دوره مدار الکتریکی ۱و۲

www.liveamooz.com

www.instagram.com/bargh_tavasoli

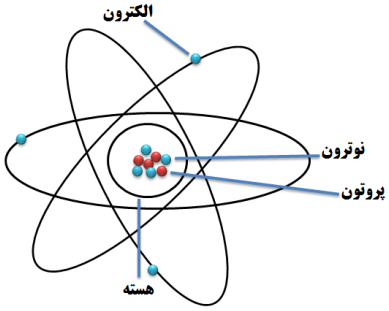
انتشار این جزوه به صورت فایل، دستنویس و ... غیر مجاز می باشد و اینجانب هادی توسلی هیچ گونه رضایتی برای استفاده از این جزوه به صورت رایگان ندارم.

شماره تماس موسسه: ۰۲۱۹۱۰۹۰۴۴۲

فصل اول

مفاهیم پایه مدارهای الکتریکی و روش های تحلیل مدار

به به !!! سلام. خوبین؟ خیلی خوش اومدین به کتاب مدار. در این کتاب قصد داریم درس مدار الکتریکی رو به صورت کاملا مفهومی و تکنیکی به شما آموزش بدیم. اگر دارید برای کنکور مطالعه می‌کنید حتما از نقش مهم درس مدار در رشته مهندسی برق مطلع هستید. ولی اگر تازه کار هستید باید بگم مدار رو خیلی جدی بگیرید. به نظرم بهتره تا دیر نشده بریم سراغ اصل مطلب ، کارمون رو با مفاهیم پایه مدارهای الکتریکی شروع می‌کنیم.



اجزای سازنده اتم : هر اتم از یک هسته متشکل از پروتون و نوترون و یک سری مدارات الکترونی تشکیل شده است.

علامت بارها: علامت بار پروتون، مثبت و الکترون ها دارای بار منفی هستند . در یک اتم تعداد بارهای مثبت و منفی در حالت عادی برابر است.

مواد رسانا : موادی هستند که دارای الکترون آزاد هستند و می توانند به راحتی جریان الکتریکی را عبور دهند، مانند مس و نقره .

مواد نارسانا: این مواد بر خلاف رساناها نمی‌توانند به خوبی جریان را از خود عبور دهند مانند چوپ و پلاستیک .

مواد نیمه رسانا: رسانایی این مواد قابل کنترل است و در برخی شرایط رسانا و در برخی شرایط نارسانا خواهند بود مانند دیود و ترانزیستور.

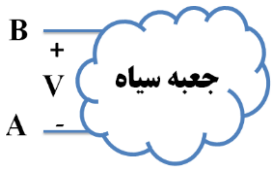
واحد بار الکتریکی: واحد بار الکتریکی کولمب است. هر کولمب معادل 6.24×10^{18} الکترون است.

از توضیحات داده شده می‌توانیم دو نتیجه بگیریم.

اولا : می‌توانیم بگوییم اگر یک جسم بدون بار 6.24×10^{18} تا الکترون از دست بدهد بارش مثبت یک کولمب می‌شود.

دوما: می‌شود نتیجه گرفت بار یک الکترون برابر است با:

$1/6.24 \times 10^{18} = 1.6 \times 10^{-19}$ کولمب



ولتاژ: ولتاژ یک کمیت نسبی است که بیانگر اختلاف پتانسیل بین دو نقطه است. همواره ولتاژ یک نقطه را نسبت به نقطه‌ای دیگر می‌سنجند. مثلا در شکل مقابل پتانسیل نقطه B از پتانسیل نقطه A به اندازه V ولت بیشتر است. در واقع یک ولت میزان انرژی لازم برای جدا کردن یک کولن بار است.

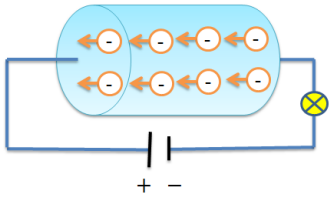
شدت جریان الکتریکی: به سرعت حرکت بارهای الکتریکی در یک مدار بسته جریان می‌گویند. اگر دو سر یک رسانا اختلاف پتانسیل به مقدار کافی ایجاد شود در آن جریان الکتریکی ایجاد می شود. معمولا به جای عبارت شدت جریان الکتریکی، به اختصار جریان الکتریکی گفته می‌شود.

واحد جریان الکتریکی: از آن جایی که بار با واحد کولمب اندازه‌گیری می‌شود واحد اندازه گیری سرعت حرکت بارها کولمب بر ثانیه خواهد بود. یک کولمب بر ثانیه را یک آمپر می نامیم. به عبارت دیگر:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{یا} \quad \frac{dq}{dt}$$

مثال۱: اگر 1 کولمب بار از سطح مقطع شکل زیر در زمان یک ثانیه عبور کند شدت جریان الکتریکی چند آمپر خواهد بود؟

پاسخ:



مثال۲: اگر در مدت زمان 0.01 تعداد 10^{15} عدد الکترون از سطح مقطع سیمی عبور کند، شدت جریان الکتریکی چند آمپر خواهد بود؟

پاسخ: برای حل این سوال ابتدا باید ببینیم که 10^{15} الکترون چند کولمب بار است. برای این کار کافیست از تناسب زیر استفاده کنیم.

$1C$	$6.24\times10^{18}e$
q	$10^{15}e$

$$\rightarrow q=\frac{10^{15}}{6.24\times10^{18}} \rightarrow i=\frac{\frac{10^{15}}{6.24\times10^{18}}}{0.01}$$

$$\rightarrow i=\frac{\frac{10^{15}}{6.24\times10^{18}}}{10^{-2}}=\frac{10^{15}}{6.24\times10^{16}}=\frac{10^{-1}}{6.24}=1.66\times10^{-4}A$$

حالا مساله این است که جهت جریان را چگونه تشخیص بدهیم؟ جالب است بدانید در ابتدا دانشمندان بر این باور بودند که جریان ناشی از حرکت بارهای مثبت است و جهت جریان از سر مثبت به سر منفی باتری است و بر همین مبنا تمام تئوری و فرمول‌های مدار شکل گرفت. اما بعد از کشف اتم متوجه شدند که این الکترون ها هستند که جهت جریان را تعیین می کنند.

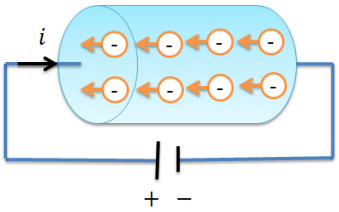


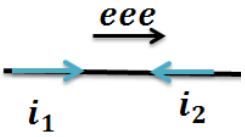
عجب اوضاعیه !!! پس تکلیف ما چیه این وسط؟؟؟؟



ما به غلط می‌پذیریم که جهت جریان از ولتاژ مثبت به سمت ولتاژ منفی برقرار می‌شود. این جهت جریان خلاف جهت واقعی الکترون هاست به این جهت جریان، جهت مرسوم جریان گفته می‌شود. ما نیز از روش جریان مرسوم استفاده می‌کنیم اما نگران نباشید هیچ مشکلی به وجود نمی‌آید و

جواب‌ها هیچ تغییری نخواهند کرد.



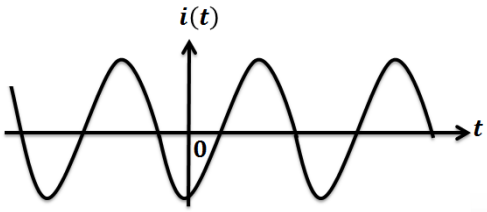


به عنوان مثال سیم حامل جریان مقابل را در نظر بگیرید شارش الکترون‌ها در این سیم باعث ایجاد جریانی به اندازه $1mA$ شده است. در این صورت مطابق قاعده جریان مرسوم، جریان $i_1 = -1mA$ و جریان $i_2 = 1mA$ خواهد بود.

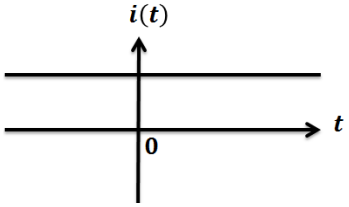
انواع جریان الکتریکی

جریان الکتریکی مستقیم[۱]: جریان مستقیم جریانی است که مقدار آن با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

جریان متناوب[۲]: جریان متناوب جریانی است که در طول زمان اندازه یا جهت آن تغییر می‌کند.



جریان متناوب: AC

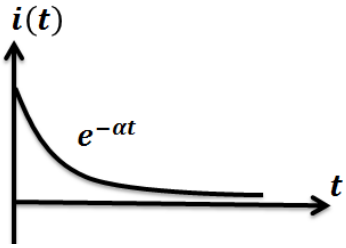


جریان مستقیم: DC

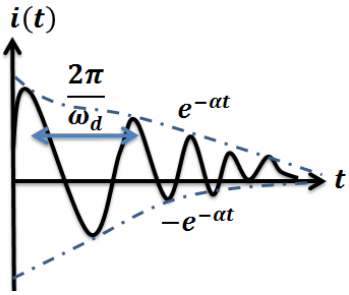
جریان هم مثل بقیه سیگنال‌های الکتریکی اشکال مختلفی می‌تواند داشته باشد به عنوان مثال می‌تواند نمایی سینوسی و یا نمایی باشد، سیگنال جریان نمایی می‌تواند بیانگر جریان یک باطری باشد.

---

۱ **Direct current**
۲ **Alternative current**

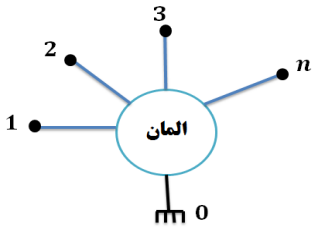


جریان نمایی مدلی از جریان باطری

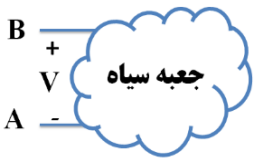


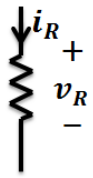
جریان نمایی سینوسی

المان ها: اجزای مدار هستند که به وسیله ارتباطی که با دنیای اطراف دارند توصیف می شوند المان های مدار می توانند دو سر، سه سر و حتی n سر باشند.

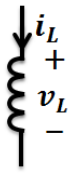


المان های دو سر (تک قطبی): المانی است که فقط با دو سر یا یک پورت تعریف می شود، مانند مقاومت، سلف، خازن و دیود.

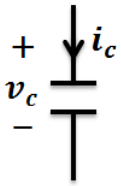




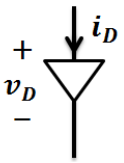
الف)مقاومت



ب) سلف

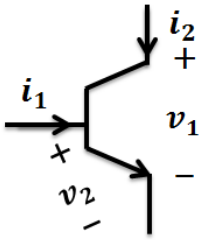


ج) خازن

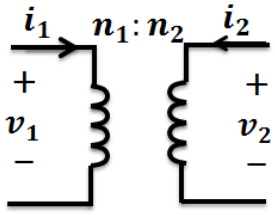


د) دیود

المان ۲ قطبی یا چهار سر: المانی که با چهار پایه یا دو پورت با بیرون مرتبط می‌شود. مانند ترانزیستورها و ترانسفورماتورها.

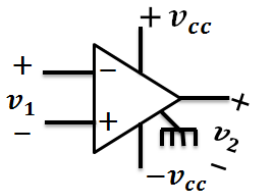


الف) ترانزیستور



ب) ترانسفورماتور

المان چندقطبی: المانی هایی هستند که با چندین پایه یا پورت تعریف می شوند، مانند آپ امپ.

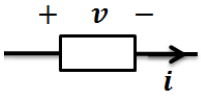


آپ امپ

المان ایده آل: المانی است که فقط با دو کمیت اصلی مستقل از هم مشخص می‌شود.

کمیت های اصلی: در مدار با چهار کمیت اصلی سر و کار داریم که عبارتند از: ولتاژ (v)، جریان (i)، بار الکتریکی (q) و شار الکتریکی (φ). از طرفی در مدار با چهار المان سر و کار داریم که با ترکیبی از این کمیت‌ها توصیف می‌شوند.

مقاومت: هر المانی که به کمک رابطه ای بین ولتاژ و جریان بیان شود مقاومت نامیده می شود، که لزوما مقاومت ایده آل نیست. به عنوان مثال تمام روابط زیر می‌توانند بیانگر مقاومت الکتریکی باشند، چون رابطه بین ولتاژ و جریان برای آن‌ها تعریف شده است.



توجه: المانی که با رابطه $v(t) = 3i(t) + q$ تعریف شود بیانگر یک مقاومت نیست چون همانطور که گفته شد هر المانی که به کمک رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان تعریف شود مقاومت نامیده می‌شود اما این رابطه به بار الکتریکی نیز وابسته است.

مقاومت ایده آل: هر مقاومتی که به وسیله رابطه جبری(رابطه‌ای بدون مشتق و انتگرال) از ولتاژ و جریان خودش توصیف شود مقاومت ایده آل نامیده می شود. معادلات به دنبال آمده نمونه ای از مقاومت‌های ایده آل است.



: نماد مداری
مقاومت



با توجه به مطالب گفته شده آیا المان‌هایی با معادلات $v(t) = 3costi(t)$ ، $\frac{di}{dt}v(t) =$ و $i(t) = 0.5\int v(t)dt$ می‌توانند بیانگر یک مقاومت ایده‌آل باشند؟



خازن: هر المانی که بتوان بین بار الکتریکی و ولتاژ دو سر آن رابطه بنویسیم آن المان خازن است.

: نماد مداری خازن 

توجه: المانی که با رابطه $v(t) = 3q(t) + 2i$ تعریف شود بیانگر یک خازن نیست چون همانطورکه گفته شد هر المانی که به کمک رابطه‌ای بین ولتاژ و بار بیان شود خازن نامیده می‌شود اما این رابطه به جریان الکتریکی نیز وابسته است.

خازن ایده آل: هر المانی که به وسیله رابطه جبری بین بار و ولتاژ دو سرش مشخص شود، خازن ایده آل نامیده می‌شود.



با توجه به مطالب گفته شده آیا المان‌هایی با معادلات $v(t) = 3q(t) + q^2(t)$ ، $\frac{dq}{dt}v(t) = 3$ و $q(t) = 0.5\int v(t)dt + 5$ می‌توانند بیانگر یک خازن ایده‌آل باشند؟



سلف: هر المانی که بتوان بین شار و جریان الکتریکی آن رابطه نوشت سلف است.

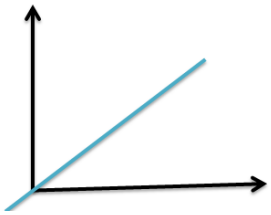
سلف ایده آل: هر المانی که به وسیله رابطه‌ای جبری بین شار و جریان الکتریکی خودش مشخص شود، سلف ایده‌آل نامیده می‌شود. به عنوان مثال تمام روابط زیر می‌توانند بیانگر سلف ایده‌آل باشند، چون رابطه بین شار و جریان به صورت جبری برای آن‌ها تعریف شده است.

نماد مداری سلف :



المان های ایده آل خطی:

اگر منحنی مشخصه المان (رابطه بین کمیت های اصلی آن) خط راست گذرنده از مبدا باشد، المان ایده آل خطی است. به عنوان مثال تمام روابط زیر بیانگر المان ایده آل خطی هستند.



مثال۳: منحنی مشخصه چند المان به صورت زیر داده شده است نوع المان (خازن، مقاومت یا سلف) و خطی بودن یا نبودن را تعیین کنید؟

۱) $v(t) = i(t) + 2$
۲) $q(t) = 10v^{-1}(t)$
۳) $\phi(t) = 4i^2(t)$
٤) $v(t) = 3i(t)$
٥) $q(t) = 4v(t)$
٦) $\phi(t) = 10i(t)$

المان تغییر پذیر با زمان[۳]: اگر مشخصه یک المان بر حسب زمان تغییر کند، المان تغییر پذیر با زمان است.

مثال٤: در مثال‌های به دنبال آمده نمونه‌هایی از المان‌های تغییر پذیر با زمان را می‌توانید ببینید.

۱) $v(t) = (1 + sint)i(t)3i(t)$
۲) $q(t) = 10e^{-t}v(t)$
۳) $\phi(t) = 10t \times i(t)$

مقاومت تغییر پذیر با زمان
خازن تغییر پذیر با زمان
سلف تغییر پذیر با زمان

برای فهم بهتر مفهوم تغییر پذیر بودن با زمان معادله سوم را در نظر بگیرید رابطه بین شار و جریان در طول زمان به شکل زیر تغییر می کند:

$$\phi(t) = 10t \times i(t) \rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \phi(t) = 10 \times i(t) \\ t = 2 \rightarrow \phi(t) = 20 \times i(t) \\ t = 3 \rightarrow \phi(t) = 30 \times i(t) \\ \vdots \end{cases}$$

[۳] Time varying element

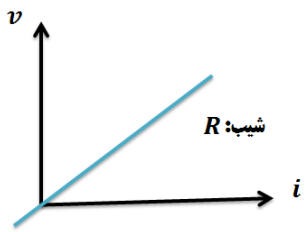
المان ایده‌آل خطی تغییر ناپذیر با زمان[۴]: اگر مشخصه یک المان ایده‌آل خطی بر حسب زمان ثابت باشد ، آن المان تغییر ناپذیر با زمان یا LTI است. تمرکز اصلی درس مدارهای الکتریکی روی این نوع المان‌ها است.

مثال۵: در مثال‌های به دنبال آمده نمونه‌هایی از المان‌های تغییر ناپذیر با زمان خطی را می‌توانید ببینید.

مقاومت ایده‌آل خطی تغییر ناپذیر با زمان
خازن ایده‌آل خطی تغییر ناپذیر با زمان
سلف ایده‌آل خطی تغییر ناپذیر با زمان

۱) $v(t) = 3i(t)$
۲) $q(t) = 4v(t)$
۳) $\phi(t) = 10i(t)$

مقاومت LTI : مقاومتی است که رابطه $v - i$ خط راست گذرنده از مبدا باشد . رابطه ولتاژ و جریان یک مقاومت LTI به صورت زیر است.



$$v(t) = Ri(t) \rightarrow i(t) = \frac{1}{R}v(t) = Gv(t)$$

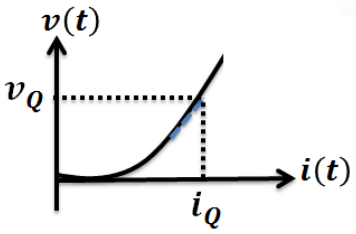
که در آن R مقدار مقاومت است که واحد آن اهم (ohm) می‌باشد و G هدایت یا رسانایی است که واحد آن مهو (mho) است.

[۴] Linear time invariant element

مقاومت ایده‌آل خطی تغییر پذیر با زمان: مقاومتی که مقدار آن با گذشت زمان تغییر می کند، یعنی داریم: $v(t) = R(t) \times i(t)$. به عنوان نمونه مقاومت تغییرپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$v(t) = e^{-3t} \times i(t): \rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow v(t) = 1 \times i(t) \rightarrow R = 1\Omega \\ t = 1 \rightarrow v(t) = e^{-3} \times i(t) \rightarrow R = e^{-3}\Omega \\ t = \infty \rightarrow v(t) = 0 \times i(t) \rightarrow R = 0\Omega \rightarrow S.C \end{cases}$$

مقاومت غیرخطی:



اگر رابطه $v - i$ مقاومتی، خط راست گذرنده از مبدا نباشد، یک مقاومت غیرخطی است.

نقطه کار: مقدار ولتاژ و جریان مقاومت در آن مدار وشرایط آن مدار را نقطه کار می‌گوییم. نقطه کار یک المان با توجه به قرارگیری در یک مدار می‌تواند تغییر کند.

مقاومت استاتیکی: نسبت ولتاژ مستقیم به جریان مستقیم را مقاومت استاتیکی می‌گویند که با R_{dc} نمایش داده می‌شود.

$$R_{dc} = \frac{v_Q}{I_Q}$$

مقاومت دینامیکی: نسبت نرخ تغییرات ولتاژ به تغییرات جریان را مقاومت دینامیکی می‌گویند که با R_{ac} نمایش داده می‌شود.

$$R_{ac} = \frac{\partial v}{\partial i}|_Q$$

مثال۶: فرض کنید رابطه $v - i$ یک المان غیرخطی به صورت $v = 3i^2$ باشد. مقاومت استاتیکی و دینامیکی را بدست آورید. نقطه کار المان موردنظر $I = 2mA$ و $v = 12v$ است.

$$R_{dc} = \frac{v_Q}{I_Q} = \frac{12}{2} = 6\Omega$$

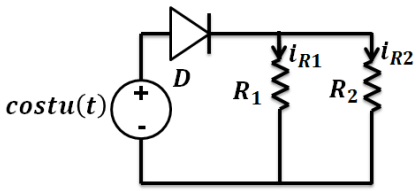
$$R_{dc} = \frac{\partial v}{\partial i}|_Q = 3 \times 2i|_Q = 6i|_{\substack{2mA \\ 12v}} = 12\Omega$$

مثال۷: فرض کنید رابطه $v-i$ یک المان غیرخطی به صورت $i^2=v^2+3v$ باشد مقاومت دینامیکی را بدست آورید. نقطه کار المان موردنظر $I=2mA$ و $v=12v$ است.

