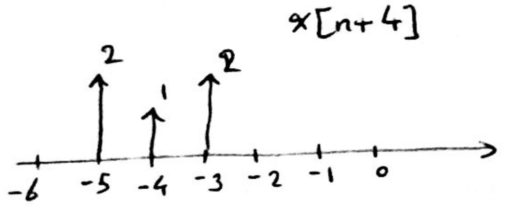


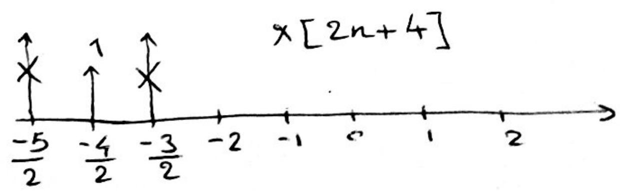
4)



دقت کنید که در شیفت و مقیاس دهی گسسته هرگز دامنه تغییر نمی‌کند، پس گزینه‌های ۱، ۲، ۳ رد می‌شوند

حل تشریحی: ابتدا 4 واحد شیفت به سمت چپ دارم.





مثال. اگر $x[n]$ متناوب با دوره تناوب $N_0=9$ باشد، $x[3n+5]$ دارای کدام خاصیت است؟

1) متناوب با دوره تناوب 9　　2) متناوب با دوره تناوب 14

3) نامتناوب　　4) سیگنال انرژی

دقت کنید که شیفت روی دوره تناوب اثری ندارد و تنها مقیاس دهی روی آن اثر دارد. از طرفی می‌دانیم سیگنال تناوب با وجود فشردگی زمانی متناوب خواهد بود با دوره تناوب اصلی $\frac{N_0}{a}$ یعنی $\frac{N_0}{3}=3$. اما چون 9 مضرب صحیح از دوره تناوب اصلی است لذا می‌تواند دوره تناوب باشد اما دوره تناوب اصلی نیست. از طرفی می‌دانیم که سیگنال متناوب حتماً سیگنال غیرانرژی است.

پس $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی 2π است اما با هر مضرب صحیح از $\underline{2\pi}$ هم متناوب است.

مقیاس دهی و شیفت زمانی سیگنال‌ها ←

۱- شیفت زمانی: شیفت زمانی یعنی سیگنال را روی محور افق به چپ یا راست ببریم.

$x[n+n_0]$
$x(t+t_0) \longrightarrow$ به اندازه t_0 (n_0) به سمت راست

$x(t-t_0)$
$x[n-n_0] \longrightarrow$ به اندازه $(n_0)t_0$ به سمت چپ

نکته: n_0 باید عدد صحیح باشد.

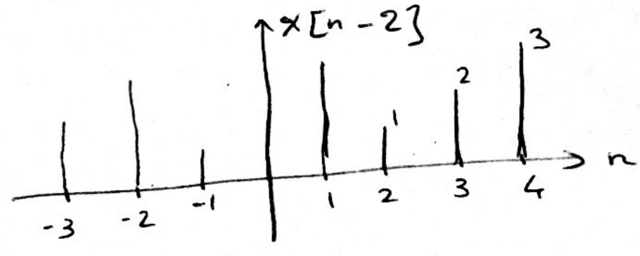
نکته: شیفت زمانی روی انرژی و توان و دوره تناوب اثری ندارد.

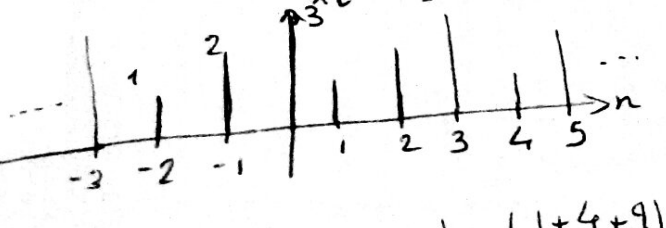
مثال: سیگنال $x[n]$ به صورت زیر با دوره تناوب $\underline{3}$ توصیف می‌شود. انرژی و توان $x[n+2]$ و نیز $x[n-2]$ را بدست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 3 & n=2 \end{cases}$$

با توجه به نکته فوق می‌توان انرژی و توان $x[n]$ را بدست آورد. چون شیفت روی آنها اثر ندارد.

ابتدا $x[n+2]$ و $x[n-2]$ را رسم می‌کنیم. همانطور که شیفت روی دوره تناوب اثر ندارد پس دوره تناوب همچنان برابر $\underline{3}$ خواهد بود.





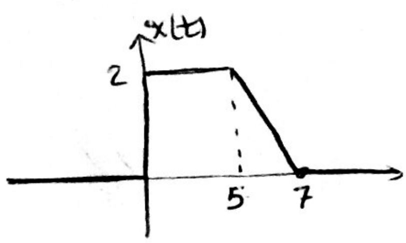
چون x متناوب است لذا $E_x=\infty$.

$$P_x = \frac{1}{3} E_{x[T]} = \frac{1}{3} \times (1+4+9) = \frac{14}{3}$$

* در مقیاس دهی دوره تناوب $\frac{1}{|a|}$ برابر می شود. $x(t), T_0 \longrightarrow x(at), \frac{T_0}{|a|}$

* در مقیاس دهی و شیفت همواره اول شیفت و سپس مقیاس دهی را انجام می دهیم.

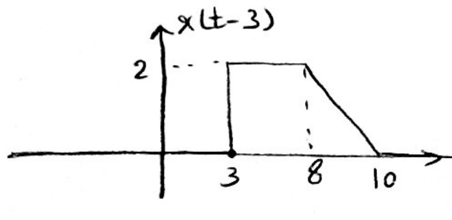
$x(t)$ به صورت زیر داده شده است انرژی سیگنال $x(-2t-3)$ کدام است؟

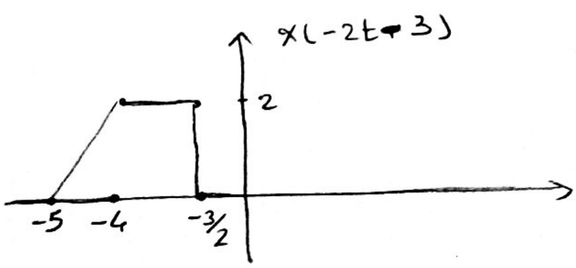


ابتدا $x(t+3)$ و سپس $x(-2t)$ را اعمال می کنیم

دقت کنید همواره تبدیلات فقط روی $\underline{t}$ اعمال می شود.

$$x(t) \xrightarrow{t \to t-3} x(t-3) \xrightarrow{t \to -2t} x(-2t-3)$$





$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-5}^{-4} |2t|^2 dt + \int_{-4}^{-3/2} 2^2 dt$$

$$= \frac{4}{3} t^3 \Big|_{-5}^{-4} + 4 \Big|_{-4}^{-3/2}$$

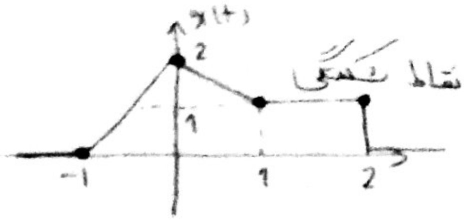
$$= \frac{4}{3}\left(-64-(-125)\right) + 4\left(-3/2-(-4)\right)$$

$$= 274/3 \neq E_{x(t)}$$

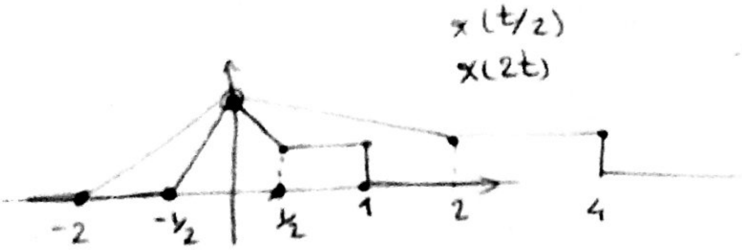
مثال برق ۸۵. ص۱۴۹. س۱۴.

۲- مقیاس دهی زمانی :

در مقیاس دهی زمانی $x(at)$ یعنی محور زمانی را بر a تقسیم می کنیم



برای این کار نقاط شکستگی را بر a تقسیم کند و نقاط را هم وصل کنیم.



* $a<-1$ یا $a>1$ ← سیگنال فشرده می شود.

* $-1<a<1$ ← سیگنال گسترده می شود.

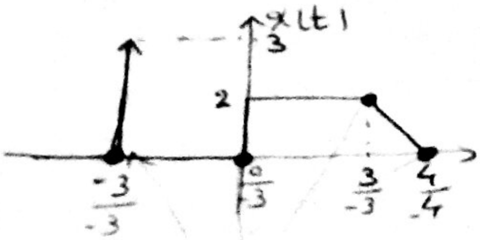
* $a<0$ ← $x(t)$ نسبت به محور عرض قرینه می شود.

* در شیفت زمانی عرض سیگنال تغییر نمی کند ولی در مقیاس دهی عرض سیگنال $\frac{1}{a}$ …

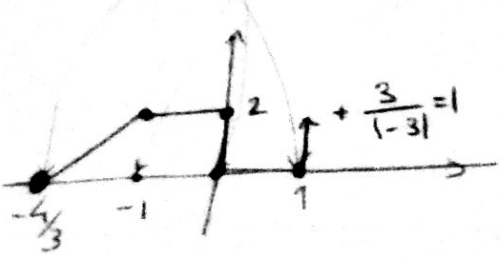
* در شیفت و مقیاس دهی مقدار سیگنال تغییر نمی کند مگر در $\delta(t)$ یعنی سیگنال ضربه

* در سیگنال ضربه $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ یعنی دامنه سیگنال هم در $\frac{1}{|a|}$ ضرب می شود.

مثال. سیگنال $x(t)$ مطابق شکل زیر داده شده است. $x(-3t)$ را رسم کنید



برای $x(-3t)$ نقاط تغییر شکل را بر -3 تقسیم می کنیم



مقیاس دهی زمان گسسته :

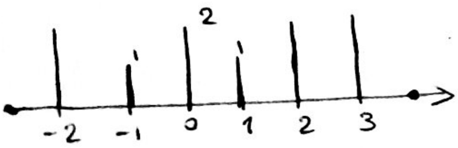
در مقیاس دهی زمان گسسته دقت کنید که همواره محور زمان باید اعداد صحیح باشند و در غیر اینصورت نمونه ها حذف می شوند.

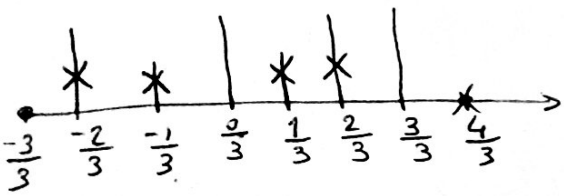
* در سیگنالهای زمان گسسته همواره هر عبارت مربوط به زمان باید اعداد صحیح باشد.

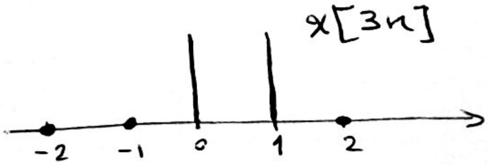
۱- $x[an]$ ، $|a|>1$ ← فشردگی زمانی

اگر a منفی باشد نسبت به محور افقی قرینه می شود. در این حالت نیز محور افقی را بر عدد a تقسیم می کنیم و اعداد غیر صحیح را حذف می کنیم.

مثال: $x[3n]$ را رسم کنید.





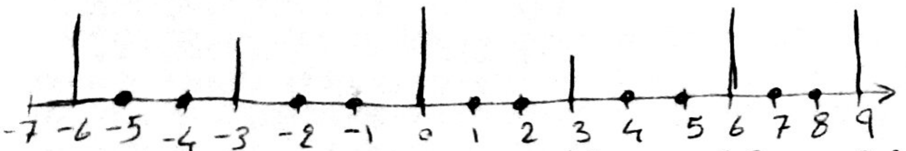


۲- $x_{(m)}[n]$ ، $|m|>1$ ← گستردگی زمانی

در این حالت محور n را در m ضرب می کنیم و در لحظات بدون مقدار ، 0 قرار می دهیم.

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & n = mk \\ 0 & n \neq mk \end{cases}$$

در مثال فوق $x_{(3)}[n]$ را رسم کنید.



نکته. اگر $x(t)$ یا $x[n]$ مختلط و زوج باشد آنگاه بخش حقیقی، موهومی، اندازه و فاز آن هم زوج خواهد بود و برعکس.

