Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

متناوب بودن سیگنال‌های زمان گسسته:

یادآوری: $x(t+T_0) = x(t)$

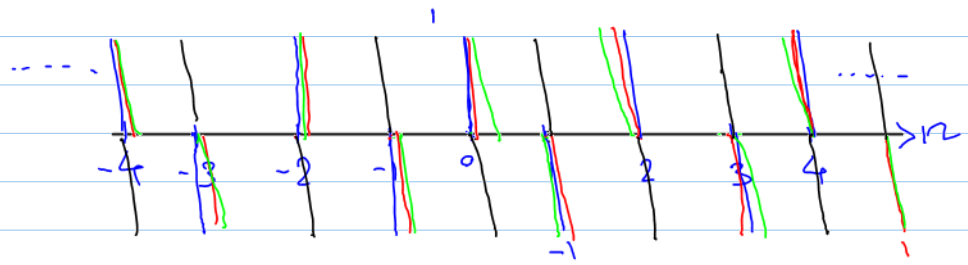
$x[n]$ متناوب است اگر بتوان N_0 صحیح مثبتی یافت که $x[n]$ را به اندازه N_0 شیفت دهیم دوی خود $x[n]$ بیفتد.

$$x[n+N_0] = x[n]$$

یادآوری: در سیگنال‌های زمان گسسته مقدار شیفت باید عدد صحیح باشد.

$x[n+\frac{1}{2}]$ $\quad$ $x[n+2.5]$

کوچکترین عدد صحیح و مثبت N_0 که $x[n+N_0] = x[n]$ دوره تناوب اصلی $x[n]$



$x[n] = e^{j\pi n}$ ؟

$N_0 = 4$

$x[n-4] = x[n]$

$x[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n = \text{زوج} \\ -1 & n = \text{فرد} \end{cases}$

$x[n]$ متناوب است.

$x[n-2] = x[n]$

عدد صحیح و مثبتی که کمتر از 2 وجود دارد نه $x[n-1] \stackrel{?}{\neq} x[n]$

$N_0 = 2$

$x[n] = e^{j\pi n}$ متناوب است و دوره‌ی $N_0 = 2$ می‌باشد.

$x[n-2] = x[n]$

$x[n-4] \stackrel{?}{=} x[n]$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

اگر $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی N_0 باشد، با هر عدد صحیحی

از N_0 هم متناوب است.

$$x[n \mp N_0] = x[n]$$

$$x[n \mp 2N_0] = x[n] \qquad x[n \mp 3N_0] = x[n]$$

$$x[n \mp mN_0] = x[n] \qquad m \text{ اعداد صحیح}$$

---

① سیگنال‌های متناوب

$$\begin{cases} A\sin(an+b) \\ A\cos(an+b) \longrightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{a}\right| \\ A\,e^{j(an+b)} \end{cases}$$

اگر $N_{0\,\text{اولیه}}$ صحیح باشد که $N_0 = N_{0\,\text{اولیه}}$.

" " نباشد آنگاه ممکن است از $N_{0\,\text{اولیه}}$ عدد صحیح شود

تا شود دوره تناوب اصلی.

$$\begin{cases} x[n] = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}n + 2\right) \\ y[n] = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}n + 2\right) \end{cases}$$

$y \rightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{\pi/4}\right| = 8 \rightarrow$ عدد صحیح است $\rightarrow \boxed{N_0 = 8}$

$x \rightarrow N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{3\pi/8}\right| = \frac{16}{3}$ نیست $\rightarrow \boxed{N_0 = 16}$

$\frac{16}{3}$: $\pm\frac{16}{3}$, $\pm\frac{32}{3}$, ± 16

$$x[n] = \cos\left(\frac{3}{8}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$N_{0\,\text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{3/8}\right| = \frac{16\pi}{3}$ عدد صحیح نیست $\rightarrow$ N_0 وجود ندارد

ناستاوب : x

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$\frac{16\pi}{3}$: $\pm\frac{16\pi}{3}$, $\pm\frac{32\pi}{3}$, $(\pm 16\pi)$, $\pm\frac{64\pi}{3}$, ...

عدد گویا

حاصل ضربی از عدد گویا ، صحیح باشد.

نکته: در سیگنالهای متناوبی مثل (sin, cos, tan, cot و ...) $e^{j\Omega n}$ اگر ضریب Ω بر π بخش، متناوب است.

حتماً باید ضریب n بصورتی از (π) باشد.

$e^{j\frac{3}{8}\pi n}$ نامتناوب

$\cos\left(\frac{3}{8}n\right)$ نامتناوب

$\sin\left(\frac{3\pi}{8}n\right)$ نامتناوب

ضریب n باید یک عدد گویا $\times \pi$ باشد.

