Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

جلسه ششم سیگنال

مثال: دوره تناوب سیگنالهای $x(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{(t-3n)^2} \qquad y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

$$f[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^2\right) \qquad h[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^6\right)$$

$$c[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8} n^{12}\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{(t-3n)^2}$$

$$z(t) = 2^{t^2}$$

$$z(t-3n) = 2^{(t-3n)^2}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - T_0 n) \rightarrow T_0 = 3$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

از حاکم معادلات داریم ← می‌توانیم از نسبت استفاده کنیم.

اگر $T_0 > 0$ وجود داشته باشد به $y(t)$ متناوب است.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t-2n|} = 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots + 2^{|t-2\times\infty|}$$

$$y(t+T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|t+T_0-2n|}$$

$$= 2^{|t+T_0|} + 2^{|t+T_0-2|} + \dots$$

$$= 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \dots$$

$$y(t) = 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + 2^{|t-4|} + 2^{|t-6|} + \cdots$$

$$y(t+T_0) = 2^{|t+T_0|} + 2^{|t+T_0-2|} + 2^{|t+T_0-4|} + 2^{|t+T_0-6|} + \cdots$$

$T_0 > 0$

$T_0 = 2$

$$y(t+T_0) = 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + 2^{|t-4|} + \cdots$$

به ازای هیچ $T_0 > 0$ ای $y(t) \neq y(t+T_0)$ بنابراین $y(t)$ متناوب نیست

حل $x(t)$ را به صورت سری زیر

طوری که $T_0 = 2$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

$$x(t+2) = x(t)$$

$$x(t+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t+2-2n|}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

$$x(t) = 2^{|t-2(-\infty)|} + \cdots + 2^{|t+4|} + 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \cdots + 2^{|t-2\infty|}$$

($n=-2$, $n=-1$)

$$x(t+2) = 2^{|t+2-2(-\infty)|} + \cdots + 2^{|t+4|} + 2^{|t+2|} + 2^{|t|} + 2^{|t-2|} + \cdots$$

$2+\infty = \infty$; ($n=-1$, $n=0$)

$$2^{|t+(2-2\infty)|} \quad (-\infty)$$

$$x(t) = 2^{|t+\infty|} \quad \checkmark$$

$$x(t+2) = 2^{|t+\infty|} \quad \checkmark$$

روش دوم

$$x(t+2) = x(t)$$

$$x(t+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t+2-2n|}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$x(t-2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2(n-1)|}$$

$n-1=k$

$n=-\infty \rightarrow k=-\infty$

$n=\infty \rightarrow k=\infty$

$$x(t+2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2k|}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|t-2n|}$$

متناوب برقرار است.

$$f[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n^2\right)$$

مثال:

در سیگنال گسسته، اگر دوره‌ی تناوب برقرار باشد ←

$x[n]$ متناوب با N_0 $\rightarrow$ $x[n^2]$ $\rightarrow$ $\frac{N_0}{2}$ اگر N_0 مزدوج باشد

N_0 نباشد

$x[n^{\text{فرد}}] \rightarrow N_0$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right]$ $\quad$ $\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \rightarrow$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16 \rightarrow N_0 = 16$

$n \rightarrow n^2$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right] \rightarrow \frac{16}{2} = 8$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \longrightarrow N_0 = 16$

$n \to n^2$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^2\right] \longrightarrow N_0 = 8$

$\frac{16}{2}$

$h[n] = \cos\left[\frac{\pi}{8}n^6\right] \quad \cos\left[\frac{\pi}{8}(n^2)^3\right]$

$n \to n^2$

$n \to n^{\text{فرد}}$

توان n را به صورت حاصلضرب 2 و اعداد فردی بنویسم.

