جلسه ۱۴ سیگنال

برق ۸۹

در مورد سیستمی که رابطهٔ ورودی ـ خروجی آنها به صورت زیر می‌باشد، کدام گزینه نادرست می‌باشد؟

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

۱) این سیستم علّی و پایدار است.

۲) این سیستم غیرخطی و TI است.

۳) این سیستم TI و معکوس‌ناپذیر می‌باشد.

۴) این سیستم معکوس‌پذیر و حافظه‌دار می‌باشد.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

| y | x |
|---|---|
| t | t ✓ |
| | t-2 ✓ |

$t \geq t$ ✓

$t \geq t-2$ ✓

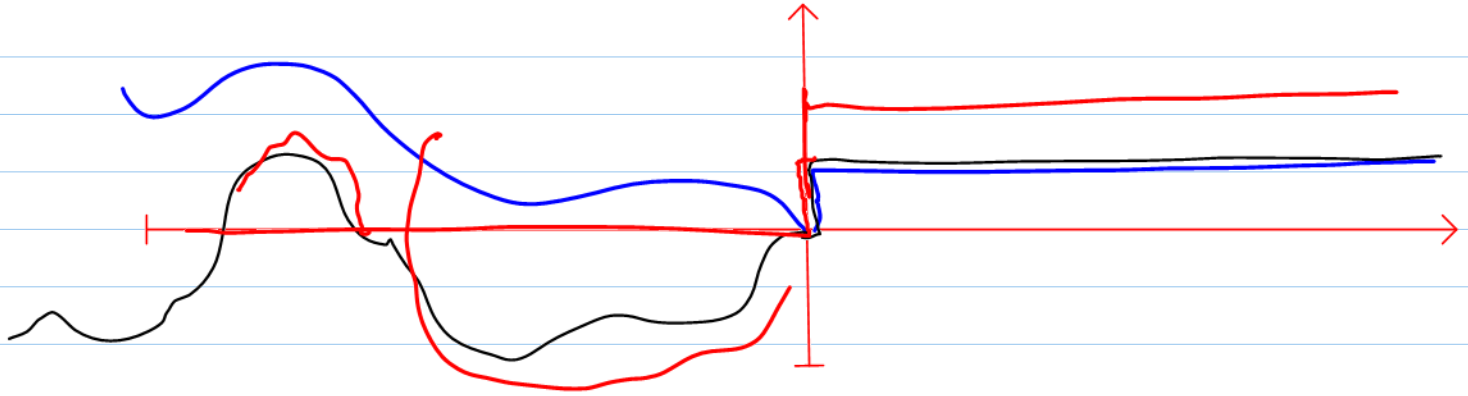
غیرخطی ، TI ، حافظه‌دار ، علی

پایدار ، معکوس ناپذیر

$x(t) = A \rightarrow$ $y(t) = \begin{cases} 0 & A < 0 \\ A + A = 2A & A \geq 0 \end{cases}$

$y(t) = \begin{cases} 0 \\ 2A \end{cases} < \infty$

$x(t-2) = A$



$y(t) = 0$ ⟶



شرط سکوس پذیری: ① ورودی بازای تمام زمانها و تمام مقادیر x در دامنه مزدی از دامنه باشد.

$x = -10 \qquad x = -1000 \rightarrow y = 0$

② رابطه x برحسب y به صورت تابع و بدون ابهام قابل تعیین باشد.

## مکانیکال سیستم گانه ۵

اگر شرط ① سیستم پذیرای ابدی کاردینالی بودن شرط ② آسان پذیر بودن، از مکانیکال سیستم گانه استفاده می‌کنیم.

$$y(t) = x(t)\, x(t-2)\, x(t-10)$$

① $t$, $t-2$, $t-3$ ✓

② $x(t) =$ برحسب $y$ها

$$x(t) = \frac{y(t)}{x(t-2)\, x(t-3)}$$

① اگر سیستم خطی باشد، شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری این است که اگر به ازای هر $t$ داشته باشیم $y(t)=0$ آنگاه حتماً بتوان نتیجه گرفت که $x$ به ازای هر $t$ صفر بوده است.

$\forall t \rightarrow y(t)=0$ ~~$y(2)=0$~~

$\forall t, x(t)=0$

$$y(t)=\frac{x'(t)-x'(-t)}{2}$$

① $t$ ✓ $-t$ ✓ ② $x(t)=?$ $x(t)-x(-t)=y(t)$

$y(t)=\frac{1}{2}\overset{①}{x'(t)}-\frac{1}{2}\overset{①}{x'(-t)}$ خطی

$y(t)=0 \xrightarrow{?} x(t)=0$

$y(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}=$ قسمت فرد $x(t) \Rightarrow$

$x(t)=t^2$ $\qquad y(t)=\frac{t^2-(-t)^2}{2}=0$

$\forall t\ y(t)=0$ , $x(t)\neq 0$ معکوس‌پذیر

خوش‌تیپ ۹۶. سیستم با رابطه $y(t)=\int_{t-1}^{t}\cos(2\pi\alpha)x(\alpha)d\alpha$ چه نوع سیستمی است؟