$\tan\left(\frac{\pi}{2}n\right) \rightarrow N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{\pi}{\pi/2}\right| = 2$ عدد صحیح $\rightarrow N_0 = 2$

نکته ← اگر N_0 اولیه بصورت یک عدد گویای غیرصحیح باشد ($\frac{8}{3}$, $\frac{5}{2}$ و ...) ← N_0 = صورت $N_{0\ \text{اولیه}}$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \frac{16}{3} \rightarrow N_0 = 16$

$x[n] = 2e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n + \pi/2\right)}$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}\right| \times \frac{8}{3} \rightarrow N_0 = 8$

$y[n] = 2e^{j\left(\frac{3}{4\pi}n + \pi/2\right)}$ نامتناوب

$z[n] = 2e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n + \pi/2\right)}$ نامتناوب

$f[n] = 2e^{j\left(\frac{3}{4\pi}n + \pi/2\right)}$ نامتناوب

$\tan(an\pm b)$, $\cot(an\pm b)$ $|\sin(an\pm b)|$ $|\cos(an\pm b)|$

$N_{0\ \text{اولیه}} = \left|\frac{\pi}{a}\right| \rightarrow$ N_0

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

N_2 متناوب با $x_2[n]$ ، N_1 متناوب با $x_1[n]$

$x_1[n] + x_2[n] \rightarrow$ N_0 = ک.م.م $\{N_1, N_2\}$

$$x[n] = \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}n}}_{N_1} + \underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}n}}_{N_2}$$

N_1 اولیه $= \left|\frac{2\pi}{-\pi/2}\right| = 4$ ✓ $\quad N_1 = 4$

N_2 اولیه $= \left|\frac{2\pi}{\pi/4}\right| = 8 \quad N_2 = 8$

$\rightarrow N_0 =$ ک.م.م $\{4, 8\} = 8$

اگر یکی از ضرایب مختلط باشد سعی کنید تبدیل به حاصل جمع شود.

$$x[n] = \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}n}}_{N_1} \times \underbrace{\cos(\pi n)}_{N_2}$$

$N_1 = \left|\frac{2\pi}{\pi/2}\right| = 4 \qquad N_2 = \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2$

$$\cos(\pi n) = \frac{1}{2}e^{j\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n}$$

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n}\left(\frac{1}{2}e^{j\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n}\right)$$

$$x[n] = \underbrace{\frac{1}{2}e^{j\frac{3\pi}{2}n}}_{N_3} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}}_{N_4}$$

N_3 اولیه $= \left|\frac{2\pi}{3\pi/2}\right| = 4/3 \rightarrow \quad N_3 = 4$

N_4 اولیه $= \left|\frac{2\pi}{-\pi/2}\right| = 4 \rightarrow \quad N_4 = 4$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$N_{0x} = \text{g.c.d}\{4,4\} = 4$

فرق بين

$\cos(\pi n) = (-1)^n \qquad e^{j\pi n} = (-1)^n$

$\cos(\pi n) = (-1)^n \qquad (-1)^{-n} = (-1)^n$

$\cos(\pi n) = e^{j\pi n} \qquad \cos(-\pi n) = \cos(\pi n)$

$e^{-j\pi n} = e^{j\pi n}$ ✓?

$\cos(\pi n) = e^{j\pi n}$

$\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = e^{-j\pi n}$

$e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} = \left(e^{j\pi n}\right)^{(-1)} = \left((-1)^n\right)^{-1}$

$(-1)^n = (-1)^{-n}$

$(-1)^{-n} = \left((-1)^n\right)^{-1} = \frac{1}{(-1)^n}$

$n=2$

$(-1)^{-2} = 1 = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1}$

$n=-3$

$(-1)^3 = -1 = \frac{1}{(-1)^{-3}} = \frac{1}{-1} = -1$

مثال $x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n}\cos(\pi n)$

$\cos(\pi n) = e^{j\pi n}$

$x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{j\pi n} = e^{j\frac{3\pi}{2}n}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

N_0 اولیه $= \left| \frac{2\pi}{3\pi/2} \right| = \frac{4}{3}$ $\quad N_0 = 4$

تأثیر عملیات روی دامنه دوره تناوب:

$x(t)$ متناوب با T_0 و $x[n]$ متناوب با N_0

① ضرب شدن در عدد ثابت (نه t یا n) روی دوره تناوب اثر ندارد.