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \longrightarrow N_0 = 16$

$n \to n^2$

$\cos\left[\frac{2\pi}{8}n^2\right] \longrightarrow N_0 = 8$

$n \to n^3$

$\cos\left[\frac{2\pi}{8}(n^3)^2\right] \longrightarrow N_0 = 8$

$C[n] = \cos\left[\frac{2\pi}{8}n^4\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{8}\left((n)^3\right)^2\right]$

$\cos\left[\frac{2\pi}{8}(n^3)^4\right]$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \longrightarrow 16$

$n \to n^3$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}n^3\right] \longrightarrow (16)$

$n \to n^2$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$\cos\left[\frac{\pi}{8}(n^2)^3\right] \longrightarrow 8$

$n \to n/2$

$\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{n^2}{2}\right)^3\right] \longrightarrow 4$ ✓

انرژی و توان:

$x(t)$

$E_{x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$ ← انرژی

انرژی $x(t)$ در بازه t_1 تا t_2

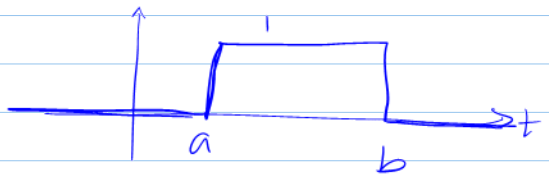
$E = |x(t)|^2$ انرژی لحظه‌ای

$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$ انرژی کل

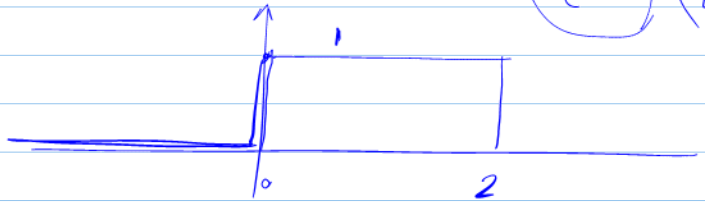
$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$ گسسته

$x(t) = e^{j\frac{\pi}{3}t}\,[u(t) - u(t-2)]$ ← مثال

نکته: $u(t-a) - u(t-b)$ ← مثال به فرم زیر است:



$e^{j\frac{\pi}{3}t}\,(u(t-0) - u(t-2)) = \begin{cases} 0 \times e^{j\frac{\pi}{3}t} & t < 0 \\ 1 \times e^{j\frac{\pi}{3}t} & 0 \le t \le 2 \\ 0 \times e^{j\frac{\pi}{3}t} & t > 2 \end{cases}$



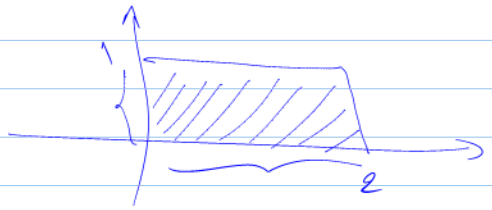
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{j\frac{\pi}{3}t} & 0\le t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases} \qquad |x(t)| = \begin{cases} |0| & t<0 \\ |e^{j\frac{\pi}{3}t}| & 0\le t\le 2 \\ |0| & t>2 \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \qquad |x(t)| = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\le t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

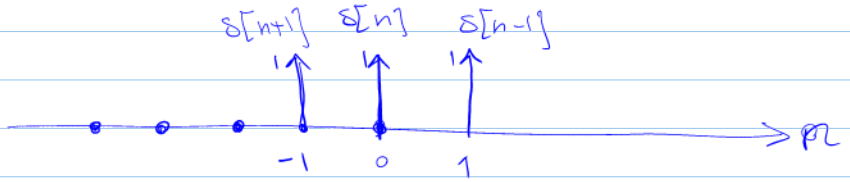
$$= \int_{-\infty}^{0} 0^2\,dt + \int_{0}^{2} 1^2\,dt + \int_{2}^{\infty} 0^2\,dt$$

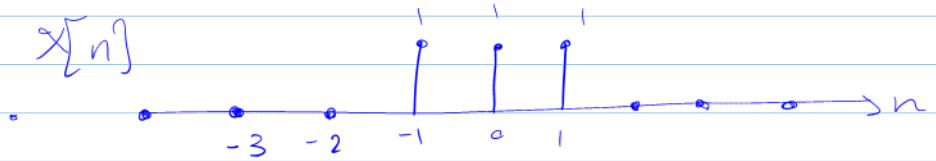
$$= \int_{0}^{2} 1^2\,dt = 1\times 2 = 2$$



