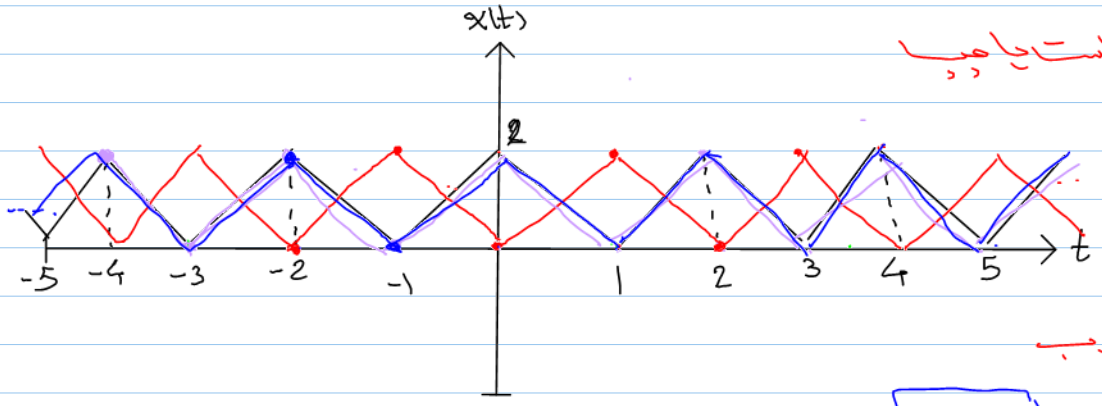
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

سیگنالهای متناوب و نامتناوب (زیرسته)

سیگنال $x(t)$ را متناوب گوییم هرگاه بتوان عدد T_0 را یافت که $x(t \mp T_0) = x(t)$ آنگاه کوچکترین مقدار مثبت T_0 را دوره تناوب اصلی $x(t)$ گوییم



بنابراین T_0 به سمت راست یا چپ

ثابت جابجا میشود

$x(t+1) \neq x(t)$

$x(t+4) = x(t)$ متناوب

$T_0 = 2$ $\quad x(t+2) = x(t)$

$x(t)$ سیگنال با $T_0 = 2$ چهارم متناوب است

$x(t+4) = x(t)$

* اگر $x(t)$ دارای دوره تناوب اصلی T_0 باشد آنگاه

$x(t \mp mT_0) = x(t)$

$x(t+16) = x(t)$

$x(t-2) = x$ $\quad x(t-4) = x(t)$ $\quad x(t-8) = x(t)$

2 مضارب $\rightarrow \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots$

① سیگنال مثلثی ←

(I) $A \sin(at \mp b) \rightarrow T_0 = \left| \frac{2\pi}{a} \right|$

(II) $A \cos(at \mp b) \rightarrow T_0 = \left| \frac{2\pi}{a} \right|$

(III) $A e^{j(at \mp b)} \rightarrow T_0 = \left| \frac{2\pi}{a} \right|$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

(IV) $A\tan(at\mp b)$, $A\cot(at\mp b)$ $\longrightarrow$ $T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

(V) $|\sin(at\mp b)|$, $|\cos(at\mp b)|$ $\longrightarrow$ $T_0=\left|\frac{\pi}{a}\right|$

نکته: اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T_1

T_2 ~ ~ ~ ~ $y(t)$ و

$Ax(t)\mp By(t)\longrightarrow$ $T_0=$ ک.م.م $\{T_1,T_2\}$

توجه: اگر ک.م.م $\{T_1,T_2\}$ وجود نداشته باشد

سیگنال غیرمتناوب است.

$$f(t)=\underbrace{2\sin(3\pi t+\frac{\pi}{6})}_{T_1=\left|\frac{2\pi}{3\pi}\right|=\frac{2}{3}}-\underbrace{3\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})}_{T_2=\left|\frac{2\pi}{2\pi}\right|=1}$$

ک.م.م $\{\frac{2}{3},1\}=\{\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}$ $\quad T_0=2$

1: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots$

$\frac{2}{3}$: $\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm2,\dots$

$$x(t)=\underbrace{|\sin(\frac{4}{3}t)|}_{T_1=\left|\frac{\pi}{4/3}\right|=\frac{3\pi}{4}}+\underbrace{\cos(\frac{2}{3}t)}_{T_2=\left|\frac{2\pi}{2/3}\right|=3\pi}-\underbrace{\tan(\frac{2\pi}{3}t)}_{T_3=\left|\frac{\pi}{2\pi/3}\right|=\frac{3}{2}}$$