$e^{j\frac{\pi}{2}}\, x[n] \longrightarrow N_0$ $\qquad$ $2j\, x[n] \longrightarrow N_0$

$e^{2}\, x(t) \longrightarrow T_0$ $\qquad$ $e^{j\frac{\pi}{2}n}\, x[n]$ ✗

② شیفت روی دوره تناوب اثر ندارد.

$x[n-a]$ $\quad x[n+a] \longrightarrow N_0$

$x(t-b)$ $\quad x(t+b) \longrightarrow T_0$

③ مقیاس دهی

$x(t), T_0$ پیوسته $\rightarrow x(\alpha t) \longrightarrow \frac{T_0}{|\alpha|}$

$x(t), T_0 \quad x(2t) \longrightarrow \frac{T_0}{2} \quad x(-t) \longrightarrow \frac{T_0}{|-1|} = T_0$

$x(\frac{1}{2}t) \longrightarrow \frac{T_0}{\frac{1}{2}} = 2T_0$

$x_{(m)}[n] \quad x[\frac{n}{m}] \longrightarrow |m| N_0$

$x_{(2)}[n] \longrightarrow |2| N_0 = 2N_0$

$x[mn] \longrightarrow$ را تا جای ممکن ساده می‌کنیم، آنگاه $\frac{N_0}{|m|}$

دوره تناوب $x[mn]$ برابر با مورد آخر ساده شده $\frac{N_0}{|m|}$ است.

$x[n]$, $N_0 = 8$

$x[3n] \longrightarrow \frac{8}{|3|} = \frac{8}{3} \qquad N_0 = 8$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$x[n]$ ، $N_0 = 15$

$x[10n] \longrightarrow$ ؟ $\quad \frac{15}{|10|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \rightarrow N_0 = 3$

مثال: $x[n]$ متناوب با دوره تناوب اصلی $N_0 = 3$ است.

دوره تناوب اصلی $y[n] = x_{(3)}[n] + x[2n]$ را بیابید.

N_1 $\quad$ N_2

$N_{0y} =$ ک.م.م $\{N_1, N_2\} =$ ک.م.م $\{3, 4\} = 9$

$x[n]$، $N_0 = 3$

$x_{(3)}[n] \longrightarrow N_1 = \overset{m}{3} \times \overset{N_0}{3} = 9$

$x[2n] \longrightarrow \frac{3}{|2|} = \frac{3}{2} \rightarrow N_2 = 3$

غلط

$x(t)$ ، $T_0 = 5$

$y(t) = x(2t) + x(\frac{5}{2}t) \rightarrow T_{0y} = ?$

نکته: $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t - mT_0) \leftarrow z(t)$ سیگنال دلخواه است.

$x(t)$ متناوب با T_0 یعنی مزیب کمترین $\sum$ است.

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{|t-(2)m|} \rightarrow \boxed{T_{0x} = 2}$

$z(t) = 2^{|t|}$ $\quad$ $z(t - m \times 2) = 2^{|t - m \times 2|}$

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t - \frac{1}{2}k)}$ $\quad$ $\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t - m \times T_0)$

$z(t) = e^{t}$ $\quad$ $z(t - m \times T_0) = e^{(t - m \times T_0)}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(t - \frac{1}{2}k)}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(t - mxT_0)}$$

$$T_0 y = \frac{1}{2}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(t - \frac{1}{2}k)}$$

نکته:

اگر $f(m)$ یک سیگنال گسسته با دوره تناوب M_0 باشد

آنگاه سیگنال $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\, z(t - mxT_0)$ با دوره تناوب $M_0 \times T_0$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{j\pi n}}_{f(n)} \underbrace{\cos\left(t - 2n\right)}_{\text{پریودیک}}$$

$t -$ عدد داخل کسینوس $\times T_0$

$$e^{j\pi n} \rightarrow M_0 = \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2 \qquad T_0 = 2$$

T_0 ضریب عدد داخل کسینوس پریودیک

دوره تناوب $x = M_0 \times T_0 = 2 \times 2 = 4$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{ثابت}}\, 2^{\underbrace{-|t - 3k|}_{\text{پریودیک}}}$$

T_0

$$T_x = M_0 \times T_0 = 4 \times 3 = 12$$

M_0 :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow M_0 = \left|\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}}\right| = \frac{4}{3}$$

$M_0 = 4$

$T_0 = 3$

$t -$ عدد داخل کسینوس $\times$ عدد

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{j(\frac{1}{2})t}$$

$T_0 = \frac{1}{2}$

$(-1)^k = \cos(\pi k) \rightarrow \left|\frac{2\pi}{\pi}\right| = 2 = M_0$

$T_y = 2 \times \frac{1}{2} = 1$