جلسه هفتم سیگنال

توان سیگنال:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \frac{\text{انرژی سیگنال}}{\text{بازه زمانی}}$$

$$P_{(t_1,-t_2)} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt}{t_2 - t_1}$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt}{2T} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}{2\infty}$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2}{2N+1}$$

مثال:

$$x[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N} |x[n]|^2}{2N+1} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}{2\times\infty+1}$$

$$P_x = \frac{3}{2\times\infty+1} = 0$$

$$P_x = \frac{E_x}{2\times\infty} \qquad \frac{a}{2\times\infty} = 0$$

نکته: اگر انرژی سیگنال عدی محدود باشد توان ۰ است.

اگر توان ~ ~ ~ انرژی ∞ است.

$$P_x = 2 = \frac{?}{2\times\infty} = \frac{4\times\infty}{2\times\infty}$$

Produced with a Trial Version of PDFAnnotator - www.PDFAnnotator.com

سیگنال انرژی ← اگر انرژی سیگنال عددی محدود و غیر صفر باشد

" توان ← " توان " " " " " "

- نه توان و نه انرژی ← اگر توان سیگنال ∞ باشد

اگر سیگنال انرژی باشد ← توان ∞

" " توان " ← انرژی ∞

تشخیص سیگنال توان و انرژی دو روش عمده دارد:

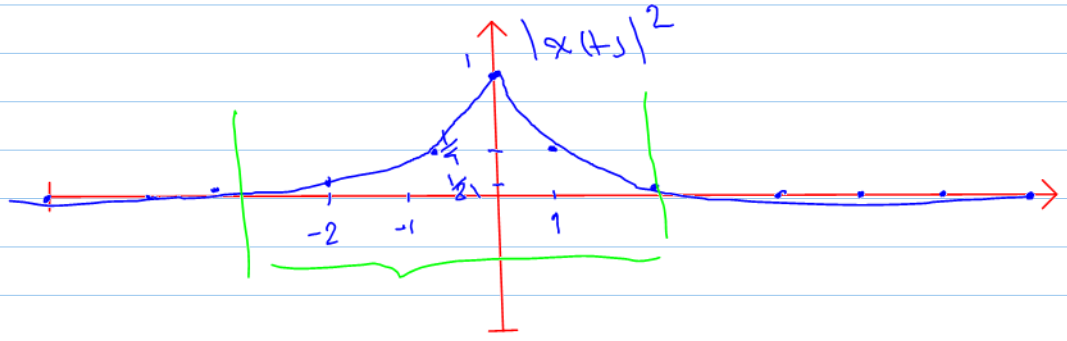
① نمودار تقریبی $|x(t)|^2$ یا $|x[n]|^2$ را رسم می‌کنیم.

② با توجه به شکل نمودار داریم:

آزاد ۹۸ . $x(t) = \frac{1}{1+|t|^3}$ ۱) توان ۲) انرژی ✓

۳) نه توان و نه انرژی ۴) توان و انرژی ←

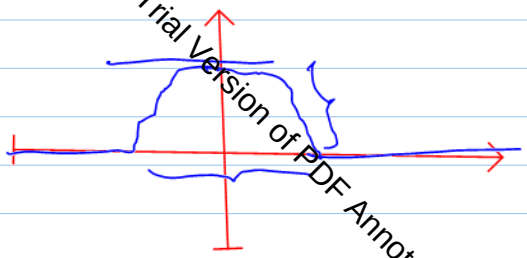
$$|x(t)|^2 = \left|\frac{1}{1+|t|^3}\right|^2 = \left(\frac{1}{1+|t|^3}\right)^2$$

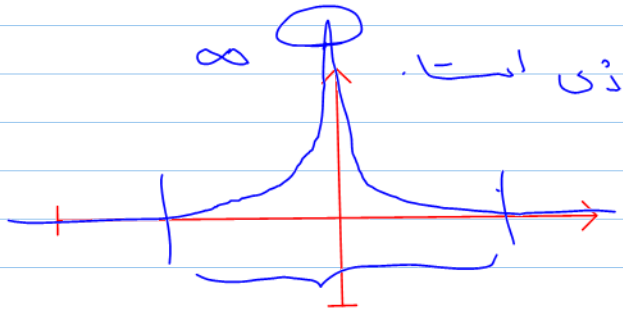


Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

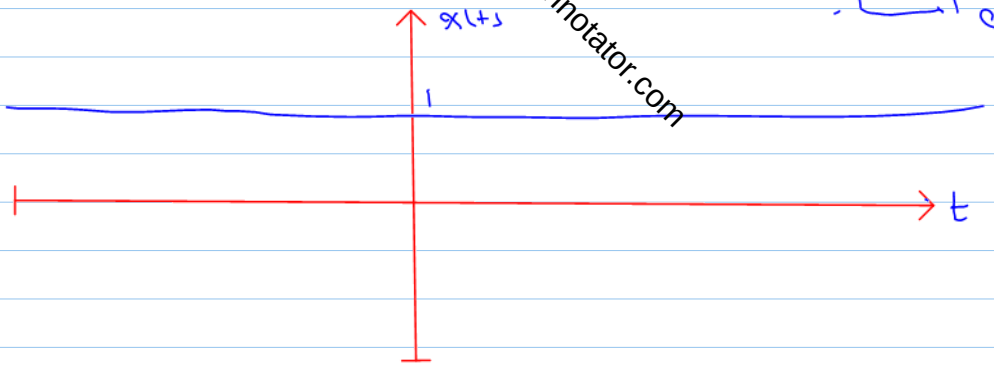
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