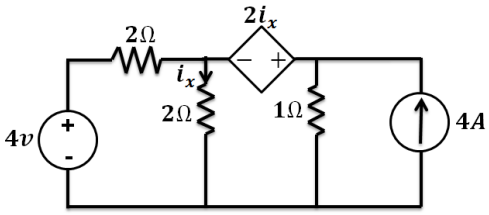
$$R_{dc}=\frac{\partial v}{\partial i}|_Q \rightarrow 2i=2vv'+3v' \rightarrow v'=\frac{2i}{2v+3}|_{\substack{2mA\\12v}}=\frac{2\times 2}{2\times 12+3}=\frac{4}{27}$$

مدارهای مقاومتی

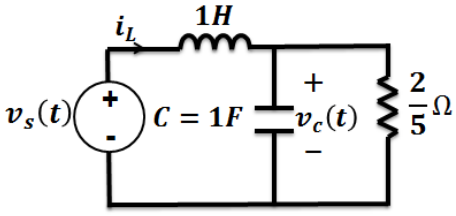
مداری که تنها شامل ، مقاومت منابع مستقل و منابع وابسته باشد و سلف و خازن نداشته باشد مدار مقاومتی نامیده می‌شود .توجه کنید که وجود دیود ایده‌آل در مدار باعث غیرمقاومتی شدن مدار نمی‌شود چون همانطور که بعدا خواهید دید دیود ایده‌آل به صورت مدار باز و یا اتصال کوتاه عمل می‌کند. همچنین نوع منابع تاثیری در مقاومتی بودن یا نبودن مدار ندارند. در شکل‌های زیر نمونه‌هایی از مدارهای مقاومتی و غیرمقاومتی را می‌توانید ببینید.



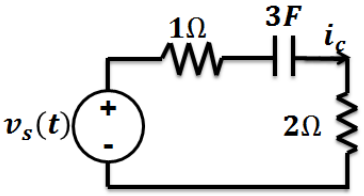
مدار مقاومتی



مدار مقاومتی

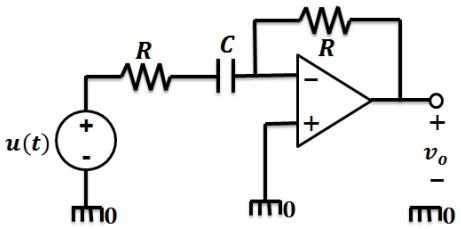


مدار غیرمقاومتی

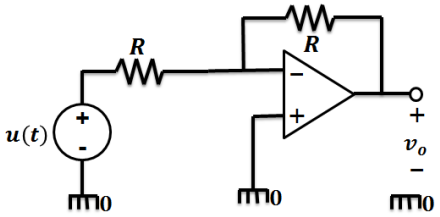


مدار غیرمقاومتی

توجه: آپ امپ ایده‌آل باعث غیرمقاومتی شدن مدار نمی‌شود زیرا مدار معادل آن مقاومتی است. در فصول آینده با این المان بیشتر آشنا می‌شوید.



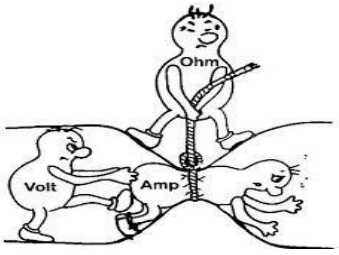
مدار غیرمقاومتی



مدار مقاومتی

در این فصل به مدارهای مقاومتی می‌پردازیم.

قانون اهم[۵]



با این بحث‌هایی که داشتیم فکر می‌کنم الان آماده شدید که ساده ترین ولی مهم‌ترین قانون مدار را به شما معرفی کنم و این قانون چیزی نیست جز قانون اهم. این قانون میگه که عامل ایجاد جریان الکتریکی بین دو نقطه اختلاف پتانسیل بین آن دو نقطه است و هرچقدر این اختلاف پتانسیل بیشتر باشد جریان بیشتر می‌شود. اما یک عاملی وجود دارد در مدار که در مقابل ایجاد جریان از خودش مقاومت نشان می‌دهد و آن چیزی نیست جز مقاومت مدار! ! ! . این قانون ساده اما کاربردی مدار به قانون اهم معروف است. توجه داشته باشید که این قانون فقط برای مقاومت خطی تعریف می‌شود و ارتباط ولتاژ دو سر مقاومت خطی را با جریان عبوری از آن با توجه به مقاومت بیان می‌کند.

فرمول بندی قانون اهم

مقاومت‌های زیر را در نظر بگیرید طبق قانون اهم جریان این مقاومت‌ها از تقسیم اختلاف ولتاژ دو سر آن‌ها بر مقدار مقاومت بدست می‌آید.



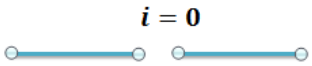
توجه داشته باشید که جهت جریان همیشه از پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است.

[۵] Ohm's Law

معرفی شاخه اتصال کوتاه[۶] و شاخه مدار باز[۷]

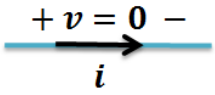
شاخه مدار باز : اگر اتصال یک شاخه از مدار قطع شود جریان آن شاخه صفر می‌شود.

شاخه مدار باز را به صورت مقابل نشان می‌دهیم:



شاخه اتصال کوتاه : اگر بین دو نقطه از مدار هیچ المانی نباشد و سیم ایده‌آل باشد اختلاف پتانسیل دو سر اتصال کوتاه صفر است.

شاخه اتصال کوتاه را به صورت مقابل نشان می‌دهیم:



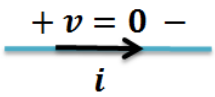


حالا بریم سراغ یک سوال اگر قسمتی از مدار اتصال کوتاه شده باشد، مقاومت آن چند اهم می‌شود؟



اگه شاخه‌ای اتصال کوتاه شود ولتاژ دو سر آن صفر می‌شود بنابراین مقاومت آن صفر است و اگر یک شاخه از یک مدار الکتریکی مدار باز شود چون جریانش صفر می‌شود مقاومت آن شاخه بی نهایت می‌شود.

آفرین کاملا درسته!!!. در مورد شاخه اتصال کوتاه نیز باید بدانید که:



حواستون باشه: جریان شاخه اتصال کوتاه و ولتاژ دو سر مدار باز صفر نیست و هر مقداری می‌تواند داشته باشد که با توجه به مدار تعیین می‌گردند.

[۶] Short circuit
[۷] Open circuit

توان لحظه ای

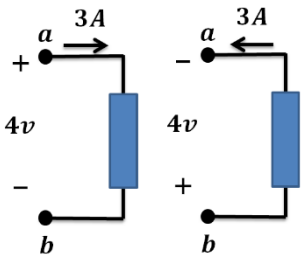
هر المان یا دستگاه برای عملکرد خود نیاز به جریان و ولتاژ دارد. حاصل ضرب این دو کمیت انرژی مصرفی در لحظه یا توان دستگاه است.

$$P(t) = v(t)i(t)$$

ممکن است یک المان مصرف کننده یا تولید کننده توان باشد که با توجه به جهت جریان و پلاریته ولتاژ، مصرف کننده یا تولید کننده بودن آن مشخص می‌شود.

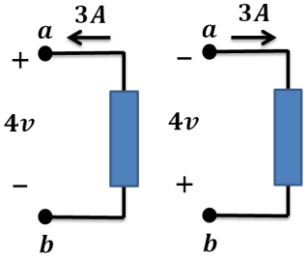
اگر جریان از پلاریته منفی خارج شود المان مصرف کننده توان است.

عنصر پسیو یا غیر فعال[۸]: المانی که توان مصرف می‌کند مانند مقاومت مثبت، عنصر پسیو یا غیرفعال نامیده می‌شود.



اگر جریان از پلاریته مثبت خارج شود المان تولید کننده توان است.

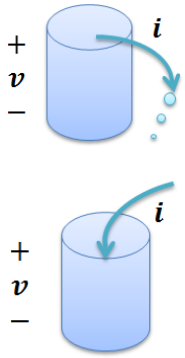
عنصر اکتیو یا فعال[۹]: المانی که توان تولید می‌کند مانند مقاومت منفی عنصر اکتیو یا فعال نامیده می‌شود. در ادامه با مقاومت منفی آشنا خواهید شد.



[۸] **Passive element**
[۹] **Active element**



استاد !!! اگه میشه تولید کننده و مصرف کننده بودن توان را یه جوری توضیح بدهید که فراموش نکنیم.



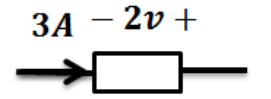
نکته ۵:

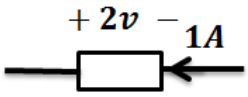
اگر المانی P− وات توان تولید کند، می‌توان گفت این المان مصرف کننده P+ وات توان است.

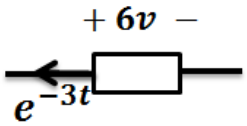
و اگر المانی P+ وات توان مصرف کند، می‌توان گفت این المان تولید کننده P− وات توان است.

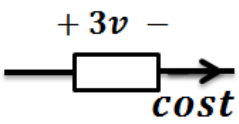
فهمیدن این نکته خیلی ساده است وقتی شما منفی یک میلیون پس انداز داشته باشید معادل این است که یک میلیون بدهی دارید!!!

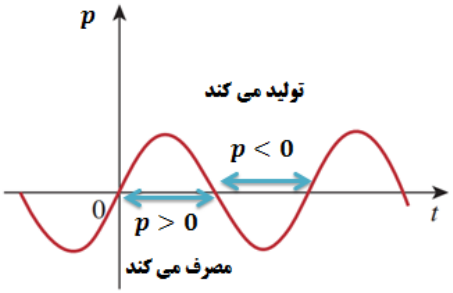
مثال۸: توان تولیدی یا مصرفی هر یک از المان‌های زیر را محاسبه کنید.



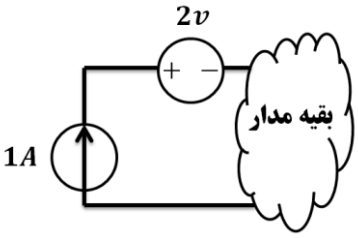








مثال۹: در مدار مقابل منبع ولتاژ مصرف کننده توان است یا تولید کننده توان؟





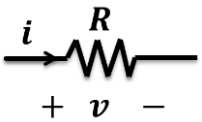
استاد!!! خوب این سوال که واضحه منابع همیشه تولید کننده توان هستند.



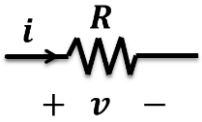
محاسبه توان مقاومت

برای محاسبه توان یک مقاومت دو حالت مقاومت مثبت و مقاومت منفی را در نظر می‌گیریم:

الف) مقاومت مثبت

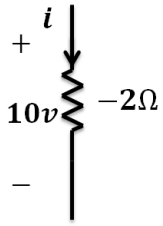


ب) مقاومت منفی



چون رابطه بالا برای یک مقاومت منفی همواره مقدار منفی بدست می آید پس ....

مثال۱۰: مقاومت منفی زیر را در نظر بگیرید با توجه به قانون اهم جریان را از پایانه مثبت به سمت پایانه منفی در نظر می‌گیریم.



کاربرد مقاومت منفی: برای کاهش مقاومت کلی مدار می توان مقاومت منفی را با مقاومت ها سری کرد. همچنین از مقاومت منفی برای ایجاد اختلاف فاز ۱۸۰ درجه بین ولتاژ و جریان استفاده می شود.

قانون بقای توان

یک قانون خیلی مهم و البته کاربردی دیگر در مدارهای الکتریکی قانون بقای توان است. این قانون بیان می‌کند: در یک مدار الکتریکی مجموع توان مصرفی و تولیدی برابر است. این قانون هیچ ارتباطی به توپولوژی مدار ندارد و برای هر مداری صادق است با توجه به این که انرژی پایسته است توان که به نوعی تغییرات انرژی در واحد زمان است هم باید پایسته باشد. حالا نوبت فرمول بندی این قانون است.

$$\sum P_{\text{تولیدی}} = \sum P_{\text{مصرفی}}$$

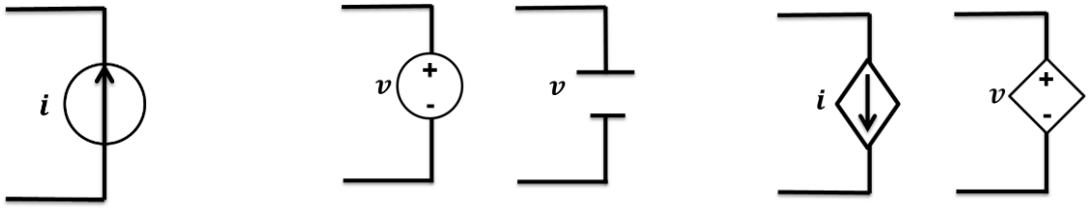
منابع مستقل و وابسته

منبع ولتاژ مستقل منبع ولتاژی است که ولتاژ دو سرش به ولتاژ یا جریان المان دیگری در مدار وابسته نباشد و ولتاژ و جریان المان دیگری در مدار نتواند ولتاژ آن را تحت تاثیر قرار دهد. به طور مشابه منبع جریان مستقل منبع جریانی است که جریان آن به ولتاژ یا جریان

المان دیگری در مدار وابسته نباشد. با توجه به این تعریف ها مفهوم منبع‌های وابسته هم کاملا مشخص می شود.

منبع ولتاژ وابسته: منبع ولتاژی است که ولتاژ دو سرش به ولتاژ یا جریان المان دیگری در مدار وابسته است.

منبع جریان وابسته: منبع جریانی است که جریان آن به ولتاژ یا جریان المان دیگری در مدار وابسته است.



منبع جریان مستقل منبع ولتاژ مستقل منبع جریان و ولتاژ وابسته

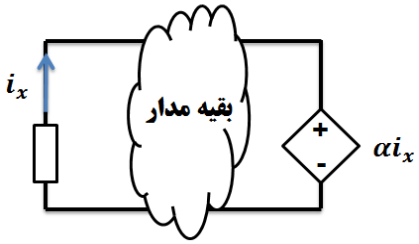
باید بدانید که از این منابع برای مدل‌سازی مدارات ترانزیستوری و ترانسفورماتورها استفاده می‌شود و وجود خارجی ندارند.



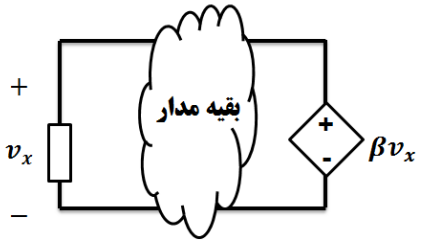
پس با این حساب می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای هر یک از منابع ولتاژ و جریان وابسته دو حالت به وجود می آید: ۱. منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ ۲. منبع ولتاژ وابسته به جریان ۳. منبع جریان وابسته به جریان ٤. منبع جریان وابسته به ولتاژ .



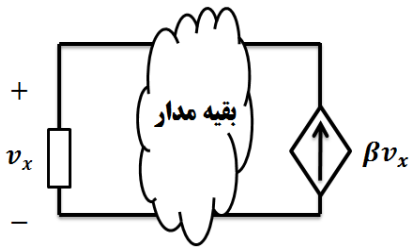
آفرین خیلی عالی بود. این‌جا می‌توانید چهار حالتی که گفته شد را ببینید.



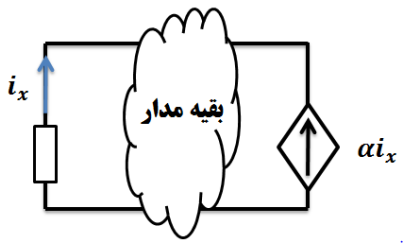
منبع ولتاژ وابسته به جریان



منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ



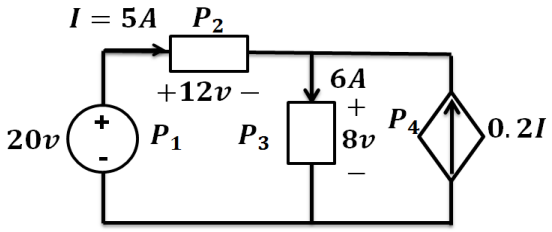
منبع جریان وابسته به ولتاژ



منبع جریان وابسته به جریان

به عنوان مهندسین برق آینده باید بدانید ...

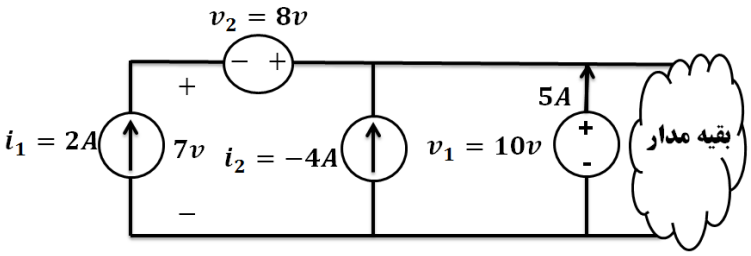
مثال۱۱: کدام یک از المان های زیر توان تولید و کدام یک دریافت می‌کند توان هر المان را محاسبه کنید.



پاسخ:

مثال۱۲: کدام یک از چهار منبع در شکل زیر توان جذب می کنند؟(مهندسی برق- ۸۱)

۱. i_2
۲. i_1
۳. v_2
۴. v_1





استاد!!!! یک قسمت از مدار مجهوله حالا باید چی کار کنیم؟



جریان و ولتاژ المان‌ها مورد نیاز است که برای تک تک المان ها این مقادیر مشخص است.

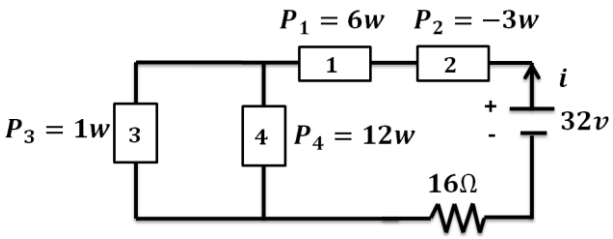
حالا بریم سراغ حل سوال:

مثال۱۳: در مثال قبل بقیه مدار توان مصرف می کند یا تولید؟ چقدر؟

پاسخ:

نکته: اگر در صورت سوال نوع توان ذکر نشود پیش فرض توان مصرفی است.

مثال۱٤: در مدار مقاومتی زیر توان هر یک از المان ها داده شده است جریان i چقدر است؟ (مهندسی برق- ۸۵)



۱. $1A$ ۲. $2A$ ۳. $\frac{1}{2}A$ ٤. $\frac{1}{4}A$

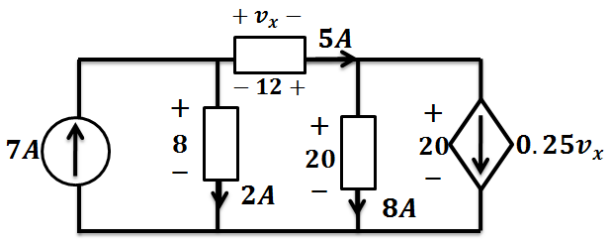
پاسخ:



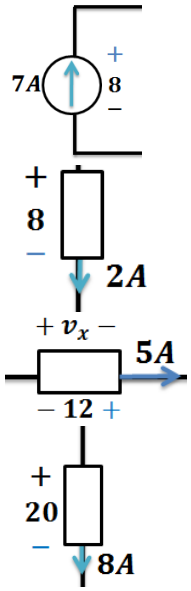
استاد!!! مثل این که این المان‌های جعبه‌ای رو از قلم انداختید. میشه معرفی شون کنید؟



مثال۱۵: توان مصرفی و تولیدی تمام المان‌های مدار زیر را بدست آورید.



پاسخ:

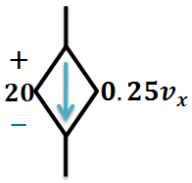


جریان از سر مثبت خارج می‌شود بنابراین تولیدکننده توان است $P_1 = 7 \times 8 = 56$

جریان از سر منفی خارج می‌شود بنابراین مصرف کننده توان است $P_2 = 8 \times 2 = 16$

جریان از سر مثبت خارج می‌شود بنابراین تولیدکننده توان است $P_3 = 12 \times 5 = 60$

جریان از سر منفی خارج می‌شود بنابراین مصرف کننده توان است $P_4 = 20 \times 8 = 160$



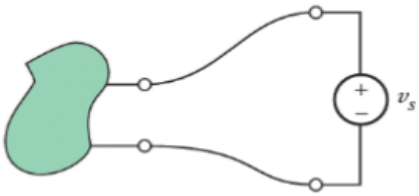
با توجه به مدار صورت سوال واضح است که $v_x = -12v$ بنابراین جریان منبع جریان وابسته به ولتاژ v_x برابر است با

$I = 0.25v_x = -3A \rightarrow P_4 = 20 \times -3 = -60$ مصرفی $\rightarrow 60$ تولیدی

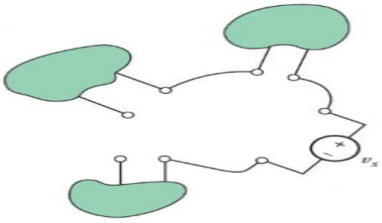
چند تا مفهوم دیگه رو در ادامه با هم بررسی می‌کنیم:

تفاوت شبکه و مدار

چند المان که بهم متصل باشند تشکیل شبکه می دهند. اگر این شبکه تشکیل یک حلقه بسته دهد مدار نامیده می شود.



مدار



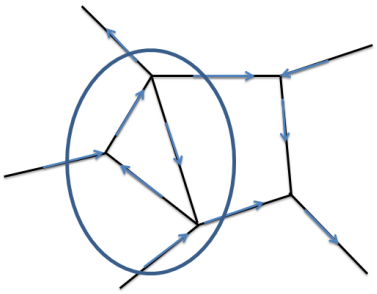
شبکه

گره: نقطه اتصال دو یا چند شاخه را گره می‌نامند.