نکته. اگر $x(t)$ یا $x[n]$ مختلط و فرد باشد، بخش حقیقی و موهومی آن فرد است.

نکته. اگر $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر باشد آنگاه داریم:

$$x(t) = \begin{cases} 2x_e(t) & t>0 \\ x_e(0) & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad x(t) = \begin{cases} 2x_o(t) & t>0 \\ x_o(0) & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

روابط فوق برای حالت گسسته هم صادق است.

مثال ۳۳ کتاب ص ۲۵

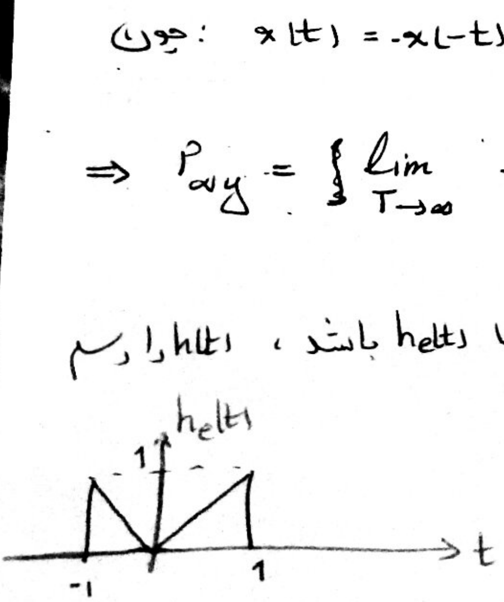
گزینه ۲ و ۴ رد می‌شود چون $x(t)$ متناوب و زمان نامحدود است پس $E_\infty=\infty$ است.

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} |x(t)|^2 + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$\text{چون:}\quad x(t) = -x(-t) \longrightarrow \int_{0}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{0} |x(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow P_{avg} = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} |x(t)|^2 dt = P/2$$

مثال. اگر $h(t)$ برای $t<0$ صفر بوده و قسمت زوج آن به صورت $h_e(t)$ باشد، $h(t)$ را رسم کنید.



$$h(t) = \begin{cases} 2h_e(t) & t>0 \\ h_e(0) & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ ، $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}$ ، $T_3 = \frac{2\pi}{\frac{13\pi}{3}} = \frac{6}{13}$ ، $T_4 = \frac{2\pi}{\frac{19\pi}{3}} = \frac{6}{19}$

گزینه ۴. ک.م.م $(6, \frac{6}{5}, \frac{6}{13}, \frac{6}{19}) = 6$

کنکوری ۹۰ - ص ۱۵۳ - س ۴۲ . اگر تابع $g(t) = t\sin(t)$ را به دو بخش زوج $g_e(t)$ و فرد $g_o(t)$ تقسیم کنیم داریم:

۱) $g_e(t) = -t\sin(t)$ ، $g_o(t) = 0$ ۲) $g_e(t) = t\sin(t)$ ، $g_o(t) = 0$

۳) $g_e(t) = 0$ ، $g_o(t) = t\sin(t)$ ۴) $g_e(t) = 0$ ، $g_o(t) = -t\sin(t)$

توجه کنید که تابع $f_1(t) = t$ و $f_2(t) = \sin(t)$ هر فرد هستند و حاصلضرب آنها یعنی $g(t) = t\sin(t)$ یک تابع زوج خواهد بود. لذا $g_e(t) = t\sin(t)$ و $g_o(t) = 0$ خواهد بود.

سراسری ۹۳ ، ص ۴۷۳ ، س ۱ . اگر $x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{t}{3})\delta(t-k\pi)$ و $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\pi t^2)\delta(t-k)$ و $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ باشد، در این صورت:

۱) x_1 و x_2 متناوب و x_3 نامتناوب است. ۲) هر سه متناوبند

۳) x_1 متناوب و x_2 ، x_3 نامتناوبند. ۴) هیچ کدام متناوب نیستند.

نکته. اگر سیگنال زمان گسسته $f(m)$ با دوره تناوب M متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ به فرم مقابل

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, z(t-mT)$ متناوب با دوره تناوب $M \times T$ خواهد بود.

برای حل این سؤال ابتدا داخل Σ ها ساده می کنیم.

$x_1(t):\quad \cos(\frac{t}{3})\,\delta(t-k\pi) = \cos(\frac{k\pi}{3})\,\delta(t-k\pi)$

$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{k\pi}{3})\,\delta(t-k\pi) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6,\ T = \pi \Rightarrow T_1 = 6\pi$

$x_2(t):\quad \cos(t^2\pi)\,\delta(t-k) = \cos(k^2\pi)\,\delta(t-k)$

$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(k^2\pi)\,\delta(t-k)$ با توجه به نکته گفته شده می دانیم $\cos[an^2]$

متناوب است و دوره تناوب آن از N یعنی دوره تناوب $\cos[an]$ بدست می‌آید که اگر N

مضرب ۴ باشد برابر $\frac{N}{2}$ و در غیر اینصورت برابر N است.

$\cos[k\pi] \longrightarrow N = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \longrightarrow$ مضرب ۴ نیست $\longrightarrow N_2 = 2$

$N = 2\ ,\ T = 1 \longrightarrow T_2 = 2\times 1 = 2$

$T_3 = $ ک.م.م $\{2, 6\pi\} =$ وجود ندارد.

لذا x_3 متناوب نیست و گزینه ۱ درست است.

آزاد ۸۸. خارج از کتاب. تابع $e^{-t}\delta'(t)$ برابر کدام گزینه است؟

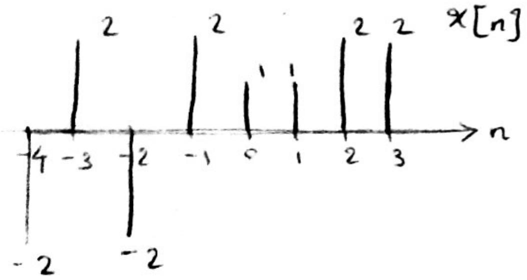
۱) $\delta'(t)$ ، ۲) $\delta(t)+\delta'(t)$ ۳) $-\delta'(t)$ ۴) ۰

چون $\delta'(t)$ است رابطه مشخص ندارد. لذا به صورت زیر حل می کنیم: $e^{-t}\delta(t) = e^{-0}\delta(t)$

$\Rightarrow e^{-t}\delta(t) = \delta(t)$

برق ۸۷ س ۲۳ ص ۵۰

سوال: اگر سیگنال $x[n]$ به فرم زیر باشد حاصل $z[n]=ev\{x[n-2]\}$ و $y[n]=x_e[n-2]$ در $n=$ کدام است؟



دقت کنید که عملیات روی n انجام می شود. $z[n]$ یعنی بخش زوج سیگنال $x[n-2]$ یا به عبارتی

$$z[n] = \frac{x[n-2]+x[-n-2]}{2} \rightarrow z[$$

اما $y[n]$ یعنی بخش زوج $x[n]$ را 2 واحد به سمت راست شیفت دهیم.

$$x[n] \longrightarrow x_e[n] \longrightarrow x_e[n-1]$$

$$y[n] = \left.\frac{x[n]+x[-n]}{2}\right|_{n\to n-1} = \frac{x[n-1]+x[-(n-1)]}{2}$$

حل تشریحی در کلاس.

مثال. کدام یک از سیگنالهای زیر متناوب است؟

۱) $odd\{u[n]\}$ ۲) $ev\{u[n]\}$ ۳) $odd\{\sin(\frac{\pi}{2}n)u[n]\}$ ۴) $ev\{\sin(\pi/2\, n)u[n]\}$

بررسی گزینه ها:

$$1)\ odd\{u[n]\} = \frac{u[n]-u[-n]}{2} = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n>0 \\ \frac{-1}{2} & n<0 \end{cases}$$ → نامتناوب

$$2)\ ev\{u[n]\} = \frac{u[n]+u[-n]}{2} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n\neq 0 \end{cases}$$ → نامتناوب

$$3)\ odd\{\sin(\pi/2\, n)u[n]\} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n)u[n]-\sin(-\pi/2\, n)u[-n]}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}n) & n> \\ \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}n) & n< \\ 0 & n= \end{cases}$$

متناوب است.

مثال. قسمت زوج سیگنال $x[n]$ برابر با $x_e[n] = 3\cos(4n) + 3\cos(\pi n)$ می‌باشد. اگر توان کل $x[n]$ برابر 15 باشد، توان قسمت فرد آن چقدر است؟

3 6 2.5 1.5

* توان کل سیگنال = توان قسمت زوج + توان قسمت فرد

$$\Rightarrow P_x = P_{x_e} + P_{x_o} \qquad P_{x_e} = ?$$

چون $\cos(4n)$ و $\cos(\pi n)$ بر هم عمود هستند لذا توان هرکدام را جداگانه حساب و باهم جمع می‌کنیم.

$$3\cos(4n) \longrightarrow P_\infty = \frac{3^2}{2} = 9/2$$

$$3\cos(\pi n) = 3e^{j\pi n} \Rightarrow P_\infty = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow P_{x_e} = 9 + 9/2 \longrightarrow P_{x_o} = 15 - 9 - 9/2 = 1.5$$

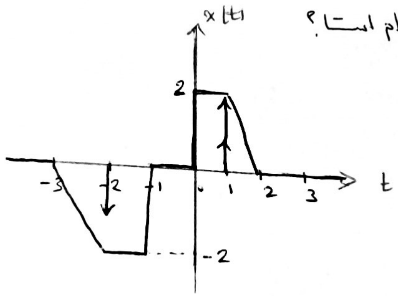
$$= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{0} 4^m + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right.$$

می‌شود

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}+2\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{8}{6} = 4/3$$

$$P_\infty = P_N = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}+\frac{16}{4}\right) = \frac{41}{18}$$

۸۷ . سراسری ۹۳ . صفحه ۵۰ . اگر $x_o(t)$ بخش فرد سیگنال $x(t)$ که در شکل نشان داده شده است باشد، در این صورت $\int_0^\infty x_o(t)dt$ کدام است؟



4. (۱   3.5 (۲   3 (۳   1 (۴

۹۵ . ص ۱۵ . س ۴۴

$$x_o(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t) \Rightarrow \int_0^\infty x_o(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty x(t)\,dt - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + \frac{2\times(1+2)}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[-1 - \frac{(2+1)\times 2}{2}\right] = \frac{5}{2} + 2 = 4.5$$

۸۸ . ص ۵۱ . س ۲۶ . تابع $\phi_1(t) = \begin{cases}\sqrt{2}e^{-t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ و تابع $\phi_2(t) = \begin{cases}Ae^{-2t}+Be^{-t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$، ϕ_2 را طوری تعیین کنید که $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ در فاصله صفر تا بینهایت بر یکدیگر عمود باشند.

A = 4 (۱   A = 6, B = 4 (۲   A = 4, B = 6 (۳   A = 6, B = -4 (۴

$$\int_0^\infty \phi_1(t)\,\phi_2(t)\,dt = 0$$

سیگنال‌های پایه

۱- پله واحد معمولاً با $u(t)$ یا $u[n]$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

۲- ضربه واحد با $\delta(t)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases} \qquad \delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

خواص ضربه واحد

① $x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$ مثال ⊥

$x(t)\,\delta(t)=x(0)\,\delta(t)$

⑦ $\int_{\alpha}^{\beta}\delta(\tau-t_0)\,d\tau=u(\beta-t_0)-u(\alpha-t_0)$

② $a\,\delta(t)+b\,\delta(t)=(a+b)\,\delta(t)$

③ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$

④ $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

⑤ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(\tau)\,x(\tau)\,d\tau=(-1)^n\,x^{(n)}(0)$

مثال I. صفحه نکد

⑥ $\delta(f(t))=\sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}$ $\quad f(t_i)=0$

مثال ۳۴ کتاب. ص ۲۹

برق ۹۰. ص ۵۳. ص ۳۸

$\delta(x): \quad x=8t-t^3$

$8t-t^3=0 \longrightarrow \begin{aligned} t_1&=0\\ t_2&=\sqrt{8}\\ t_3&=-\sqrt{8}\end{aligned}$

باتوجه به اینکه $\int_{-1}^{\infty}\delta(x)$ شامل $t_3=-\sqrt{8}$ نمی باشد لذا داریم:

$$\int_{-1}^{\infty}\delta(x)\,dt=\int_{-1}^{\infty}\frac{\delta(t-0)}{|8-3(0)^2|}+\frac{\delta(t-\sqrt{8})}{|8-3(\sqrt{8})^2|}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=3/16\ \checkmark$$

خواص ضربه واحد زمان گسسته: (خارج از کتاب)

① $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-n_0]=1$

② $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]=1\ \rightarrow$ سیگنال ثابت است

③ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,\delta[n-k]=x[n]$

④ $\delta[a f[n]]=\delta[f[n]]\ ,\quad \delta[an]=\delta[n]$

⑤ $u[mn]=u[n]\ ,\ u[m f[n]]=u[f[n]]\ ,\ m>0$

⑥ $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

⑦ $\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]=u[n]\ ,\quad \sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=u[n]$

⑧ $\sum_{k=m_1}^{m_2}\delta[k-n_0]=u[m_2-n_0]-u[m_1-1-n_0]\ ,\quad m_2\geq m_1$

⑨ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]=\begin{cases}1 & n\ \text{مضرب}\ N\\ 0 & o.w\end{cases}$

نکته: برای محاسبه عبارتهای سیگما که شامل ضربه می شوند ابتدا داخل Σ را ساده کرده و سپس از فرمول ⑧ استفاده می کنیم.