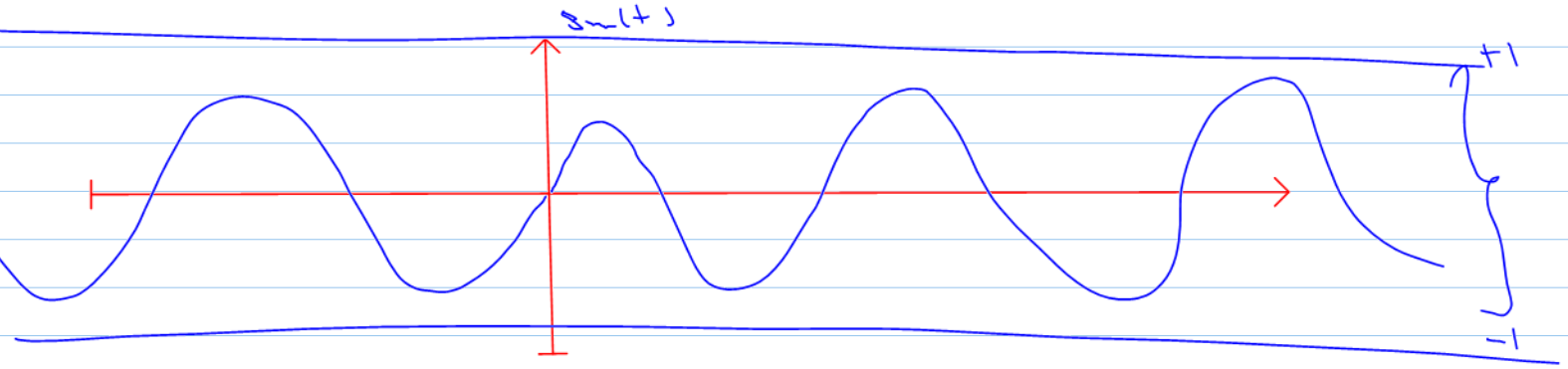
نکته 1. اگر توان $|x(t)|^2$ دارای طول محدود باشد و داشته باشد سیگنال انرژی است.

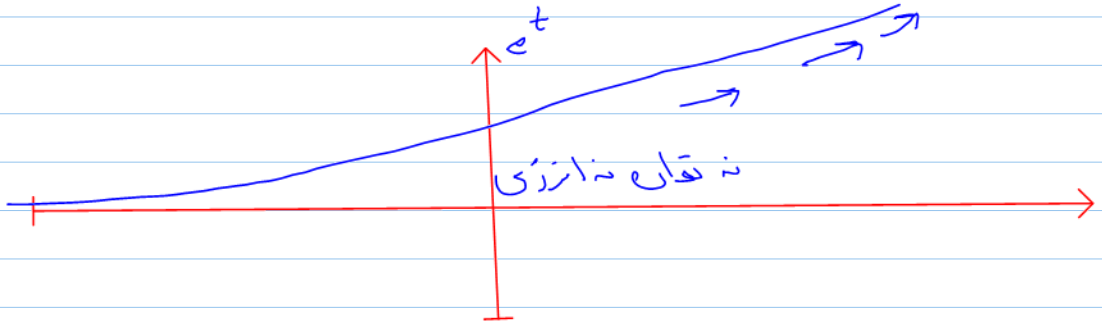




نکته 2. اگر طول سیگنال محدود باشد و دامنه در حال افزایش نباشد و هیچ سیگنال توان است.





