جلسه ۱۱ سیگنال

«خواص سیستم‌ها»

۱- خطی بودن: سیستم خطی است اگر وقتی اگر علی بوده و خاصیت جمع آثار را داشته باشد.

علی: یعنی اگر ورودی در یک عدد ضرب شود، خروجی هم در آن عدد ضرب می‌شود.







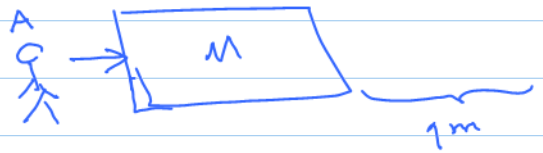


خاصیت جمع آثار: اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند، خروجی آن‌ها هم با هم جمع می‌شود.

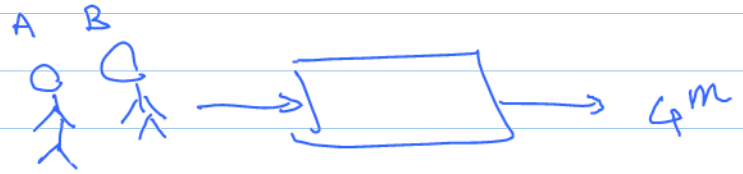


















در سیستم خطی اگر ورودی در عددی ضرب شود خروجی هم در آن عدد ضرب می‌شود، و اگر دو تا ورودی با هم جمع شوند خروجی‌ها هم با هم جمع می‌شوند.

دو شرط بررسی خطی بودن (خطی‌گی):

سیستم $y = x(t+1) + x(t-1)$

① $x_1 \longrightarrow y_1(t+1) = x_1(t+1) + x_1(t-1)$

② $x_2 \longrightarrow y_2(t+1) = x_2(t+1) + x_2(t-1)$

③ ورودی $= ax_1 + x_2$

$y(t) =$ ورودی لحظه t + ورودی لحظه $t-1$ $= x(t) + x(t-1)$

$y_3(t) = ax_1(t)+x_2(t) + ax_1(t-1)+x_2(t-1)$

حال بررسی کنیم آیا y_3 برابر با ay_1+y_2 هست یا نه؟

$a(x_1(t)+x_1(t-1)) + (x_2(t)+x_2(t-1)) = ay_1+y_2$

$ax_1(t) + ax_1(t-1) + x_2(t) + x_2(t-1) = y_3$

$ay_1+y_2 = y_3 \rightarrow$ خطا است.

سپس: $y(t) = 2x(t)+1$

خروجی $=$ ورودی $\times 2 + 1$

① $x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = 2x_1(t) + 1$

② $x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = 2x_2(t) + 1$

③ $a x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = 2(a x_1(t) + x_2(t)) + 1$

④ $a y_1 + y_2 \overset{?}{=} y_3$

$2a x_1(t) + a + 2x_2(t) + 1 \overset{?}{\neq} 2a x_1(t) + 2x_2(t) + 1$

غیرخطی (خطی - خنثی)

بررسی خطا بودن با روش ستاره:

عمگرهای خطی: $\frac{d}{dt}$ و $\int$

$x^0(t) = 1$ $\qquad 2x^0(t) = 2 \cdot 1 = 2$ ← عدد یعنی $x^0(t)$

* اگر در معادله سیستم متغیر x دارای توان غیر از ۱ باشد یا در حاصل ضرب قرار گیرد یا در تابع غیرخطی قرار گیرد سیستم غیرخطی است در غیر اینصورت سیستم خطی است.

* در بردی خطی بودن فقط به x بستگی دارد که x ندارد یا عددی

ثابت می‌شود. داخل x را کاری ندارد.

$y(t) = 2x'(t+1) + 1x^0$ → غیرخطی

$\tan(x)$

$y(t) = x'(t^2-1) + x'(\tan(t+1))$ خطی

$y(t) = \underbrace{\cos(t)}_{\text{عدد}} x(t+1) + \underbrace{e^{t^2-1} \times e^{\tan(t)}}_{\text{عدد}} x(t)$

$y = \text{عدد} \times x'(t+1) + \text{عدد} \times x'(t)$ خطی

نکته

* در بردی خواص فقط از دیدی مناسبه سیستم انجام می‌شود.