۱) مثال حاصل عبارتهای زیر را برحسب تابع پله بدست آورید

۱) $\sum_{k=-\infty}^{n-2} (k+2)\,\delta[k+1]$

قدم اول: $(k+2)\,\delta[k+1] = (-1+2)\,\delta[k+1] = +\delta[k+1]$

قدم دوم: $\sum_{k=-\infty}^{n-2} \delta[\underbrace{k+1}_{n}]$ $\qquad n_0=-1,\ m_1=-\infty,\ m_2=n-2$

$$= u[n-2+1] - u[-\infty-1+1] = u[n-1]$$

۲) $\sum_{k=-\infty}^{n} 3^k\,\delta[2-k]$

قدم اول: $3^k\,\delta[2-k] = 3^2\,\delta[2-k] = 9\,\delta[k-2]$

قدم دوم: $\sum_{k=-\infty}^{n} 9\,\delta[k-2] = 9\big[u[n-2] - u[-\infty-1-2]\big] = 9u[n-2]$

مثال. تساوی زیر را ثابت کنید.

۱) $\int_{t-5}^{t} \tau^2\,\delta(2\tau-6)\,d\tau = \frac{9}{2}\big(u(t-3)-u(t-8)\big)$

قدم اول: $\tau^2\,\delta(2(\tau-3)) = \frac{\tau^2}{2}\,\delta(\tau-3) = \frac{9}{2}\,\delta(\tau-3)$

$$\int_{t-5}^{t} \frac{9}{2}\,\delta(\tau-3)\,d\tau = \frac{9}{2}\big(u(t-3)-u(t-5-3)\big) = \frac{9}{2}\big(u(t-3)-u(t-$$

سیگنال شیب واحد.

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = t\,u(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (t^2+1)(\delta(t^2-1))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t^2+1)\,\delta(t-1)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty (t^2+1)\,\delta(t+1$$

$$-1 \notin [0,\infty] \longrightarrow \int_0^\infty (t^2+1)\,\delta(t+1)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (t^2+1)\,\delta(t^2-1)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (1^2+1)\,\delta(t-1)\,dt = \frac{2}{2}\times 1 = 1$$

$$\int_0^\infty \delta^{(n)}(t-t_0)\,x(t)\,dt = (-1)^n\, x^{(n)}(t_0)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (t^2+1)\,\delta'(t-3)\,dt = (-1)^1 \left.\frac{d(t^2+1)}{dt}\right|_{t=3} = (-1)\times 2\times 3 = -6$$

$$\rightarrow I = 1 - 6 = -5$$

مثال . ناسیتا عباسی . برق ۹۲ . ص ۴۳۳ . س ۱

اگر $x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos(t/3)\,\delta(t-k\pi)$ و $x_2(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\cos(\pi t^2)\,\delta(t-k)$ و $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ باشند

به نگاه : ۱) x_1 و x_2 متناوب ولی x_3 نامتناوب ۲) فقط x_1 متناوب

۳) هر سه سیگنال متناوب ۴) هیچ کدام متناوب نیستند

جواب داخل $\sum$ ابتدا δ ها را ساده می کنیم .

$$\cos(t/3)\,\delta(t-k\pi)=\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\delta(t-k\pi)$$

$$\cos(\pi t^2)\,\delta(t-k)=\cos(\pi k^2)\,\delta(t-k)$$

طبق نکته $\sum f(m)\,\delta(t-kT)$ متناوب با $T \times M$ است .

$$\cos(k\pi/3)\longrightarrow M_1=\frac{2\pi}{\pi/3}=6\quad,\ T_1=\pi\longrightarrow T_{x_1}=6\pi$$

$$\cos(k^2\pi)\longrightarrow\cos(k\pi)\longrightarrow N_0=\frac{2\pi}{\pi}=2\longrightarrow \text{مضرب ۲ نیست}\rightarrow M_2=2$$

$$,\ T_2=1\longrightarrow T_{x_2}=2$$

$$T_{x_3}=\mathrm{l.c.m}\{2,6\pi\}\longrightarrow \text{وجود ندارد.}$$

مثال ۲ . آزاد ۸۹ . مقدار $I=\int_0^{\infty}(t^2+1)\left[\delta'(t+3)+\delta(t^2-1)\right]dt$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -5 ۳) 7 ۴) 8

ابتدا داخل $\int$ را باید ساده کنیم .

$$\delta(t^2-1)=\delta((t-1)(t+1))$$

$$f(t)=(t-1)(t+1)\quad,\ t_1=1\quad t_2=-1$$

$$\delta(f(t))=\sum_{i=1}^{2}\frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}=\frac{\delta(t-1)}{2\times1}+\frac{\delta(t+1)}{2\times-1}$$

$$=\frac{1}{2}\delta(t-1)-\frac{1}{2}\delta(t-1)$$

$\delta[n-n_0] = \delta[n_0-n]$

نکته. $\delta[n]$ و $\delta(t)$ یک تابع زوج است یعنی

$\delta^2[n] = \delta[n]$

نکته. توان‌های تابع ضربه روی آن اثری ندارد.

نکته. $\delta'(t)$ تابعی فرد است.

نکته.

$$\delta\big((t-\alpha)(t-\beta)\big) = \frac{1}{|\alpha-\beta|}\delta(t-\alpha) + \frac{1}{|\beta-\alpha|}\delta(t-\beta)$$

نکته.

$$f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$$

مثال. حاصل $\sin(2t)\,\delta'(1-t)$ کدام است؟

$$\sin(2t)\,\delta'(-(-1+t)) = -\sin(2t)\,\delta'(t-1)$$

$$-\sin(2t)\,\delta'(t-1) = -\big(\sin(2)\,\delta'(t-1) - 2\cos(2)\,\delta(t-1)\big)$$

$$= 2\cos(2)\,\delta(t-1) - \sin(2)\,\delta'(t-1)$$

نکته.

$$\int_a^b x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} 0 & t_0 \notin [a,b] \\ x(t_0) & t_0 \in [a,b] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{(n)}(t-t_0)|\,dt = \infty$$

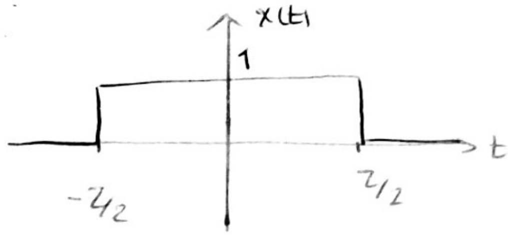
$$\delta'(af(t)) = \frac{1}{a|a|f'(t)}\,\delta'(f(t))$$

نکته. سیگنال شیب، نه توان و نه انرژی است.

$$r[n] = n\,u[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

سیگنال پالس: تابع مستطیل به صورت زیر تعریف و رسم می‌شود.

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



$$x(t) = \Pi\left(\frac{h(t)}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |h(t)| \leq \tau/2 \\ 0 & |h(t)| > \tau/2 \end{cases}$$

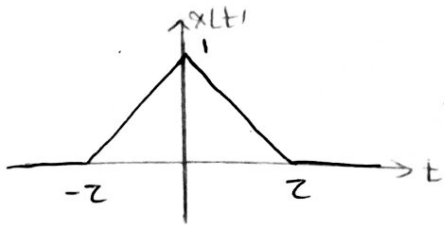
در حالت زمان گسسته داریم:

$$x[n] = \Pi\left[\frac{n}{k}\right] = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{k}{2} \\ 0 & |n| > k/2 \end{cases}$$

اگر $\frac{k}{2}$ عدد صحیح نبود، عدد صحیح کوچکتر از آن در نظر گرفته می‌شود.

سیگنال مثلث:

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$



سیگنال sinc: بعضی از خواص این سیگنال به صورت زیر است:

$$\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

۱) زوج است. ۲) به ازای ریشهٔ آرگومانش ۱ می‌شود یعنی $\mathrm{sinc}(0) = 1$. ۳) به ازای مقادیر صحیح و غیر صفر u، صفر است. ۴) نامتناوب است اما نوسانات در فواصل مساوی اتفاق می‌افتد. ۵) در $u \to \pm\infty$ به صفر میرا می‌شود.

سراسری ۸۰ - فصل ۲ سؤال ۱۵ - با تعاریف $a[n] \triangleq x[n]*\delta[2n]$ و $b(t) \triangleq x(t)*\delta(2t)$

کدام گزینه صحیح است؟ ۱) $a[n]=x[2n]$, $b(t)=x(2t)$ ۲) $a[n]=x[n]$, $b(t)=\frac{1}{2}x(t)$

۳) $a[n]=x[n]$, $b(t)=x(2t)$ ۴) $a[n]=\frac{1}{2}x[2n]$, $b(t)=\frac{1}{2}x(2t)$

گزینه ۲.

با توجه به متن درس داریم: $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$, $\delta[2n]=\delta[n]$

از طرفی می‌دانیم که:

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

$$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$$

لذا داریم: $a[n]=x[n]*\delta[n]=x[n]$, $b(t)=x(t)*\frac{1}{2}\delta(t)=\frac{1}{2}x(t)$

سراسری ۸۵ - فصل ۲ سؤال ۱۴ - اگر $f(t)$ سیگنالی به عرض T و ماکزیمم واقع در $t=2$ باشد

در آن صورت عرض و محل ماکزیمم $f(rt-n)$, $r>0$ کدام است؟

۱) $\frac{T}{r}-n$, $\frac{n}{r}$ ۲) $\frac{T}{r}$, $\frac{2}{r}$ ۳) $\frac{T}{r}+n$, $\frac{n-2}{r}$ ۴) $\frac{T}{r}$, $\frac{n+2}{r}$

می‌دانیم انتقال زمانی تأثیری روی عرض سیگنال ندارد و فقط مقیاس دهی زمانی روی عرض

سیگنال اثر دارد. با توجه به اینکه $f(rt-n)$ است عرض سیگنال $\frac{T}{r}$ می‌شود.

از طرفی محل ماکزیمم را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$t=2$ را n واحد به راست شیفت داده و $\frac{1}{r}$ می‌کنیم یعنی $\frac{n+2}{r}$.

گزینه ۴

سراسری ۹۰ برق، ص ۳۸. حاصل انتگرال زیر کدام است؟ $\delta(t)$ تابع ضربه و $\delta'(t)$ مشتق آن باشد.

۱) 2 ۲) 1 ۳) 0 ۴) -1 کدام است؟

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left[(t+2)\,\delta'(t+1)+\left(e^{-|t|}+t^2+2\right)\delta\left(e^{-|t|}+t^2+1\right)\right]dt$$

می‌دانیم که $\delta(f(t))$ فقط در ریشه‌های $f(t)$ مقدار دارد. لذا با توجه به اینکه $e^{-|t|}+t^2+1>0$ همواره مثبت است و هرگز صفر نمیشود لذا $\delta(e^{-|t|}+t^2+1)=0$ خواهد بود. پس حاصل کل انتگرال را از خواص تابع ضربه بدست می‌آوریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta^{(n)}(t)\,dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}(t+2)\,\delta'(t+1)\,dt\overset{\tau=t+1}{=}\int_{-\infty}^{\infty}(\tau+1)\,\delta'(\tau)\,d\tau=(-1)^1\times\frac{d}{d\tau}(\tau+1)\Big|_{\tau=0}=-1$$

گزینه ۴.