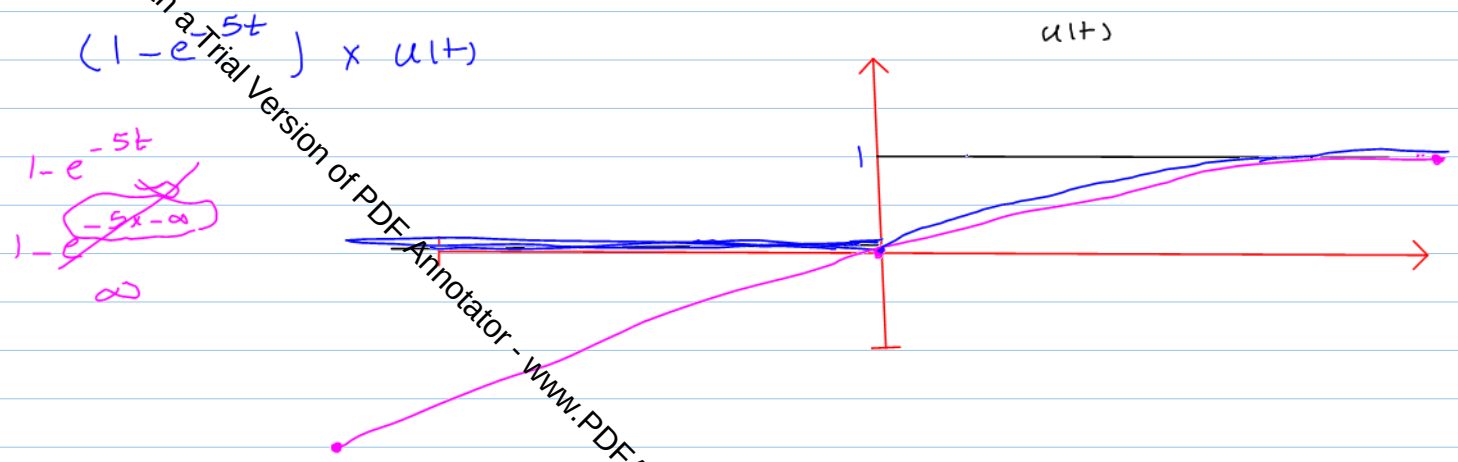


مثال مکتری ص 9. سیگنال $x(t) = (1 - e^{-5t}) u(t)$

1) انرژی ✓ 2) توان 3) انرژی نوسانی دارد 4) ~~توان و انرژی~~

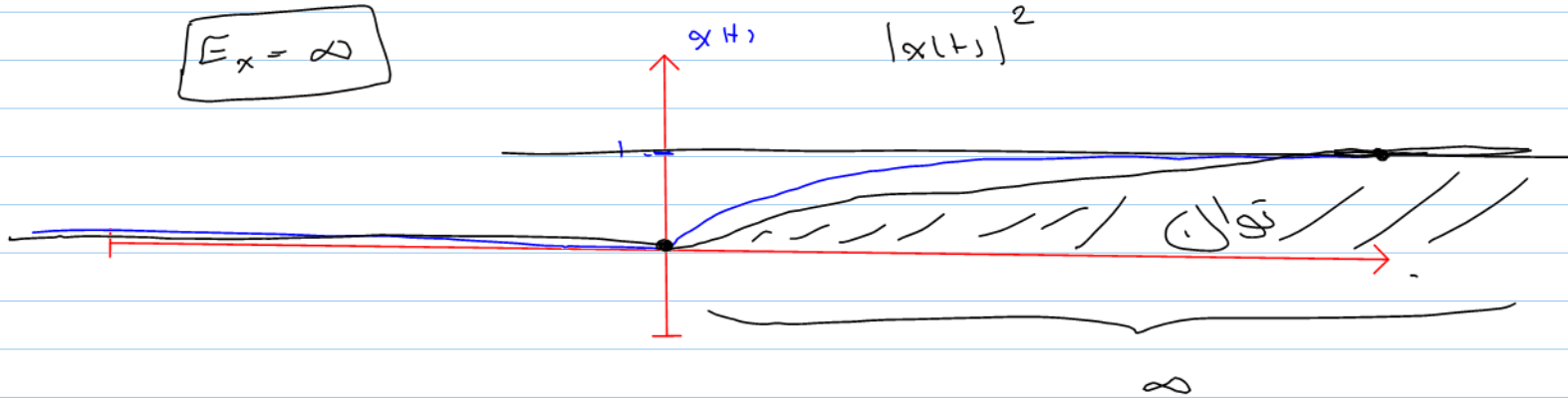
$|x(t)| = |(1 - e^{-5t}) u(t)|$

$(1 - e^{-5t}) \times u(t)$



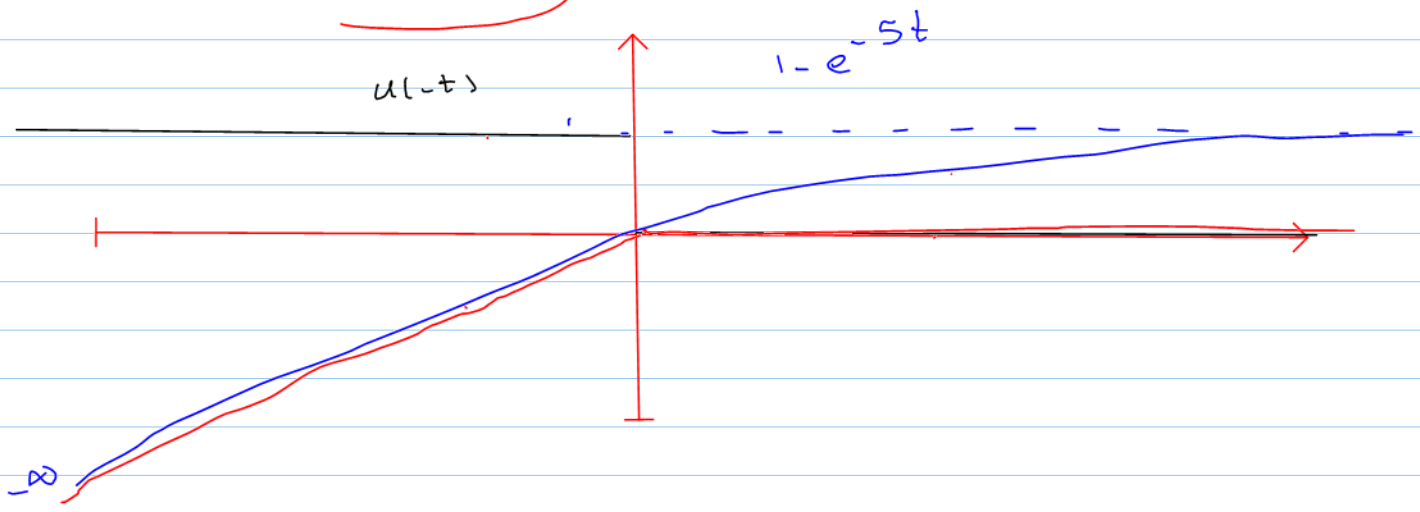
$1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$ $\quad t = \infty$ $\quad 1 - e^{-5 \times \infty} = 1$