مثال:

$$x[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$$





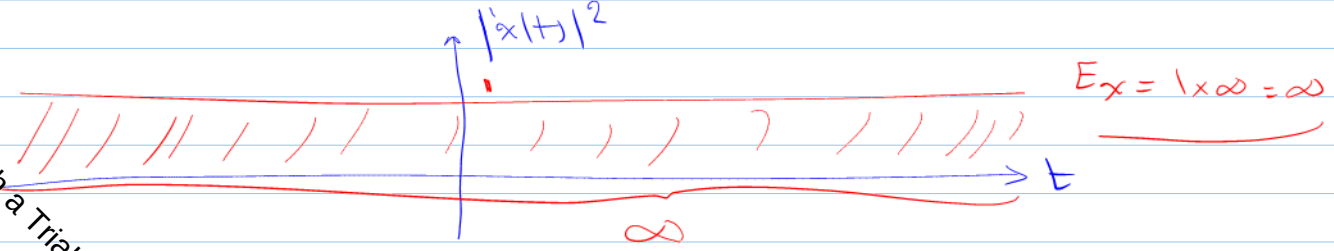
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \underbrace{|0|^2 + \cdots + |0|^2}_{0} + |1|^2 + |1|^2 + |1|^2 + \underbrace{|0|^2 + \cdots}_{0}$$

$$E_x = 1 + 1 + 1 = 3$$

نکته: انرژی سیگنال برابر مساحت زیر منحنی $|x|^2$ است.

$$x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t} \qquad |x(t)|^2 = 1^2$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