آزاد ۹۰ برق، ص ۴۱. سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ را در نظر بگیرید. آیا $z(t)=x(t)y(t)$ متناوب است؟ و دوره تناوب آن چقدر است؟ $x(t)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)+2\sin\left(\frac{16\pi t}{3}\right)$, $y(t)=\sin(\pi t)$

۱) بلی، $T=3$ ۲) بلی، $T=9$ ۳) خیر ۴) بلی، $T=6$

می‌دانیم که برای بدست آوردن دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال باید آن را تبدیل به حاصل جمع کنیم.

$$z(t)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\sin(\pi t)+2\sin\left(\frac{16\pi t}{3}\right)\sin(\pi t)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{3}t\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{3}t\right)$$

نکاتی که حفظ شود مهم است.

۱) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 0$ ۲) $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta'(t)|dt = +\infty$

۳) $\delta'(at) = \frac{1}{a|a|}\delta(t)$ ۴) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)dt = 0$

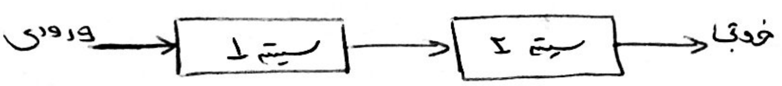
«خواص سیستم‌ها»

سیستم به مجموعه ای از دینامیک‌ها گفته می‌شود که در کنار هم قرار گرفته و هدف خاصی را دنبال می‌کند.

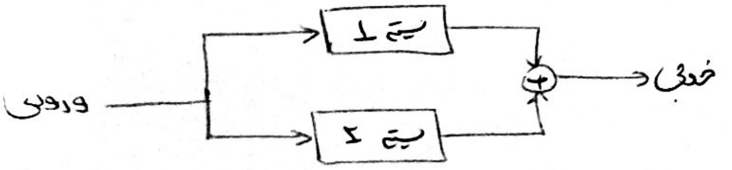
سیستمی که ورودی و خروجی آن زمان پیوسته باشد را زمان پیوسته و سیستمی با ورودی و خروجی زمان گسسته را زمان گسسته گوییم.

سیستم‌ها را به سه طریق می‌توان با هم ترکیب کرد:

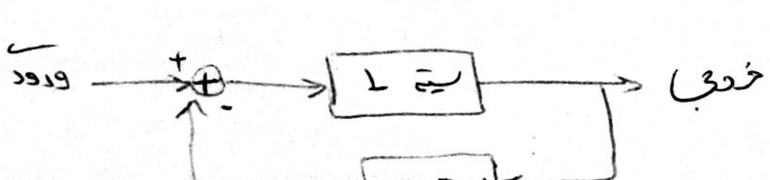
۱) سری: دو سیستم پشت سر هم قرار می‌گیرند و خروجی سیستم اول، ورودی سیستم دوم است.



۲) موازی: دو سیستم موازی قرار گرفته و یک ورودی می‌گیرند و خروجی آنها با هم جمع می‌شود.



۳) فیدبک: این نوع اتصال در شکل زیر نشان داده شده است.



مثال تألیفی: دو سیستم (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. اگر این دو سیستم را به صورت سری متصل کنیم، رابطه سیستم کلی را بدست آورید. این کار را برای اتصال موازی تکرار کنید.

$$(\text{الف})\quad y(t) = \begin{cases} x^2(-3t+1) & x(t) \geqslant 0 \\ -x(2t-1) & x(t) < 0 \end{cases}$$

$$(\text{ب})\quad y(t) = x^2(t+1) - 4$$

ابتدا اتصال سری را بدست می‌آوریم.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{ب}} \xrightarrow{y_1(t)} \boxed{\text{الف}} \longrightarrow y(t)$$

$$y_1(t) = x^2(t+1) - 4 \longrightarrow \begin{cases} y_1(t) \geqslant 0 & \text{if} \quad |x(t+1)| \geqslant 2 \\ y_1(t) < 0 & \text{if} \quad |x(t+1)| < 2 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} y_1^2(-3t+1) & y_1(t) \geqslant 0 \\ -y_1(2t-1) & y_1(t) < 0 \end{cases}$$

$$y_1(-3t+1) = x^2(-3t+2) - 4$$

$$y_1(2t-1) = x^2(2t) - 4$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \begin{cases} (x^2(-3t+2) - 4)^2 & |x(t+1)| \geqslant 2 \\ -x^2(2t) + 4 & |x(t+1)| < 2 \end{cases}$$

حال اتصال موازی را بررسی می‌کنیم.

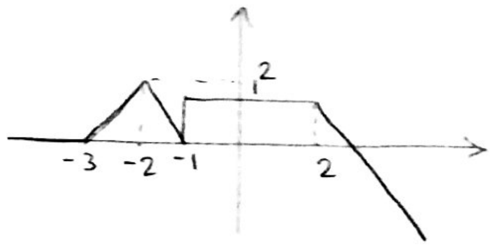
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} x^2(-3t+1) + x^2(t+1) - 4 & x(t) \geqslant 0 \\ x^2(t+1) - 4 - x(2t-1) & x(t) < 0 \end{cases}$$

خواص سیستم‌ها: ① خطی ② حافظه ③ پایداری ④ علی ⑤ وارون‌پذیر

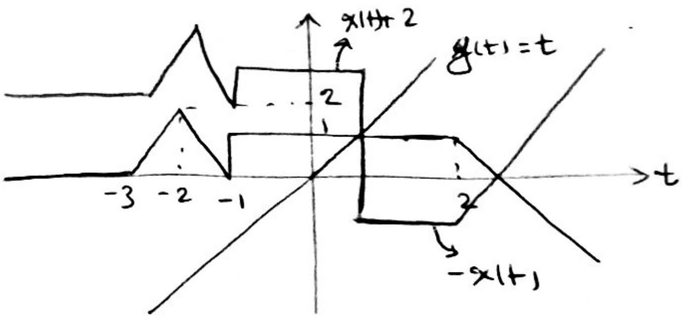
⑥ تغییرپذیری با زمان

مثال. سیستمی با ضابطه زیر داده شده است. بازای ورودی $x(t)$ داده شده خروجی آن را رسم کنید.

$$y(t) = \begin{cases} x(t)+2 & x(t) \geq t \\ -x(t) & x(t) < t \end{cases}$$



برای بدست آوردن خروجی چون شرط ها به صورت $x(t) \lessgtr t$ داده شده است، لذا شرط را روی شکل $x(t)$ رسم میکنیم یعنی خط به صورت $y=t$ خواهد بود.



خطی بودن: سیستم S را خطی گوئیم اگر و تنها اگر دو خاصیت همگنی و جمع آثار را داشته باشد.

شرط همگنی: اگر پاسخ سیستم به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد آنگاه پاسخ به $ax(t)$ برابر $ay(t)$ شود

شرط جمع آثار

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

$x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_3(t)$

$$\Rightarrow \quad y_3(t) = y_1(t)+y_2(t)$$

نکته: خاصیت خطی بودن روی ورودی یعنی x بحث می‌کند و هر عملیاتی روی t تأثیری روی خطی بودن ندارد.

نکته: اگر در یک سیستم فقط از عملگرهای خطی مثل جمع، تفریق، انتگرال و دیفرانسیل استفاده شود [بدون ورودی] سیستم خطی است اما به توان رسیدن ورودی یا ضرب شدن دو ورودی درهم سیستم را غیرخطی می‌کند.

نکته: عملگرهای رادیکال و کسر غیرخطی هستند. یعنی تمام سیستم‌های کسری غیرخطی هستند.

نکته: اگر ورودی در ضابطه‌ها باشد سیستم خطی است اما اگر ورودی‌ها در شرط‌ها باشند سیستم غیرخطی است.

نکته: در سیستم‌های چند ضابطه‌ای تک‌تک ضابطه‌ها باید خطی باشند.

نکته: در سیستم‌های خطی همواره به ازای $x(t)=0$ ، خروجی $y(t)=0$ خواهد بود.

نکته: اگر یک سیستم دارای مقدار ثابت باشد خطی قوی است و خطی نیست.

مثال ۴۱ کتاب ص ۳۷: سیستم $y[n]-y[n-1]=x[n]$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟

مثال تألیفی: کدام یک از سیستم های زیر خطی است؟

۱)
$$y(t)=\begin{cases} \cos(t)\,x(t+2) & t>0 \\ \dfrac{x^2(t-1)}{x(t)} & t<0 \end{cases}$$

۲)
$$y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t-1)>1 \\ x(t)+\cos(t) & x(t-1)\leq 1 \end{cases}$$

۳)
$$y(t)=\begin{cases} x(t)+\cos(t)\,x(t) & t>0 \\ 3 & t=0 \\ x(t) & t<0 \end{cases}$$

۴)
$$y(t)=\begin{cases} x(t) & t>1 \\ -x(t)+t\,x(t) & t\leq 1 \end{cases}$$

بررسی گزینه ها:

گزینه ۱ غیرخطی است چون طبق نکته گفته شده در سیستم های چندضابطه ای باید تمام ضابطه ها خطی باشند

ولی در ضابطه دوم $x(t)$ در مخرج کسر است و سیستم های کسری غیرخطی هستند.

گزینه ۲: چون سیستم چندضابطه ای است و شرط روی ورودی است پس سیستم غیرخطی است.

نکته: اگر در کل زمان ها یا بخشی از زمان، خروجی تابعی از ورودی نباشد، سیستم غیرخطی است.

پس گزینه ۳ نیز غیرخطی است چون در $t=0$ سیستم تابعی از ورودی نیست.

نکته: اگر ضابطه سیستم $y(t)=f(t)\,x(t)$ باشد سیستم خطی است ولی $y(t)=f(t)\,x(t)+g(t)$

و $y(t)=f(t)\,x(t)+c$ غیرخطی (شبه خطی) است.

گزینه ۴ تمام شرایط خطی بودن را دارد.

۱) زمان گسسته و غیرخطی ۲) زمان گسسته و خطی ۳) زمان پیوسته و خطی ۴) زمان پیوسته و غیرخطی

اولاً توجه کنید که سیستم زمان گسسته است. در ادامه $y[n]-y[n-1]$ معادل مشتق در حوزه زمان پیوسته

است. پس اگر بخواهیم درست چپ فقط $y[n]$ باشد باید از دو طرف $\sum_{k=-\infty}^{n}$ (معادل انتگرال $\int_{-\infty}^{t}$) بگیریم.

$$\sum_{k=-\infty}^{n} y[k]-y[k-1] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

با توجه به اینکه روی ورودی فقط $\sum$ اعمال شده و عملگر خطی است پس سیستم خطی است.

۲- خاصیت تغییر ناپذیری با زمان (TI)

اگر رفتار و مشخصات سیستم با زمان تغییر نکند سیستم تغییر ناپذیر با زمان است یعنی اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ است پاسخ به $x(t-t_0)$ برابر $y(t-t_0)$ شود.

نکته: برای بررسی TI بودن باید توجه کرد که تنها عمل انتقال زمانی روی آرگومان ورودی مجاز است و در غیر این صورت هر عملی روی آرگومان ورودی صورت گیرد سیستم TV خواهد بود.

مثلاً $y(t)=x^2(t-1)$ یک سیستم TI ولی سیستم $y(t)=x(t^3-1)$ یک سیستم TV است. در اینجا به خود ورودی کاری نداریم.

نکته: در سیستم های حیز مشتق‌دار/مرتبط اگر آرگومان ورودی در شرط ما باشد سیستم TV است.

مثال تألیفی. کدام یک از سیستم های زیر TI است؟

1) $y(t)=\int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\,d\tau$

2) $y(t)=\int_{t}^{2t} x(\tau)\,d\tau$

3) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$

4) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\,d\tau$

5) $y(t)=\int_{-\infty}^{2} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\,d\tau$

6) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]\delta[n-k]$

7) $y[n]=x[n]u[n]$

7) $y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT)$

نکته: در بررسی TI بودن سیستم ها به صورت زیر عمل می کنیم.

الف) اگر $\delta[n]$ یا $u[n]$ داریم اول ساده کرده و سپس TI بودن را بررسی می کنیم.

ب) در حالتی که $\int$ یا $\sum$ باشد چنانچه متغیر انتگرال گیری ($d\alpha$) روی حدود انتگرال هم باشد حتماً سیستم TV است ولی اگر متغیر انتگرال گیری t نباشد و روی مرزها t باشد دیگر ~~...~~ سیستم TI می تواند باشد ولی اگر مضربی از t یا هر دو هم عدد مستقل از t باشد TV است.