ک.م.م $\{T_1,T_2,T_3\}=$ وجود ندارد

$\frac{3\pi}{4}$: $\pm\frac{3\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{9\pi}{4},\pm3\pi,\pm\frac{15\pi}{4},\dots$ $\}$ 3π

3π: $\pm3\pi,\pm6\pi,\pm9\pi,\dots$

$\frac{3}{2}$: $\pm\frac{3}{2},\pm3,\pm\frac{9}{2},\dots$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

نکته ← عدد متناظر π با علامت π نداره همیشه مثبت

تو اهد داشت.

$x(t), T_1$ و $y(t), T_2$ (II)

در مورد دوره تناوب و یا متناوب بودن $x(t)+y(t)$ یا $x(t)/y(t)$

کنا توان نظیر داد. و در صورت امکان باید قبل ÷ جمع یا تفریق شود

$$x(t) = \underbrace{2\sin 2t \cos 3t}$$

$$2\sin(2t) \longrightarrow T_1 = \left|\frac{2\pi}{2}\right| = \pi$$

$$\cos(3t) \longrightarrow T_2 = \left|\frac{2\pi}{3}\right| = \frac{2\pi}{3}$$

$$x(t) = \sin(2t+3t) + \sin(2t-3t)$$

$$x(t) = \underbrace{\sin(5t)} + \underbrace{\sin(-t)}$$

$$T_1 = \left|\frac{2\pi}{5}\right| \qquad T_2 = \left|\frac{2\pi}{-1}\right|$$

$$T_x = \overset{l.c.m}{\{} \frac{2\pi}{5}, 2\pi \} = \boxed{2\pi}$$

$x(t) = \underbrace{\sin(200\pi t + 0.5\pi)} - \underbrace{\cos(800t)}$ (آزاد) 91 برق

(1 $T_0 = \frac{\pi}{100}$ (2 $T_0 = \frac{\pi}{400}$ (3 $T_0 = \frac{1}{100}$ ناستاوب

$$T_{\sin} = T_1 = \left|\frac{2\pi}{200\pi}\right| = \frac{1}{100}$$

$$T_{\cos} = T_2 = \left|\frac{2\pi}{800}\right| = \frac{\pi}{400}$$

$$T_x = l.c.m\left\{\frac{1}{100}, \frac{\pi}{400}\right\}$$

= وجود ندارد

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

مثال: دوره تناوب $y(t) = e^{j\pi t} x(t)$ و $x(t) = e^{j\frac{7}{2}t} \cos(\frac{t}{2})$ کدام است؟

1) $T_y = 2\pi$ $T_x = \frac{2\pi}{3+\pi}$

2) $T_x = 2\pi$ $T_y = \frac{2\pi}{4+\pi}$

3) $T_x = \pi$ $T_y = \frac{2\pi}{3+\pi}$

4) $T_x = 2\pi$ T_y باشد

$$x(t) = e^{j\frac{7}{2}t} \cos(\tfrac{1}{2}t) \qquad \cos(\tfrac{1}{2}t) = \frac{1}{2}e^{j\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{t}{2}}$$

$$= e^{j\frac{7}{2}t}\left(\frac{1}{2}e^{jt/2} + \frac{1}{2}e^{-jt/2}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}$$

$$T_1 = \left|\frac{2\pi}{4}\right| \qquad T_2 = \left|\frac{2\pi}{3}\right|$$

$$T_x = \text{l.c.m}\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\} = 2\pi \checkmark$$

$\frac{\pi}{2}$: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \ldots$

$\frac{2\pi}{3}$: $\pm\frac{2\pi}{3}, \pm\frac{4\pi}{3}, \pm 2\pi$

$$y(t) = e^{j\pi t} x(t)$$

$$T_3 = \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2 \qquad T_x = 2\pi$$

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}$$

$$j\pi t + j4t = j(\pi+4)t$$

$$y(t) = e^{j\pi t}\left(\frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j3t}\right) = \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j\pi t}e^{j3t}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j(\pi+4)t} + \frac{1}{2}e^{j(\pi+3)t}$$

$$T_4 = \left|\frac{2\pi}{\pi+4}\right| \qquad T_5 = \left|\frac{2\pi}{\pi+3}\right|$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$T_4 = \frac{2\pi}{\pi+4}$: $\pm\frac{2\pi}{\pi+4}, \pm\frac{4\pi}{\pi+4}, \pm\frac{6\pi}{\pi+4}, \dots$