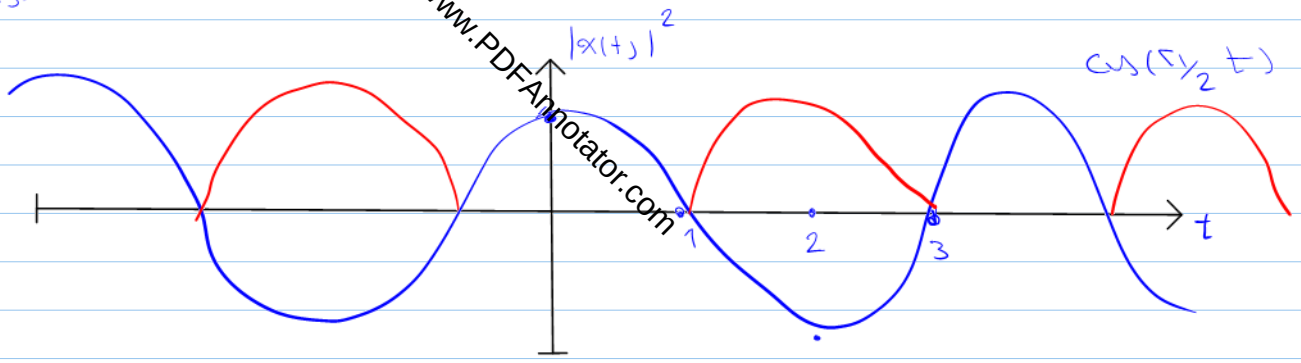


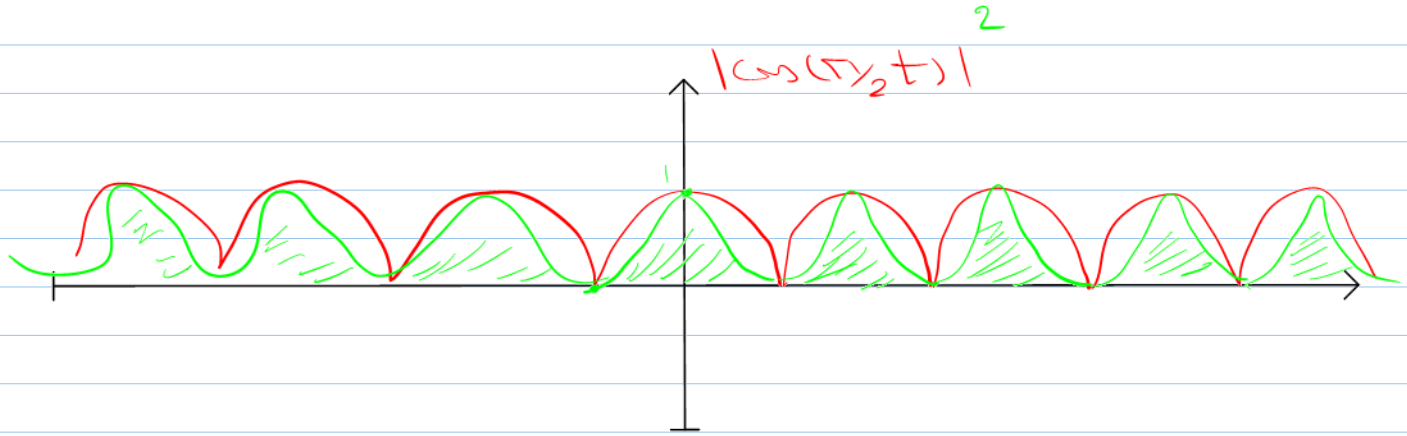
$E_x = 1 \times \infty = \infty$

$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

$|x(t)|^2 = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right|^2$

توان لحظه‌ای



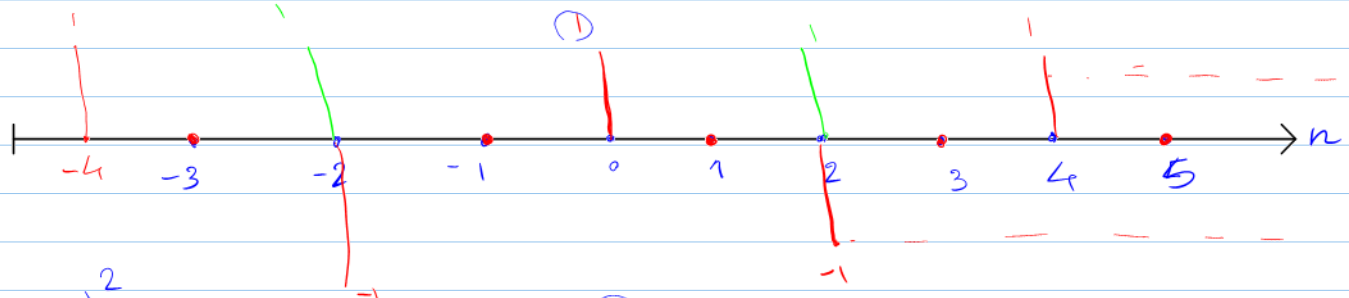


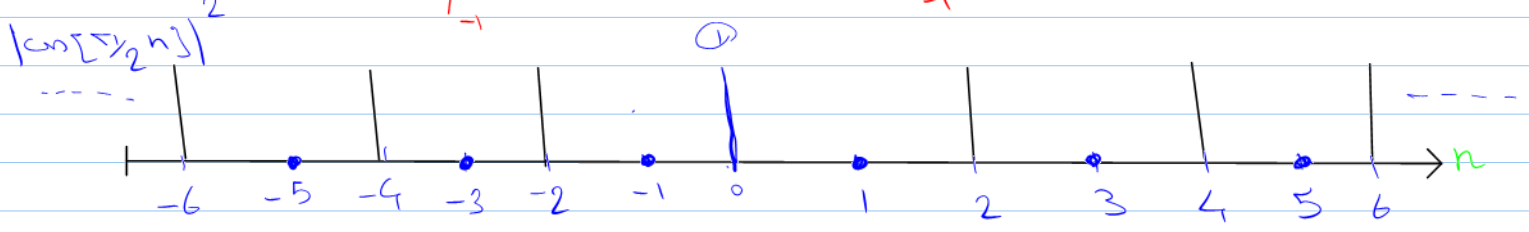
$E_x = a \times \infty = \infty$

$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2} n\right]$

$|x[n]|^2 = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)\right|^2$