گزینه 1: انتگرال است، متغیر انتگرال گیری τ یعنی غیر از t است و در مرزها نیز فقط t داریم و خود ضابطه یعنی داخل انتگرال هم $x(\tau)$ TI است پس در کل TI است.

اثبات.

$$\bar{y}(t)=\int_{t-1}^{t+1} x(\tau-t_0)\,d\tau \qquad y(t)=\int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\,d\tau$$

آزاد ۸۸ . مثال ۳۴ کدام یک از دو سیستم زیر تغییرناپذیر با زمان است؟

سیستم 1 : $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}x[n-k]$ سیستم 2 : $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-|k|}x[k-n]$

۱) سیستم 2 ۲) سیستم 1 ۳) هر دو ۴) هیچکدام

اگر ضابطه به فرم $\int f(\tau)x(t-\tau)d\tau$ یا $\int g(\tau)x(t-\tau)d\tau$ یا $\sum_n f[k]x[k-n]$

باشد ~~$\sum f[$~~ نمی‌تواند TI باشد ولی به فرم $\int f(\tau)x(\tau-t)d\tau$

یا $\sum_k f[k]x[n-k]$ باشد قطعاً TV است.

لذا سیستم ۲ می‌تواند TI باشد پس شرایط را بررسی می‌کنیم.

— حدود انتگرال‌گیری (یعنی $\sum$) ∞ و تابعی از n است پس درست است

و به فرم کانولوشن هم می‌باشد لذا این سیستم TI است.

$$\bar{y}(t) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0+1} x(\alpha)d\alpha = y(t-t_0) \longrightarrow TI$$

۲) چون در مرزها $2t$ داریم TV است.

۳) چون متغیر انتگرال گیری t است و مرزها نیز t است پس TV است.

۴) داخل انتگرال $e^{-(t-\tau)}x(\tau)$ منتسب به τ، TI است. مقابل مانند TI است

چون متغیر انتگرال گیری τ بوده و در مرزها t داریم پس TI است.

۵) چون در مرزها t نداریم سیستم TV است.

۶) چون δ دارد اول ساده می کنیم.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]\,\delta[n-k] \quad (k=n)$$

$$= x[n]\sum_{k=-\infty}^{n-1}\delta[n-k] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{n-1}\delta[k-n] = 0$$

TI، غیرخطی.

چون x وجود ندارد. $n \notin (-\infty, n-1]$

۷) چون u دارد ساده می کنیم.

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

چون n در ضابطه ها وجود دارد TV است.

سراسری ۸۳ . ص ۴۹ . س ۱۳ (ص ۳۳)

آزاد ۸۸ . ص ۵۵ . س ۳۴ ← صفحه قبل

برق ۹۲ . ص ۴۷۳ . س ۲ . (۳۹)

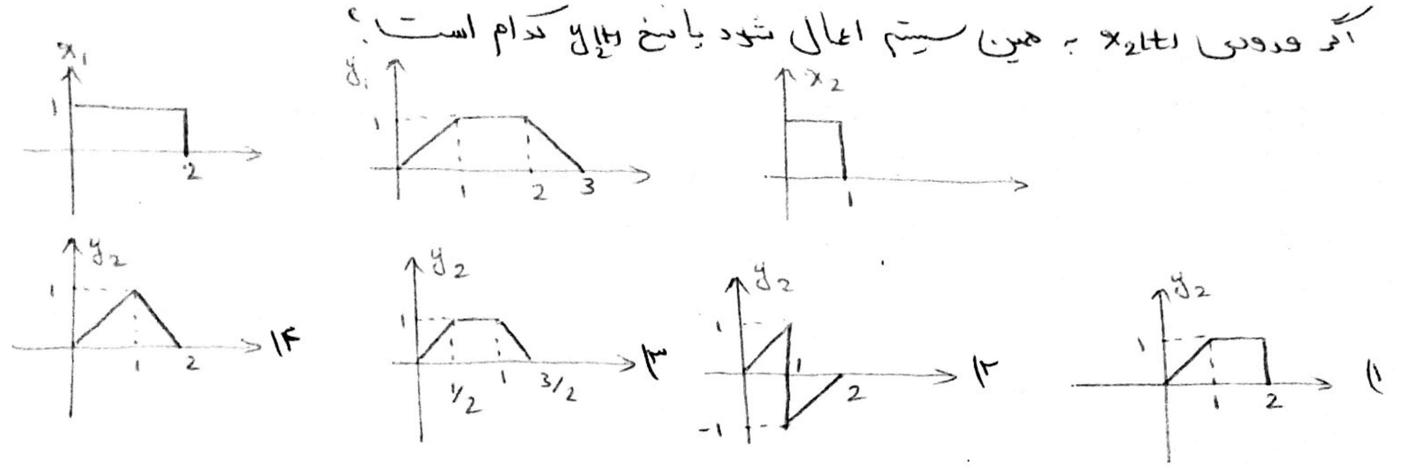
برق ۸۸ . ص ۵۰ . س ۲۷ . (۳۶) —

برق ۹۳ . ص ۴۸۰ . س ۶ (۳۹)

برق ۹۵ . آخر فصل

سراسری ۹۲ (ص ۴۷) (س ۲) . با اعمال $x_1(t)$ به ورودی یک سیستم LTI خروجی y_1 حاصل می‌شود

اگر ورودی $x_2(t)$ به همین سیستم اعمال شود پاسخ $y_2(t)$ کدام است؟



چون گفته است سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است لذا باید از این دو خاصیت استفاده کنیم.

$$x_1(t) = x_2(t) + x_2(t-1) \longrightarrow y_1(t) = y_2(t) + y_2(t-1)$$ پس گزینه‌ای صحیح

است که جمع خودش با شیفت یافته‌ی یک واحد به سمت راست $y_1(t)$ را بسازد. یعنی گزینه ۴

سراسری ۹۳ (ص ۴۸) (س ۲) . کدام سیستم زیر می‌توانند LTI باشند . $f(t)$ و $g(t)$ توابعی معین

و غیرصفر از t هستند

$x(t) \longrightarrow$ سیستم ۱ $\longrightarrow y(t)$ $\qquad$ $x(t) \longrightarrow$ سیستم ۲ $\longrightarrow y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, g(\alpha - t)\, d\alpha \qquad\qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha$$

۱) فقط ۱ $\qquad$ ۲) فقط ۲ $\qquad$ ۳) هر دو $\qquad$ ۴) هیچکدام.

با توجه به اینکه در هر دو سیستم روی $x(t)$ فقط اپراتور انتگرال عمل کرده و تابع f یا g در آن ضرب

شده، که تابعی از t هستند هر دو خطی هستند چون انتگرال خطی است .

نکته. اگر آرگومان ورودی مستقیماً در ضابطه سیستم حضور داشته باشد سیستم حتماً TV خواهد بود.

نکته. اگر ورودی یک سیستم TI متناوب با دوره تناوب T است، خروجی آن نیز دارای دوره تناوب T خواهد بود.

تالیفی. کدام یک از سیستم های زیر TI است؟

1) $y(t) = \cos(t)\, x(t-1)$ 2) $y(t) = \sqrt{x(t-1)}$ 3) $y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} \tan(x(t)) & x(t) \geq 0 \\ -\tan(x(-t)) & x(t) < 0 \end{cases}$

گزینه ۱ TV است چون t مستقیماً در ضابطه سیستم حضور دارد ($\cos(t)$)

گزینه ۲ TI است چون روی t فقط انتقال زمانی اعمال شده است.

گزینه ۳ TV است چون t در شرط ها حضور دارد.

گزینه ۴ TV است چون در ضابطه دوم $x(-t)$ داریم و روی t ضریب اعمال شده است.

۳- حافظه دار بودن: سیستمی که خروجی در هر لحظه t فقط تابعی از ورودی در همان لحظه t باشد را بدون حافظه و در غیر این صورت حافظه دار گویند.

نکته. در حافظه دار بودن سیستم فقط به آرگومان $y(t)$ و $x(t)$ نگاه می کنیم اگر فقط t باشد بدون حافظه است و عملیاتی مثل انتقال یا مقیاس دهی زمانی سیستم را حافظه دار می کند.

نکته: عملگرهای زمانی مثل انتگرال و مشتق سیستم را حافظه‌دار می‌کند.

مثال ۲۷: مراجع ؟ آیا سیستم $y(t) = \cos(\omega_0(t-t_0))\,(x(t))^t$ حافظه‌دار است؟

با توجه به اینکه فقط در رابطه $y(t)$ و $x(t)$ باید دقت کنیم در روی آرگومان $x(t)$ و $y(t)$ هیچ عملیاتی نداریم سیستم

بدون حافظه است. (برق ۹۴ خارج (۴۰))

تألیفی: کدام گزینه در مورد سیستم با معادله $y[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k+1]\,\delta[n-k]$ صحیح است؟

۱) بدون حافظه، نامتناوب ۲) حافظه‌دار و متناوب با $N=1$

۳) بدون حافظه و متناوب با $N=1$ ۴) بدون حافظه و متناوب، اما دوره تناوب اصلی ندارد.

ابتدا سیستم را ساده می‌کنیم:

$$y[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[\overset{k=n}{n+1}]\,\delta[n-k]$$

$$= 1 + x[n+1] \sum_{k=-\infty}^{n-1} \overbrace{\delta[k-n]}^{\delta[k]=\delta[-k]} = 1 + x[n+1]\big(\underbrace{u[n-1-n]}_{0} - \underbrace{u[-\infty-1-n]}_{0}\big)$$

$$y[n] = 1$$

پس سیستم ثابت بوده و بدون حافظه و متناوب با دوره تناوب 1 است چون سیستم گسسته است

در سیستم پیوسته ثابت دوره تناوب اصلی تعریف نمی‌شود.

۴- علّی یا غیرعلّی بودن: سیستم را علّی گوییم هرگاه خروجی در لحظه t_0 به ورودی در لحظه t_0 و

لحظات قبل بستگی داشته باشد.

$$x_1(t) = x_2(t) \quad t \le t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) \quad t \le t_0$$

نکته: سیستم بدون حافظه حتماً علّی است ولی سیستم علّی لزوماً بدون حافظه نیست.

نکته. اگر یک سیستم خطی همواره دارای سکون اولیه باشد حتماً علّی است.

نکته. در سیستم های خطی و علّی تا وقتی ورودی به سیستم اعمال نشده است خروجی صفر خواهد بود. یعنی:

$$\text{if} \quad x(t)=0 \quad t\le t_0 \implies y(t)=0 \quad t\le t_0$$

مثال تأملی. کدام یک از روابط های زیر بیانگر یک سیستم علّی است؟

۱) $y(t)=x(-3)\,x(t-1)$ ۲) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,u(t-2-\tau)\,d\tau$ ۳) $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

۴) $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,u(\tau-1)\,u(t-\tau+1)$ ۵) $y[n]=n\,x[n]$ ۶) $y[n]=x[-|n|]$

گزینه 1 غیرعلّی است چون خروجی در لحظه $t=-5$ به ورودی در لحظه -3 بستگی دارد.

گزینه ۲ علّی است. چون برای ساده سازی داریم:

$$u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & \tau\le t-2\\ 0 & \tau>t-2\end{cases}$$

ملاحظه می شود که خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t-2} x(\tau)\,d\tau$$

قبل بستگی دارد و علّی است.

گزینه ۳ غیرعلّی است چون خروجی به $x(t+0^+)$ بستگی دارد.

$$\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}$$

گزینه ۴ غیرعلّی است چون:

$$u(\tau-1)=\begin{cases}1 & \tau\geq 1\\ 0 & \tau<1\end{cases} \qquad u(t+1-\tau)=\begin{cases}1 & \tau\le t+1\\ 0 & \tau>t+1\end{cases}$$

ملاحظه می شود که خروجی در هر لحظه به ورودی $t+1$ بستگی دارد و غیرعلّی است.

$$y(t)=\int_{1}^{t+1} x(\tau)\,d\tau$$

آزاد ۸۸. سراسری ۸۵. مثال قبل گزینه ۴.

نکته. اگر یک سیستم خطی و علی باشد آنگاه دارای سکون اولیه است یعنی اگر تا لحظه t_0 ورودی صفر است، حتماً خروجی هم تا t_0 برابر صفر است.