$T_5 = \frac{2\pi}{\pi+3}$: $\pm\frac{2\pi}{\pi+3}, \pm\frac{4\pi}{\pi+3}, \pm\frac{6\pi}{\pi+3}, \dots$

$l.c.m\{T_4, T_5\} =$ جوابی ندارد

$\frac{2}{3}$: $\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{2}{3}\times 3 = \pm 2, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{2}{3}\times 6 = 4$
$, \pm\frac{14}{3}, \pm\frac{16}{3}, \pm 6 = 2\times 3$

$\frac{3}{2}$: $\pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\times 2 = 3, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{3}{2}\times 4 = \pm 6$

مثال: کدام گزینه نادرست است؟

1) دوره تناوب سیگنال $x(t) = \tan(\sin(t))$ برابر π است.

2) ~ ~ ~ $x(t) = \frac{\sin(\frac{5}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ برابر 2π است. درست

3) سیگنال ~ $x(t) =$ متناوب با 4π است. درست

4) $x(t) = e^{j\frac{7}{2}t}\cos(t/4)$ برابر با 195 است. غلط

نکته: اگر $f(t)$ متناوب با T_0 باشد سیگنال $g(f(t))$ نیز متناوب با T_0 یا پایه T_0 یا پایه $g(\cdot)$ تابع دلخواه است، برابر T_0 یا پایه

$x(t) = \underbrace{\tan}_{g}\left(\underbrace{\sin(t)}_{f}\right) \rightarrow T_x = 2\pi$

$\sin(t) \rightarrow T_0 = 2\pi$

$x(t)$ $T_x \stackrel{?}{=} \pi$?

$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

$x(t+\pi) = x(t)$

$x(t+\pi) = \tan(\sin(t+\pi)) = \tan(-\sin(t))$

$= -\tan(\sin(t)) \stackrel{?}{\neq} x(t)$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

2) $x(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{5}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} \rightarrow T_x = 2\pi$

$\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$

$$= \frac{\frac{1}{2j}e^{j\frac{5}{2}t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{5}{2}t}}{\frac{1}{2j}e^{j\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{1}{2}t}}$$

$$= \frac{e^{j\frac{5}{2}t} - e^{-j\frac{5}{2}t}}{e^{j\frac{t}{2}} - e^{-j\frac{t}{2}}} = ?$$

$e^{jt/2}$

Soja: $\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$

$$x(t) = \frac{e^{j\frac{5}{2}t}\left(1 - e^{-j5t}\right)}{e^{jt/2}\left(1 - e^{-jt}\right)}$$

$$= e^{j2t} \times \left(\frac{1 - e^{-j5t}}{1 - e^{-jt}}\right)$$

$\alpha = e^{-jt}$

$$\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$\alpha^5 = \alpha^{n+1}$

$n = 4$

$e^{-j5t} = (e^{-jt})^5$

α^5

$$= e^{j2t}\left(\frac{1-\alpha^{4+1}}{1-\alpha}\right)$$

$$= e^{j2t}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4\right)$$

$$= e^{j2t}\left(1 + e^{-jt} + e^{-j2t} + e^{-j3t} + e^{-j4t}\right)$$

$$= e^{j2t} + e^{jt} + 1 + e^{-jt} + e^{-j2t}$$

π $\quad 2\pi$ $\quad 2\pi$ $\quad \left|\frac{2\pi}{-2}\right| = \pi$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

نکته ← سیگنال ثابت $f(t)=9$ متناوب است ولی دوره تناوب اصلی برای آن تعریف نمی شود چون کوچکترین T_0 برابر $\varepsilon=0^+$ است.

نکته ← x_d = {کوچکترین $\varepsilon=0^+$ ، ک.م.م}

T_x = ک.م.م {2π، 2π، $\varepsilon=0^+$، π، 2π}

= {2π، 0^+} = 2π

2) دوره تناوب اصلی $x(t)$ برابر 2π است.

3) $x(t)$ متناوب با 4π است.

4π

اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T_0 باشد با هر مضربی از T_0 متناوب است.