1) LTV و معکوس‌پذیر
2) LTV و معکوس‌ناپذیر
3) LTI و معکوس‌پذیر
4) LTI و معکوس‌ناپذیر

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha$$

① $\alpha$ : $t-1 \le \alpha \le t$ ✓

10 ✓

$t = 10.5$

$9.5 \le \alpha \le 10.5$

② $$\frac{dy(t)}{dt} = \cos(2\pi t)\, x(t) - \cos(2\pi(t-1))\, x(t-1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \cos(2\pi t)\,[\, x(t) - x(t-1)\,]$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} \frac{1}{\cos(2\pi\alpha)}\, x(\alpha)\, d\alpha$$

نکات سوگانه :

① $y(t) = 1 \times x(\alpha)$

خطی

$y(t) = 0 \xrightarrow{?} x(t) = 0$

$$\int \cos(a\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{a} \sin(a\alpha)$$

$$x(t)=1 \longrightarrow y(t)=\int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\times 1\, d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi t)-\sin(2\pi(t-1))\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi t)-\sin(2\pi t)\right]=0$$

$$\sin(2\pi t-2\pi)=\sin(2\pi t)$$

$x(t)=1 \longrightarrow y(t)=0$

$y(t)=0 \not\longrightarrow x(t)=0$

معکوس ناپذیر

---

$$y(t)=\int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\,x(\alpha)\,d\alpha$$

① ✓ ② ✓ ③ ✓

گام آخر

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\alpha)\, d\alpha$$

$$x_2(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) = \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\alpha-t_0)\, d\alpha$$

$$y_1(t-t_0) \stackrel{?}{=} y_2(t) \longrightarrow$$

$$\int_{t-t_0-1}^{t-t_0} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\alpha)\, d\alpha \stackrel{?}{=} \int_{t-1}^{t} \cos(2\pi\alpha)\, x_1(\underbrace{\alpha-t_0}_{\alpha'})\, d\alpha$$

$\alpha'$ بدلالة $\alpha$

$$\alpha' = \alpha - t_0 \qquad d\alpha' = d\alpha \qquad \alpha = \alpha' + t_0$$

$\alpha$: $t-1 \longrightarrow t$

$\alpha'$: $t-1-t_0 \longrightarrow t-t_0$

TV

$$\int_{t-t_0-1}^{t-t_0} \underbrace{\cos(2\pi\alpha)}_{\times}\ \underbrace{x_1(\alpha)}_{\checkmark}\, d\alpha \neq \int_{t-1-t_0}^{t-t_0} \underbrace{\cos(2\pi(\alpha'+t_0))}_{\times}\ \underbrace{x_1(\alpha')}_{\checkmark}\, d\alpha'$$

نکات سیستم:

② اگر یک سیستم بدون حافظه باشد، شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک به یک بودن رابطه ریاضی $y$ بر حسب $x$ برای تمام $t$ هاست.

$$y(t) = 2x^2(t) + t^2 x(t) + 1$$

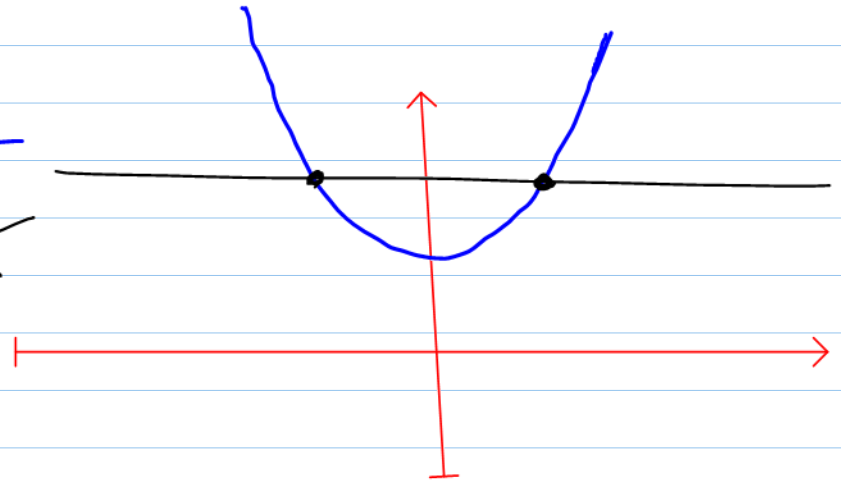
① ✓ ② → $x(t) = ?$ —

① نکته ✗

$$y = 2x^2 + t^2 x + 1$$

$t = 0$ → $y = 2x^2 + 1$ یک به یک است

معکوس ناپذیر



③ اگر رابطه سیستم در همان زمان، بین x بیان شده شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری، یک به یک بودن رابطه ریاضی y برحسب x (در دنیای مختلط) است.

$y[n] = x[n]\,x[n-1]\,x[n-2]$

$y = x^3 \longrightarrow x = e^{j\pi/3} \rightarrow y = -1$

$x = e^{-j\pi/3} \rightarrow y = -1$

معکوس ناپذیر

نکته: اگر معادله سیستم به صورت $y_{n+1} = g(n+1)\,f(x(n+1)) + h(n+1)$

باشد، برای معکوس پذیری، بخش های بدون x را می توان حذف کرد.