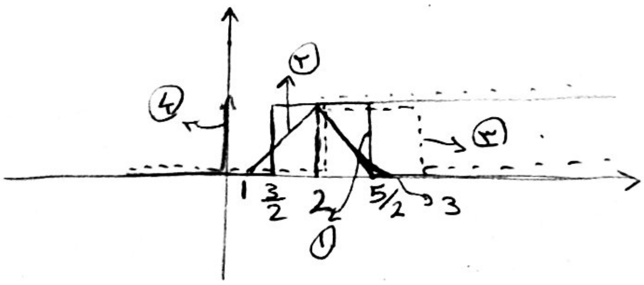
نکته. اگر سیستم خطی دارای سکون اولیه باشد، حتماً علی است.

مثال. اگر یک سیستم خطی بوده و خروجی در هر لحظه به ورودی و خروجی‌های قبل از آن لحظه وابسته باشد و به این سیستم ورودی $x(t)=u(t-2)$ اعمال کنیم خروجی آن کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $y(t)=\Pi(t-2)$ ۲) $y(t)=\Lambda(t-2)$

۳) $y(t)=\Pi\left(\frac{t-4}{4}\right)$ ۴) $y=\delta(t)+u(t-2)$

طبق نکته فوق چون سیستم خطی و علی است پس باید دارای سکون اولیه باشد.



ملاحظه می‌شود چون ورودی تا $t=2$ صفر است باید خروجی نیز تا $t=2$ صفر باشد که تنها گزینه ۳ این شرط را دارد.

برق ۸۲ ص۴۸ س۱۰ ل ۳۲)

برق ۸۷ ص۵۰ ص۲۰ و س ۲۳

برق ۹۱ ص۵۳ س۴۸ ل ۳۸)

~~برق ۹۶ خارج ...~~

برق ۹۴ آزمایشی

مثال. با فرض $x(t)\neq 0$ ، کدام گزینه پایدار است؟

۱) $y(t)=e^{\frac{1}{x(t)}}$ ۲) $y(t)=e^{j/x(t)}$ ۳) $y(t)=e^{j/|x(t)|}$

۴) $y(t)=\cos\left(\frac{1}{x(t)}\right)$

گزینه ۱ ← ناپایدار $x(t)=0^+ \Rightarrow y(t)=e^{\infty}=\infty$

گزینه ۲ ← ناپایدار $x(t)=j0^+ \rightarrow y(t)=e^{1/0^+}=\infty$

گزینه ۳ ← پایدار $e^{\frac{j}{|x(t)|}}=e^{j\theta}\ ,\ \theta\in\mathbb{R}\rightarrow e^{j\theta}<1$.

گزینه ۴ ← ناپایدار $\cos\left(\frac{1}{x(t)}\right)=\frac{e^{j\frac{1}{x(t)}}}{2}+\frac{e^{-j/x(t)}}{2}$

مثال. سیستم داده شده در کدام گزینه پایدار است؟

۱) $y(t)=\int_{-t}^{t}\tau x(\tau)d\tau$ ۲) $y[n]=x[2^{|n|}]$ ۳) $y(t)=\begin{cases}\frac{x(-t)}{x(t)} & , x(t)\neq 0\\ 0 & , x(t)=0\end{cases}$

۴) $y[n]=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2[n]} & ; x[n]\neq 0\\ 0 & ; x[n]=0\end{cases}$

گزینه ۱ : ناپایدار ← دقت کنید که $x(t)$ هر ورودی محدودی می تواند باشد مثل $x(t)=u(t)$.

$\rightarrow y(t)=\int_{-t}^{t}\tau u(\tau)d\tau=t^2/2 \longrightarrow t\rightarrow\infty \Rightarrow y(t)\rightarrow\infty$

گزینه ۲ ← اگر $x[n]$ محدود باشد یعنی بازای تمام زمانها یعنی آرگومان x هر مقداری باشد مقدار x محدود است . لذا $x[2^{|n|}]$ هم محدود خواهد بود.

گزینه ۳ ← $x(t)=0^+ \rightarrow y=\infty$ گزینه ۴ ← $x[n]=j \Rightarrow y=\infty$

بهمن ۸۰ . ص ۴۸ . س ۴

" " " س ۷ .

بهمن ۸۳ ص ۴۸ . س ۱۰

بهمن ۹۱ ص ۱۵۳ . س ۴۲

دکتری ۹۱ . ص ۵۴ . س ۴۵

~~آزاد ۷۹ . ص ۴۸ . س ۳~~

~~بهمن ۸۷ ص ۱۵۰ س ۳۲~~

۵- پایداری ورودی - خروجی: یک سیستم پایدار است اگر به ازای ورودی محدود، خروجی آن محدود باشد

$$\text{if } |x| < \infty \longrightarrow |y| < \infty$$

مثال تألیفی: کدام یک از سیستم های زیر پایدار و کدام یک ناپایدار است؟

۱) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ این سیستم ناپایدار است چرا که برای مثال: $x(t) = u(t) < 1$

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \delta(t)$ نامحدود

۲) $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k-n} x[k]$

در سیستم های دارای Σ یا $\int$ به جای x یک عدد ثابت A می گذاریم و محدود بودن خروجی را بررسی می کنیم.

$$x[n] = A \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k-n} A$$

ناپایدار $= A(\frac{1}{2})^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k} = A(\frac{1}{2})^{n} \times \infty = \infty$

۳) $y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{x(t)-1} & x(t) \neq 1 \\ 1 & x(t) = 1 \end{cases}$ ناپایدار است چون: $x(t) \longrightarrow 1 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$

۴) $y(t) = \tan[x(t)]$ ناپایدار چون: $x(t) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow y(t) = \infty$

۶- معکوس پذیری: سیستم وارون پذیر است اگر و تنها اگر:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \neq x_1(t) \longrightarrow y_2(t) \neq y_1(t)$$

$$x_1(t) = x_2(t) \Longleftrightarrow y_1(t) = y_2(t)$$

برای بررسی معکوس پذیری یکی از دو خاصیت فوق کافی است.

نکته: در سیستم معکوس پذیر تمام ورودی ها در خروجی تأثیر دارند.

مثال ۴۲ کتاب ص ۳۰. آیا سیستم $y[n]=nx[n-1]$ معکوس پذیر است؟

با توجه به اینکه به ازای $n=0$ داریم: $y[0]=0\times x[-1]$ یعنی $x[-1]$ روی خروجی تأثیر ندارد و نمی‌توان آن را از روی خروجی بازسازی کرد و معکوس پذیر نیست.

راهکار بررسی وارون پذیری:

برای بررسی وارون پذیری ابتدا بررسی می‌کنیم که خروجی وابسته به ورودی در تمام زمانها باشند، سپس باید دقت کنیم که آیا خروجی تمام مقادیر ورودی را در خود دارد. اگر دو شرط برقرار باشد، باید بتوان ورودی را به صورت یک تابع مشخص از خروجی بیان کرد. تمرین ۸۱ ص ۴۸ س ۸

مثال تألیفی کدام سیستم داده شده وارون پذیر است؟

۱) $y(t)=\begin{cases} x(t) & t\geq 1 \\ 1 & t<1 \end{cases}$

۲) $y[n]=x[3n]$

۳) $y(t)=\begin{cases} x(t-1) & t\geq 1 \\ x(-t+1) & t<1 \end{cases}$

۴) $y(t)=x^3[n+1]$

گزینه ۱ وارون پذیر نیست چرا که $x(t)$ها به ازای $t<1$ روی خروجی تأثیر ندارند.

گزینه ۲ وارون پذیر نیست چون مقادیر x در مضارب غیراز ۳ روی خروجی اثر ندارد.

گزینه ۳ وارون پذیر نیست چون به ازای $t\geq 1$ مقادیر x در زمانهای مثبت روی خروجی اثر دارد و در $t<1$ نیز فقط مقادیر x در زمانهای مثبت در خروجی ظاهر می‌شود.

گزینه ۴ وارون پذیر است چون دو شرط اول را دارد و $x[n]=\sqrt[3]{y[n-1]}$ است.

نکته. اگر یک سیستم خطی باشد شرط لازم و کافی برای وارون پذیری آن این است که به ازای

اگر به ازای تمام زمان ها $y(t)=0$ شود آنگاه $x(t)=0 \quad \forall t$ باشد. هوشی ۹۴ آزمون

نکته. اگر یک سیستم بدون حافظه باشد، شرط لازم و کافی برای بررسی وارون پذیری یک به یک

بودن رابطه ی y برحسب x به ازای تمام t ها است.

نکته. اگر در رابطه یک سیستم، آرگومان زمان، در خارج از آرگومان ورودی نباشد شرط لازم برای

وارون پذیری یک به یک بودن y برحسب x است (خروجی برحسب ورودی)

مثال. کدام یک از سیستم های زیر وارون پذیر است؟

۱) $y[n] = x[n-1]\,x[n-2]\,x[n]$ ۲) $y(t) = 2x^2(t-\bullet) + t\,x(t-\bullet) + 1$

۳) $y(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

۴)
$$y(t) = \begin{cases} x(2t-1) & t \geq 1/2 \\ x(t^2) & -\frac{1}{2} \leq t < 1/2 \\ x(2t+1) & t \leq -1/2 \end{cases}$$

گزینه ۱: چون ~~...~~ زمان فقط در آرگومان ورودی است تو از نکته سوم استفاده می کنیم، رابطه ریاضی

y برحسب x به صورت $y = x^3$ است.

$y = x^3$ در حوزه اعداد حقیقی یک به یک است اما باید در حوزه مختلط بررسی کنیم.

وارون ناپذیر ← یک به یک نیست ← $x = 1\ ,\ e^{j2\pi/3}\ ,\ e^{j4\pi/3} \longrightarrow y = 1$

گزینه ۲: چون سیستم بدون حافظه است لذا از نکته دوم استفاده می کنیم.

$y=2x^2+tx+1$ $\quad t=1 \longrightarrow y=2x^2+x+1 \longrightarrow$ معادله درجه دوم

و غیریکتا به یکتا ← وارون ناپذیر است.

گزینه ۳: سیستم خطی است از طرفی $\frac{x(t)+x(-t)}{2}=x_e(t)$ پس $y=x_e(t)$ است و اگر وارون

~~...~~ زوج باشد خروجی همواره صفر است (مستقل از فرد ندارد) پس برای مثال:

تنها ورودی صفرکننده، ورودی $x(t)=\sin(t) \longrightarrow y(t)=0 \;,\; x(t)\neq 0 \longrightarrow$

صفر نیست و طبق نکته ۱، وارون ناپذیر است.

گزینه ۴: سیستم خطی است پس از نکته اول استفاده می کنیم.

$$y(t)=0 \longrightarrow \begin{cases} x(2t-1)=0 \;,\; t\geq \frac{1}{2} \longrightarrow x(0^{\uparrow})=0 \\ x(2t+1)=0 \;,\; t\leq -\frac{1}{2} \longrightarrow x(0^{\downarrow})=0 \\ x(t^2)=0 \;,\; -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2} \longrightarrow x(0<t<\frac{1}{4})=0 \end{cases} \Rightarrow x(t)=0 \;\; \forall t$$

پس شرط نکته ۱ را دارد و سیستم وارون پذیر است.

نکته. اگر ضابطه سیستم به صورت $y(t)=f(x(t))g(t)$ یا $y(t)=f(x(t))+h(t)$ یا ترکیبی

از این دو یعنی $y(t)=g(t)f(x(t))+h(t)$ باشد، برای بررسی وارون پذیری کافی است وارون

-پذیری سیستم $y(t)=f(x(t))$ را بررسی کنیم.