شاخه: هر المانی تشکیل یک شاخه می دهد. این شاخه می‌تواند منبع ولتاژ، جریان ، مقاومت و... باشد. باید بدانید که جریان ورودی به هر شاخه با جریان خروجی آن برابر است.

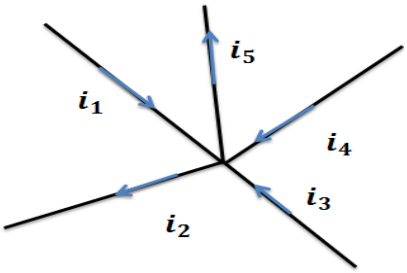
قوانین کیرشهف[۱۰]

با قانون اهم به تنهایی نمی‌توان، مدارهای الکتریکی را تحلیل کرد. کیرشهف یک فیزیکدان آلمانی بود که دو قانون مهم برای آنالیز مدارهای الکتریکی ارائه کرد. در این بخش با این قوانین آشنا می‌شویم.



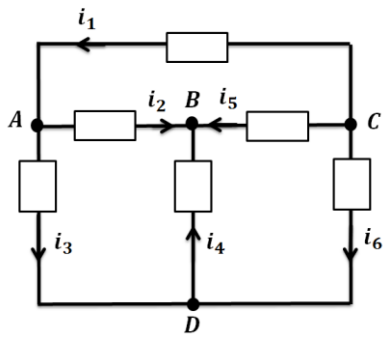
قانون جریان KCL : در هر مدار فشرده جریان ورودی به هر سطح بسته برابر با مجموع جریان‌های خروجی از آن سطح بسته است. به عبارت دیگر جمع جبری جریان های وارد شده به یک سطح بسته برابر با صفر است. به معادله مجموع جریان ها در یک سطح بسته KCL می‌گویند.

بیانی دیگر از قانون جریان: در هر مدار فشرده جمع جبری جریان‌های وارد شده به یک کاتست یا گره صفر است.



قرار داد: جریان های ورودی را مثبت و جریان خروجی را منفی در نظر گرفته ایم.
توجه کنید که این صرفا یک قرار داد است و در کتب و مراجع دیگر می‌تواند متفاوت باشد.
به عنوان مثال اگر جریان شاخه‌های مدار روی مدار تعریف شده باشد معادلات KCL را می‌توان به صورت زیر نوشت:

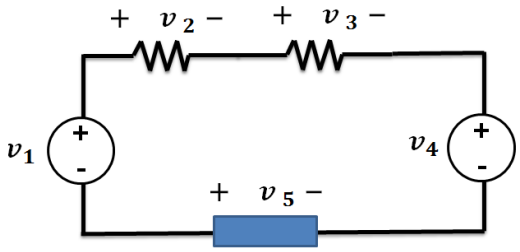
[۱۰] Kirchhoff's Laws



قانون جریان کیرشهف در واقع همان، قانون پایستگی بار الکتریکی است، چون بار الکتریکی پایسته است جریان هم که تغییرات بار الکتریکی در واحد زمان است پایسته خواهد بود.

قبل از پرداختن به قانون ولتاژها بهتر است، با مفهوم ولتاژ مرجع آشنا شوید.

ولتاژ مرجع: همانطور که می دانید روی زمین قرارداد کرده اند که ارتفاع سطح دریاهای آزاد صفر متر است و ارتفاع بقیه نقاط را نسبت به سطح دریا می‌سنجند، حال اگر به جای دریا، ارتفاع قله دماوند به عنوان ارتفاع مرجع قرار داده شود ارتفاع تمام نقاط عوض می‌شود ولی اختلاف ارتفاع نقاط تغییری نمی‌کند. ما هم در مدارهای الکتریکی یک نقطه را به عنوان مرجع در نظر می‌گیریم و معمولا ولتاژ مرجع را زمین یا صفر ولت قرارداد می‌کنیم



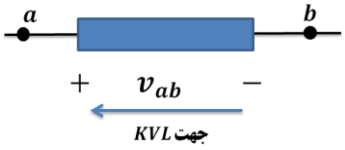
قانون ولتاژ یا ***KVL***: در هر مسیر بسته مدار مجموع ولتاژها در هر لحظه صفر است. به معادله مجموع ولتاژها در یک مسیر بسته ***KVL*** می‌گویند.

برای نوشتن معادله ***KVL*** از یک نقطه از حلقه شروع می‌کنیم و ولتاژ دو سر هر المان را به صورت جبری با هم جمع می‌کنیم. اگر از سر منفی به مثبت حرکت کنیم ولتاژ المان را با علامت منفی و اگر از سر مثبت به منفی حرکت کنیم ولتاژ المان را با علامت مثبت جمع می‌کنیم.

قرار داد: اگر در مسیر حرکت از سر منفی المان وارد شویم ولتاژ را منفی و اگر از سر مثبت وارد شویم ولتاژ را مثبت در نظر می گیریم. توجه کنید که این صرفا یک قرار داد است و در کتب و مراجع دیگر می تواند متفاوت باشد.

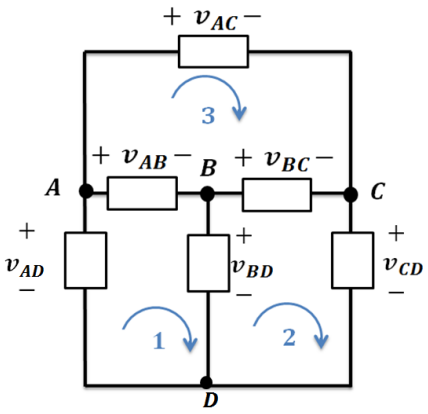


$+v_{ab}$



$-v_{ab}$

به عنوان مثال برای مدار زیر معادلات KVL را می‌نویسیم:

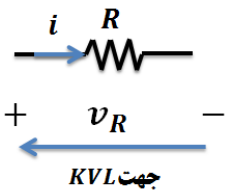


استاد یک KVL از قلم افتاد!!! KVL در حلقه بیرونی را ننوشتیم.

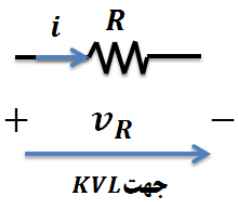




افت ولتاژ دو سر مقاومت



هنگام عبور از مقاومت اگر جریان مقاومت خلاف جهت KVL باشد در معادله افت ولتاژ دو سر مقاومت را به صورت $-Ri$ لحاظ می‌کنیم چون از سر منفی مقاومت وارد و از سر مثبت آن خارج شده ایم.



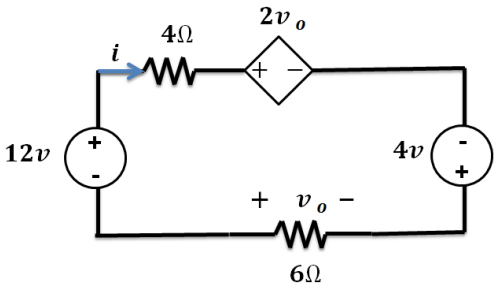
هنگام عبور از مقاومت اگر جریان مقاومت هم جهت با KVL باشد در معادله افت ولتاژ دو سر مقاومت را به صورت $+Ri$ لحاظ می‌کنیم. چون از سر مثبت مقاومت وارد و از سر منفی آن خارج شده ایم.

نکته :

از حالا به بعد تصمیم می‌گیریم که همیشه در جهت جریان KVL بزنیم و اگر در مسیر KVL نویسی چند جریان مختلف وجود داشت در جهتی KVL می‌زنیم که بیشتر جریان های مسیر هم جهت با آن باشند چون با این کار مجبور نیستیم برای هر مقاومت علامت منفی بگذاریم .

مثال۱۶: در مدار زیر جریان i و ولتاژ v_o را بدست آورید.

پاسخ: با اعمال قانون KVL در جهت جریان مدار داریم:

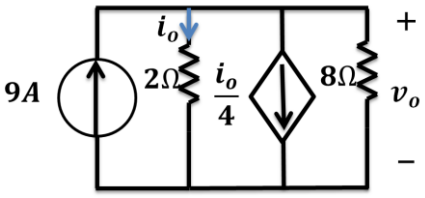




استاد!!! اگه پادساعتگرد KVL می‌زدیم جواب تغییر می‌کرد؟

مثال۱۷: در مدار زیر جریان i و ولتاژ v_o را بدست آورید.

پاسخ:





استاد!!!! من که نفهمیدم کجا باید از قانون KVL و کجا باید از قانون KCL استفاده کنم؟



روش های کلاسیک تحلیل مدار

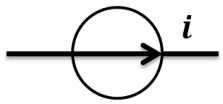
برای تحلیل مدارهای الکتریکی دو روش کلاسیک وجود دارد روش مش[۱۱] و روش گره[۱۲]. این دو روش در تحلیل مدارهای الکتریکی بسیار رایج اند ولی برای کنکور و تست زنی سریع روش مناسب تری به نام پخش جریان وجود دارد که ما با استفاده از این روش مسائل را حل خواهیم کرد. اما برای امتحانات دانشگاه باید به این روش‌ها کاملا مسلط باشید به همین دلیل ما در اینجا ابتدا به معرفی روش‌های کلاسیک می‌پردازیم و سپس سراغ روش تکنیکی پخش جریان می رویم.

روش مش

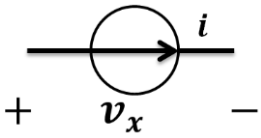
برای استفاده از روش مش باید در اولین گام مش را تعریف کنیم، به ساده‌ترین حلقه‌ای که هیچ شاخه‌ای درون آن نباشد مش گفته می‌شود. برای تحلیل مدار به روش مش به شیوه زیر عمل می‌کنیم.

۱- مش‌های مناسب (حلقه های مناسب) مدار را انتخاب می‌کنیم.

مش مناسب مشی است که شامل منبع جریان نباشد و اگر هم منبع جریان داشت ولتاژ دو سر آن مشخص باشد.



منبع جریان نامناسب برای KVL زدن



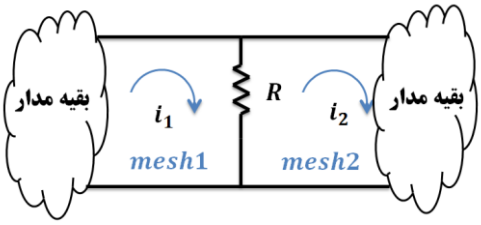
منبع جریان مناسب برای KVL زدن

۲- برای هر مش جریانی با جهت دلخواه در نظر می‌گیریم سپس در مش های مناسب مدار KVL می‌زنیم. هنگام عبور از شاخه مشترک دو مش اگر جریان دو مش هم جهت بود جریان شاخه مورد نظر برابر با مجموع دو جریان می شود و اگر مخالف جهت هم بود جریان آن دو شاخه از هم کم می شود. به عنوان مثال در مدار زیر هنگام KVL نویسی در مش اول و در

[۱۱] Mesh analysis

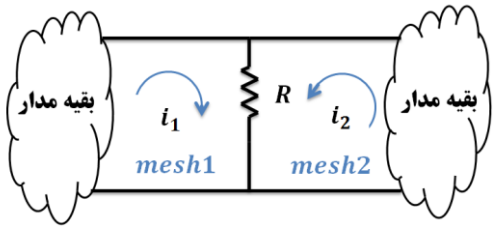
[۱۲] Node analysis

لحظه عبور از شاخه مقاومتی بین دو مش با توجه به این که جریان دو مش در شاخه مقاومتی خلاف جهت هم اند برای محاسبه افت ولتاژ دو سر مقاومت جریان ها را از هم کم می کنیم.



$$V_R = R(i_1 - i_2)$$

توجه کنید اگر چه جریان هر دو مش ساعتگرد است اما جریان مش۱ در جهت پایین از مقاومت عبور می‌کند و جریان مش ۲ به سمت بالا از مقاومت عبور می کند. بنابر این از هم کم می شوند. همچنین در مدار زیر هنگام ***KVL*** نویسی در مش اول و در لحظه عبور از شاخه مقاومتی بین دو مش با توجه به این که جریان دو مش در شاخه مقاومتی هم جهت است برای محاسبه افت ولتاژ دو سر مقاومت جریان ها را با هم جمع می کنیم.



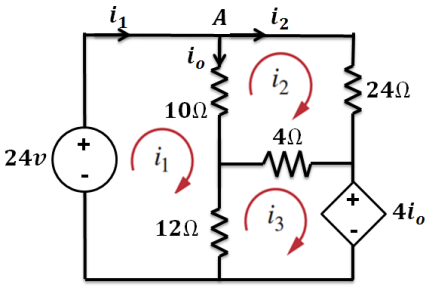
$$V_R = R(i_1 + i_2)$$

توجه کنید اگر چه جریان مش ۱ ساعتگرد و جریان مش ۲ پادساعتگرد است اما هر دو به سمت پایین از شاخه مقاومتی عبور می کنند بنابر این با هم جمع می شوند. تاکید می کنم که ***KVL*** ها در مش ۱ نوشته شده است.

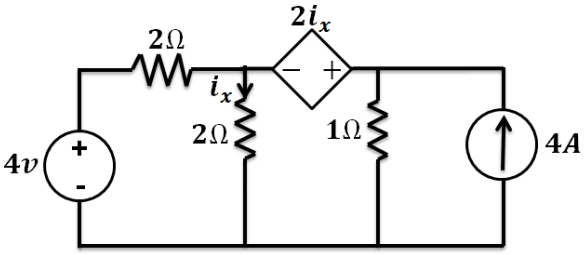
۳- رابطه جریان را در مرز مش ها می نویسیم.

نکته: به خاطر داشته باشید که هنگام تحلیل مدار به روش مش به جهت جریان‌های معلوم دست نزنید و نامعلوم ها را دلخواه در نظر بگیرید.

مثال۱۸: در مدار زیر جریان هر شاخه را حساب کنید.



مثال۱۹: در مدار زیر شدت جریان i_x کدام است.(مهندسی کامپیوتر-گرایش سخت افزار - ۸۰)



۱. $\frac{1}{2}$ ۲. 1

۳. 2 ۴. $\frac{3}{2}$

روش گره

در این روش با تعریف ولتاژ برای گره‌های مجهول مدار و اعمال قانون KCL ، ولتاژها و در نتیجه جریان‌های مدار را محاسبه می کنیم.

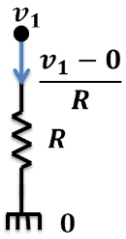
مراحل انجام روش گره

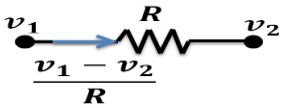
۱- ابتدا گره‌ای را به عنوان گره زمین یا مرجع تعیین می‌کنیم. بهتر است گره‌ای که بیشترین شاخه به آن متصل است را به عنوان زمین مدار در نظر بگیریم. ولتاژ گره زمین صفر ولت در نظر گرفته می‌شود.

۲- ولتاژ گره ها را نسبت به گره زمین مشخص می‌کنیم.

۳- با استفاده از قانون اهم جریان شاخه ها را بر حسب ولتاژ گره‌ها بدست می آوریم.

به عنوان نمونه در شاخه‌های زیر به این صورت عمل می‌کنیم:

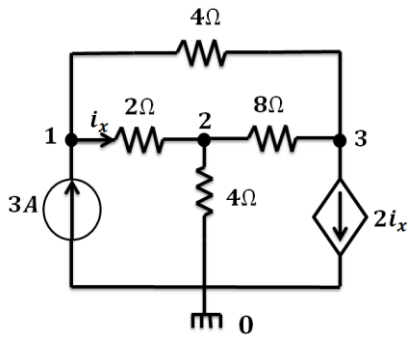




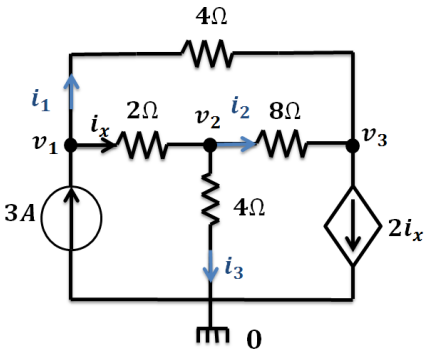
٤- معادلات KCL را برای گره‌های مدار می‌نویسیم.

از حل معادلات ولتاژ گره ها بدست می‌آید. با داشتن ولتاژ هر گره جریان شاخه‌های مدار قابل محاسبه است.

مثال۲۰: در مدار زیر ولتاژ گره ها و جریان شاخه ها را محاسبه کنید.



پاسخ: زمین مدار را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید، حالا تک تک گره‌های مدار را نامگذاری می‌کنیم، سپس معادلات $\boldsymbol{KCL}$ را برای گره‌های مدار می‌نویسیم.

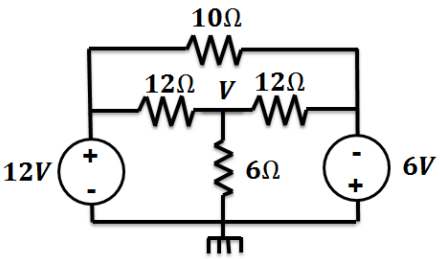




استاد اگر جهت جریان‌های $\boldsymbol{i_1}$ و $\boldsymbol{i_2}$ را برعکس در نظر می‌گرفتیم حتما جواب‌ها تغییر می‌کردند!!!



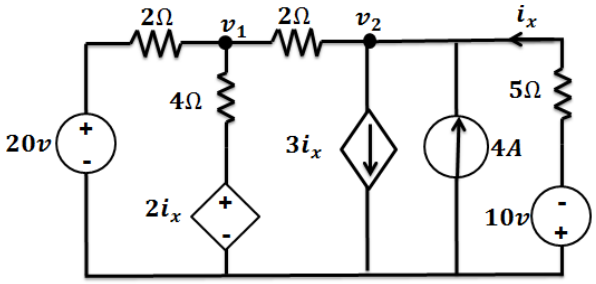
مثال۲۱: در مدار زیر V کدام است؟



۱. $\frac{3}{2}$ ۲. $\frac{2}{3}$

۳. $\frac{5}{3}$ ۴. $\frac{3}{5}$

مثال۲۲: در مدار زیر v_2 کدام است؟



۱. $\frac{580}{3}$ ۲. $\frac{-164}{3}$

۳. $\frac{164}{3}$ ٤. $\frac{-580}{3}$



استاد در مثال قبل گره زمین مشخص نشده و خودتون گره زمین رو انتخاب کردید. اگه نقطه‌ی دیگه‌ای رو به عنوان گره زمین در نظر بگیرید، حتما جواب‌ها تغییر می‌کنند!!!



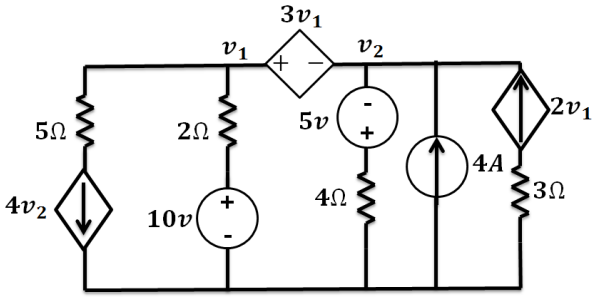


استاد!!!! از کجا تشخیص بدهیم که چه زمانی از روش مش استفاده کنیم و چه زمانی از روش گره؟

ابر گره[۱۳]

مبحث جدید را با یک مثال شروع می‌کنم.

مثال ۲۳: مدار زیر را در نظر بگیرید. در این مدار حاصل $v_1 - v_2$ را با استفاده از روش گره بیابید.





پاسخ:اولین کاری که باید انجام بدهیم این است که گره زمین را مشخص کنیم. مشابه مثال‌های قبل گره پایین مدار که بیشترین شاخه به آن وارد می شود گره زمین است حالا نوبت KCL نویسی است با گره۱ شروع می کنم:

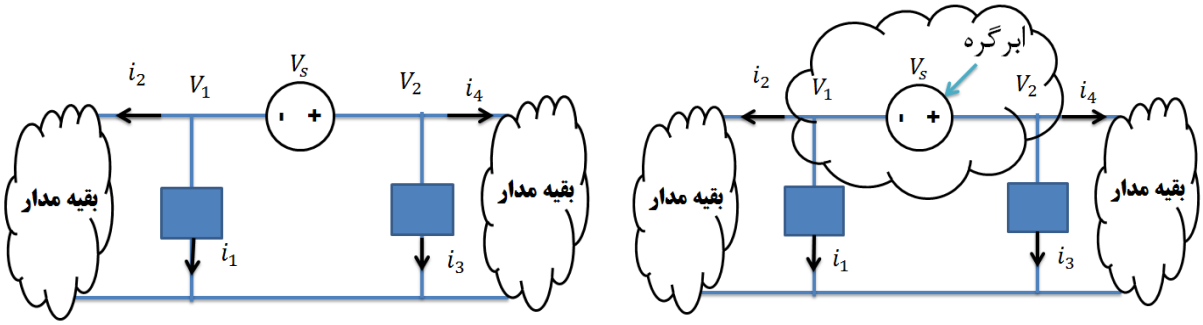
$$\frac{v_1 + 10}{2} + 4v_2 + ???$$

گیر کردم شاخه ای که فقط منبع ولتاژ دارد جریانش را نمی‌توان نوشت اصلا این مدار را نباید از روش گره حل کرد.

