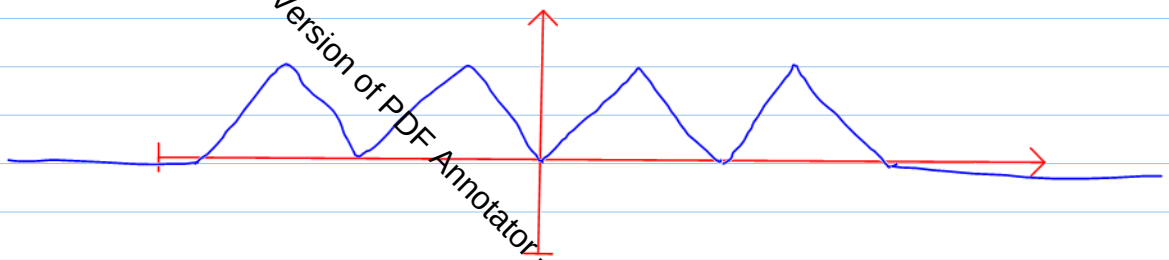
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

# «جلسه هشتم سیگنال»

زوج و فرد ←

سیگنال زوج: سیگنالی که نسبت به محور عمودی متقارن است



$x(t) = x(-t)$ ← $x(t)$ زوج است.

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

$x(t) = \cos(2t)$

$x(-t) = \cos(2(-t)) = \cos(-2t) = \cos(2t)$

$x(t) = x(-t)$ ← زوج

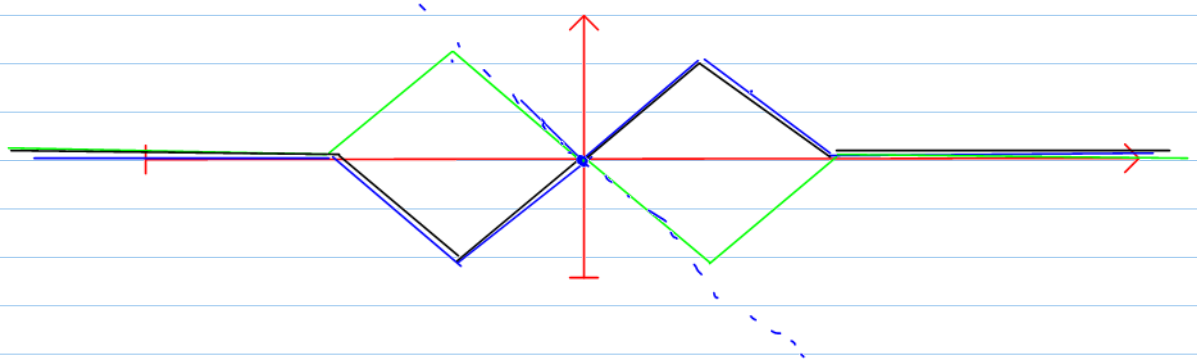
$|-t| = |-1 \times t| = |-1| \times |t| = 1 \times |t| = |t|$

$x(t) = 2^{|t|} + \sin(t^2)$

$x(-t) = 2^{|-t|} + \sin((-t)^2)$

$= 2^{|t|} + \sin(t^2) = x(t)$

سیگنال فرد: نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد



$x(t) = -x(-t)$ ← فرد $\sin\theta = -\sin\theta$

$x(t) = \sin(t)$ $x(-t) = \sin(-t) = -\sin(t)$

$x(t) = -x(-t) = \sin(t)$ ✓

فرد

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

اگر $x(t)$ یا $x[n]$ زوج باشد حتماً در مبدأ صفر است $x(0) = 0$

نکته: هر سیگنال دلخواه را می‌توان به صورت مجموع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد نوشت.

$$y(t) = \underbrace{\frac{y(t) + y(-t)}{2}}_{x(t)} + \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

$x(t) \stackrel{?}{=} x(-t)$ ✓

$$x(t) = \frac{y(t) + y(-t)}{2}$$

$$x(-t) = \frac{y(-t) + y(-(-t))}{2}$$

$$= \frac{y(-t) + y(t)}{2} = x(t)$$

$$z(t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

$$z(-t) = \frac{y(-t) - y(t)}{2} \qquad -z(-t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2}$$

$z(t)$ فرد $\qquad z(t) = -z(-t)$

$$x(t) = \underbrace{\frac{x(t) + x(-t)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}_{\text{فرد}}$$

بخش زوج سیگنال $\quad ev\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$

بخش فرد سیگنال $\quad odd\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

اگر $x(t)$ زوج باشد:

$$\begin{cases} x_e(t) = x(t) \\ x_o(t) = 0 \end{cases}$$

اگر $x(t)$ زوج باشد

$x_e(t) = 0$

$x_o(t) = x(t)$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

یک تابع مثل $g(t) = t\sin(t)$ را به دو بخش زوج و فرد $g_o$ و $g_e$ تقسیم کنید.