مثال. کدام یک از سیستم های زیر وارون پذیر است؟

۱) $y(t) = \frac{1}{1+\cos^2(t)}\left(x(t) + x^3(t)\right)$

۲) $y(t) = x(t) + x^*(t) + t^2 + t$

۳) $y(t) = \frac{\sqrt{x(t)+x^3(t)}}{t^2+1} + \cos(t)$

۴) $y(t) = \left(x(t) + x^3(t-1)\right)\sin(t) + \cos(t)$

1) $y(t) = g(t)\, f(x) \longrightarrow y(t) = x(t) + x^3(t)$

از نکته فوق داریم:

$\longrightarrow$ حالت نکته سوم ۱

$y = x + x^3 \longrightarrow$ یک به یک ← وارون ناپذیر ← غیر یک به یک

۲) $y(t) = f(x) + g(t) \longrightarrow y(t) = x(t) + x^*(t) \longrightarrow$ باید بررسی شود.

$$\begin{cases} y(t) = x(t) + x^*(t) \\ y^*(t) = x^*(t) + x(t) \end{cases} \longrightarrow$$

نمی توان x را برحسب y پیدا کرد ← وارون ناپذیر

۳) $y(t) = f(x) \longrightarrow y(t) = \sqrt{x(t)+x^3(t)} \longrightarrow$ غیر یک به یک ← شکل گزینه ۱

وارون ناپذیر

۴) $y(t) = f(x) \longrightarrow y(t) = x(t) + x^3(t-1) \longrightarrow y = x + x^3 \rightarrow$ غیر یک به یک

۵- $y(t) = x(t) + 3x^*(t)$ ۶- $y(t) = x(t-1) + 2x^*(t+1)$

وارون پذیری سیستم های چند ضابطه ای :

برای بررسی این سیستم ها اگر شرط ها برحسب زمان باشند ، ابتدا مرحله اول و دوم را برای هر ضابطه بررسی می کنیم و سپس باید دقت کرد که شرط ها تمام زمان ها را بپوشانند .

و اگر سیستم دامنه ای باشد یعنی شرط ها برحسب ورودی باشند ، پس از بررسی مرحله اول و دوم اولا باید شرط ها شکل هم باشند و پس از جایگذاری شرط ها برحسب خروجی ، شرط های بدست آمده با هم تداخل نداشته باشند.

مثال تألیفی . کدام یک از سیستم های زیر وارون ناپذیر است؟

۱) $$y(t)=\begin{cases} x(t)-1 & x(t)\geq 0 \\ x(t)+1 & x(t)<0 \end{cases}$$

۲) $$y[n]=x_{(2)}[n]=\begin{cases} x[n/2] & n \text{ زوج} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

۳) $$y(t)=\begin{cases} x^2(t) & x(t)\geq 0 \\ x(t) & x(t)<0 \end{cases}$$

۴) $$y[n]=\begin{cases} x[n-1] & n\geq 1 \\ |x[n]| & n=0 \\ x[n] & n\leq -1 \end{cases}$$

گزینه ۱. ورودی در همه زمان ها روی خروجی اثر دارد پس مرحله دوم را بررسی می کنیم.

$$\begin{cases} y(t)=x(t)-1 & x(t)\geq 0 \\ y(t)=x(t)+1 & x(t)<0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t)=y(t)+1 & y(t)\geq -1 \\ x(t)=y(t)-1 & y(t)<1 \end{cases}$$

ملاحظه می شود که شرط ها برحسب خروجی همپوشانی دارند و سیستم وارون ناپذیر است.

گزینه ۲. در ضابطه اول سیستم فقط nهای مضرب ۲ لحاظ می‌شوند. اما توجه کنید که $x[\frac{n}{2}]$ روی خروجی اثر دارد و لذا تمام زمان‌ها توسط ورودی روی خروجی اثر دارد. از طرفی تمام مقادیر ورودی نیز به خروجی منتقل می‌شود و اثری روی آن ندارد. حال باید ورودی را برحسب خروجی بنویسیم.

$$\begin{cases} y[n] = x[\frac{n}{2}] & n \text{ مضرب } 2 \\ y[n] = 0 & \text{o.w} \end{cases} \longrightarrow y[2n] = x[n] \quad 2n \text{ مضرب } 2$$

$\Rightarrow x[n] = y[2n]$ چون شرط روی زمان است و تمام زمان‌ها ← تمام n ها

پوشش داده می‌شود سیستم وارون‌پذیر است.

گزینه ۳. ورودی همه زمان‌ها به خروجی منتقل می‌شود و از طرفی تمام مقادیر ورودی به خروجی می‌رود پس دو شرط اول برقرار است. حال به مرحله سوم می‌رویم:

$$\begin{cases} y(t) = x^2(t) & x(t) \geqslant 0 \\ y(t) = x(t) & x(t) < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} & y(t) \geqslant 0 \\ x(t) = y(t) & y(t) < 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که شرط‌ها همپوشانی نیز ندارند و سیستم وارون‌پذیر است.

گزینه ۴. ابتدا مرحله اول را بررسی می‌کنیم.

ضابطه اول $x[n]$ را از $-\infty$ تا 0 به خروجی منتقل می‌کند و در ضابطه دوم فقط $x[0]$ و در ضابطه سوم $x[n]$ ها از ۱ تا ∞ به خروجی منتقل می‌شود. پس ورودی همه زمان‌ها روی خروجی اثر دارد و شرط اول برقرار است.

حال شرط دوم را بررسی می کنیم. یعنی باید بتوانیم همه ورودی ها را در خروجی دیده و خروجی را بدون ابهام به ورودی مرتبط کنیم. ملاحظه می شود که تمام مقادیر ورودی روی خروجی اثر دارد.

$$\begin{cases} y[n] = x[n-1] & n \geq 1 \\ y[n] = |x[n]| & n = 0 \\ y[n] = x[n] & n \leq -1 \end{cases} \xrightarrow{n'=n+1} \quad \begin{matrix} x[n'] = y[n'+1] & n' \geq 0 \\ x[0] = \pm y[0] & n = 0 \\ x[n] = y[n] & n \leq -1 \end{matrix}$$

در رابطه دوم ابهام وجود دارد. اما توجه کنید که $x[0]$ از رابطه اول بدست می آید و می توان رابطه دوم را حذف کرد. حال چون شرط ما روی زمان است باید تمام زمان ها پوشش داده شود که همین طور است. پس سیستم وارون پذیر است.

نکته: شرط لازم و کافی برای وارون پذیری سیستم خطی این است که تنها ایجاد کننده خروجی همیشه صفر، ورودی همیشه صفر باشد. یعنی اگر در سیستم خطی پاسخ به ورودی غیرصفر، صفر شود سیستم وارون ناپذیر است.

تستهای کنکورهای سراسری فصل اول [قسمت دوم].

سراسری ۸۰ - ص ۱۴۸. س ۶. در یک سیستم زمان گسسته، خروجی $y[n]$ برحسب ورودی $x[n]$ با رابطه $y[n] = \begin{cases} n & n < x[-n] \\ x[n] & n > x[-n] \end{cases}$ توصیف می شود. این سیستم ——— است.

۱. علّی و پایدار ۲. غیرعلّی و پایدار ۳. علّی و ناپایدار ۴. غیرعلّی و ناپایدار

سیستم غیرعلّی است چون $y[n]$ به $x[-n]$ وابسته است مثلاً $y[-1]$ به $x[1]$ وابسته می شود.

سیستم ناپایدار است چون اگر فرض کنیم $x[-n]=A$ آنگاه $y[\infty]=-\infty$ می شود.

سراسری ۸۰ ـ ص ۴۸ ـ س ۷ ـ سیستم S با توصیف $y(t)=\frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$ کدام دسته از خواص زیر را دارد؟

۱) غیرعلّی، TIV، ناپایدار ۲) علّی، TV، پایدار ۳) علّی، TIV، ناپایدار ۴) علّی، TI، پایدار

سیستم علّی است چون روی آرگومان x یعنی t تنها عمل شیفت زمانی انجام شده است و از طرفی

$y(t)$ تنها به $x(t)$ و $x(t-1)$ وابسته است که قبل از لحظه t می باشد.

سیستم تغییر پذیر با زمان است چون t در خارج از آرگومان x در سیستم ظاهر شده است $(2t)$

سیستم ناپایدار است چون $x(t)\to 0$ آنگاه $y(t)\to\infty$ می شود.

سراسری ۸۱ ـ ص ۴۸ ـ س ۸ ـ معکوس سیستم $y(t)=\frac{1}{2}x(4-2t)$ درصورتی که معکوس پذیر باشد کدام است؟

۱) $y(t)=x(2-t)$ ۲) $y(t)=x(t-2)$ ۳) $y(t)=2x(2-t/2)$ ۴) $y(t)=2x(-2-\frac{t}{2})$

$$x(4-2t)=2y(t) \qquad t'=4-2t \to t=\frac{4-t'}{2}=2-\frac{t'}{2}$$

$$x(t')=2y(2-\frac{t'}{2}) \to y(t)=2x(2-\frac{t}{2}) \checkmark$$

سراسری ۸۳ ـ ص ۴۸ ـ س ۱۰ ـ سیستم زمان پیوسته تعریف شده با $y(t)=x(\frac{t}{2})+x(t-1)$

کدام دسته از خواص زیر را دارد؟

۱) خطی، TV، غیرعلی ۲) غیرخطی، TV، غیرعلی ۳) خطی، TI، غیرعلی ۴) غیرخطی، TI، علی

با توجه به رابطه x ها که فقط با هم جمع شده‌اند، سیستم خطی است.

سیستم متغیر با زمان است چون روی آرگومان x، عملی غیر از انتقال زمانی انجام شده است $x(t/2)$

سیستم غیرعلی است چون $y(-1) = x(-1/2) + x(-2)$ پس y در لحظه ۱- به x در لحظه $\frac{1}{2}$- وابسته است

سراسری ۸۳ ص ۴۶ س ۱۳: رابطه ورودی خروجی یک سیستم $y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{|x(t)|} & ; \ x(t) \neq 0 \\ 0 & ; \ x(t) = 0 \end{cases}$ می‌باشد.

این سیستم:

۱) خطی و TV است. ۲) خطی و TI است. ۳) غیرخطی و TV است. ۴) غیرخطی و TI است

با توجه به اینکه ضابطه اول کسری است سیستم غیرخطی است. و چون روی آرگومان x یعنی t هیچ عملیاتی انجام نشده است و t در سیستم مستقیماً حضور ندارد تغییرناپذیر با زمان است.

سراسری ۸۴ ص ۴۶ س ۱۴: رابطه ورودی خروجی یک سیستم گسسته به صورت $y[n] = x[n \bmod 27]$ می‌باشد. در مورد این سیستم کدام گزینه غلط است؟

۱) علی ۲) خطی ۳) معکوس ناپذیر ۴) تغییرپذیر با زمان

چون باقیمانده هر عددی بر 27 عددی بین صفر تا 26 است لذا خروجی در لحظات منفی به ورودی

در زمانهای مثبت وابسته می شود و سیستم غیر علّی است. پس گزینه ۱ جواب است.

چون رابطه y و x به صورت خطی است پس سیستم خطی است.

چون رابطه سیستم فقط x ها در زمانهای 5 تا 26 را به خروجی انتقال می برد لذا معکوس ناپذیر است

چون شرط دوم را ندارد. از طرفی چون عملیاتی غیر از انتقال زمانی روی n انجام شده سیستم تغییرپذیر

با زمان است.

سراسری ۸۲. ص۱۰۹ - س۱۰۸. رابطه بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در مورد دو سیستم به صورت زیر است. کدام یک وارون پذیر است؟

$$\text{سیستم } 1: \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$\text{سیستم } 2: \quad y[n] = \cos(\tfrac{\pi}{3}n)\, x[n]$$

۱) فقط سیستم ۱ . ۲) سیستم ۲ . ۳) هر دو

۴) هیچکدام

سیستم ۱ معادل انتگرال است و چون تمام ورودی ها و نیز ورودی تمام زمانها به خروجی می روند شرط

لازم برای وارون پذیری را دارد. حال باید رابطه ورودی برحسب خروجی را بیابیم.

چون رابطه بدون $x[n] = y[n] - y[n-1]$ $\quad y[n] - y[n-1] = x[n] \rightarrow$

انجام است پس معکوس پذیر است.

سیستم ۲ معکوس پذیر است چون تمام ورودی ها در همه زمانها به خروجی منتقل می شوند. توجه کنید تنها ورودی

در حالتی به خروجی می رود که $\cos(\frac{\pi}{3}n)=0$ نشود و به ازای n های صحیح این اتفاق نمی افتد.

$x[n] = \cos^{-1}(\frac{\pi}{3}n)\, y[n]$ ✓

سراسری ۸۷ . مهندسی ... ۲) پاسخ یک سیستم زمان گسسته به ورودی $x[n]=\cos(\frac{\pi n}{10})$ برابر

با $y[n]=1+\cos(\frac{\pi n}{5})$ شده است. کدام یک از دو گزاره زیر لزوماً صحیح است؟

۱) سیستم با حافظه است. ۲) سیستم غیرخطی است.