آیا سیستم $y[n] - y[n-1] = x[n]$ خطی است؟ (از مناسبه قبل)

$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n}}_{\text{عملگر خطی}} x[k]$ → خطی

؟مناسبه سیستم

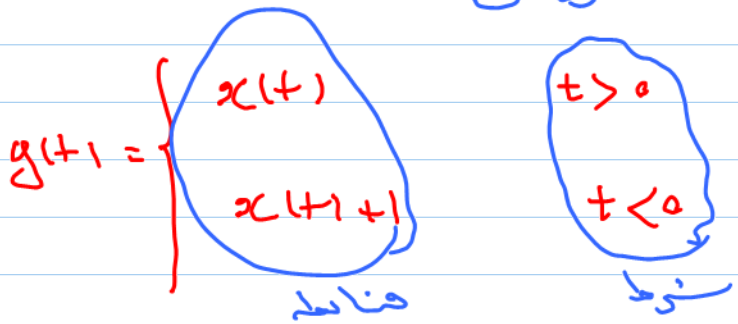
Im ~ ~ ~ موهومی . ~ ~

Re ← عددی که کلیت حقیقی را جدا می‌کند.

عدد غیر حقیقی

$y(t) = \underbrace{Re}_{\text{تابع}}\{\underbrace{x(t)}_{\text{غیر خطی}}\}$

غیر خطی



سیستم‌های چند مبدله‌ای:

اگر x (ورودی) در سیستم

چند مبدله‌ای باشد سیستم با شرط زیر خطی است:

(1) تمام مبدله‌ها خطی باشند

(2) شرط‌ها برحسب x نباشد.

$g = x(t)$

$g(t) = x(t)+1$ ✗

مثال: کدام یک از سیستم‌های زیر خطی است؟

1) $g(t) = \begin{cases} \cos(t)x(t+2) & t>0 \\ \frac{x^2(t-1)}{x(t)} & t\le 0 \end{cases}$

2) $g(t) = \begin{cases} x(t) & x(t-1)<1 \\ x(t)+\cos(t) & x(t-1)\ge 1 \end{cases}$

3) $g(t) = \begin{cases} x(t)+\cos(t)x(t) & t>0 \\ 3 & t=0 \\ x(t) & t<0 \end{cases}$

4) $g(t) = \begin{cases} x(t) & t<1 \\ -x(t)+tx(t) & t\ge 1 \end{cases}$

حل حل دانشجو

$$g(t)=\begin{cases} x(t)+\cos(t)x(t+2) & t>0 \\ \dfrac{x^2(t-1)}{x(t)} & t\le 0 \end{cases}$$ ✗1

$$g(t)=\begin{cases} x(t)+\cos(t)x(t) & t>0 \\ 3x^0 & t=0 \\ x(t) & t<0 \end{cases}$$ ✗3

$$g(t)=\begin{cases} x(t)x(t-1) & t>1 \\ x(t)+\cos(t)x(t) & 1\ge t \end{cases}$$ ✗2

$$g(t)=\begin{cases} x(t) & t>1 \\ -x(t)+tx(t) & 1\ge t \end{cases}$$ ✓4

$$y(t) = \begin{cases} \cos(t)\, x(t-2) & t > 0 \\ \dfrac{x^2(t)}{x(t)} & t \le 0 \end{cases}$$

$y(t) = \cos x\, x(t-2)$ ✓

$y(t) = \dfrac{x^2(t-1)}{x(t)}$ غير خطي ، مزج ، $= x(t)$

2) $$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t-1) > 1 \\ x(t) + \cos(t) & x(t-1) \le 1 \end{cases}$$ X

$y(t) = x'(t)$ ✓

$y(t) = x'(t) + \cos x(t)$ غير خطي

3) $$y(t) = \begin{cases} x(t) + \cos(t)\, x(t) & t > 0 \\ 3 & t = 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$$

$y(t) = x'(t) + \cos x\, x'(t)$ ✓

$y(t) = 3\, x'(t)$ X

نکته: اگر سیستمی باشد به ازای ورودی $x=0$، حتماً $y=0$ می‌شود.