$E_x = \infty$



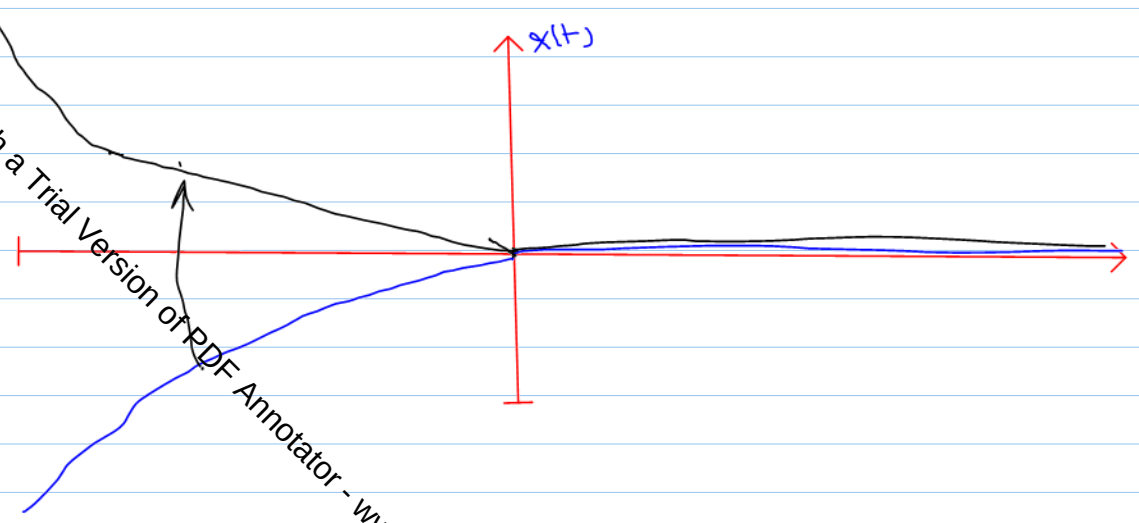
$|x(t)|^2 = (x(t))^2$ مربع تابع $x(t)$

$x(t) = (1 - e^{-5t}) u(-t)$

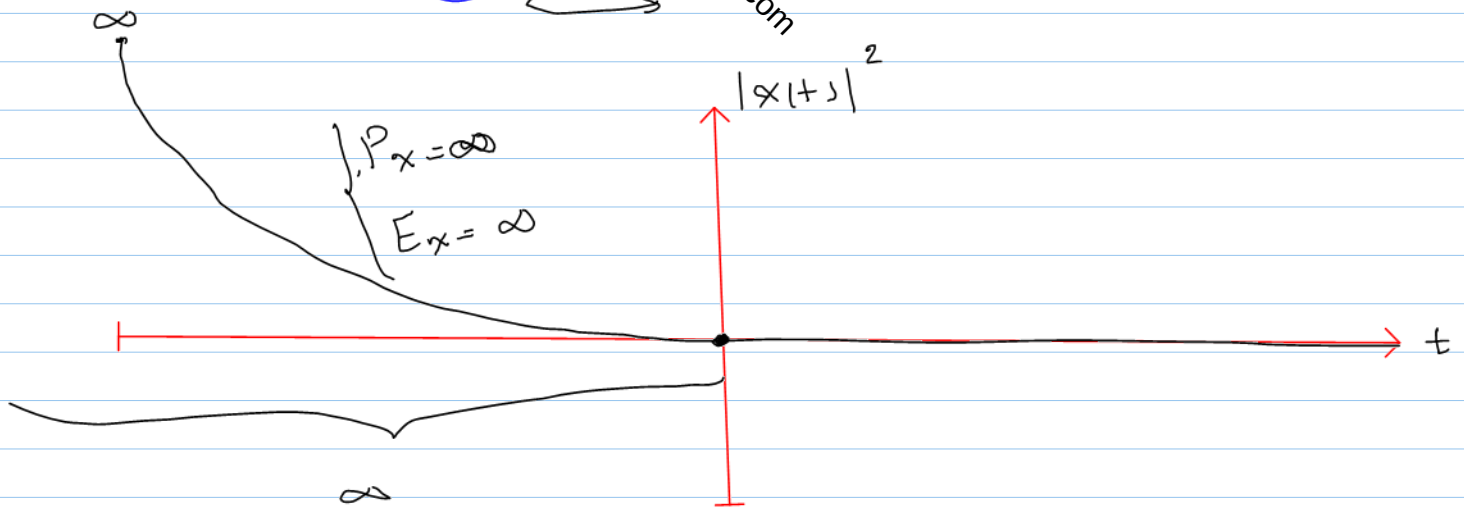


Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com



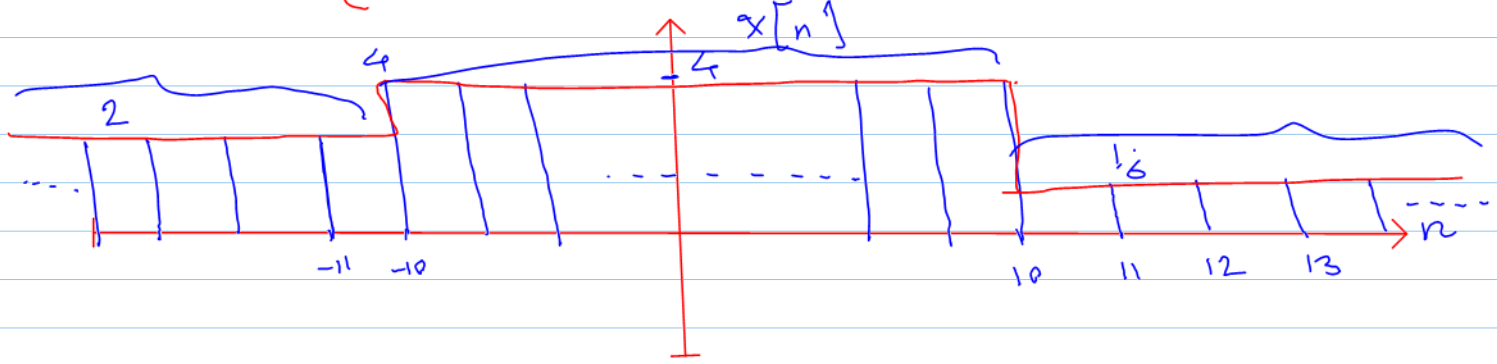
$|x(t)| = |x(t)|$ (انتقال) — تکرار مطلق



$$x(n) = \begin{cases} 2 & n < -10 \\ 4 & -10 \le n \le 10 \\ \frac{1}{6} & n > 10 \end{cases}$$

سوال سیگنال؟

$\frac{1}{2}$ ✗ ✗ 2



$0 < P_x < \infty$ ← سیگنال توان است.

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_x = \frac{E_x}{2\times\infty+1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad \sum_{n=-\infty}^{-11} |2|^2 + \sum_{-10}^{10} |4|^2 + \sum_{11}^{\infty} \left|\frac{1}{6}\right|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-11} 4 + \sum_{-10}^{10} 16 + \sum_{11}^{\infty} \frac{1}{36}$$