۱) فقط (۱) ۲) فقط (۲) ۳) هردو ۴) هیچکدام

توجه کنید که از روی یک ورودی و خروجی نمی‌توان خاصیتی را برای سیستم اثبات کرد. پس باید

با مثال نقض آنها را رد کنیم.

$$y[n] = 1+\cos(\frac{\pi n}{5}) = 2\cos^2(\frac{\pi n}{10})$$

$$y[n] = 2\cos(\frac{\pi n}{10})\, x[n] \quad \text{یا} \quad y[n] = 2x[n]^2$$

با توجه به روابط فوق سیستم لزوماً حافظه دار نیست و نیز غیرخطی هم نمی‌تواند باشد.

سراسری ۸۷. مهندسی ... ۲) رابطه ورودی-خروجی سیستمی به صورت $y[n]=\frac{x[n-1]}{x[1]}$ است. این

سیستم کدام دسته از خواص زیر را دارا می‌باشد؟

۱) خطی، TI و معکوس ناپذیر ۲) خطی، TI و معکوس پذیر

۳) غیرخطی، TV و معکوس ناپذیر ۴) غیرخطی، TV و معکوس پذیر.

چون سیستم به صورت کسری از ورودی تعریف شده است غیرخطی است. از طرفی به دلیل حضور $x[1]$ تغییر

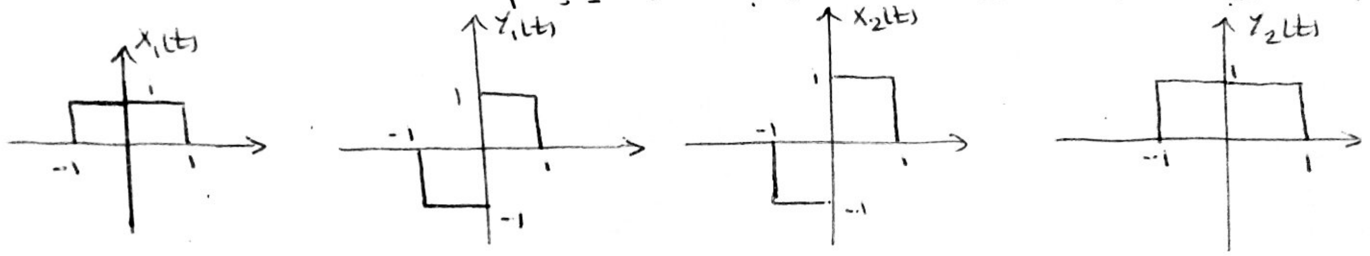
پذیر با زمان است. و توجه کنید که $x[1]$ ها هرگز به خروجی منتقل نمی‌شود و معکوس ناپذیر است.

سراسری ۸۸، مدرک س ۲۷ یک سیستم خطی در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به صورت

$y_1(t)$ و $y_2(t)$ مطابق شکل مفروض است. با توجه به اطلاعات کدام عبارت لزوماً صحیح است؟

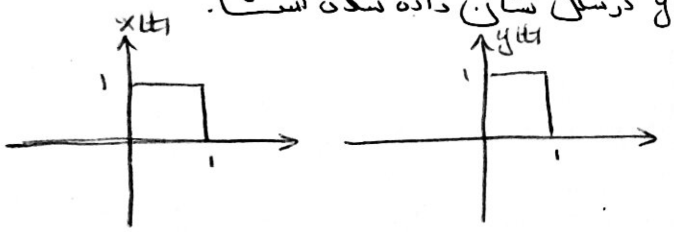
الف) سیستم حافظه دار است.   ب) سیستم تغییر پذیر با زمان است.

۱) فقط ب   ۲) فقط الف   ۳) الف و ب   ۴) هیچکدام



چون گفته است سیستم خطی است لذا اگر ورودی $x(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ به سیستم اعمال کنیم خروجی آن

$y(t) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ خواهد شد. شکل $x(t)$ و $y(t)$ در شکل نشان داده شده است.

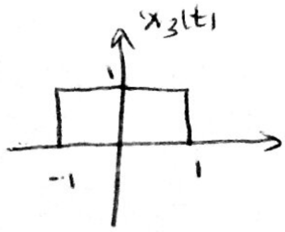


حال اگر ورودی $x_3(t) = x(t) + x(t+1)$

را اعمال کنیم باید خروجی $y_3(t) = y(t) + y(t+1)$ شود

تا سیستم تغییر ناپذیر با زمان باشد. اما $x_3(t)$ همان $x_1(t)$ می‌شود که پاسخ به آن $y_1(t) \neq y_3(t)$ است

و سیستم تغییر پذیر با زمان است.



اما در مورد الف نمی‌توان اظهار نظر کرد. پس گزینه ۱ صحیح است.

سراسری ۸۹، مدرک س ۱۵۳، س ۳۶. در مورد سیستمی که با رابطه

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

توصیف می‌شود کدام گزینه نادرست است؟ ۱) علّی و پایدار ۲) غیرخطی و TI ۳) TI و معکوس ناپذیر

۴) معکوس پذیر و حافظه دار

از ضابطه سیستم مشخص است که سیستم علّی است چون خروجی در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و $t-2$ وابسته است.

با توجه به ضابطه سیستم ملاحظه می‌کنیم که ورودی های منفی روی خروجی تأثیر ندارند پس معکوس ناپذیر است.

با توجه به ضابطه سیستم غیرخطی است چون فرض کنید: $x_1(t) = -1 \longrightarrow y_1(t) = 0$

$$x_2(t) = -x_1(t) = 1 \longrightarrow y_2(t) = 2 \neq -y_1(t)$$

درمورد تغییرپذیری با زمان چون هیچ عملی غیر از شیفت روی t انجام شده است و t مستقیماً در سیستم حضور ندارد پس تغییر ناپذیر با زمان است.

درمورد حافظه‌دار بودن نیز چون $y(t)$ به $x(t-2)$ وابسته است پس حافظه‌دار است.

گزینه ۴.

سراسری ۹۱. ص ۳ . س ۴۷ رابطه بین ورودی و خروجی سیستم به صورت $y[n] = \sum_{k=-1}^{\infty} x[n-k^2]$ می‌باشد.

این سیستم تغییر ــ با زمان و ــ است. ۱) پذیر، پایدار ۲) پذیر، ناپایدار

۳) ناپذیر، پایدار ۴) ناپذیر، ناپایدار

چون هیچ عملی روی n به‌جز شیفت زمان انجام نشده لذا تغییر ناپذیر با زمان است. ولی پایداری داریم: $x[n] = A < \infty$

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{\infty} A = A(\infty + 2) = \infty \longrightarrow \text{ناپایدار است}$$

سراسری ۹۱، ص۱۵۳، س۴۹) رابطه یک سیستم به صورت $y(t-1)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,u(\tau-t)\,d\tau$ می‌باشد که $u(t)$ پله واحد است. این سیستم تغییر ___ بازمان و ___ است.

۱) پذیر، علّی ۲) ناپذیر، علّی ۳) پذیر، غیرعلّی ۴) ناپذیر، غیرعلّی

ابتدا ساده سازی می‌کنیم.

$$u(\tau-t)=\begin{cases}1 & \tau\geq t\\ 0 & t>\tau\end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t-1)=\int_{t}^{\infty} x(\tau)\,dt \quad X \qquad y(t-1)=\int_{t}^{\infty} x(\tau)\,d\tau$$

$$y(t')=\int_{t'+1}^{\infty} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow$$

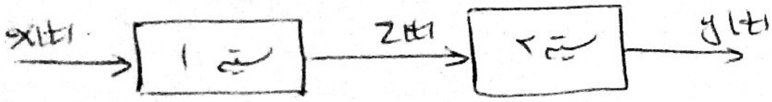
چون خروجی در لحظه t' به ورودی در لحظه $t'+1$ وابسته است سیستم غیرعلّی است.

$$x_1(t)=x(t-t_0)\longrightarrow y_1(t)=\int_{t}^{\infty} x(\tau-t_0)\,d\tau=\int_{t-t_0}^{\infty} x(\tau')\,d\tau'=y(t-t_0)$$

پس سیستم تغییر ناپذیر بازمان است.

دکتری ۹۱، ص۱۵۴، س۱۵۴) در شکل زیر سیستم ۱ با $\frac{z(t)}{t}+1=x(t)$ و سیستم ۲ با $y(t)=tz(t)+t^2$ توصیف می‌شود. در مورد سیستم کلی کدام گزاره نادرست است؟

۱) خطی ۲) بدون حافظه ۳) تغییرپذیر بازمان ۴) پایدار



$$z(t)=t(x(t)-1)\longrightarrow y(t)=t^2x(t)$$

۳۷، مشخص است سیستم خطی،

بدون حافظه و ناپایدار است چون اگر $x(t)=\infty$ ، $y(\infty)=\infty$ است.

حال تغییر ناپذیری با زمان را امتحان کنیم. $x_1(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{\text{سیستم ۱}} y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha - t_0)\, g(\alpha - t)\, d\alpha$

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\, g(\tau-(t-t_0))\, d\tau = y(t-t_0) \to LTI$$

$$x_1(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{\text{سیستم ۲}} y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\, x(t-(\alpha+t_0))\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t+t_0} f(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$\neq y(t-t_0) \to LTV$$

پس گزینه ۱

سوال ۴۴ خارج از کتاب. سیستم S با رابطه ورودی - خروجی $y[n] = x\left[\frac{n}{3}\right]$ توصیف می‌شود

کدام گزینه درمورد این سیستم کاملتر است؟ ($[n] \triangleq$ بخش صحیح n)

۱) پاسخ به ورودی $\delta(n)$ مساوی $\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$ است.

۲) پاسخ ضربه سیستم برابر $\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$ است.

۳) سیستم بدون حافظه است.

۴) همه موارد

$y[0] = x[0]$ ، $y[1] = x[0]$ ، $y[2] = x[0]$

$y[3] = x[1]$ $y[4] = x[1]$ ... پس سیستم حافظه‌دار است.

همچنین سیستم را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{3}\right] & n=3k \\ x\left[\frac{n-1}{3}\right] & n=3k+1 \\ x\left[\frac{n-2}{3}\right] & n=3k+2 \end{cases} \Rightarrow y[n] = x_{(3)}[n] + x_{(3)}[n-1] + x_{(3)}[n-2]$$

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

گزینه ۱ و ۲. اما توجه کنید که پاسخ ضربه برای سیستم‌های LTI است و این سیستم LTI نیست.

پس گزینه ۱ صحیح است.

برق ۹۵ . خواص سیستم ها . کدام گزینه درمورد سیستم زیر صحیح است ؟

$$y[n] = \begin{cases} Re(x[n-1]) & n \text{ زوج} \\ Re\{x[n-1]+x[n-2]\} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

۱) خطی و TI ۳) غیرخطی و TI

۲) خطی و TV ۴) غیرخطی و TV

چون x می تواند مختلط باشد لذا وجود تابع Re موجب غیرخطی شدن می شود .

و چون n در گومان زمان در شرط ها وجود دارد لذا TV است .

برق ۹۴ . خواص سیستم ها .

درمورد سیستم مقابل کدام گزینه صحیح است ؟

$$y(t) = \begin{cases} x(t-1) & x(t-1) \leq 1 \\ x(t-2) & x(t-1) > 1 \end{cases}$$

۱) علّی و خطی ۲) علّی و غیرخطی

۳) غیرخطی و غیرعلّی ۴) علّی و غیرخطی

با توجه به حضور x در شرط ها ، سیستم غیرخطی است . و چون آرگومان ورودی همواره کمتر از آرگومان خروجی است لذا سیستم علّی است .

هوش ۹۴ .

سیستم با رابطه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ و $y(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha$ چه نوع سیستمی است ؟

۱) TV و معکوس پذیر ۲) TV و معکوس ناپذیر ۳) TI و معکوس پذیر

۴) TI و معکوس ناپذیر .

سیستم انتگرالی است و لذا چون عبارت $\cos$ شامل $t-\alpha$ نیست لذا سیستم TV است . و طبق نکته کلاس ، چون سیستم خطی است لذا شرط لازم و کافی برای

معکوس پذیری ایجاب است که به ازای $x(t)=0 \ \forall t \Leftrightarrow y(t)=0 \ \forall t$

$$x(t)=1 \longrightarrow \qquad y(t)=\int_{t-1}^{t}\cos(2\pi\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi t)-\sin(2\pi t+2\pi)\right]$$

$$=0$$

لذا سیستم معکوس ناپذیر است.