[۱۳] Super node



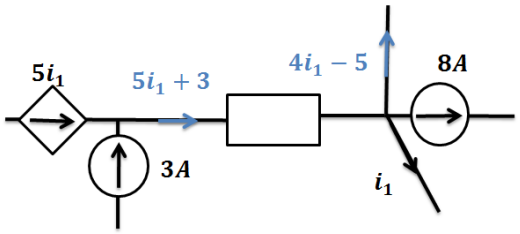
از اولش معلوم بود تو حل مدار گیر می کنید اما باید بدانید که در برخی موارد برای تحلیل با استفاده از روش گره یک شاخه که فقط دارای منبع ولتاژ است بین دو گره قرار می گیرد و چون نمی‌توانیم جریان شاخه ای که فقط متشکل از منبع ولتاژ است را بنویسیم دچار مشکل می‌شویم بنابراین دو گره دو سر شاخه به همراه منبع ولتاژ را یک گره در نظر می گیریم به این گره ابر گره یا ***super node*** می گویند.



روش ترکیبی یا پخش جریان

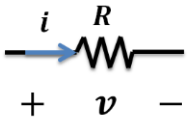
در بسیاری از مسائل استفاده از روش مش یا روش گره محاسبات را پیچیده و طولانی می کند و باعث ایجاد مجهولات زیادی در مدار می شود برای حل این مشکل از یک روش ترکیبی به نام پخش جریان استفاده می‌کنیم. همانطور که از نام این روش مشخص است در این روش با استفاده از KCL جریان های هر شاخه را برحسب جریان های واقعی مدار می‌نویسیم.

مثال۲۴: در مدار زیر می‌توانید پخش جریان را مشاهده کنید.



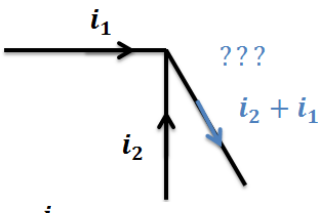
با این روش از ایجاد مجهولات متعدد و اضافی در مدار جلوگیری می‌کنیم و نیازی نیست به صورت جداگانه KCL بزنیم چون KCL ها روی شکل اعمال شده است. استفاده از این روش کمی ریزه کاری و جزئیات دارد که در قالب چند نکته آن ها را بیان می کنیم.

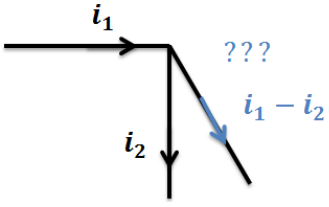
۱. اگر ولتاژ دو سر مقاومت تعریف شده باشد (ولتاژ دو سر مقاومت خیلی تابلو مشخص باشه) با استفاده از قانون اهم جریان آن را می‌نویسیم:

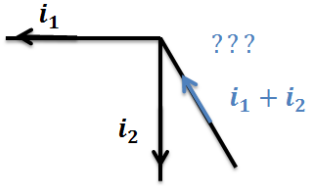


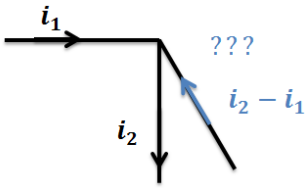
$$i=\frac{v}{R}$$

۲. جریان های هر شاخه را برحسب جریان های واقعی مدار می نویسیم:

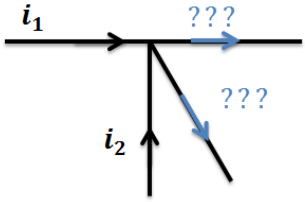


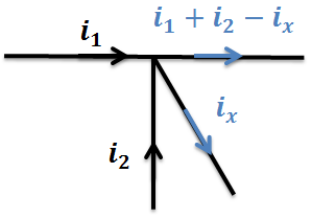




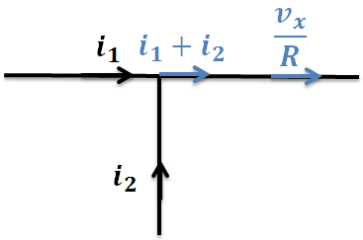


۳. اگر جریان دو شاخه مجهول بود و نمی‌توانستیم بر حسب متغیرهای مدار بنویسیم به ناچار خودمان یک جریان اضافه می‌کنیم. جهت جریانی که ما اضافه می کنیم کاملا دلخواه و اختیاری است.

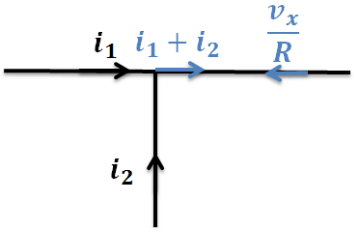




۴. اگر پس از پخش جریان در یک شاخه دو عبارت برای جریان بدست آمد قوانین زیر را اعمال کنید.



$$i_1 + i_2 = \frac{v_x}{R}$$

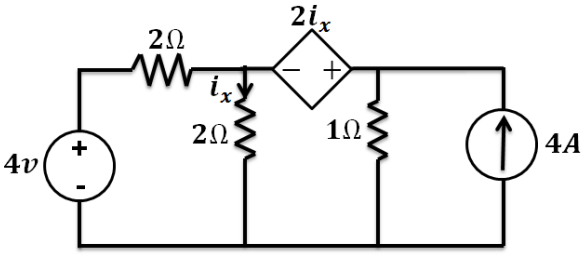


$$i_1 + i_2 = -\frac{v_x}{R}$$

۵. در حلقه های مناسب **KVL** بزنید.(حلقه ای که ولتاژ دو سر المان های آن مشخص باشد و شامل منبع جریانی نباشد که ولتاژ دو سرش تعریف نشده است)

حالا با ارائه مثال‌ها و تست‌های متنوع این روش حرفه‌ای را به شما آموزش می‌دهیم.

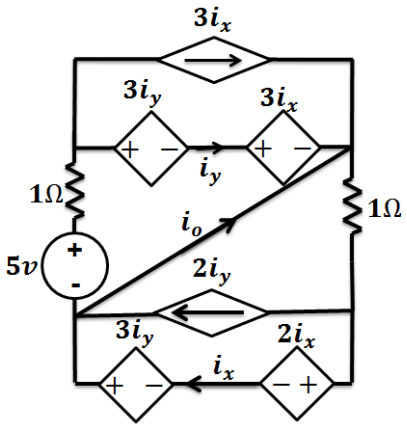
مثال ۲۵: در مدار زیر شدت جریان i_x کدام است؟(مهندسی کامپیوتر- گرایش سخت افزار- ۸۰)



۱. $\frac{1}{2}$
۲. 1
۳. 2
۴. $\frac{3}{2}$

حواستون باشه: نوشتن KVL در حلقه بزرگتر که متشکل از دو حلقه است هیچ فایده ای

مثال۲۶: جریانi_o در مدار شکل مقابل چند آمپر است؟(مهندسی کامپیوتر- گرایش هوش مصنوعی- ۸۰)



۱. $2A$ ۲. $3A$

۳. $\frac{5}{18}A$ ۴. $\frac{6}{5}A$

پاسخ:



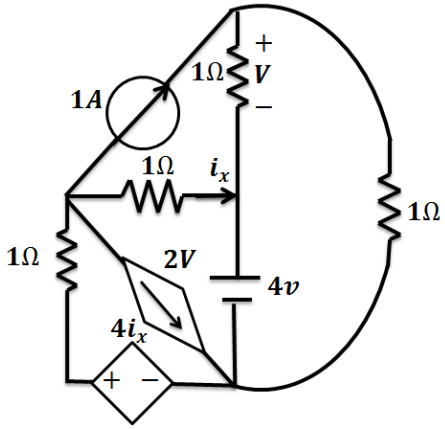
استاد ما رو گرفتید !!! شاخه i_o اتصال کوتاهه و جریانش صفره ؟

.

قرارداد : علامت $\overrightarrow{\rightarrow}$ بیانگر این مساله است که بعد از پخش جریان، دو جریان هم جهت روی یک شاخه قرار گرفته اند.

قرارداد : علامت $\overrightarrow{\leftarrow}$ بیانگر این مساله است که بعد از پخش جریان، دو جریان در راستای مخالف هم روی یک شاخه قرار گرفته اند.

مثال۲۷: جریان i_x در شکل مقابل چند آمپر است؟ (مهندسی کامپیوتر- گرایش هوش مصنوعی ۸۳)



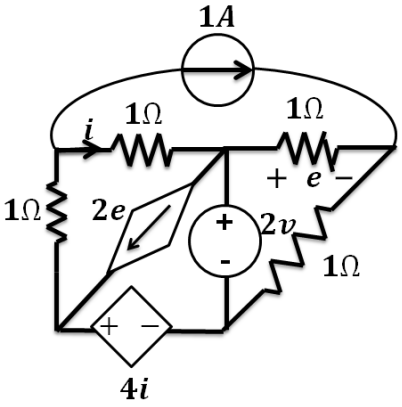
۱. 1

۲. 2

۳. 3

۴. -2

مثال۲۸: در مدار زیر شدت جریان i کدام است.(مهندسی برق-۷۲)



۱. $1.5A$

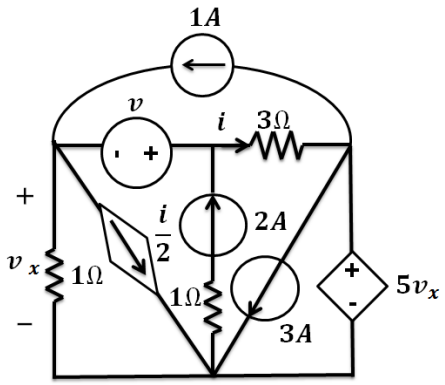
۲. $2A$

۳. $2.5A$

۴. $-0.5A$

پاسخ:

مثال۲۹: در مدار زیر مقدار v چقدر باشد تا $v_x = 0$ شود؟(مهندسی برق-۷۳)



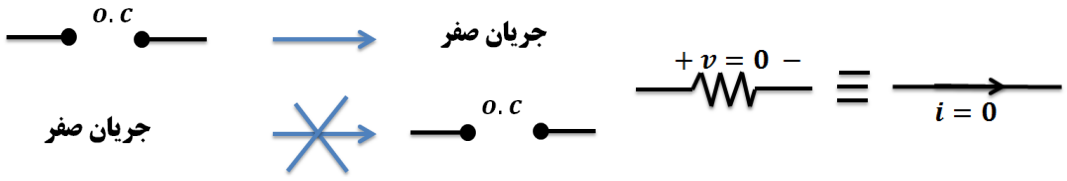
۱. $3A$ ۲. $6A$

۳. $12A$ ۴. $18A$

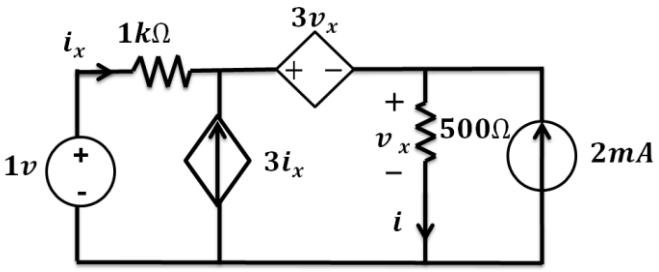
پاسخ:

نکته: اگر در صورت سوال گفته بود چنان کنید که فلان بلا سر مدار بیاید شما از ابتدا برای حل مساله آن بلا را سر مدار پیاده کنید.

نکته: اگر ولتاژ دو سر مقاومت صفر شود جریان آن حتما صفر می شود ولی حق نداریم آن را مدار باز کنیم. به طور کلی در یک مدار صفر شدن جریان همیشه معادل مدار باز بودن نیست اما مدار باز بودن همیشه معادل صفر بودن جریان است. اگر مقاومتی ولتاژ دو سرش صفر شد می‌توانید آن را با شاخه اتصال کوتاه با جریان صفر مدل کنید.



مثال۳۰: در مدار زیر شدت جریان i را حساب کنید.(مهندسی برق- ۷۴)



۱. $\frac{1}{3}A$ ۲. $\frac{2}{3}mA$

۳. $\frac{2}{3}A$ ۴. $\frac{4}{3}mA$

نکته:

در مدارات الکترونیکی وقتی ولتاژ بر حسب ولت و مقاومت بر حسب کیلو اهم باشد جریان برحسب میلی آمپر بدست می‌آید.

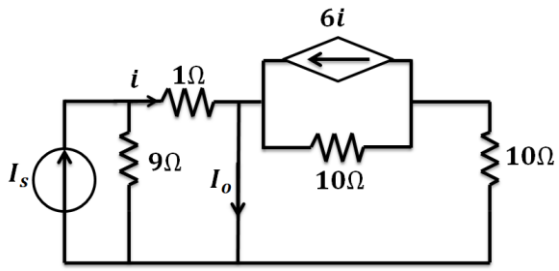
ولتاژ : v

مقاومت : $K\Omega$

جریان : mA

در چنین مسائلی ، واحد کیلو اهم را به اهم تبدیل نکنید زیرا باعث ایجاد اعداد بزرگ می‌شود و محاسبات را دشوار می‌کند.

مثال۳۱: در مدار زیر نسبت I_o/I_s چقدر است؟(مهندسی برق-۷۵)



۱. -1.8

۲. 0.9

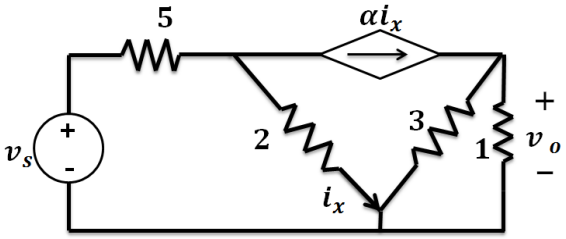
۳. 2.7

۴. 3.6

پاسخ:

نکته: هر وقت نسبت دو متغیر x و y یعنی x/y را از ما خواستند، y را مساوی یک قرار می دهیم و x را بدست آوریم، نسبت همان x است.

مثال۳۲: در مدار شکل مقابل مقاومت ها بر حسب مهو داده شده اند. حداقل مقدار α که به ازای آن مدار برای خروجی v_0 مانند یک تقویت کننده عمل می کند. چیست؟(مهندسی برق-۷۸)



۱. **10**

۲. **12**

۳. **14**

٤. به علت وجود منبع وابسته این مدار همیشه مانند تقویت کننده عمل می‌کند.

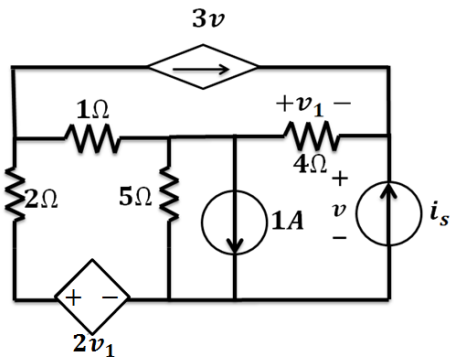
پاسخ:

نکته:

۱. برای این که مدار تقویت کننده باشد باید نسبت $v_o/v_s > 1$ باشد. به عبارت دیگر در یک مدار تقویت کننده سیگنال خروجی از سیگنال ورودی بزرگتر است و نسبت سیگنال خروجی به ورودی یا همان بهره یا گین مدار باید از یک بیشتر باشد.

۲. برای این که مدار کاهنده باشد باید نسبت $v_o/v_s < 1$ باشد. به عبارت دیگر در یک مدار کاهنده سیگنال خروجی از سیگنال ورودی کوچکتر است و نسبت سیگنال خروجی به ورودی یا همان بهره یا گین مدار باید از یک کمتر باشد.

مثال۳۳: در مدار زیر شدت جریان i_s را چنان تعیین کنید که جریان منبع ولتاژ وابسته صفر شود.

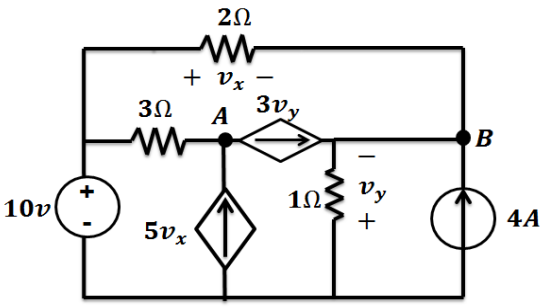


۱. $\frac{25}{23}$ ۲. $\frac{-25}{23}$

۳. $\frac{20}{23}$ ۴. $\frac{-10}{23}$

پاسخ:

مثال۳٤: مقادیر v_x و v_y در مدار شکل مقابل بر حسب ولت کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر – سخت افزار- ۷۹)



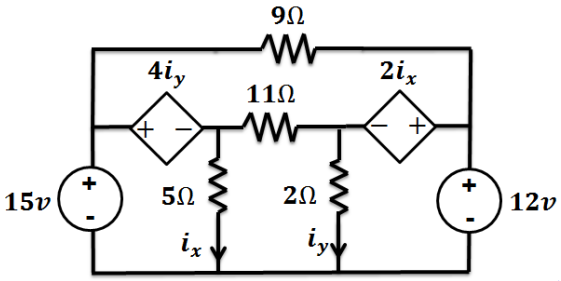
۱. $v_y = 2$ و $v_x = 8$

۲. $v_y = 2$ و $v_x = -8$

۳. $v_y = -2$ و $v_x = 8$

٤. $v_y = -2$ و $v_x = -8$

مثال۳۵: جریان i_x نشان داده شده در شکل مقابل چند آمپر است؟ (مهندسی کامپیوتر- گرایش معماری- ۸۳)



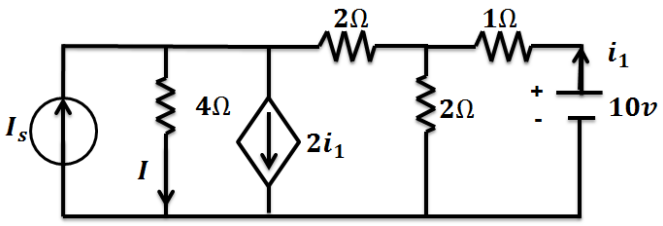
۱. -2

۲. 2

۳. -9

۴. 15

مثال۳۶: در مدار زیر مقدار منبع i_s (برحسب آمپر) در صورتی که $I = 0$ باشد کدام است؟(مهندسی برق- ۷۵)



۱. $2.5A$

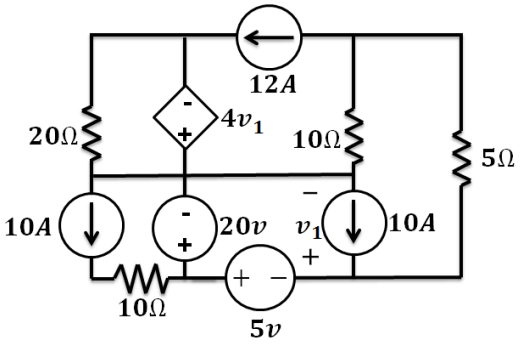
۲. $7.5A$

۳. $22.5A$

۴. $27.5A$

پاسخ:

مثال۳۷: توان منبع وابسته $4v_1$ چند وات است؟ (مهندسی اتوماسیون- ۹۱)



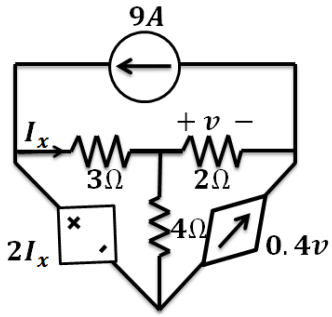
۱. -900

۲. 540

۳. 1200

۴. 1500

مثال۳۸: توان منبع وابسته$2I_x$ چند وات است؟ (مهندسی اتوماسیون- ۹۱)

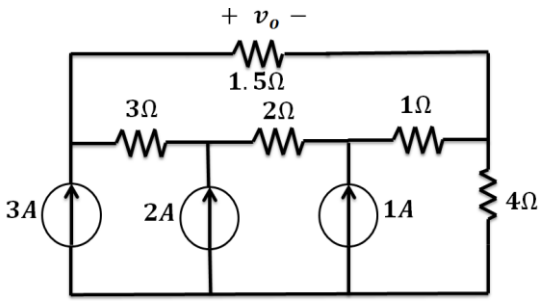


۱. $40w$ ۲. $20w$

۳. $60w$ ۴. $80w$

پاسخ:

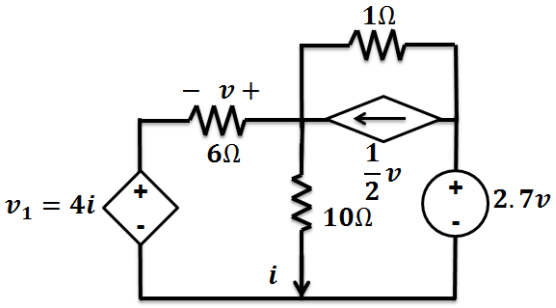
مثال۳۹: ولتاژ v_o در مدار شکل مقابل چند ولت است؟ (مهندسی کامپیوتر-گرایش معماری - ۸۹)



۱. $\frac{27}{5}$ ۲. 5

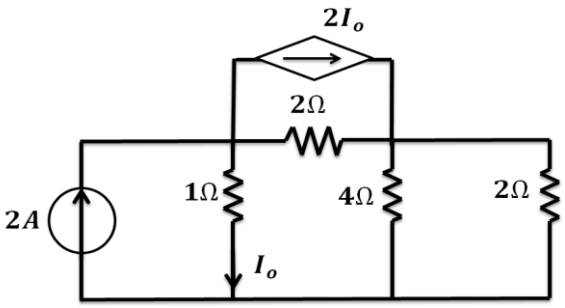
۳. $\frac{24}{5}$ ۴. 6

مثال۴۰: در مدار شکل مقابل توان منبع ولتاژ وابسته v_1 چند وات است؟ (مهندسی اتوماسیون – ۹۳)



۱. 0.3
۲. 0.36
۳. 1.2
۴. 3

مثال۴۱: در مدار زیر توان منبع وابسته چند وات است؟ (مهندسی کامپیوتر- گرایش هوش مصنوعی- ۹۲)



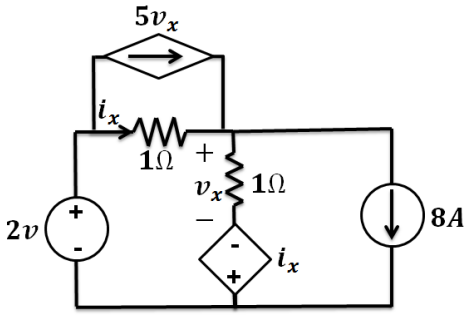
۱. -1.28

۲. 1

۳. 0.64

۴. -0.64

مثال۴۲: در مدار زیر توان منبع ولتاژ ۲ ولتی، چند وات است؟ (دکتری مهندسی برق- ۹۵)



۱. **5**

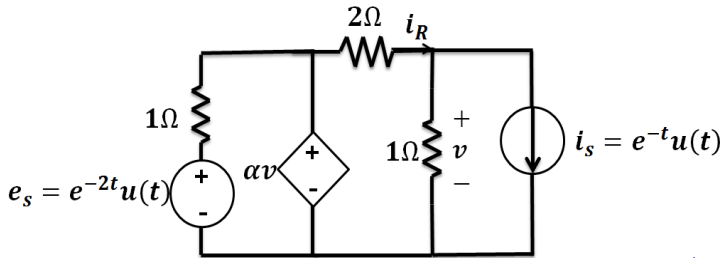
۲. **10**

۳. **20**

۴. **40**

پاسخ:

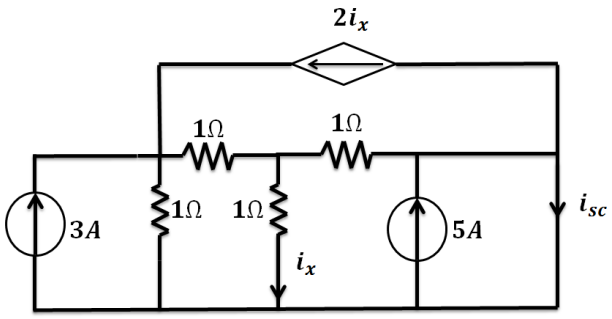
مثال۴۳: در مدار شکل زیر α را چنان تعیین کنید که شدت جریان مقاومت ۲ اهمی $e^{-t}u(t)$ $i_R = \frac{1}{2}$ باشد؟ (مهندسی برق- ۸۲)



۱. -3
۲. -1
۳. 1
۴. 3

نکته: در مدارات مقاومتی جنس ورودی اهمیت ندارد. بنابراین چه ورودی از جنس نمایی و چه از جنس سینوسی و یا ورودی DC باشد. روش تحلیل مدار تغیری نمی کند. این مساله برای مدارهای سلفی و خازنی صادق نیست.