$$= 4\left(-11-(-\infty)+1\right) + 16\left(10-(-10)+1\right) + \frac{1}{36}\left(\infty-11+1\right)$$

$$= -44 + 4\times\infty + 4 + 160 + 160 + 16 + \frac{1}{36}\times\infty - \frac{11}{36} + \frac{1}{36}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x|^2 = 4\times\infty + \frac{1}{36}\times\infty = \left(4+\frac{1}{36}\right)\times\infty$$

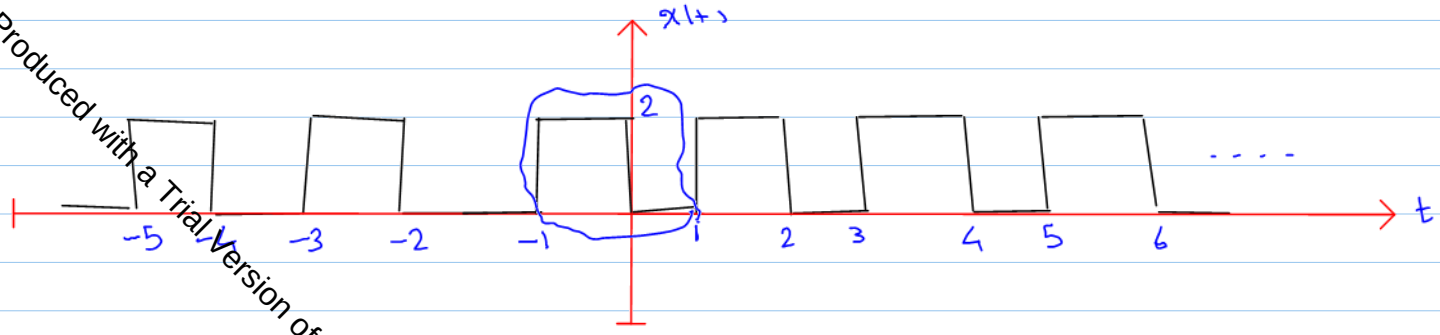
$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \times \sum_{-\infty}^{\infty} |x|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{\left(4+\frac{1}{36}\right)\times\infty}{2N+1}$$

$$= \frac{\left(4+\frac{1}{36}\right)\times\infty}{2\times\infty+1} = 2+\frac{1}{72}$$

نکته: اگر سیگنالی متناوب باشد $E_x=\infty$ و توان آن در کل به صورت زیر است:

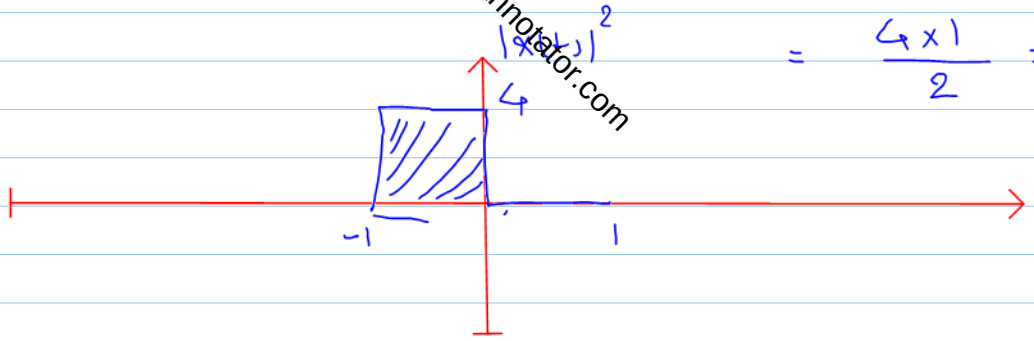
$$P_{\text{کل}} = P_{\text{یک دوره تناوب}}$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com