$\left|\cos\left[\frac{\pi}{2} n\right]\right|$





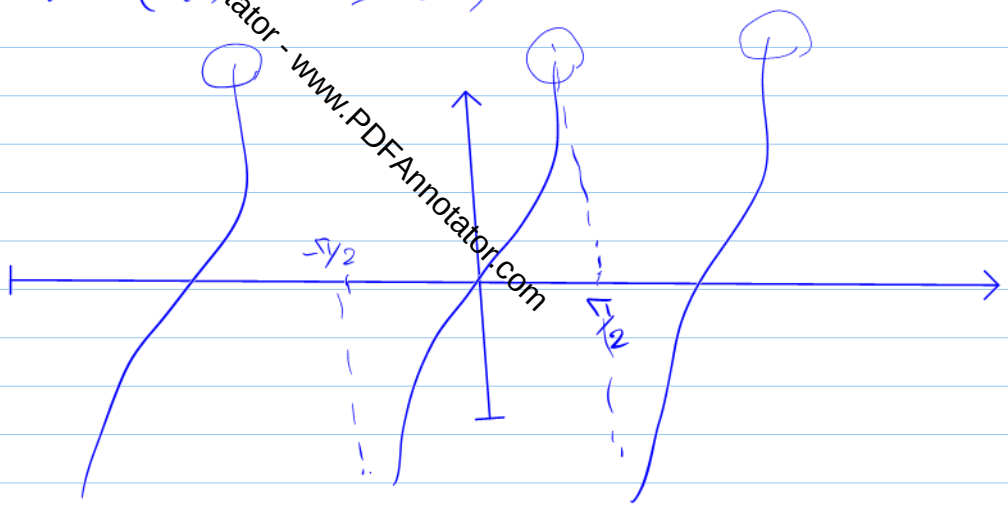
$E_x = 1 + 1 + 1 + \dots = 1 \times \infty = \infty$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

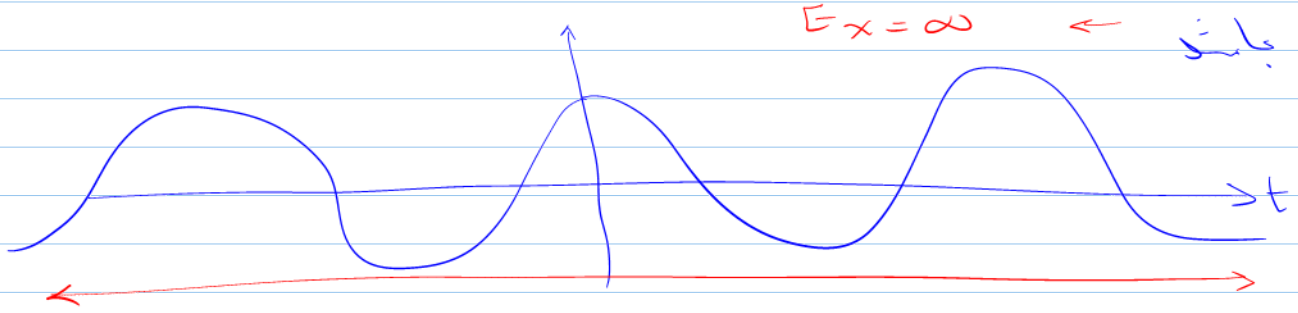
نکته:

① اگر دامنه سیگنال حتی در یک نقطه به سمت بی‌نهایت برود انرژی سیگنال ∞ است.

$x(t) = \tan(t) \longrightarrow E_x = \infty$



② اگر طول سیگنال محدود باشد یعنی از $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار نیز