مثال٤٤: جریان اتصال کوتاه I_{sc} کدام است؟(مهندسی برق- ۸۳)



۱. **1A**

۲. **2A**

۳. **4A**

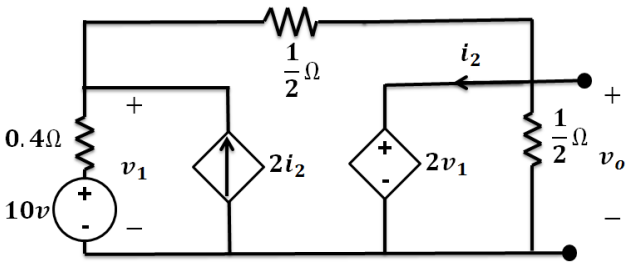
٤. **8A**

بنابراین گزینه۳ صحیح است.



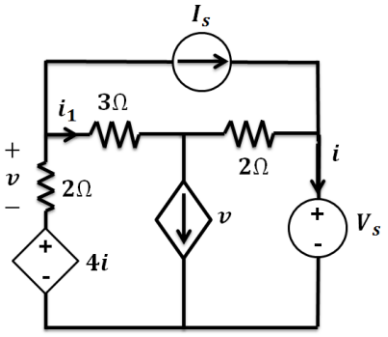
استاد!!! با توجه به این که جریان الکتریکی تمایل دارد از شاخه ای با کمترین مقدار مقاومت عبور کند چرا کل جریان منبع $5A$ از شاخه اتصال کوتاه عبور نمی‌کند؟ و مقدار جریان اتصال کوتاه کمتر از $5A$ شده است؟

مثال۴۵: ولتاژ خروجی v_o در مدار شکل مقابل کدام است؟(مهندسی برق- ۸۶)



۱. 2
۲. 4
۳. 6
۴. 8

مثال٤٦: اگر در مدار شکل زیر $i = 2i_1$ باشد مقدار V_s/I_s کدام است؟ (مهندسی برق -۸۷)



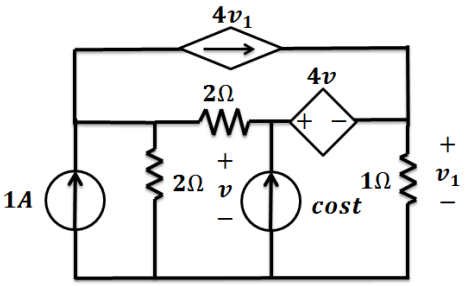
۱. $\frac{-1}{3}$ ۲. $\frac{-1}{2}$

۳. 2 ٤. 3

گزینه ٤ صحیح است.

اشتباه متداول: توجه کنید که در منبع جریان وابسته، جریان وابسته به ولتاژ v است و نباید اشتباها ولتاژ دو سر آن را v در نظر بگیرید. در این شاخه با توجه به این که ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته نامشخص است نمی توان KVL زد.

مثال۴۷: در مدار شکل زیر در چه لحظاتی $v(t)=0$ است؟(در گزینه ها k عددی صحیح است) (مهندسی برق -۹۰)



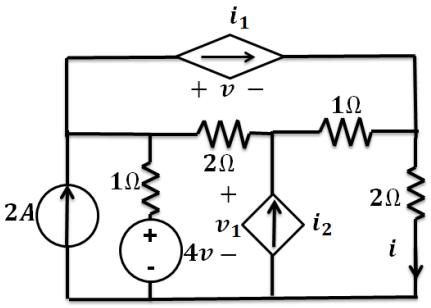
۱. $2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲. $2k\pi+\frac{\pi}{3}$

۳. $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴. $2k\pi+2\frac{\pi}{3}$

پاسخ: ابتدا خواسته مساله $v(t)=0$ را در مدار اعمال می کنیم. توجه داشته باشید که صفر شدن ولتاژ دو سر منبع جریان مستقل تاثیری در جریان آن ندارد.

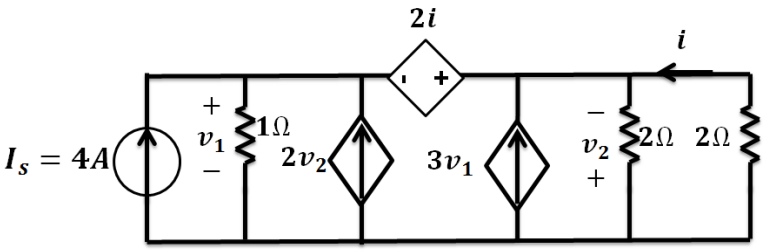
حواستون باشه : در مدارهای مقاومتی ، اصلا نوع منبع اهمیتی ندارد و نیازی به رفتن به حوزه فازور نیست.

مثال۴۸: در مدار شکل مقابل $i_1 = v_1$ و $i_2 = v$ است جریان i چند آمپر است؟ (مهندسی برق- ۹۱)



۱. -4
۲. 2
۳. 1
۴. -2

مثال۴۹: در مدار روبه رو منبع جریان مستقل I_s توانی برابر با چند وات تولید یا مصرف می‌کند؟ (مهندسی اتوماسیون-۹۴)



۱. $32w$ تولید می‌کند

۲. $32w$ مصرف می‌کند

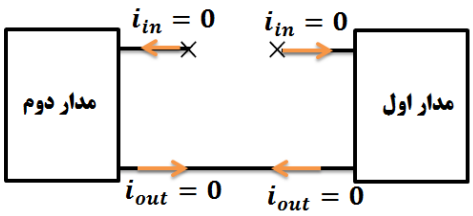
۳. $64w$ تولید می‌کند

٤. $64w$ مصرف می‌کند

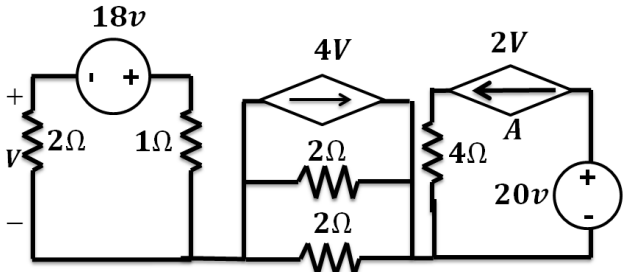
پاسخ:

مدارات ایزوله

اگر دو مدار الکتریکی به گونه ای مانند شکل زیر به هم متصل شوند که جریان دو مدار از یکدیگر مستقل باشد و جریان شاخه واسط دو مدار صفر شود. اصطلاحا می‌گوییم دو مدار از یکدیگر ایزوله هستند.



مثال۵۰: در مدار شکل زیر المان A توان.....وات را ..... می کند (مهندسی کامپیوتر- هوش مصنوعی- ۹۱)



۱. 2784– مصرف

۲. 2784- تولید

۳. 96 – مصرف

٤. 96- تولید

پاسخ:

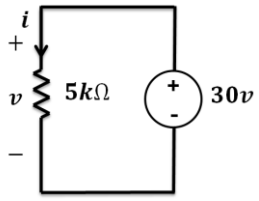
یکتایی جواب

از آن جایی که ما مدل مدار را تحلیل می کنیم نه خود مدار واقعی را ، ممکن است هنگام تحلیل مدار و حل معادلات آن با سه حالت کلی زیر رو به رو شویم.

مدار
- سازگار
  - جواب یکتا
  - بی شمار جواب
- بدون جواب ، ناسازگار

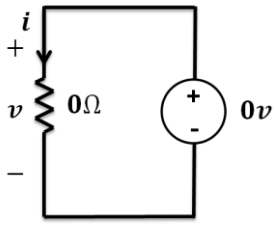
مدار سازگار- جواب یکتا

مثال۵۱: مدار رو به رو را در نظر بگیرید:



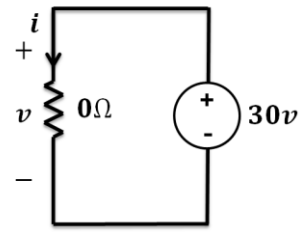
مدار ناسازگار- بی شمار جواب

مثال۵۲: مدار رو به رو را در نظر بگیرید، فرض کنید سیم ایده‌آل(مقاومت صفر) و منبع ولتاژ صفر ولت یا اتصال کوتاه باشد.



مدار ناسازگار- بدون جواب

مثال۵۳: فرض کنید منبع ولتاژ غیر صفر ولت مانند مدار رو به رو اتصال کوتاه شده باشد.





استاد!!! آیا تو دنیای واقعی مداری وجود دارد که جواب نداشته باشد؟

یکتایی جواب برای معادلات چند حلقه ای

برای بررسی یکتایی جواب مدارات پیچیده‌تر باید دستگاه معادلات جریان گره‌ها یا دستگاه معادلات ولتاژ مش ها را تشکیل دهیم و با توجه به نکات زیر عمل کنیم.

فرض کنید دستگاه معادلات مدار به صورت $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ باشد. که در آن x و y متغیرهای ولتاژ و جریان مدار و a,b,c,a',b',c' ضرایب ثابت هستند. آن گاه مدار،

جواب یکتا دارد اگر: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

بی شمار جواب دارد اگر: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

بدون جواب است اگر: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

نکته: اگر دترمینان دستگاه معادله مدار مخالف صفر باشد دستگاه جواب یکتا دارد و در غیر این صورت بدون جواب یا دارای بی شمار جواب است.

مثال۵٤: دستگاه‌های زیر را از لحاظ سازگاری و ناسازگاری بررسی کنید.

$$\begin{cases} 2i_1 + 3i_2 = 5 \\ 3i_1 + 6i_2 = 6 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{3} \neq \frac{3}{6} \neq \frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} 2i_1 + 3i_2 = 5 \\ 4i_1 + 6i_2 = 10 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$$

$$\begin{cases} 2i_1 + 3i_2 = 5 \\ 4i_1 + 6i_2 = 15 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{15}$$

مثال۵۵: کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟(دکتری مهندسی برق- ۹۵)

۱) یک مدار متشکل از عناصر واقعی (فیزیکی)، می تواند بی‌نهایت جواب داشته باشد.

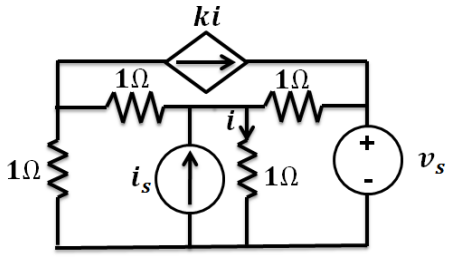
۲) یک مدار متشکل از عناصر مدل (مداری)، می‌تواند بی‌نهایت جواب داشته باشد.

۳) یک مدار متشکل از عناصر مدل (مداری)، می‌تواند جواب نداشته باشد.

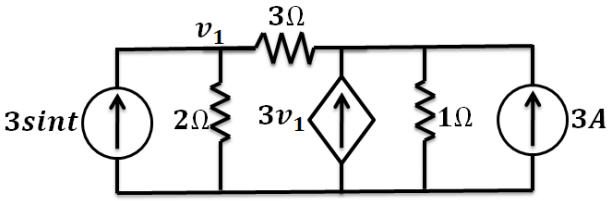
٤) جواب های یک مدار واقعی، الزاما با جواب های مدار معادل ایدئال آن یکی نیست.

پاسخ: تک تک گزینه ها را بررسی می‌کنیم:

مثال۵۶: در مدار زیر k را چنان تعیین کنید که دستگاه معادلات مدار جواب یکتا نداشته باشد. سپس بررسی کنید که به ازای همین مقدار k با چه شرطی روی مقادیر i_s و v_s دستگاه معادلات سازگار است؟

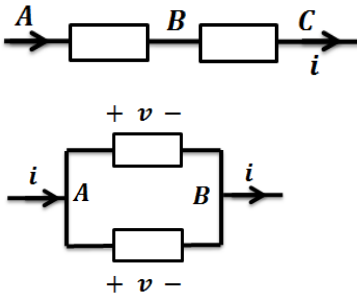


مثال ۵۷: در مدار زیر در چه لحظاتی بی شمار جواب برای ولتاژها و جریان ها وجود دارد؟



پاسخ:

نحوه اتصال المان های مدار

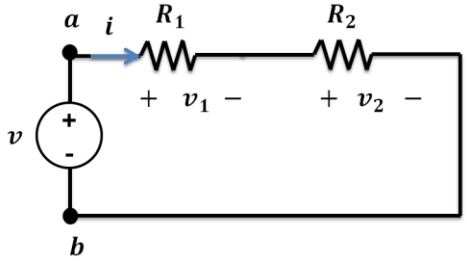


سری: در این روش المان های بهم متصل شده یک نقطه اشتراک دارند و جریان عبوری از آن‌ها یکسان است.

موازی: در این روش المان های بهم متصل شده دو نقطه اشتراک دارند و ولتاژ دو سر آن‌ها یکسان است.

قاعده تقسیم ولتاژ

برای دو مقاومت سری می توان نشان داد:



$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

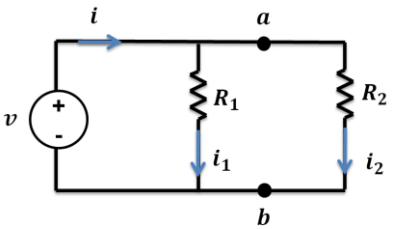
و در حالت کلی برای چند مقاومت سری داریم:

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n} v$$

اثبات این فرمول ها خیلی ساده و واضح است بنابر این از اثبات آن ها صرف نظر می‌کنیم.

قانون تقسیم جریان

برای دو یا چند مقاومت موازی می‌توان نشان داد:

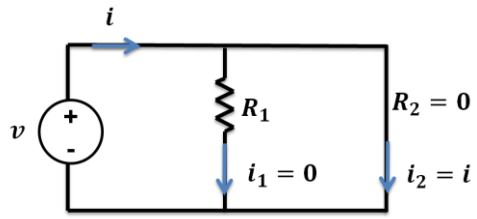


$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

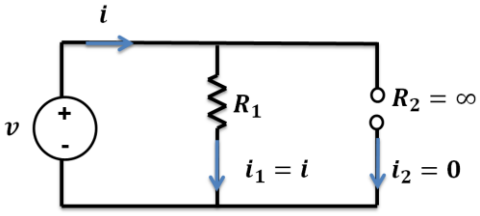
$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

به خاطر داشته باشید که هر شاخه ای که مقاومت بیشتری دارد جریان کمتری از آن می گذرد. دو حالت خیلی مهم و پرکاربرد در شاخه های موازی پیش می آید حالتی که یکی از شاخه ها اتصال کوتاه و یا مدار باز است.

الف) حالت اتصال کوتاه: شاخه ای که اتصال کوتاه است اختلاف ولتاژ دو سر آن صفر می شود بنابراین هیچ جریانی از آن عبور نمی کند



الف) حالت مدار باز: شاخه ای که مدار باز است هیچ جریانی از آن عبور نمی‌کند و تمام جریان از شاخه دیگر می گذرد.

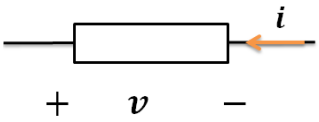


توان و انرژی

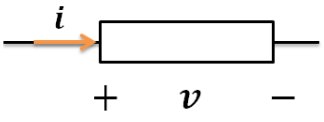
انرژی تولیدی یا مصرفی با توجه به توان لحظه‌ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(t) = \frac{dw}{dt} \rightarrow w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$$

اگر توان لحظه‌ای تولیدی باشد انرژی هم تولیدی است و اگر توان لحظه‌ای مصرفی باشد انرژی نیز مصرفی خواهد بود.اگر توان در هر لحظه را در مدت معینی با هم جمع کنیم، انرژی مصرفی یا تولیدی بدست می‌آید. یعنی انرژی از لحظه t_1 تا t_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود.



توان تولیدی: $w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt$



توان مصرفی : $w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t)dt$

توان متوسط

اگر توان لحظه‌ای ثابت نباشد از توان متوسط برای محاسبه توان استفاده می‌کنیم.

حالت های مختلف توان متوسط

الف) $\bar{P} = 0$

حالت $\bar{P} = 0$ به این معنا است که توان لحظه‌ای همواره صفر بوده است یا این که المان مورد نظر در بعضی زمان‌ها تولید کننده توان و در بعضی زمان‌ها مصرف کننده توان بوده است اما نهایتا توان تولیدی و مصرفی المان مساوی بوده است.

ب) $\bar{P} > 0$

حالت $\bar{P} > 0$ به این معنا است که المان مورد نظر همواره مصرف کننده توان بوده است یا این که در بعضی بازه‌های زمانی مصرف کننده و در بعضی بازه‌های زمانی تولید کننده بوده اما توان مصرفی آن از توان تولیدی بیشتر بوده است.

ج) $\bar{P} < 0$

حالت $\bar{P} < 0$ به این معنا است که المان مورد نظر همواره تولید کننده توان بوده است یا این که در بعضی بازه‌های زمانی مصرف کننده و در بعضی بازه‌های زمانی تولید کننده بوده اما توان تولیدی آن از توان مصرفی بیشتر بوده است. هنگام محاسبه توان متوسط نکات زیر را در نظر داشته باشید:

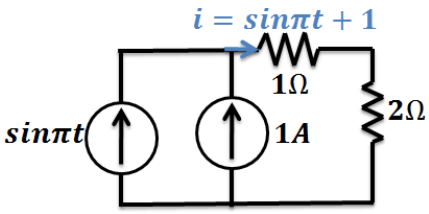
نکته:

۱- مقدار متوسط یک عبارت ثابت با خودش برابر است.

۲- مقدار متوسط یک تابع سینوسی و کسیونسی در یک دوره تناوب صفر می شود زیرا قسمت های منفی و مثبت نمودار در یک دوره تناوب برابر اند.