E_x ، P_x = ؟ $\quad E_x = \infty$ پس

$$P_x = P_{\text{توان متوسط}} = \frac{\text{انرژی در یک دوره تناوب}}{\text{دوره تناوب}} = \frac{\int_{-1}^{1} |x(t)|^2 \, dt}{2}$$



$$= \frac{4 \times 1}{2} = 2$$

$A\cos(at+b) \longrightarrow P = \frac{A^2}{2}$

$A\sin(at+b) \longrightarrow P = \frac{A^2}{2}$

$A e^{j(at+b)} \longrightarrow P = A^2$

$A \longrightarrow P = A^2$

$\tan(at+b)$، $\cot(at+b)$ $\longrightarrow P = \infty$

$A\cos(an) \longrightarrow P_x = \begin{cases} \frac{A^2}{2} & a \text{ ضرب } \pi \text{ نباشد} \\ A^2 & a \text{ ضرب زوج از } \pi \text{ باشد} \end{cases}$

$A\sin(an) \longrightarrow P_x = \begin{cases} \frac{A^2}{2} & a \text{ ضرب زوج از } \pi \text{ نباشد} \\ 0 & a \text{ ضرب فرد از } \pi \text{ باشد} \end{cases}$

Produced with a Trial Version of PDFAnnotator - www.PDFAnnotator.com

$A e^{jan} \longrightarrow P_x = A^2$

نکته ← اگر $x(t)$ سیگنالی با طول ∞ و دامنه محدود باشد توان آن صفر است.

