جلسه 25 سیگنال

سری فوریه

هدف: ساده‌سازی تعیین پاسخ سیستم های LTI ← آنژ سیستم‌ها واقعی را می‌توان با LTI تقریب زد.



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

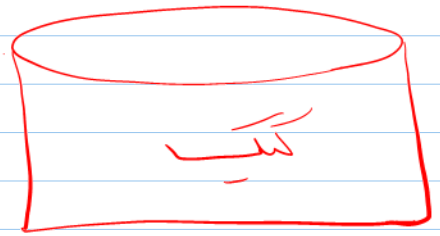
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

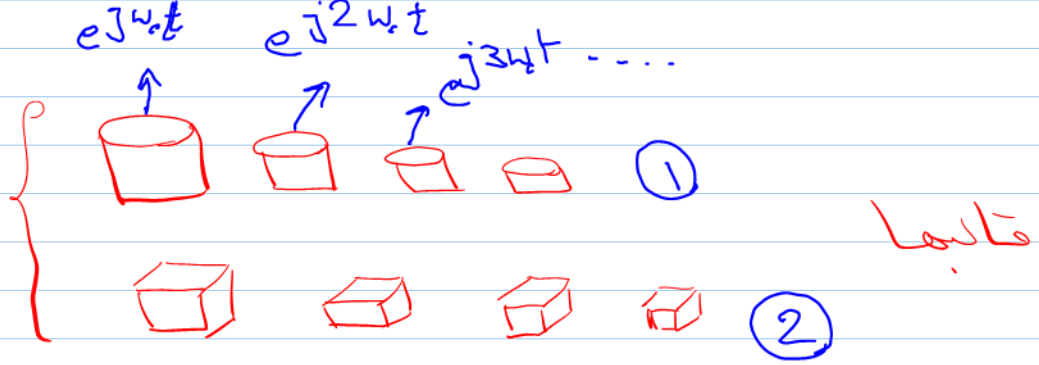
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$ پاسخ فرکانسی