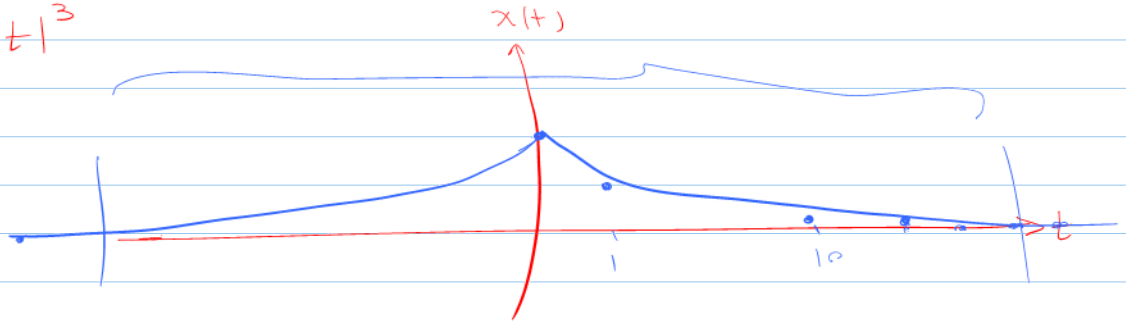


$E_x = \infty$ ← دامنه باشد

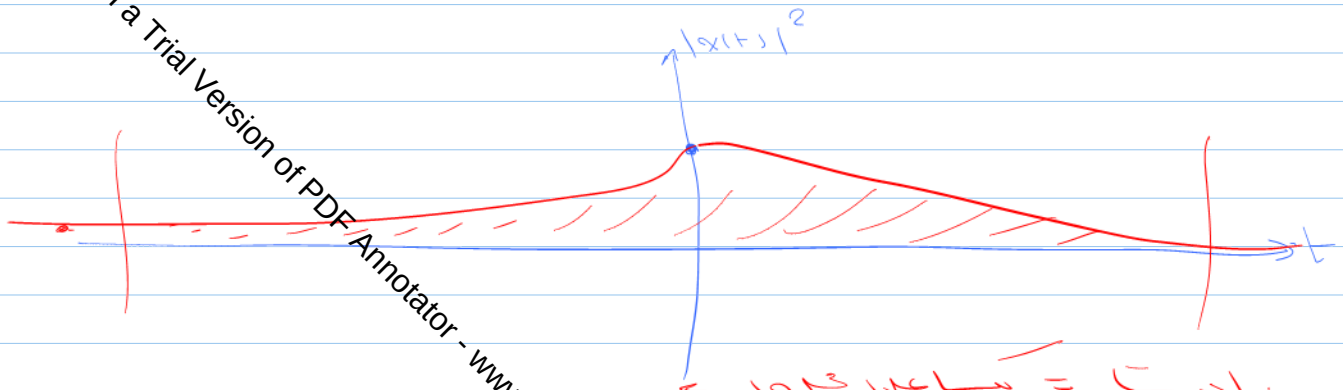
$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2} n\right]$

③ اگر سیگنال متناوب باشد ← $E_x = \infty$

$x(t) = \frac{1}{1 + |t|^3}$



$$|x(t)|^2 = \left|\frac{1}{1+|t|^3}\right| = \left(\frac{1}{1+|t|^3}\right)^2$$



← بیشترین مقدار = بیشترین مقدار خروجی

(۴) اگر دامنه سیگنال خروجی در طول زمان به سمت صفر یا مقدار انرژی محدود است.

$$x(t) = (1 - e^{-5t})\,u(t)$$

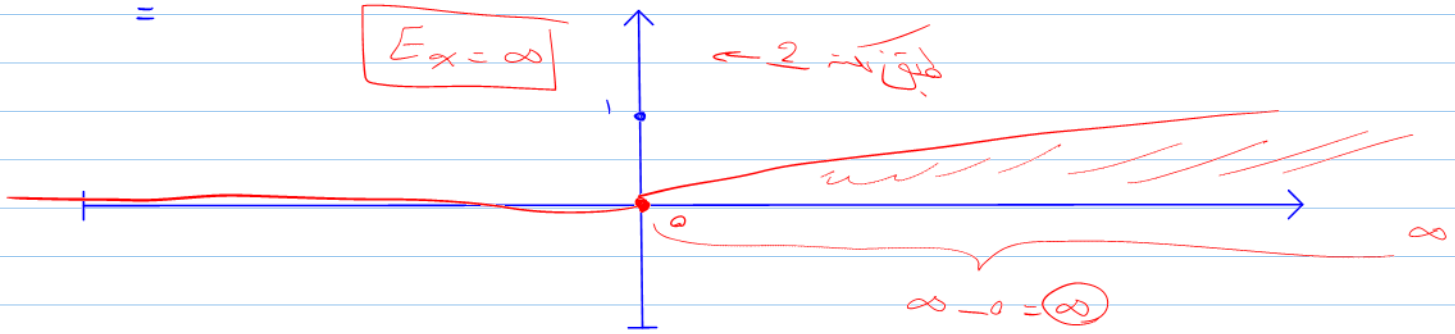
$t = 0 \rightarrow (1 - e^{0})\,u(0) = 0$

$t = \infty \quad (1 - e^{-\infty})\,u(\infty) = 1$

$t = -\infty$

=

$E_x = \infty$ ← 2 ← طبق تبصره



$\infty - 0 = \infty$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com