حل: داریم:

1) $g_e = t\sin(t)$ ✓ , $g_o = 0$

2) $g_e = -t\sin(t)$ , $g_o = 0$

3) $g_o = t\sin(t)$ , $g_e = 0$

4) $g_o = -t\sin(t)$ , $g_e = 0$

$$g(t) = g_e + g_o$$

$$g_e = \frac{g(t) + g(-t)}{2} = \frac{t\sin(t) + (-t)\overbrace{(\sin(-t))}^{-\sin(t)}}{2} = \frac{t\sin(t) + t\sin(t)}{2}$$

$$= t\sin(t)$$

$$g_o = \frac{t\sin(t) - (-t)(\sin(-t))}{2} = \frac{t\sin(t) - t\sin(t)}{2} = 0$$

$f_1(t) = t$ تابع فرد $\quad f_2(t) = \sin(t)$ فرد

$f_1(-t) = -t \rightarrow f_1(t) = -f_1(-t)$

حاصلضرب دو سیگنال

الف) زوج ← زوج

ب) فرد ← زوج

ج) زوج و فرد ← فرد

$g(t) = \underbrace{t}_{\text{فرد}}\ \underbrace{\sin(t)}_{\text{فرد}} = $ زوج

$g_e = g(t) \qquad g_o = 0$

نکته: هر دو سیگنال زوج و فرد بر هم عمودند. (متعامدهستند)

$x_1(t) \perp x_2(t) \iff \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2(t)\, dt = 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x_{\text{زوج}} \times y_{\text{فرد}}}^{\text{فرد}}\, dt = 0$

* $\sin(\alpha t)$ بر $\cos(\beta t)$ عمود است.

* $e^{j\alpha t}$ بر $\sin$ و $\cos$ عمود است.

نکته: اگر $x(t)$ و $y(t)$ بر هم عمود باشند آنگاه

$E\{x(t)+y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\}$

$P\{x+y\} = P_x + P_y$

$f(t) = \underbrace{1e^{j2t}}_{1^2} + \underbrace{2\cos(3t)}_{2}$

$P_f = 1 + 2 = P_{e^{j2t}} + P_{2\cos(3t)}$

$g(t) = 2\cos(2t) + 2\sin(4t)$ تمرین

$x(t) = \underbrace{x_e(t)}_{} + \underbrace{x_o(t)}_{}$

$P_x = P_{x_e} + P_{x_o}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

قسمت زوج سیگنال $x[n]$ برابر با $x_e[n] = 3\cos(4n) + 3\cos(\pi n)$ و باشد

اگر توان کل سیگنال $x[n]$ برابر 15 باشد، توان قسمت فرد آن چند است؟

3 — 6 — 2.5 — 1.5

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$P_x = 15$ $\quad P_{x_o} = ?$

$P_x = P_{x_e} + P_{x_o}$

15 — $P_{x_e}$ حسابی — ?

$A\cos(an) \rightarrow \begin{cases} \frac{A^2}{2} & a \text{ مضرب } \pi \text{ نباشد} \\ A^2 & a \text{ مضرب } \pi \text{ باشد} \end{cases}$

$$x_e[n] = 3\cos(4n) + 3\cos(\pi n)$$

$$3\cos(4n) \longrightarrow P = \frac{3^2}{2}$$

$$3\cos(\pi n) \longrightarrow P = 3^2 = 9$$

نکته! اگر $\cos(\alpha n)$ و $\cos(\beta n)$ باشد، وجود دارد. $\alpha \neq \beta$

~ ~ ~ ~ ~ $\sin(\beta n)$ و $\sin(\alpha n)$

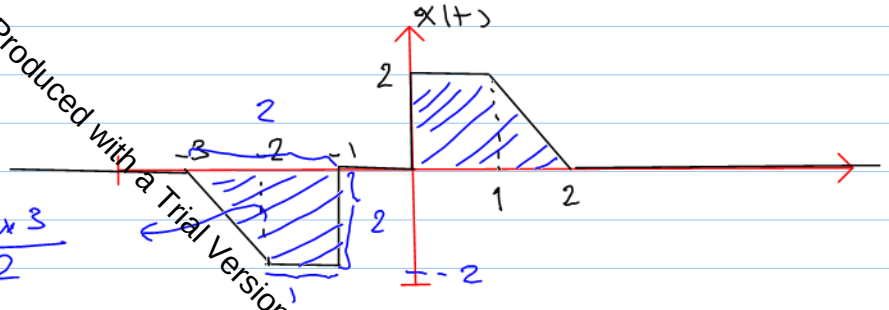
$\cos(4n) \perp \cos(\pi n)$ ✓

$$P_{x_e} = \frac{3^2}{2} + 3^2 = 13.5$$

$$P_x = 15 = 13.5 + P_{x_o} \rightarrow \boxed{P_{x_o} = 1.5}$$

اگر $x_o(t)$ بیانگر قسمت فرد سیگنال $x(t)$ باشد، در این صورت $\int_0^\infty x_o(t)dt$ کدام است؟

1.5 — 3 — 3.5 — 4.5




$-\frac{2\times 3}{2}$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\int_c^{\infty} x_o(t) = \int_c^{\infty} \frac{x(t)-x(-t)}{2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}x(t) - \int_c^{\infty} \frac{1}{2}x(-t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x(-t)\,dt$$