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sin\omega t = 0, \quad \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} cos\omega t = 0$$

مثال۵۸ : توان متوسط مقاومت ۲ اهمی در مدار زیر چند وات است؟





استاد!!! مقدار متوسط $sin^2\pi t$ چرا 0.5 شد؟



برای محاسبه مقدار متوسط تابع $sin^2\pi t$ به این ترتیب عمل می‌کنیم:

$$sin^2\pi t = \frac{1 - cos\pi t}{2} \quad \rightarrow \bar{P} = \frac{1-0}{2}$$

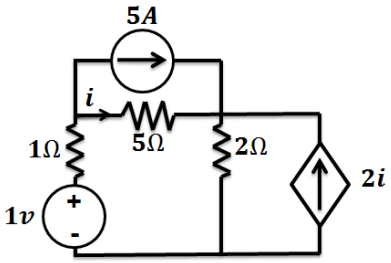
نکته:

$P(t) = A \rightarrow \bar{P}(t) = A$

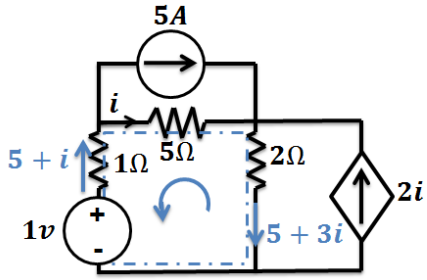
$P(t) = sin\omega t$ یا $cos\omega t \rightarrow \bar{P}(t) = 0$

$P(t) = sin^2\omega t$ یا $cos^2\omega t \rightarrow \bar{P}(t) = \frac{1}{2}$

مثال ۵۹: در مدار زیر منبع ولتاژ را چند برابر کنیم تا به توان مقاومت 2 اهمی $\frac{13}{8}$ وات اضافه شود؟



پاسخ: در گام اول باید توان اولیه مقاومت 2 اهمی را قبل ایجاد تغییر در مدار محاسبه کنیم:



$$KVL: -1 + i + 5 + 5i + 2(5 + 3i) = 0 \rightarrow i = -\frac{7}{6}$$

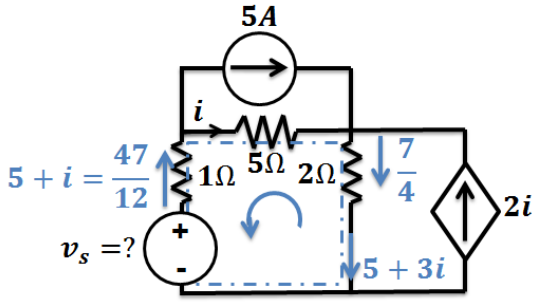
$$i_{2\Omega} = 5 + 3\left(\frac{-7}{6}\right) = 1.5A \rightarrow P_{2\Omega} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

حالا با داشتن توان مطلوب مقاومت 2 اهمی می‌توانیم جریان عبوری از آن را بدست آوریم:

$$P'_{2\Omega} = \frac{13}{8} + \frac{9}{2} = \frac{49}{8} watt \rightarrow \frac{49}{8} = 2i^2 \rightarrow i'_{2\Omega} = \frac{7}{4}$$

مانند مرحله قبل دوباره مدار را تحلیل می کنیم با این تفاوت که این بار جریان مدار معلوم است و مقدار منبع

ولتاژ نامعلوم است.



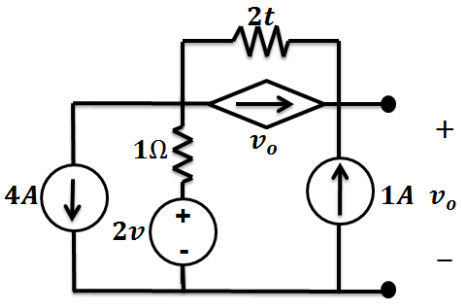
$$\downarrow\downarrow 5 + 3i = \frac{7}{4} \rightarrow i = \frac{-13}{12}$$

$$KVL: -v_s + \frac{47}{12} + 5\left(\frac{-13}{12}\right) + \frac{7}{4} = 0 \rightarrow$$

$$v_s = \frac{1}{4}$$

سلام امیدوارم از روش پخش جریان نهایت لذت رو برده باشید. ما سعی کردیم تمام تست‌های کنکور رو به طور مفصل براتون تحلیل کنیم، برای دریافت پاسخ سوالات آخر فصل در سایت لایوآموز با ما همراه باشید.

چندتا تست دیگه



سوال۱: در چه لحظاتی توان منبع وابسته الزاما صفر می‌شود؟ (تالیفی)

۱. $t = 0.5$

۲. در هیچ لحظه‌ای

۳. تمام لحظات به جز $t = 0.5$

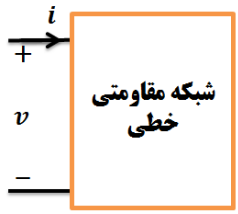
٤. چون مدار جواب یکتا ندارد هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

فصل دوم

شبکه خطی مقاومتی و مدارهای معادل

رابطه تعادلی برای مدارات مقاومتی خطی

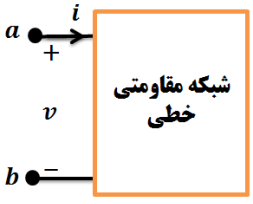
یک شبکه مقاومتی خطی متشکل از مقاومت ، منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته به صورت زیر در نظر بگیرید برای این شبکه می توان رابطه ولتاژ و جریان را به صورت زیر نوشت:



$$\begin{cases} v = f(i) \rightarrow v = \alpha i + \beta \\ i = g(v) \rightarrow i = kv + m \end{cases}$$

حالات مختلف برای رابطه تعادلی

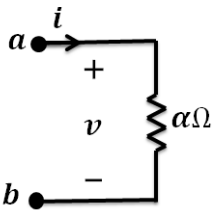
بسته به مقدار ضرایب α ، β، k و m برای شبکه حالت های مختلفی پیش می‌آید.



$\beta = 0$

$v = \alpha i$

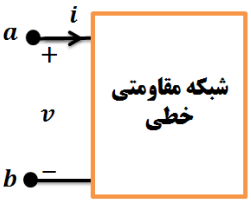
معادل است با



در این حالت شبکه معادل یک مقاومت α اهمی است.



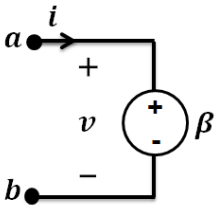
استاد!!! یعنی داخل اون جعبه یک مقاومت α اهمی است؟



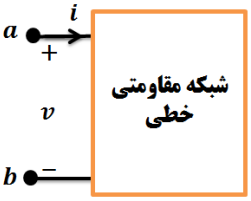
$\alpha = 0$

$v = \beta$

معادل است با



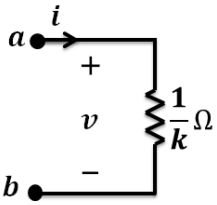
در این حالت شبکه معادل یک منبع ولتاژ β ولتی است.



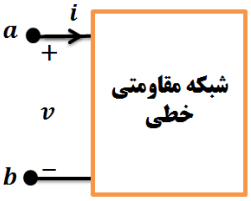
$m = 0$

$i = kv$

معادل است با



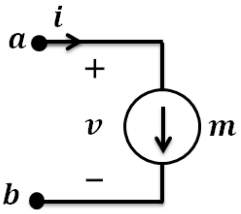
در این حالت شبکه معادل یک مقاومت $^1/_k$ اهمی است.



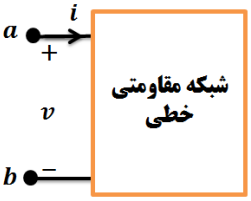
$k = 0$

$i = m$

معادل است با



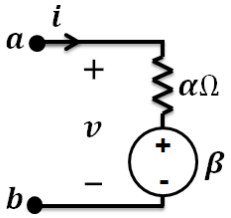
در این حالت شبکه معادل با یک منبع جریان m آمپر است.



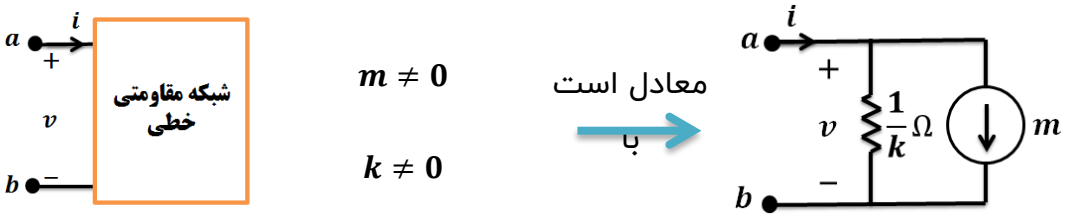
$\alpha \neq 0$

$\beta \neq 0$

معادل است با

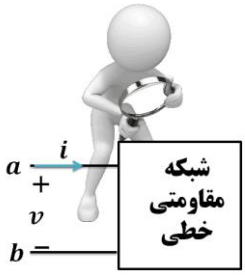


در این حالت شبکه معادل یک مقاومت α اهمی و منبع ولتاژ β ولتی سری با آن است.



در این حالت شبکه معادل یک مقاومت $^1/_k$ اهمی و منبع جریان m آمپر موازی با آن است.

محاسبه رابطه تعادلی



رابطه تعادلی فقط برای مدارات مقاومتی خطی نوشته می شود. رابطه تعادلی شناسنامه آن مدار از پورت مورد نظر است. برای بدست آوردن رابطه تعادلی مدار از پورت خواسته شده یک منبع تست ولتاژ یا جریان با ولتاژ v_t یا جریان i_t در دو سر مدار می گذاریم به طوری که منبع دیاگرام تولید توان یعنی جریان i_t به سمت شبکه باشد. پس با روش های تحلیل مدار سعی می کنیم رابطه بین v_t و i_t منبع تست را بدست
می آوریم.



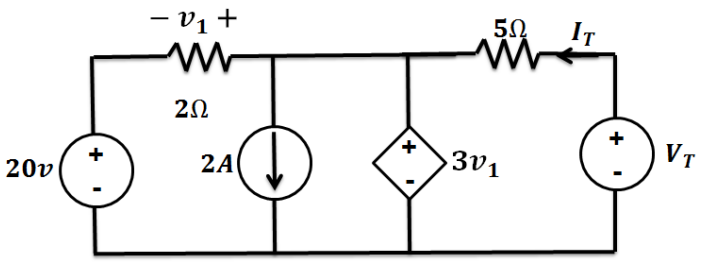
در هر دو شبکه منبع ولتاژ و جریان تست به گونه‌ای قرار داده شده است که به شبکه توان تزریق می‌شود. یعنی جریان از سر مثبت منبع خارج و به شبکه وارد می‌شود. اما دو نکته خیلی مهم:

نکته:

نکته اول: رابطه تعادلی از هر پورت با پورت دیگر الزاما برابر نیست. یعنی به غیر از حالت خاص از هر پورت مدار یک رابطه تعادلی دیده می شود.

نکته دوم: اگر رابطه تعادلی را از دید یک المان در مدار بخواهیم نه از دو سر مدار، باید المان مورد نظر را مدار باز کنیم و منبع تست را به جای آن قرار دهیم.

مثال۱: در مدار روبه رو رابطه V_T و I_T کدام است؟(V_T بر حسب ولت و I_T بر حسب آمپر است.) (اتوماسیون-۹۲)



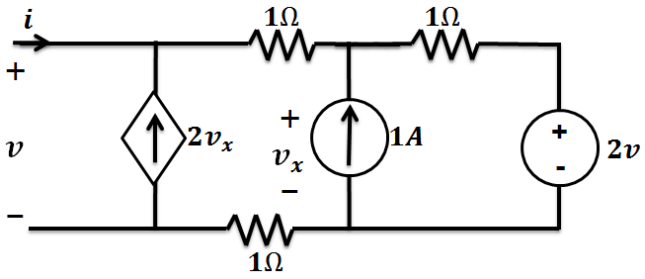
۱) $V_T = 3I_T + 20$

۲) $V_T = 5I_T + 30$

۳) $V_T = 7I_T + 10$

۴) $V_T = 7I_T + 20$

مثال۲: رابطه $v - i$ یک قطبی زیر عبارت است از: (مهندسی برق -۶۹)



۱) $v = -3i - 15$

۲) $v = 2i + 10$

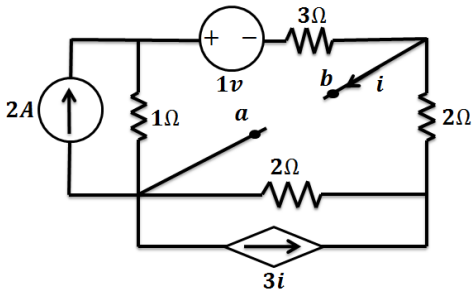
۳) $v = 3i - 15$

۴) $v = -2i + 10$

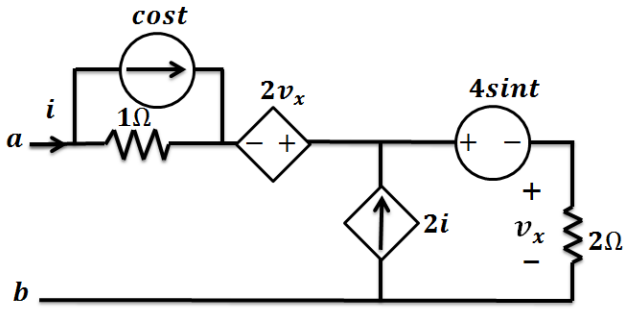


بچه‌ها ، می‌توانید با توجه به رابطه دو مدار معادل برای این مدار پیشنهاد بدهید؟

مثال۳: رابطه تعادلی مدار زیر را از دو سر a و b بیابید و یک یا دو مدار معرفی کنید که این رابطه تعادلی را داشته باشند.



مثال٤: در مدار زیر در چه لحظه ای رابطه تعادلی از دو سر a و b معادل مقاومت است.(تالیفی)



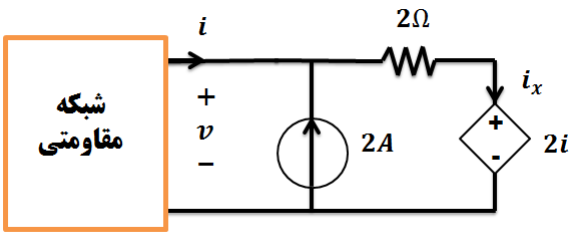
۱) $t = k\pi + tg^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

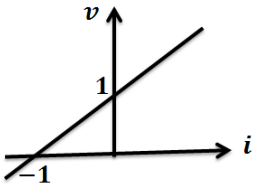
۲) $t = k\pi + tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

۳) $t = k\pi + tg^{-1}(4)$

٤) هیچکدام از گزینه‌ها

مثال۵: در شکل زیر مشخصه $i-v$ شبکه N که یک شبکه مقاومتی خطی می باشد داده شده است جریان i_x چند آمپر است؟

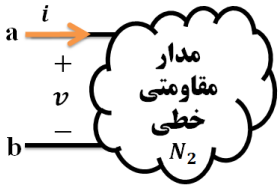




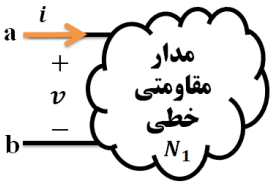
پاسخ: این سوال را از دو روش حل می‌کنیم.

معادل بودن دو مدار

منظور از معادل بودن دو مدار از دو سر این است که رابطه تعادلی آن دو مدار از دو سر با یکدیگر برابر است و به این معنا نیست که حتما دو مدار با هم یکسان هستند، یعنی المان ها و ساختار دو مدار می‌تواند یکسان نباشد، ولی رابطه تعادلی یکسانی داشته باشند.



$$v = \alpha_2 i + \beta_2$$



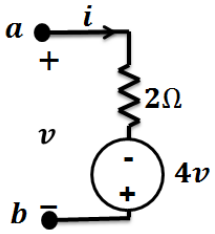
$$v = \alpha_1 i + \beta_1$$

$$N_1 \equiv N_2 \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

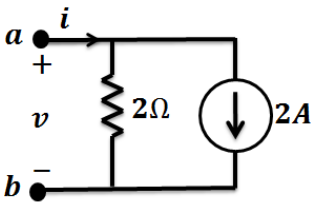


استاد!!! یعنی همه اجزای شبکه N_1 و N_2 یکسان است؟

مثال۶: آیا مدارهای زیر با هم معادل اند؟



$$v = 2i - 4$$



$$\frac{v}{2} = i - 2 \rightarrow v = 2i - 4$$

چون معادله مشخصه دو مدار یکسان است دو مدار با یکدیگر معادل اند.

مدارهای معادل کاربردی

در این قسمت چند نمونه مدار معادل را بررسی می‌کنیم این مدارهای معادل در حل مسائل کمک زیادی به ما می‌کنند و می توانیم از آن‌ها برای ساده‌سازی مدارها کمک بگیریم.

سری شدن منابع ولتاژ

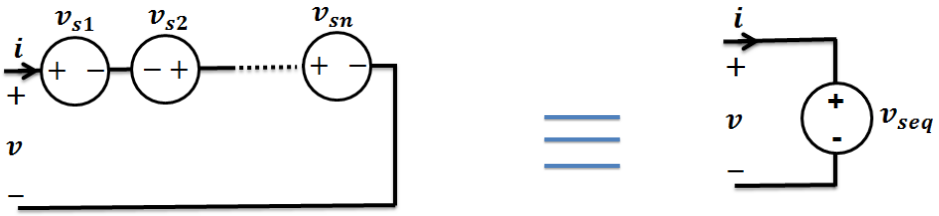
اگر چند منبع ولتاژ با هم سری شوند به طوری که جریان از پلاریته یکسان وارد آن ها شود می‌توان آن را با منبع ولتاژی با مجموع ولتاژ منابع معادل کرد.



که در آن:

$$v_{seq} = v_{s1} + v_{s2} + \cdots v_{sn}$$

اگر پلاریته متفاوت باشد و جریان از پلاریته متفاوت وارد منبع ولتاژها شود لتاژها از هم کم می شود.

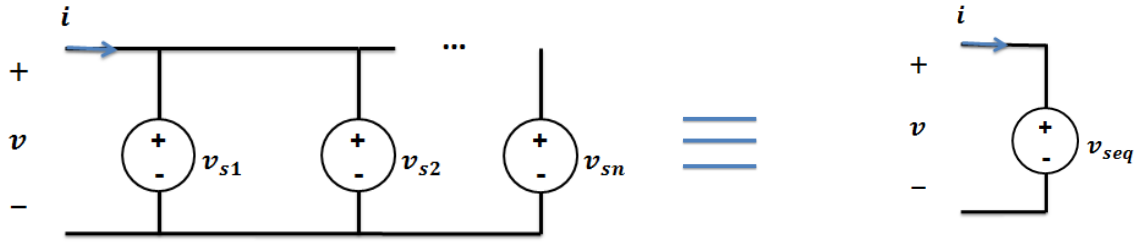


که در آن:

$$v_{seq} = v_{s1} - v_{s2} + \cdots v_{sn}$$

موازی شدن منابع ولتاژ

برای موازی کردن منابع ولتاژ با یکدیگر باید تمام منابع هم پلاریته و دارای ولتاژ یکسان باشند. در این صورت مداری متشکل از چند منبع ولتاژ موازی معادل با یکی از منابع ولتاژ است .



توجه داشته باشید که $v_{s1} = v_{s2} = \cdots = v_{sn} = v_{seq}$.



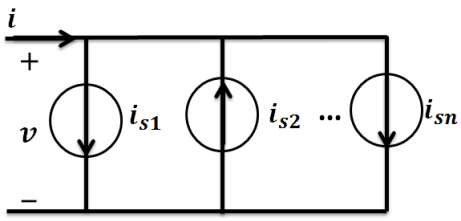
استاد با توجه به این که چند منبع ولتاژ موازی معادل با یکی از منبع‌ها است موازی کردن منابع ولتاژ چه فایده ای دارد؟

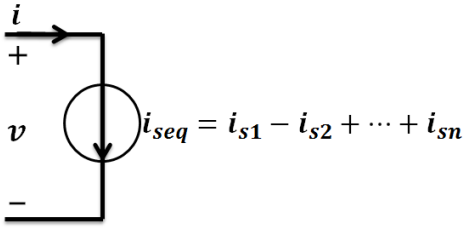
موازی شدن منابع جریان

اگر چند منبع جریان با هم موازی شوند به طوری که جهت جریان آن‌ها یکسان باشد می توان آن را با منبع جریانی با مجموع جریان منابع معادل کرد.



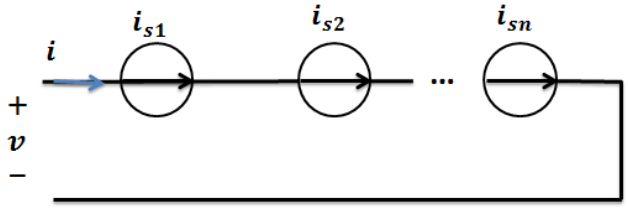
و اگر جهت جریان ها متفاوت باشد می‌توان آن را با منبع جریانی با تفاضل جریان‌ها مدل کرد.

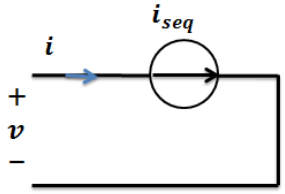




سری شدن منابع جریان

برای سری شدن منابع جریان باید تمامی منابع دارای جریان یکسان و هم جهت باشند. در این صورت مداری متشکل از چند منبع جریان سری معادل با یکی از منابع جریان است .





توجه داشته باشید که $i_{s1} = i_{s2} = \cdots = i_{sn} = i_{seq}$.



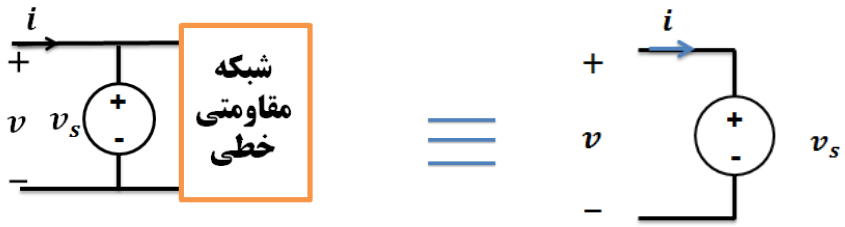
اما در مورد فایده سری شدن منابع جریان باید بدانید که وقتی چند منبع جریان برابر و هم جهت با هم سری می شوند ولتاژ کلی آن‌ها افزایش پیدا می‌کند و توان بیشتری تولید می‌شود.

نکته:

توجه داشته باشید که تمام مدارات فوق فقط از دید دو سر مشخص شده با هم معادل اند و رابطه تعادلی آن‌ها فقط از دو سر مشخص شده یکسان است و داخل دو مدار الزاما یکسان نیست.