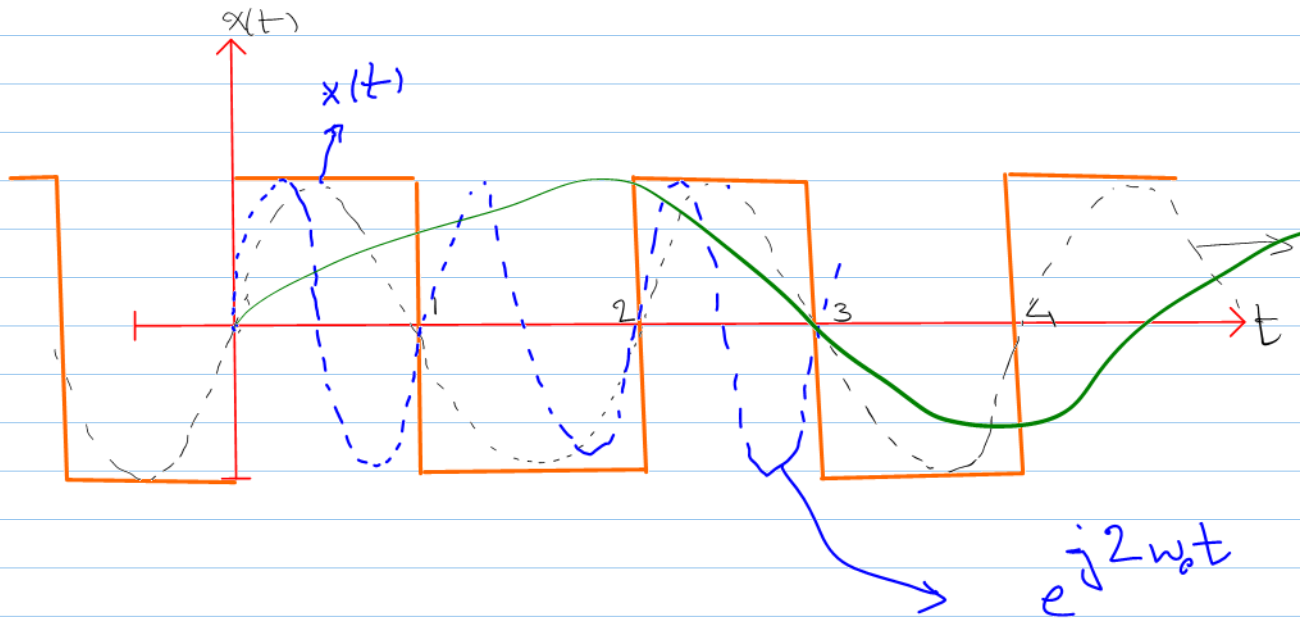
e^{jat} → $y(t) = e^{jat} H(ja)$

$x(t)$ → $e^{j\omega t}$ سیناریا از

$x(t)$ → e^{j2t}, $e^{j\pi t}$, ?, ⋮

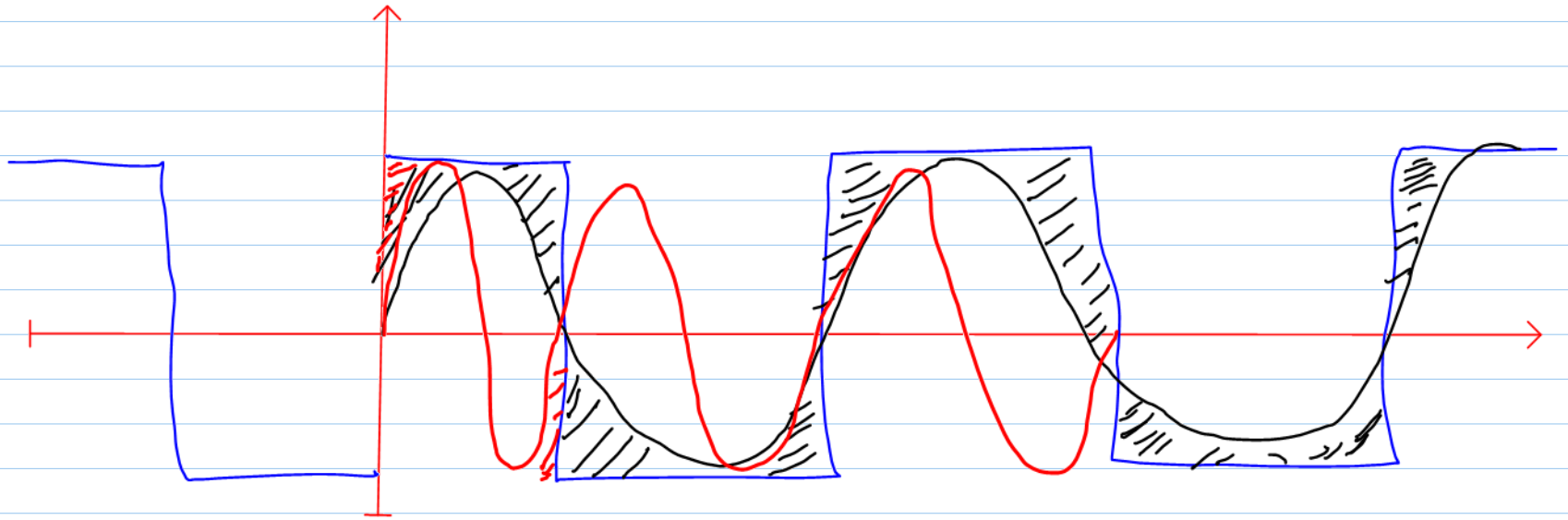


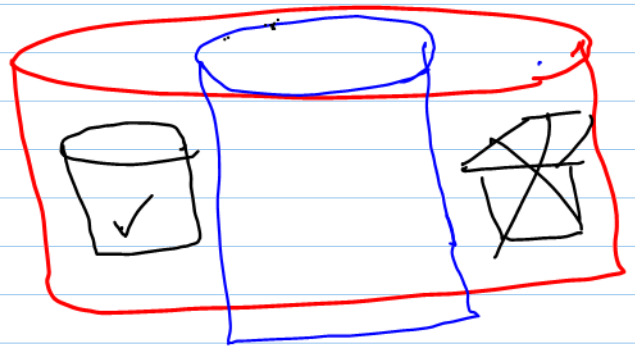




$w_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$x(t) =$ e^{jwt} مضاربی از





اگر $x(t)$ متناوب باشد شبیه ترین قالب آن $e^{j\omega_0 t}$ است که $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

T_0 = دوره تناوب $x(t)$

$x(t), T_0 \longrightarrow \square e^{j\omega_0 t} + \square e^{j2\omega_0 t} + \square e^{j3\omega_0 t} + \cdots$

$x(t) = \textcircled{2} e^{j\omega_0 t} + \textcircled{3} e^{j2\omega_0 t} + \textcircled{4} e^{j5\omega_0 t}$

منزایب سری فوریه

$$\langle x(t), e^{j\omega_0 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \text{منزایب } e^{j\omega_0 t}$$