1) $y(t) = \frac{1}{1+\cos^2(t)}\,(x(t)+x^3(t))$

$y(t) = x(t) + x^3(t)$ $\quad y = x + x^3$ → سیستم بی‌باینت

→ معکوس پذیر

2) $y(t) = \frac{\sqrt{x(t)+x^3(t)}}{t^2+1} + e^{t^2-1}$

$y(t) = \sqrt{x(t)+x^3(t)}$ $\quad \rightarrow \quad y = \sqrt{x+x^3}$ سیستم بی‌باینت

→ معکوس ناپذیر

معکوس پذیری سیستم‌های چند متغیره:

① سیستم‌های زمانی ② سیستم‌های دینامیکی

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & t > 0 \\ -x(t) & t \le 0 \end{cases}$$

اگر سؤالها روی زمان باشد سیستم زمانی است.

" " " x باشد " فاصله ای است.

برای بررسی معکوس پذیری ابتدا شرط ① و ② معکوس پذیری را بررسی کنیم.

سپس اگر سیستم زمانی باشد باید برای معکوس پذیری، شرط علّی بودن را

پوشش دهد.

اگر سیستم فاصله ای باشد باید شرط ها کاملاً هم بوده و پس از جایگذاری سؤالها

برحسب y، سؤالهای بدست آمده باهم تداخل نداشته باشند.

1) $y[n] = x_{(2)}[n]$

2) $$y(t) = \begin{cases} x(t) - 1 & x(t) \geq 0 \\ x(t) + 1 & x(t) < 0 \end{cases}$$

3) $$y(t) = \begin{cases} x^2(t) & x(t) \geq 0 \\ x(t) & x(t) < 0 \end{cases}$$

۱) $y[n] = x_{(2)}[n] \rightarrow y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n: \text{زوج} \\ 0 & n: \text{فرد} \end{cases}$

$\frac{n}{2} \rightarrow$ زوج: $n$

$n=7$ $\quad x[7]$

$3 \rightarrow \frac{6}{2} = 3$

$4: \frac{8}{2} = 4$

$-1: \frac{-2}{2} = -1$

$0: \frac{0}{2} = 0$

✓ (1)

x در خارج ضابطه روی فرجی اثر دارد.

خارج مقادیر x روی ~ ~

$y \rightarrow x[7]$ $\quad y[14] = x[7]$

$y[7] = 0$

$$\begin{cases} y[n] = x[n/2] \; ; & n: \text{زوج} \rightarrow x[\textcircled{n}] = y[2n] \\ y[n] = 0 & ; \; n \text{ فرد} \end{cases}$$ ②

$$y[n] = x\left[\frac{n}{2}\right] \; ; \quad n = 2k \; ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$y[2k] = x[k] \; ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$x[3] = y[6] \qquad x[10] = y[20]$$

$$x[k] = y[2k] \; ; \quad \text{اعداد صحیح } k \rightarrow n$$

$$x[n] = y[2n]$$ ✓②

* سرخط‌های زیبای، عکاً زیبا را پوشش بدهد. ✓ ← عکس بزنید

2) $$y(t) = \begin{cases} x(t) - 1 & x(t) \geq 0 \\ x(t) + 1 & x(t) < 0 \end{cases}$$

① (t) ; ✓ ② (2) → ✓

$$\begin{cases} y[n] = x[n] - 1 \\ y[n] = x[n] + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x[n] \geq 0 \rightarrow \\ x[n] < 0 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} x[n] = y[n] + 1 \; ; \; y[n] \geq -1 \\ x[n] = y[n] - 1 \; ; \; y[n] < 1 \end{cases}$$

$x \geq 0 \rightarrow (x-1) \geq -1$

$y$

$x < 0 \quad (x+1) < 1$




$$x[n] = \begin{cases} y[n] + 1 & y[n] \geq -1 \\ y[n] - 1 & y[n] < 1 \end{cases}$$

چون شرط‌ها برحسب y هستند داریم

سیگنال نامتغیر

3) $y(t) = \begin{cases} x^2(t) & x(t) \geq 0 \\ x(t) & x(t) < 0 \end{cases}$

$y(t) = \begin{cases} x^2(t) & x(t) \geq 1 \\ x(t) & x(t) < -1 \end{cases}$

$x(t) = 0$ X

① $t$ ; ✓

② $\begin{cases} y(t) = x^2(t) & x(t) \geq 0 \end{cases}$ $\quad x(t) = \pm\sqrt{y(t)}$

$\begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} > 0 \end{cases}$

$y = x^2(t)$ , $x(t) \geq 0$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} \checkmark \\ x(t) = -\sqrt{y(t)} \end{cases}$

$y(t) = x^2(t)$ , $x(t) \geq 0$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x(t) = \sqrt{y(t)} & ; \quad y(t) \geq 0 \\ x(t) = y(t) & ; \quad y(t) < 0 \end{cases}$

✓② شرط

شرط‌ها برحسب ۷ همپوشانی ندارند ← متمکوس پذیر