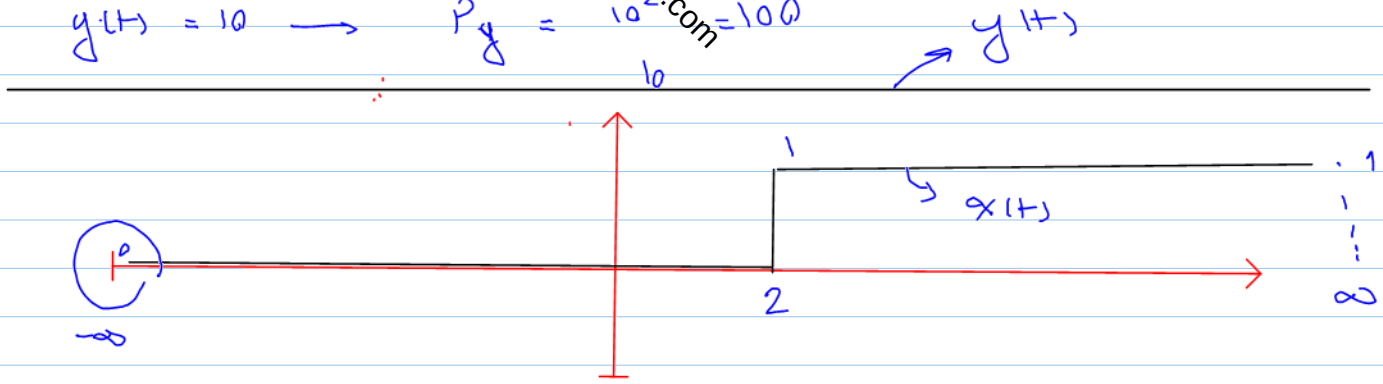
$x(\infty) = A \qquad x(-\infty) = B$

$$P_x = \frac{A^2 + B^2}{2}$$

$x(t) = u(t-2) \qquad y(t) = 10$

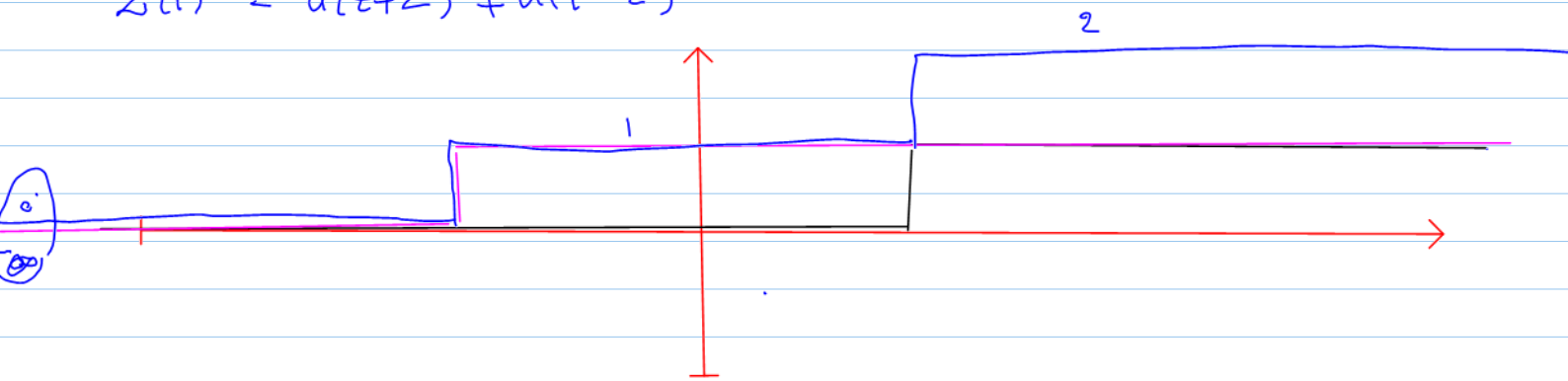
$Z(t) = u(t-2) + u(t+2)$

$y(t) = 10 \longrightarrow P_y = 10^2 = 100$



$$P_x = \frac{0^2 + 1^2}{2} = 1/2$$

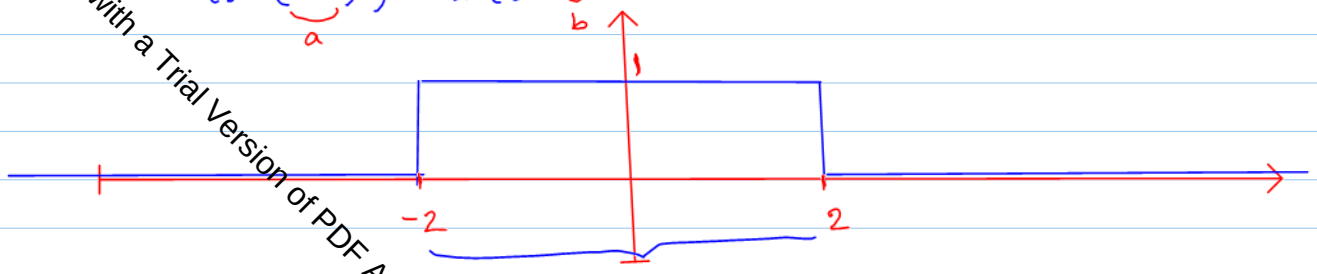
$Z(t) = u(t+2) + u(t-2)$



$$P_z = \frac{0^2 + (2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$p_{(t)} = u(t+2) - u(t-2)$ $\quad u(t-a) - u(t-b)$

$u(t-(-2)) - u(t-2)$



$P_f = \frac{0^2 + 0^2}{2} = 0$ $\quad P_{=0}$ ← انرژی

$f_{(t)} = e^{t}\,u(-t) + 2e^{-t}u(t) + u(t-1)$ $\quad$ ؟ $P_{f(t)}$ را بیابید

1) ∞ $\quad$ 2) $\frac{1}{2}$ $\quad$ 3) $\frac{3}{2}$ $\quad$ 4) 0

$t=0 \rightarrow f_{(0)} = e^{0}u(-0) + 2e^{-0}u(0) + u(0-1)$

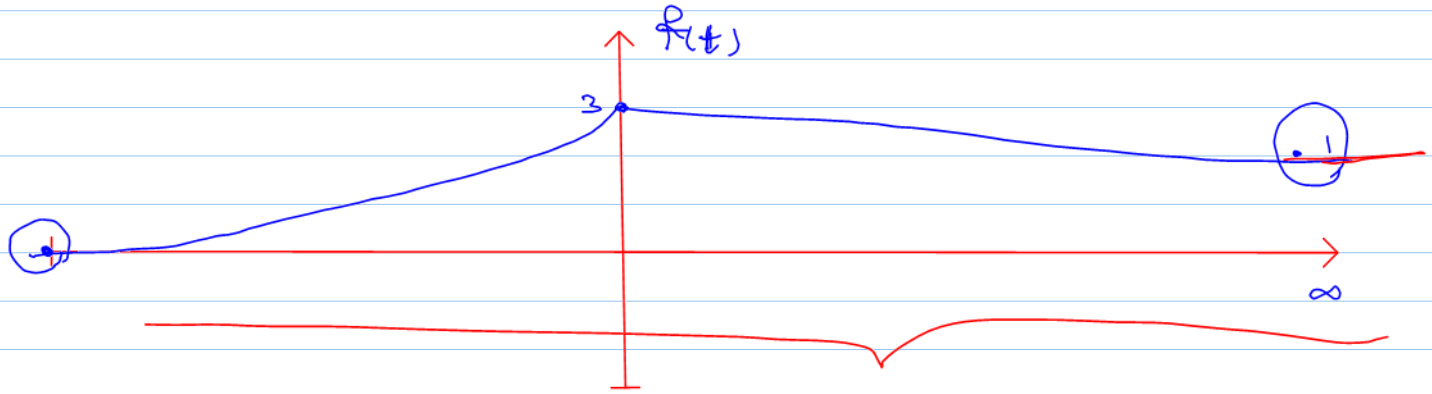
$= 3$

$t=\infty \rightarrow f_{(\infty)} = e^{\infty}u(-\infty) + 2e^{-\infty}u(\infty) + u(\infty-1)$

$= 0 + 0 + 1 = 1$

$t=-\infty \rightarrow f_{(-\infty)} = e^{-\infty}u(\infty) + 2e^{\infty}u(-\infty) + u(-\infty-1)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$



$P_f = \frac{0^2 + 1^2}{2} = \frac{1}{2}$

مثال دیگر

$E_P = \infty$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

بق ۵۸ . قول و انرژی $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب کدام؟