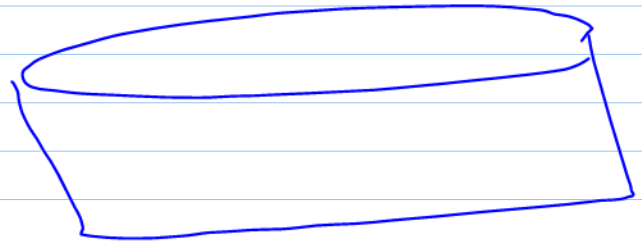
$$\langle x(t), e^{j3\omega_0 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j3\omega_0 t} dt = e^{j3\omega_0 t} \text{ منزایب}$$

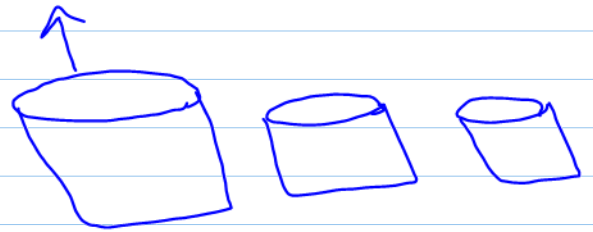
$$\vdots$$

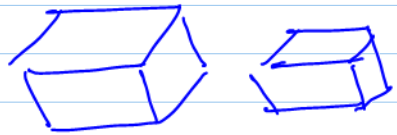
$$\langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$k = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$e^{j\frac{2\pi}{T_0}t}$ $e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}$







تعریف سری فوریه: یعنی $x(t)$ (یا $x[n]$) را به صورت جمعی از $e^{jk\omega_0 t}$ یا $e^{jk\omega_0 n}$ ها تقریب بزنیم.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightsquigarrow \text{دوره تناوب } x(t)$$

a_k : وزن فرکانس $k\omega_0$ در $x(t)$ = ضریب k ام سری فوریه

ضریب $e^{jk\omega_0 t}$ ، وزن هارمونیک k ام

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, dt = \text{میانگین } x(t)$$

مقدار dc سیگنال $x(t)$

$x(t)$, $T_0 = 2$ $\longrightarrow$ $a_k = \frac{2k}{k+1}$

وزن هارمونیک $\underline{3}$ ام (k) $x(t)$ ؟ $= a_3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

فرکانس اصلی $x(t)$ ؟ $= \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

وزن فرکانس $\omega = 2$ در $x(t)$ ؟ $= 0$

وزن فرکانس $10\omega_0$ در $x(t)$ چقدر است؟ $a_{10} = ?$

اگر $x(t)$ متناوب باشد تنها شامل مضارب صحیح از ω_0 می‌شود.

نحوه محاسبه سری فوریه:

حالت اول: $x(t)$ به صورت ترکیبی از $\sin$ ، $\cos$ ، e^{jat} باشد.

$$x(t) = \underbrace{\sin(4t)}_{\frac{2\pi}{4}} + \underbrace{\sin(2t)}_{\frac{2\pi}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$\omega_0 = ?$

$$T_{0x} = \text{ک.م.م}\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\} = \pi \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkx2t} \qquad 4 = 2 \times \omega_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j4t} - \frac{1}{2j} e^{-j4t} + \frac{1}{2j} e^{j2t} - \frac{1}{2j} e^{-j2t}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2j} e^{j2\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{j(-2\omega_0)t} + \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{j(-1\omega_0)t} \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\times 2\, t} \end{cases}$$

روال تعیین a_k ها وقتی $x(t)$ سینوسی است:

① دوره تناوب $x(t)$ را حساب کنید. T_0

② فرکانس اصلی $x(t)$ را حساب کنید. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

③ عامل $\sin$ ، $\cos$ ، $e^{j\omega t}$ ها را طوری تغییر دهید که ضریب t در آنها برحسب مضرب صحیح از ω_0 نوشته شود.

④ عامل عبارتهای $x(t)$ را تبدیل به مجموعی از ضرایب $e^{jk\omega_0 t}$ بکنید.

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

⑤ در عبارت به دست آمده، ضریب a_k ها را تعیین کنید.

$$x(t) = \sin(2t) + \cos(3t)$$

① $T_0 =$ ک.م.م $\left\{ \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\} = 2\pi$

② $\omega_c = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \longrightarrow \omega_0 = 1$

③ $2 = 2 \times 1 = 2\omega_0 \qquad 3 = 3 \times 1 = 3\omega_0$

$$x(t) = \sin(2\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)$$

④ $$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j2\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{-j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j3\omega_0 t}$$

(5) $x(t) = \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_2} e^{j2\omega_0 t} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2j}\right)}_{a_{-2}} e^{j(-2\omega_0 t)} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_3} e^{j3\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-3}} e^{j(-3\omega_0 t)}$

$a_2 = \frac{1}{2j}$ $\quad a_{-2} = -\frac{1}{2j}$ $\quad a_3 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{-3} = \frac{1}{2}$