4) $y(t) = \begin{cases} x(t) & t>1 \\ -x(t) + t\,x(t) & t\le 1 \end{cases}$ ✓

$y(t) = -\dot{x}(t) + \text{عدد} \times \dot{x}(t)$ ✓

2- تغییر پذیری با زمان:

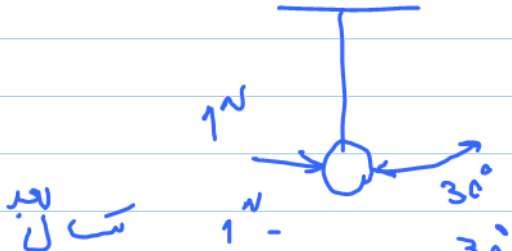


$y(t) = \sin(t) + 2$

تغییر پذیر با زمان: یعنی خود سیستم (مشخصات سیستم) با گذر زمان تغییر کند.

اگر خودروی ما موقع رد شدن از کنار ۵ تا ۱۰۰ تا، ۲ ثانیه است.

پس از ۱ سال اگر شتاب بازدم ۵ تا ۱۰۰ تا ۲ ثانیه باشد؟



سیال بعد ← تغییر ناپذیر

مشخصات سیستم ← مقایسه سیستم

اگر مقایسه سیستم با گذر زمان تغییر نکند سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

$y(t) = x(t)$ $\quad t=1$

$y(t) = 10x(t)$ $\quad t=10$

$y(t) = tx(t)$

تغییرناپذیر با زمان : TI

تغییر پذیر با زمان : TV

روش بررسی : تستی

اگر ورودی سیستم به اندازه a شیفت پیدا کند و خروجی هم به اندازه a شیفت پیدا کند سیستم TI است.

$x(t) \longrightarrow y(t)$

$x(t-a) \longrightarrow y(t-a) \Leftarrow TI$

① $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ ② ورودی $x_1(t-a) \longrightarrow y_2(t)$

③ $y_2(t) \overset{?}{=} y_1(t-a)$

$y(t) = 2x(t) + 1$

① $y_1(t) = 2x_1(t) + 1$ ② $y_2(t) = 2x_1(t-a) + 1$

$y_1(t-a) = 2x_1(t-a) + 1 = y_2(t) \longrightarrow TI$

$y(t) = t\,x(t)$

① $y_1(t) = t\,x_1(t)$ ② $x_1(t-a) \longrightarrow y_2(t) = t\,x_1(t-a)$

③ $y_1(t-a) = (t-a)\,x_1(t-a) \overset{?}{\neq} y_2(t)$ TV

حل تمرین: سیستم اگر دارای شرایط زیر باشد TV است و غیراینصورت TI است:

① متغیر زمان بیرون x باشد ② داخل x، متغیر زمان فقط جا میاعدد

جمع یا تفریق شود و غیراینصورت TV است.

$y(t) = x(t+1)$ TI

$y(t) = t\,x(t)$ TV

خلاصه: اگر یکی از ۲ شرط زیر برقرار نباشد سیستم TV است ولی اگر هیچکدام برقرار نباشد TI است:

۱) متغیر t یا n بیرون x باشد. ۲) داخل x دستکاری غیرازشیفت انجام شود.

در بردی TV یا TI بودن به آرگومان داخل کار داریم.

$y(t) = x(-t+1)$ TV

عملیات ضرب

$y(t) = x^2(t-1)$ ✓ TI

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n > 0 \\ -x[n] & n \le 0 \end{cases}$$ TV

عملیات قدرمطلق

$y(t) = \tan(x(t)) + x(|t|)$ TV

نکته: اگر در مقابله سیت u یا δ داریم قبل از بردن x آیا I آبودن باید آن‌ها را ساده کنیم.

$$y[n] = x[n]\,u[n]$$

$$y[n] = x[n] \times \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} = \begin{cases} x[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$ TV

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\,\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]\,\delta[n-k]$$

($\delta[n-k]$: $k = n$)

$$y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[n-k]$$

($\delta[n-k]$: $k = n$)

$n \in [-\infty, n]$ ✓

$y[n] = x[n] \rightarrow$ TI

نکته: اگر داخل x به جای n یا t، عدد ثابت جابجایی باشد TV است.