موازی شدن منابع ولتاژ با هر المان دیگر

هرگاه منبع ولتاژ با هر شبکه و مداری موازی شود، به شرط آن که v و i بیرون شبکه مطلوب باشد می‌توان شبکه را به شکل زیر حذف کرد.



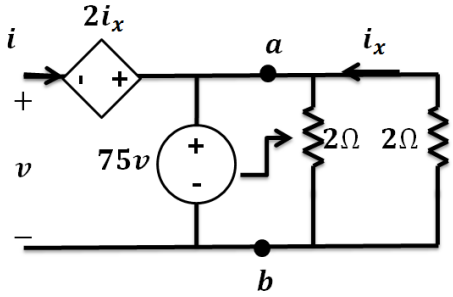


استاد!!! من نفهمیدم که چه زمانی می‌توان شبکه موازی با منبع ولتاژ را حذف کرد؟

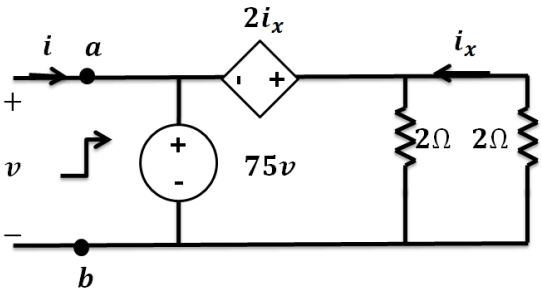


اشکالی نداره الان با چند مثال براتون توضیح می‌دهم.

مثال۷: آیا در مدار مقابل امکان حذف قسمتی مدار دیده شده از دو سر a و b به این دلیل که موازی با منبع ولتاژ $75v$ هستند وجود دارد؟



مثال۸: آیا در مدار زیر امکان حذف قسمتی مدار دیده شده از دو سر a و b به این دلیل که موازی با منبع ولتاژ $75v$ هستند وجود دارد؟

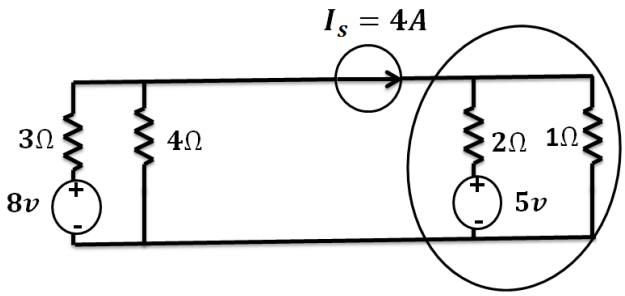


سری شدن منبع جریان با هر المان دیگر

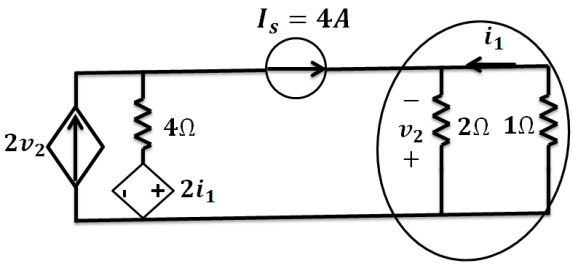
هرگاه منبع جریان با هر شبکه و مداری سری شود، به شرط آن که v و i بیرون شبکه مطلوب باشد می‌توان شبکه را به شکل زیر حذف کرد.



مثال۹: آیا در مدار زیر امکان حذف محدوده مشخص شده به دلیل سری شدن با منبع جریان $4A$ وجود دارد؟



مثال۱۰: آیا در مدار زیر امکان حذف محدوده مشخص شده به دلیل سری شدن با منبع جریان $4A$ وجود دارد؟

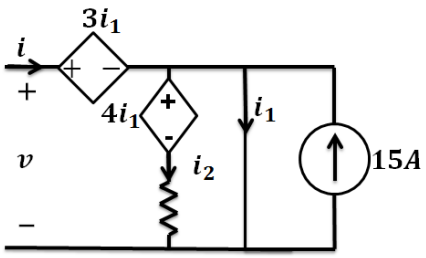


اتصال کوتاه شدن شبکه

در صورت اتصال کوتاه شدن یک شبکه به شرطی که جریان اتصال کوتاه i_{sc} یا همان جریان داخل شبکه مقاومتی مجهول نباشد. $(i \neq i_{sc})$ می توان شبکه اتصال کوتاه شده را حذف کرد.



مثال۱۱:آیا امکان حذف منبع جریان به علت آن که اتصال کوتاه شده است در مدار زیر وجود دارد؟

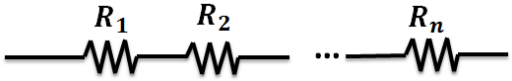


پاسخ: منبع جریان قابل حذف نیست و امکان ساده سازی وجود ندارد. چون جریان اتصال کوتاه i_1 مجهول است و منبع وابسته به جریان اتصال کوتاه i_1 در مدار وجود دارد.

معادل مقاومت

مقاومت‌های سری

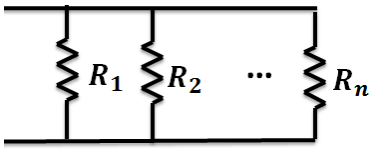
مقاومت معادل N مقاومت سری از رابطه زیر بدست می آید.



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{i=n} R_i$$

مقاومت‌های موازی

مقاومت معادل N مقاومت موازی از رابطه زیر بدست می آید.



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{R_i}$$

در حالتی که همه مقاومت ها مساوی باشند یعنی $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$ ، معادلات به این شکل ساده می‌شوند.

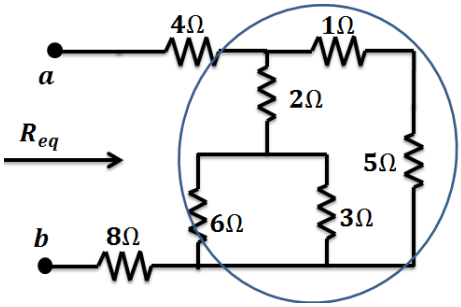
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R} = \frac{n}{R} \rightarrow R_{eq} = \frac{R}{n}$$

و در حالتی که دو مقاومت با هم موازی شوند

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\text{حاصل ضرب مقاومت ها}}{\text{حاصل جمع مقاومت ها}}$$

نکته: موازی شدن مقاومت‌ها باعث کم شدن مقاومت کل می‌شود.

مثال۱۲: مقاومت معادل مدار زیر چند Ω است؟



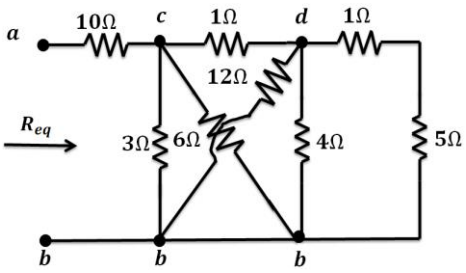
۱. 11Ω

۲. 12.4Ω

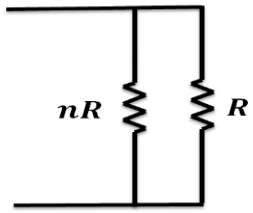
۳. 21Ω

۴. 18Ω

مثال۱۳ :مقاومت معادل مدار رو به رو را بدست آورید.

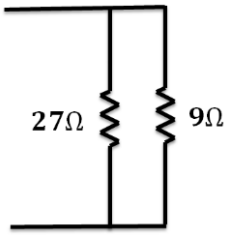


نکته تستی برای محاسبه مقاومت های موازی



$$R_{eq} = \frac{\text{مقاومت بزرگتر}}{\text{یک بعلاوه نسبت}} = \frac{nR}{1+n}$$

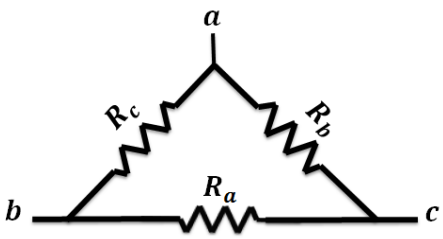
مثال۱٤: مقاومت معادل مدار زیر را بدست آورید.

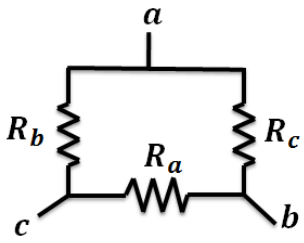


$$R_{eq} = \frac{27}{4}$$

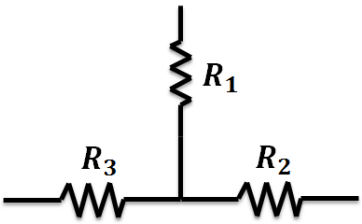
اتصال ستاره مثلث

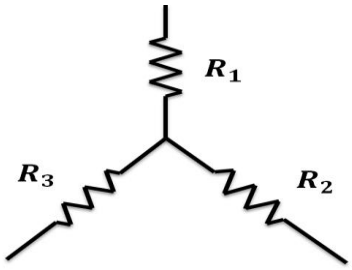
آرایش سه مقاومت به صورت زیر را اتصال مثلث می نامند.



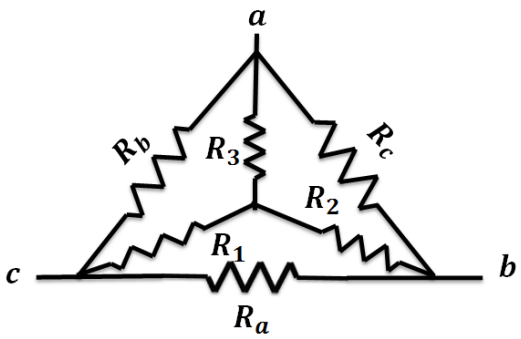


آرایش سه مقاومت به صورت زیر را اتصال ستاره می نامند.





اگر بخواهیم معادل اتصال مثلث را به صورت اتصال ستاره بدست آوریم از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم



$$R_1 = \frac{R_b R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

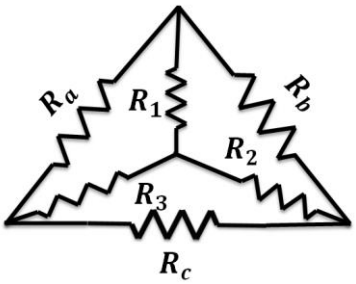
نکته۱: به واحد فرمول ها توجه داشته باشید واضح است که واحدی که برای مقاومت های معادل بدست می آید $\Omega^2/\Omega = \Omega$ است.

نکته۲: در حالت کلی مقاومت های معادل اتصال ستاره کوچک تر از مثلث است.

نکته۳: اگر مقاومت های مثلث با هم برابر باشند اتصال ستاره معادل $\frac{1}{3}$ مقاومت های مثلث است.

$$R_Y = \frac{1}{3} R_\Delta$$

اگر بخواهیم معادل اتصال ستاره را به صورت اتصال مثلث بدست آوریم از تبدیل زیر استفاده می کنیم.



$$R_a = \frac{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3}{R_2}$$

$$R_b = \frac{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3}{R_3}$$

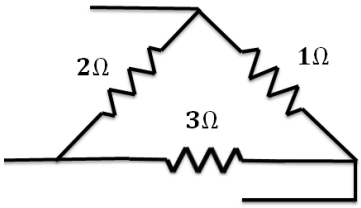
$$R_c = \frac{R_1R_3 + R_1R_2 + R_2R_3}{R_1}$$

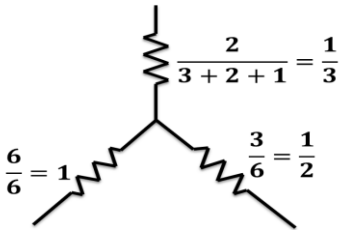
برای به خاطر سپردن فرمول ها یادتان باشد چون مقاومت مثلث بزرگتر از ستاره است در مخرج فقط یک مقاومت می گذاریم در حالی که در صورت حاصل ضرب دو به دو مقاومت ها وجود دارد.

نکته: اگر مقاومت های ستاره با هم برابر باشند:

$$R_\Delta = 3R_Y$$

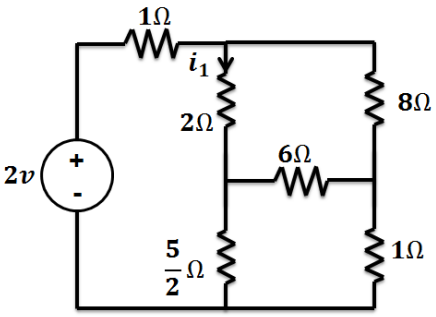
به عنوان مثال دو مدار زیر با هم معادل هستند:

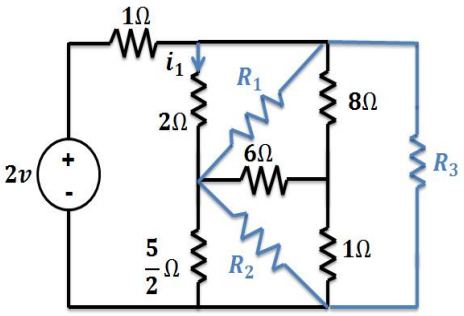




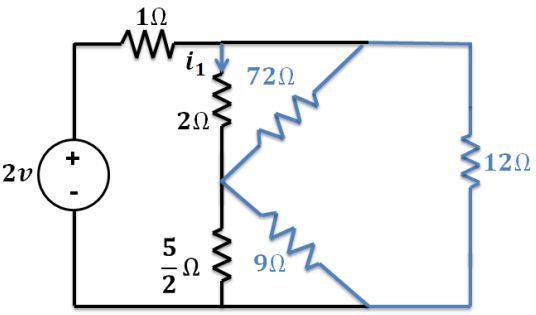
مثال۱۵: از دید منبع ولتاژ مقاومت معادل را پیدا کنید. اگر $v_s = 2v$ باشد، I_{in} چند آمپر است؟

پاسخ: با استفاده از تبدیل ستاره مثلث مدار را کمی ساده‌تر می‌کنیم:





$$R_1 = \frac{48+6+8}{1} = 72 \ , R_2 = \frac{72}{8} = 9, R_2 = \frac{72}{6} = 12$$



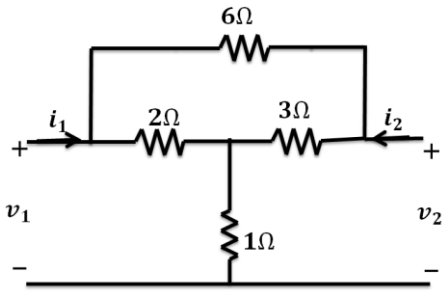
$$72\Omega \| 2\Omega = \frac{72 \times 2}{72+2} = \frac{144}{74}\Omega$$

$$9\Omega \| \frac{5}{2}\Omega = \frac{9 \times \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}+9} = \frac{\frac{45}{2}}{\frac{23}{2}} = \frac{45}{23}\Omega$$

$$\frac{144}{74}\Omega \| \frac{45}{23}\Omega = \frac{\frac{144}{74} \times \frac{45}{23}}{\frac{144}{74} + \frac{45}{23}} = \frac{3.807}{3.902} = 0.9756\Omega$$

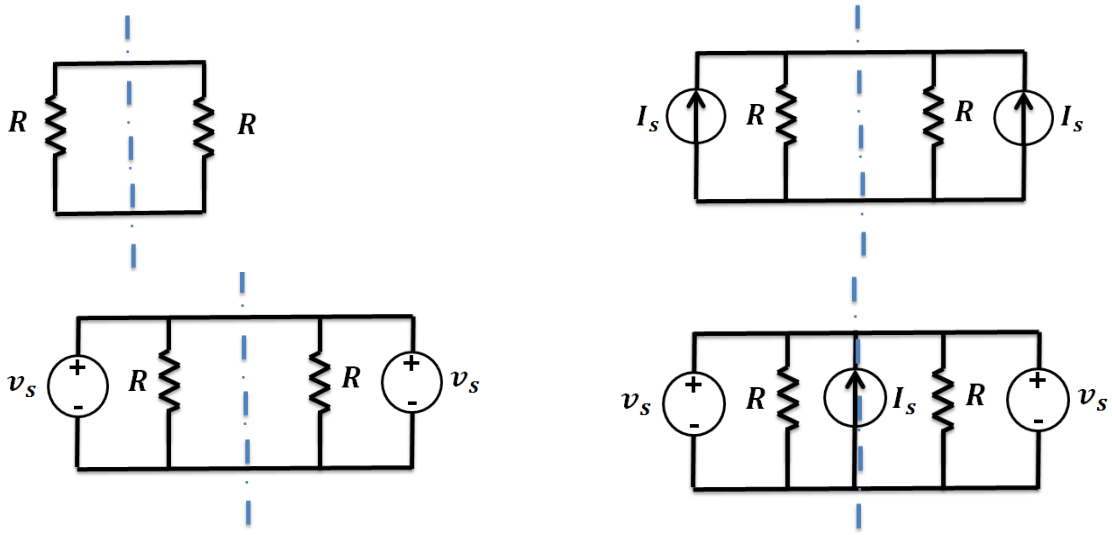
$$R_{in} = 0.9756\Omega + 1\Omega = 1.9756\Omega \rightarrow I_{in} = \frac{2v}{R_{in}} = \frac{2v}{1.9756\Omega} = 1.0123A$$

مثال۱۶: نسبت v_2/v_1 را در مدار زیر بدست آورید. $(i_2 = 0)$



تقارن در مدارهای الکتریکی

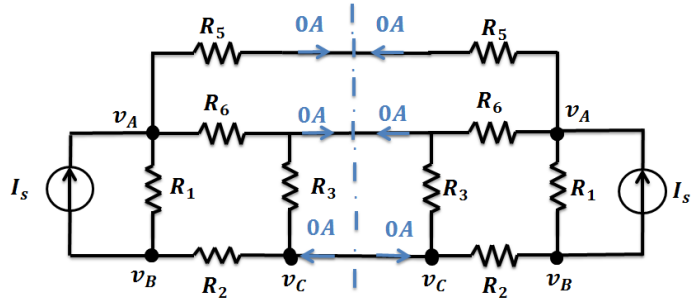
بعضی از مدارهای الکتریکی ساختاری متقارن دارند. گاهی اوقات تقارن مدار تحلیل آن را ساده‌تر می‌کند. هر مدار متقارن یک محورتقارن دارد که اگر مدار را روی آن محور تا بزنیم المان های یکسان روی هم می افتند. در شکل های زیر می‌توانید چند نمونه مدار متقارن را ببینید:



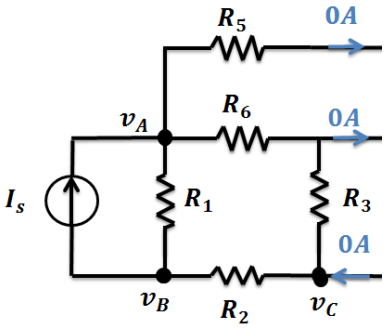
در مدارهای متقارن بسته به هم جهت بودن یا نبودن منابع دو طرف محور تقارن ، با دو حالت مواجهیم:

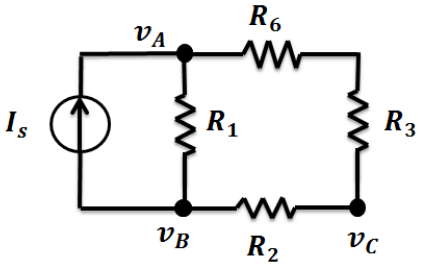
حالت اول منابع هم جهت و هم پلاریته باشند

در این حالت ولتاژ نقاط متناظر تقارن با هم برابر است و شاخه‌هایی که عمود بر محور تقارن هستند جریان صفر دارند.



همانطور که می‌بینید جهت دو منبع جریان یکسان است و مدار نسبت به محور مشخص شده متقارن می‌باشد. حالا مدار را از محل خط تقارن نصف می‌کنیم و شاخه های مدار باز شده را نیز حذف می‌کنیم. روی محور تقارن این مدار مقاومتی نداریم که آن را دو برابر کنیم.

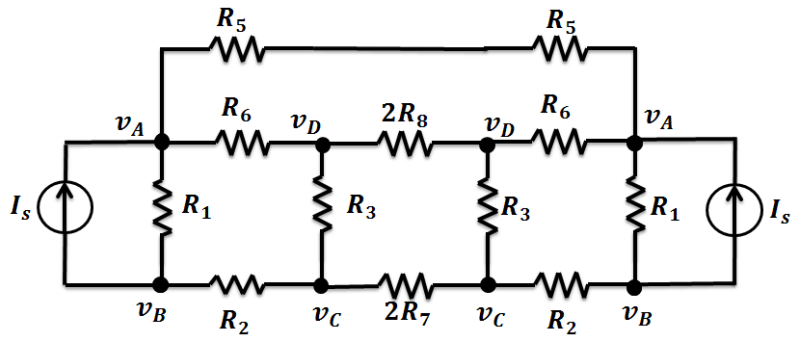


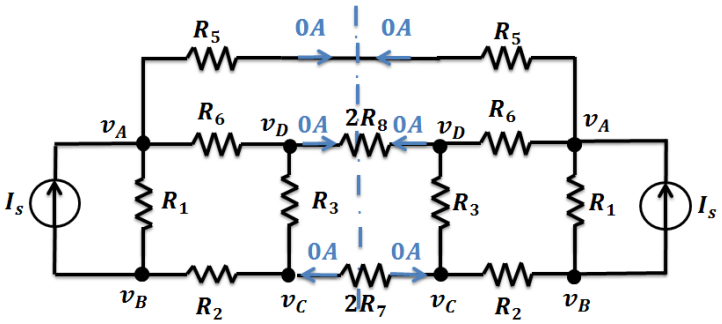


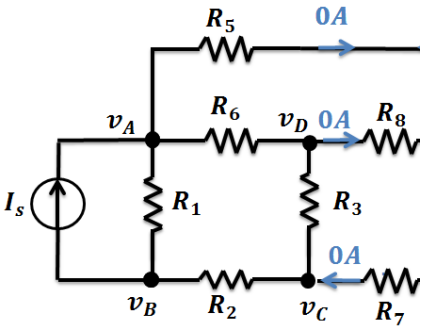
همانطورکه می‌بینید تحلیل مدار نهایی بدست آمده بسیار ساده تر از مدار اصلی است.