$\frac{64}{9}$ ، ۰ ، ۴ ∞ ، $\frac{8}{3}$ ، ۳ ∞ ، ۰ ، ۲ ∞ ، $\frac{41}{18}$ ، ۱

E P E P E P

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n - N_0 m]$ N_0

$z[n] = 2^{-|n|}$ $z[n-2m] = 2^{-|n-2m|}$

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$

$x[n]$ متناوب با $N_0 = 2$ $\Rightarrow E = \infty$

$P = \frac{E}{2 \times \infty} = \frac{\infty}{2 \times \infty} = \frac{1}{2}$

نکته . $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n - N_0 m]$ باشد اگر $z[n]$ سیگنال

$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t - T_0 m)$ انرژی باشد x سیگنال

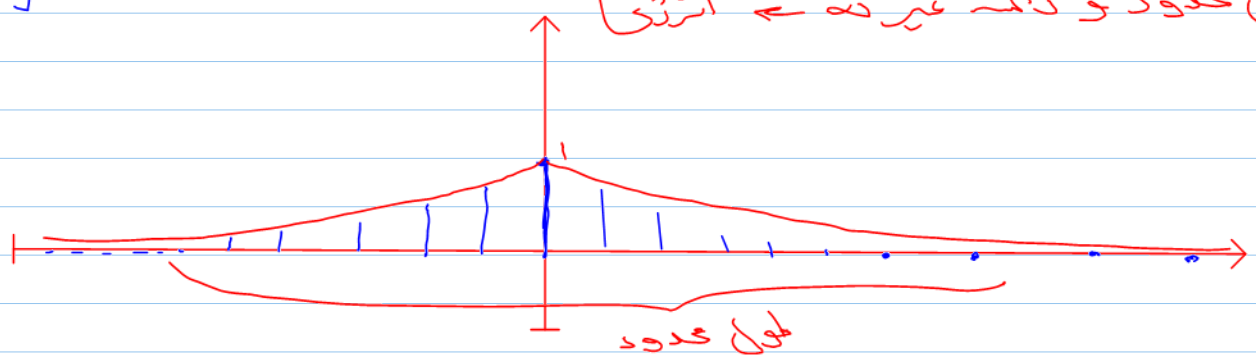
توان است (به احتمال زیاد)

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ $z[n] = 2^{-|n|}$

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} z[n-2m]$

$z[n] = 2^{-|n|}$

طول محدود و دامنه غیر صفر ← انرژی



Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$x[n]$, $N_0 = 2$

P_x = متوسط القدرة = $\frac{\sum_{n=0}^{1} |x[n]|^2}{2}$ <2>

$P_x = \frac{\sum_{n=0}^{1} |x[n]|^2}{2} = \frac{|x[0]|^2 + |x[1]|^2}{2}$

$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-2m|}$ $\quad |-1| = -(-1)$

$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|0-2m|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|2m|}$

$= \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-(-2m)} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m}$

$= \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m}$

$2^{2m} = (2^2)^m = 4^m$ $\quad$ $(2^{-2})^m$, $\frac{1}{4}$

$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{-1} 4^m + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m$, q

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{q^a}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & |q|>1 \end{cases}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \checkmark$$

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} 4^{-m}$$

$m' = -m \rightarrow m = -m'$

$m = -\infty \quad m' = \infty$

$m = -1 \quad m' = 1$

$$\sum_{m'=1}^{\infty} \left(4^{-1}\right)^{m'} = \sum_{m'=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{m'} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$\boxed{x[0] = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}}$$

$$P_x = \frac{|x[0]|^2 + |x[1]|^2}{2}$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|1-2m|}$$

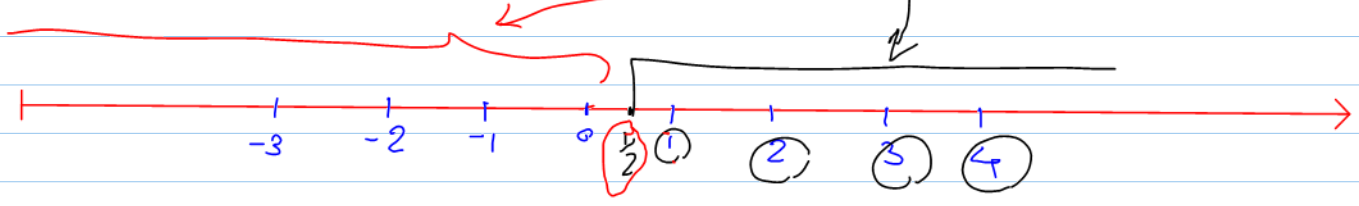
$1-2m \geq 0 \rightarrow \boxed{m \leq \frac{1}{2}}$

$1-2m < 0 \rightarrow m > \frac{1}{2}$

$m = -1, -2, -3, \ldots$

$0, \boxed{1, 2, \ldots}$

$$|1-2m| = \begin{cases} -1+2m & m > \frac{1}{2} \\ 1-2m & m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$|1-2m| = \begin{cases} -1+2m & m \geq 1 \\ 1-2m & m \leq 0 \end{cases}$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-|1-2m|} = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-(1-2m)} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-(-1+2m)}$$

$$2^{a-b} = 2^a 2^b$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-1+2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{1-2m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{-1} \times 2^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{1} \times 2^{-2m}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{0} 4^m + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$\frac{4}{3} \qquad \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$x[1] = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$P_x = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}{2} = \frac{\frac{25}{9} + \frac{16}{9}}{2} = \frac{41}{18} \checkmark$$