$y[n] = x[2]\,x[n]$ TV

کدام یک از سیستم‌های زیر TI است؟

1) $y(t) = \cos(t)\, x(t-1)$

2) $y(t) = \sqrt{x(t-1)}$

3) $y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} \tan(x(t)) & x(t) > 0 \\ -\tan(x(-t)) & x(t) \leq 0 \end{cases}$

کدام یک از سیستم‌های زیر TI است؟

1) $y(t) = \cos(t)\, x(t-1)$ — TV

2) $y(t) = \sqrt{x(t-1)}$ ✓

3) $y(t) = \begin{cases} x(t-1) & t \geq 0 \\ x(t) & t < 0 \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} \tan(x(t)) & x(t) > 0 \\ -\tan(x(-t)) & x(t) \leq 0 \end{cases}$

نکته: سیستم‌های دارای عملیات انتگرال:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

اگر هرکدام از شرط‌های زیر نقض شود سیستم TV است:

اما اگر همگی این شرط‌ها برقرار باشد و باز هم TV بودن یا نبودن را بخواهیم بررسی کنیم:

① متغیر انتگرال‌گیری با متغیر زمان خودی مستقل باشد.

② حدود انتگرال‌گیری عددثابت (غیر از $\pm\infty$) نباشد.

TV

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2} x(\tau)\, d\tau$$

③ حدود انتگرال‌گیری اگر آرگومان مزاحمی همچون t داشته باشد غیر از شیفت روی آن انجام شود.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t-1} x(\tau)\, d\tau$$

اگر تمام شرط‌های سه‌گانه برقرار باشد دوگام آخر:

① $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

② $x_1(t-a) \longrightarrow y_2(t)$

$y_2(t) = y_1(t-a) \rightarrow TI$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(t)\, dt$$

TV

$$y(t) = \int_{t}^{2t} x(\tau)\, d\tau$$

① ✓ ② ✓ ③ X → TV

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓ حافظه‌دار ←

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau)\, d\tau$

$x_1(t-a) \rightarrow y_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau - a)\, d\tau$

$y_1(t-a) \overset{?}{=} y_2(t)$

$$y_1(t-a) = \int_{t-a-1}^{t-a+1} x_1(\tau)\, d\tau \overset{?}{=} \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau - a)\, d\tau$$

$\tau - a = \tau' \rightarrow d\tau = d\tau'$

$\tau: t-1 \rightarrow t+1$

$\tau': t-1-a \rightarrow t+1-a$

$$y_2(t) = \int_{t-1-a}^{t+1-a} x_1(\tau')\, d\tau' \overset{?}{=} \int_{t-a-1}^{t-a+1} x_1(\tau)\, d\tau$$

TI

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓ وأما:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$x_1(t-a) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau-a)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

$$y_1(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau)\, e^{-(t-a-\tau)}\, d\tau \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau-a)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$$

(متغير افتراضي) x_1

τ'

$$\tau - a = \tau' \rightarrow \quad d\tau = d\tau' \quad \rightarrow \quad \tau = \tau' + a$$

τ: $-\infty \rightarrow t$

τ': $-\infty \rightarrow t-a$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau')\, e^{-(t-(\tau'+a))}\, d\tau'$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau')\, e^{-(t-a-\tau')}\, d\tau'$$

$$\text{II} \quad y_1(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} x_1(\tau)\, e^{-(t-a-\tau)}\, d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-k]\, e^{-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n-k]\, e^{-k}$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n-k]\, e^{-k}$$

$$x_1[n-a] \longrightarrow y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n-k-a]\, e^{-k}$$

$$y_1[n-a] = \sum_{k=-\infty}^{n-a} x_1[n-a-k]\, e^{-k} \overset{?}{\neq} \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n-k-a]\, e^{-k}$$

TV