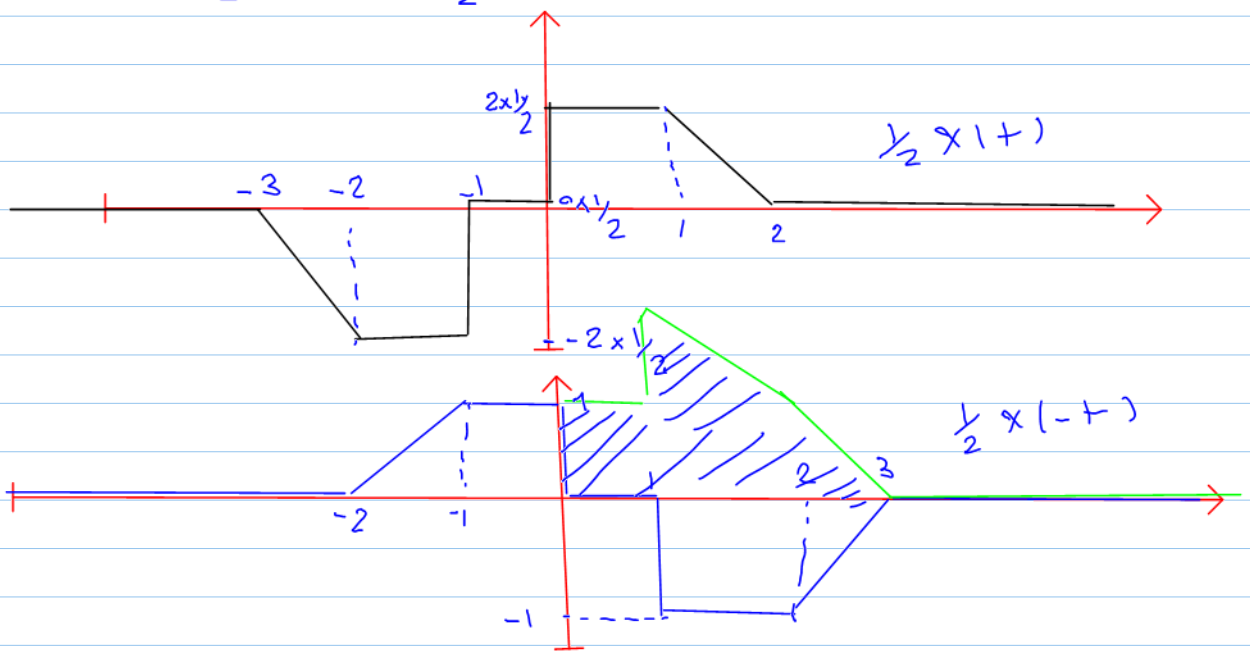
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\times(1+2)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2\times(3)}{2}\right) = 3 \checkmark$$

$$\int_0^{\infty} x(-t)\,dt \qquad -t = t' \longrightarrow -dt = dt' \qquad dt = -dt'$$

$$\int_0^{-\infty} -x(t')\,dt' = -\int_{\infty}^{0} -x(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{0} x(t')\,dt'$$

فرض می‌شود $x_o(t)$ →

$$x_o(t) = \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t)$$



$\Phi_2(t) = \begin{cases} Ae^{-2t} + Be^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ , $\Phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\, e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ . M بدل ا

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$\Phi_2$ , $\Phi_1$ بحيث متعامدتين $B$ و $A$ أوجد قيمة

1) $A=-6, B=+4$ 2) $A=6, B=4$ 3) $A=4, B=6$

4) $A=6, B=-4$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t)\, \Phi_2(t)\, dt = 0$$ شرط التعامد

$$= \int_{-\infty}^{0} \Phi_1(t)\, \Phi_2(t)\, dt + \int_{0}^{\infty} \Phi_1(t)\, \Phi_2(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\, e^{-t}\right)\left(Ae^{-2t} + Be^{-t}\right) dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} A\sqrt{2}\, e^{-3t} + B\sqrt{2}\, e^{-2t}\, dt \qquad \int e^{at}\, dt = \frac{1}{a} e^{at}$$

$$= A\sqrt{2} \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, dt + B\sqrt{2} \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt$$

$$= A\sqrt{2}\left(\frac{1}{-3} e^{-3t}\Big|_0^{\infty}\right) + B\sqrt{2}\left(\frac{+1}{-2} e^{-2t}\Big|_0^{\infty}\right)$$

$$= A\sqrt{2}\left(-\frac{1}{3} e^{-3\times\infty} - \left(-\frac{1}{3} e^{-3\times 0}\right)\right) + B\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} e^{-2\times\infty} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2\times 0}\right)\right)$$

$$= A\frac{\sqrt{2}}{3} + B\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

1) $4\frac{\sqrt{2}}{3} + -6\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

4) $\frac{6\sqrt{2}}{3} + \frac{-4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$ ✓

حلت بعد معوض بمعادلة ثانية ← تحقق بسهولة

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com