$a_0 , a_1 , a_{-1} , a_4 , a_{-4} \cdots = ?_0 = 0$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 2 \\ \frac{-1}{2j} & k = -2 \\ \frac{1}{2} & k = 3, -3 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$x(t) = 1 + \sin(2t)\cos(2t)$$

$$\sin(2t)\cos(2t) = \frac{1}{2}\sin(4t)$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(4t)$$

① $T_0 =$ ك.م.م $\left\{ 1 \rightarrow$ [illegible], $\frac{2\pi}{4} \right\} = \frac{\pi}{2}$

② $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4$

③ $x(t) = 1 + \frac{1}{4}\sin(1\omega_0 t)$ $\qquad 4 = 1 \times 4 = 1 \times \omega_0$

④ $x(t) = e^{0} + \frac{1}{4}\sin(1\omega_0 t) \Rightarrow e^{jk\omega_0 t}$

$$x(t) = 1e^{j0\times\omega_0 t} + \frac{1}{8j}e^{j1\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{8j}\right)e^{j(-1\omega_0 t)}$$

(5) $a_0 = 1$ $\quad a_1 = \frac{1}{8j}$ $\quad a_{-1} = -\frac{1}{8j}$

$$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{1}{8j} & k = 1 \\ -\frac{1}{8j} & k = -1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$x(t) = 2 + \sin\left(1t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

(1) $T_0 = \text{l.c.m}\left\{2, \frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}\right\} = 2\pi$

(2) $w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1 \longrightarrow w_c = 1$

③ $1 = 1 \times \underbrace{1}_{\omega_1} = 1 \times \omega_0 = 1\omega_0$ $\qquad 2 = 2 \times \underbrace{1}_{\omega_2} = 2\omega_0$

$$x(t) = 2 + \sin(1\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + \cos(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$$

④ $x(t) \longrightarrow e^{jk\omega_0 t}$ $\qquad e^{jk\omega_0 t}$

$$x(t) = 2e^{j0\times\omega_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j(1\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} - \frac{1}{2j}e^{j(-1\omega_0 t - \frac{\pi}{4})}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{j(2\omega_0 t - \pi/4)} + \frac{1}{2}e^{j(-2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})}$$

باید $x(t)$ به صورت مجموعی از $e^{jk\omega_0 t}$ نوشته شود.

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{j(1\omega_0 t + \pi/4)} = e^{j1\omega_0 t} e^{j\pi/4}$$

عدد

$$x(t) = 2e^{j0\times w_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j\pi/4}e^{j1w_0t} + \left(-\frac{1}{2j}\right)e^{-j\pi/4}e^{j(-1w_0t)}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{j(2w_0t)} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j(-2w_0t)}$$

(5) $a_0 = 2$ $\quad a_1 = \frac{1}{2j}e^{j\pi/4}$ $\quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4}$

$a_2 = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$ $\quad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$

$$a_k = \begin{cases} 2 & k=0 \\ \frac{1}{2j}e^{j\pi/4} & k=1 \\ -\frac{1}{2j}e^{-j\pi/4} & k=-1 \\ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} & k=2 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4} & k=-2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

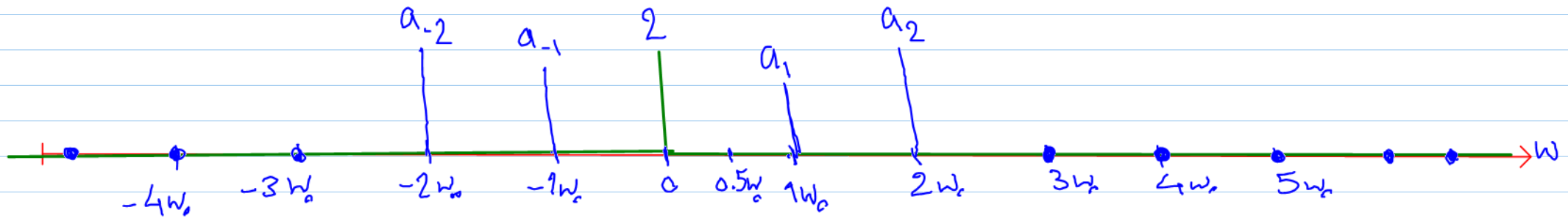
مقدار dc سیگنال $x(t)$ $= a_0 = 2$

وزن هارمونیک 3ام $= a_3 = 0$

وزن هارمونیک اصلی $= a_1 \Leftarrow 1w_0$ $= \frac{1}{2j} e^{j\pi/4}$

وزن کسینوسی $= 2w_0$ $= a_2 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$

وزن کسینوسی مثلث در $x(t)$



جلسه آینده ← حل مثال و حالت کسته