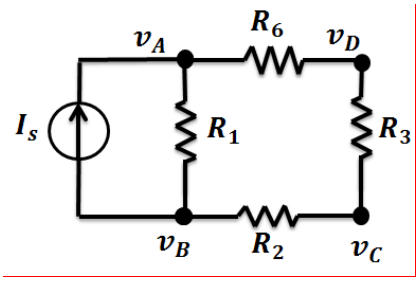


استاد!!! چرا فقط نیم مدار سمت چپ رو کشیدید؟

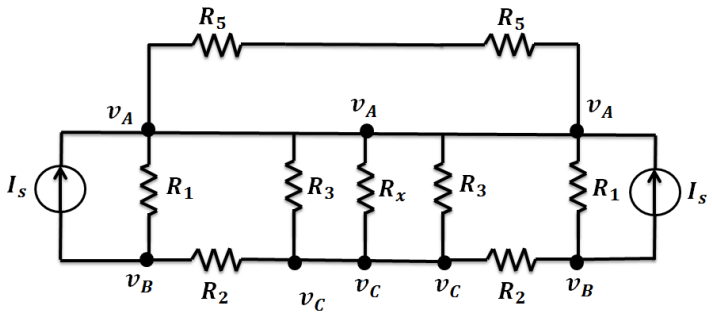




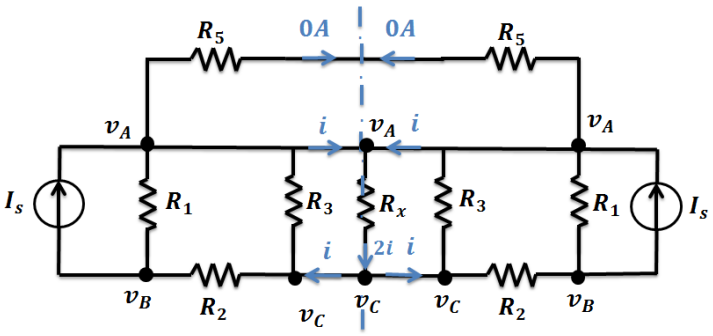




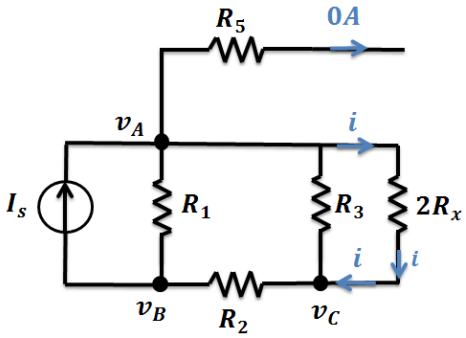
مثال۱۸: در مدار زیر نقاط هم پتانسیل را بیابید و نیم مدار سمت چپ را رسم کنید.

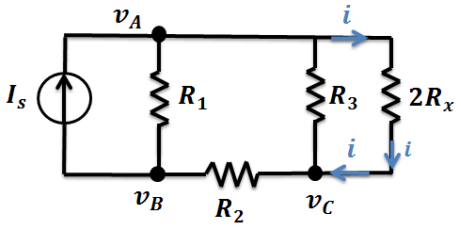


پاسخ: تفاوت این مثال با مثال قبل در این است که روی خط تقارن یک شاخه مقاومتی وجود دارد در این حالت جریان عبوری از شاخه روی خط تقارن صفر نیست. زیرا همانطور که در شکل زیر مشخص شده دو سر مقاومت R_x ولتاژ متفاوتی دارد و حتما در آن طبق قانون اهم جریان جاری می‌شود.



حالا مدار را از محل خط تقارن نصف می‌کنیم. و شاخه های مدار باز شده را نیز حذف می‌کنیم. مقاومت R_x که روی محور تقارن قرار دارد جریان $2i$ از آن می‌گذرد بنابراین در نیم مدار دو برابر می‌شود تا بتواند همان اختلاف پتانسیل قبلی را ایجاد کند.



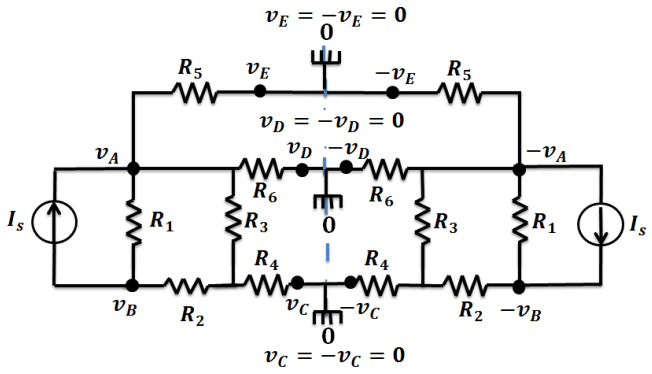


توجه داشته باشید که می‌توانستیم به جای نیم مدار سمت چپ نیم مدار سمت راست را که دقیقا مشابه همین نیم مدار است رسم و تحلیل کنیم.

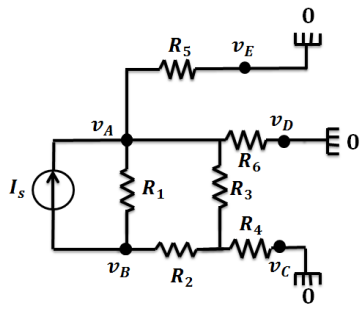
حالت دوم منابع خلاف جهت هم و غیر هم پلاریته باشند

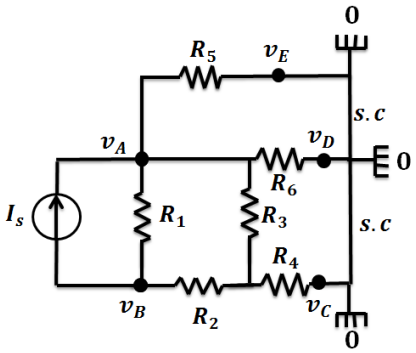
در این حالت با توجه به این که مدار متقارن است و پلاریته منابع یکسان نیست ولتاژ نقاط متناظر محور تقارن، برابر ولی از نظر علامت قرینه یکدیگر است و جریان‌های شاخه‌های متناظر برابر ولی از نظر علامت قرینه است. پس می‌توان گفت در این حالت ولتاژ نقاط روی محور تقارن صفر است. شاخه عمود بر محور تقارن را نصف می‌کنیم و شاخه‌های هم راستا روی محور تقارن را حذف می‌کنیم .

مثال۱۹: مدار زیر را در نظر بگیرید. این مدار نسبت به محور مشخص شده متقارن است. اما چون منابع مختلف الجهت هستند، پتانسیل نقاط متناظر قرینه است.



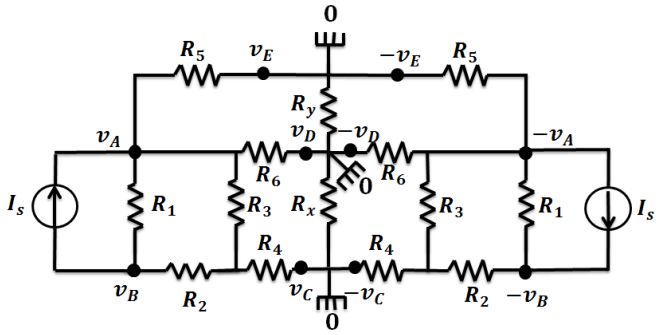
مدار را در راستای خط تقارن نصف می‌کنیم سپس نقاط پتانسیل صفر را با توجه به این که پتانسیل یکسانی دارند به هم وصل می‌کنیم.





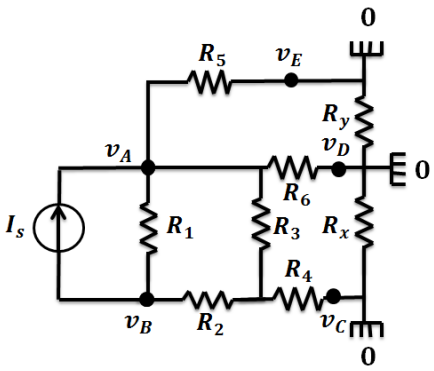
همانطور که می‌بینید تحلیل مدار نهایی بدست آمده بسیار ساده تر از مدار اصلی است.

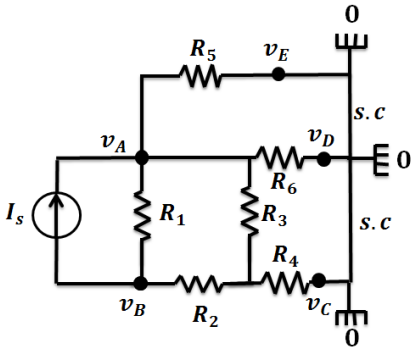
مثال ۲۰: مدار زیر را در نظر بگیرید. این مدار نسبت به محور مشخص شده متقارن است. اما چون منابع مختلف الجهت هستند، پتانسیل نقاط متناظر قرینه است. تفاوت این مثال با مثال قبل در این است که روی خط تقارن یک شاخه مقاومتی وجود دارد.



در این حالت جریان عبوری از شاخه روی خط تقارن صفر است . زیرا همانطور که در شکل زیر مشخص شده دو سر مقاومت R_x و R_y ولتاژ یکسانی قرار دارد و طبق قانون اهم جریان

عبوری از آن‌ها صفر می‌شود. بنابراین مدار را در راستای خط تقارن نصف می‌کنیم سپس مقاومت‌های R_x و R_y را با توجه به این که اتصال کوتاه شده اند حذف می‌کنیم.

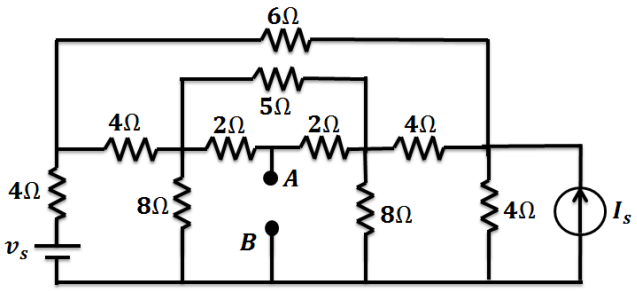




مقاومت معادل مدارهای متقارن

در صورتی که یک مدار نسبت به یک محور افقی ، عمودی و یا مورب تقارن داشته باشد و مقاومت معادل را از دو سر خط تقارن بخواهیم می‌توانیم مدار را نسبت به محور تقارن تا بزنیم در این حالت تمام المان‌های دو طرف با هم نظیر به نظیر موازی می‌شوند.

مثال۲۱:در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر A و B چند اهم است ؟ (تالیفی)



۱. 6Ω

۲. $3\ \Omega$

۳. $1/5\ \Omega$

۴. $4/5\ \Omega$

پاسخ: چون مدار متقارن است...

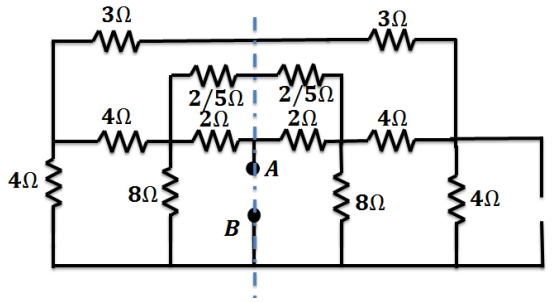


استاد!!! این مدار اصلا متقارن نیست حتی منابع این مدار هم در دو طرف یکسان نیستند.



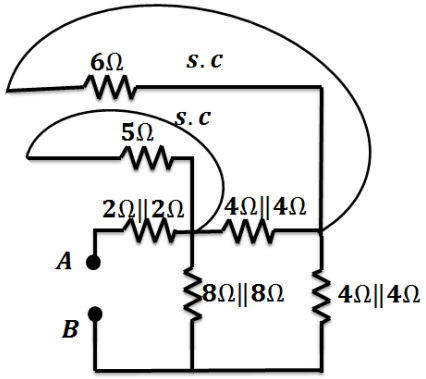
بازهم عجله کردید. ببینید بچه‌ها اولا مقاومت معادل مدار مستقل از منابع مستقل مدار است بنابراین ما قبل از محاسبه مقاومت معادل منابع را خاموش می‌کنیم و نمی‌توانند عدم تقارنی در مدار به وجود بیاورند. دوما در مورد خود مدار که گفتید کلا متقارن نیست به نظر من این مدار را

بعد از خاموش کردن منابع به این صورت در نظر بگیرید:



همانطور که دیدید مدار کاملا متقارن است حالا مدار را روی محور تقارن تا می‌زنیم.

$$R_{eq} = [(4\|4 + 4\|4)\|(8\|8)] + 2\|2 = 3$$

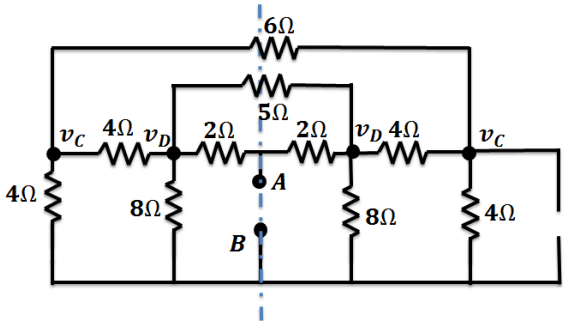




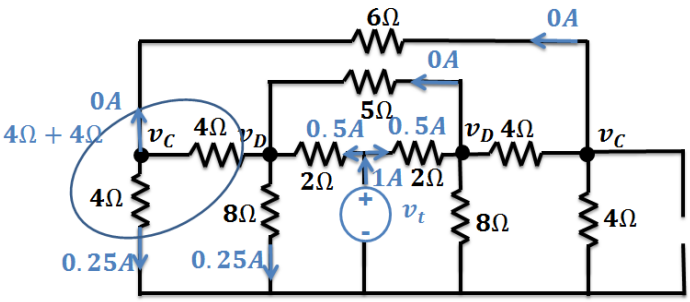
استاد!!! چرا مقاومت 5Ω و 6Ω را اتصال کوتاه کردید؟



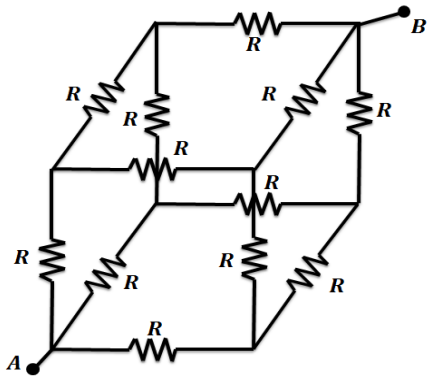
این مساله خیلی ساده است همونطور که در شکل می‌بینید ولتاژ دو سر این مقاومت‌ها یکسان است بنابراین اتصال کوتاه هستند.



روش دوم: حالا یکبار سوال را با اعمال منبع ولتاژ و جریان تست حل می‌کنیم:



مثال۲۲: در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر A و B چند اهم است؟ (تالیفی)



۱. $\frac{5R}{6}$

۲. $\frac{6R}{5}$

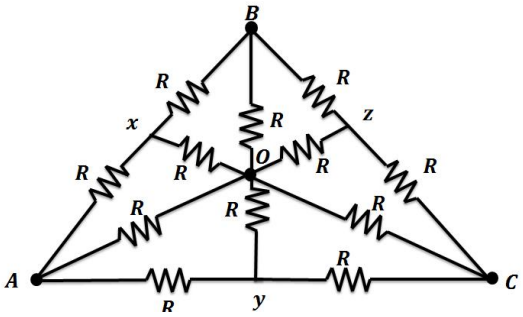
۳. $\frac{R}{6}$

۴. $6R$

پاسخ:

مثال۲۳: در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر A و O چند اهم است ؟ $(R = 20\Omega)$

(مهندسی برق- ۷۰)



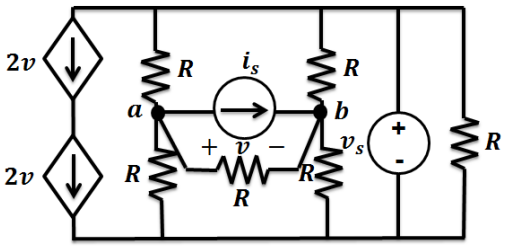
۱. 9

۲. 1.8

۳. 2.15

۴. 7.5

مثال۲٤: چه مقاومتی از دو سر منبع جریان i_s مستقل از دو نقطه a و b دید می‌شود؟ $(R = 20\Omega)$ (مهندسی برق- ۹۱)

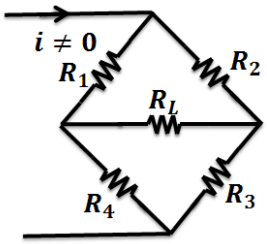


۱. $\frac{R}{2}$ ۲. R

۳. $3R$ ٤. $2R$

پل وتستون

مدار پل وتستون برای کاربردهای اندازه‌گیری خیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدار از پنج مقاومت تشکیل شده است که یکی از مقاومت ها که مقاومت پل وتستون نام دارد به تمام چهار مقاومت دیگر متصل است. به عبارت دیگر اگر دو اتصال مثلث را از یک مقاومت مشترک به یکدیگر متصل کنیم. شاخه مشترک دو اتصال مثلث را مقاومت پل وتستون می‌گوییم.

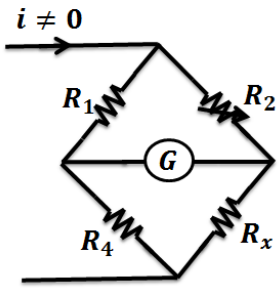


شرایط تعادل پل وتستون

قانون وتستون: اگر پل وتستون در حالت تعادل باشد(یعنی $R_2 \times R_4 = R_1 \times R_3$) جریان شاخه وسط صفر می‌شود و ولتاژ دو سر المان پل وتستون هم پتانسیل خواهد شد.

کاربرد مدار پل وتستون در اندازه گیری

در مدار زیر R_1 و R_4 معلوم، مقاومت R_2 متغیر و مقاومت R_x مجهول است. مقاومت متغیر را آن قدر تغییر می‌دهیم تا جریان عبوری از گالوانومتر صفر شود. در این صورت با استفاده از شرط تعادل پل داریم:

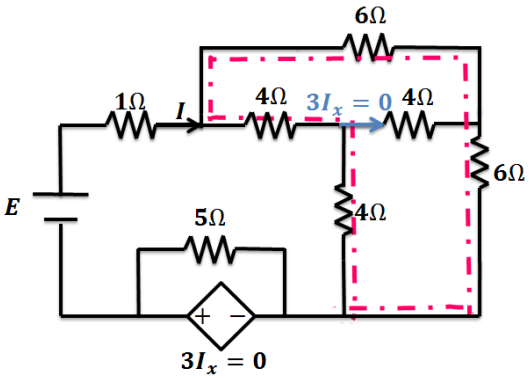


$$R_2 \times R_4 = R_1 \times R_x \rightarrow R_x = \frac{R_2 \times R_4}{R_1}$$

مثال۲۵ : اگر $I = 2A$ باشد مقدار E کدام است؟ (تالیفی)

پاسخ: چون شرط تعادل پل وتستون برقرار است

یعنی:



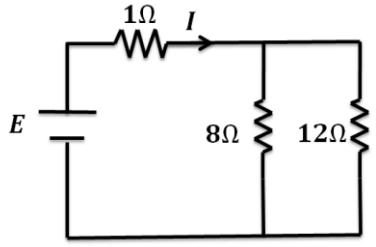
$$6 \times 4 = 4 \times 6$$

جریان بار وتستون صفر می‌شود.

$$3I_x = 0$$

بنابراین مقاومت ها با هم سری و موازی می‌شوند

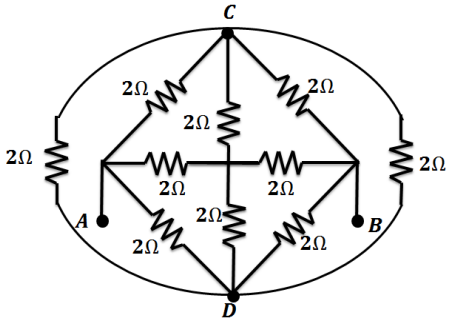
و مدار را می‌توان به صورت زیر ساده کرد.



$$R_{eq} = (6+6)\|(4+4) = 12\|8 = \frac{12 \times 8}{12+8} = \frac{96}{20}$$

$$\begin{cases} I = \dfrac{E}{R_{eq}} = \dfrac{E}{1+\frac{96}{20}} \\ I = 2 \end{cases} \rightarrow E = 11.6v$$

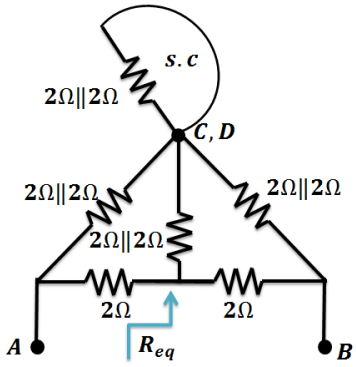
مثال۲۶:در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر A و B چند اهم است؟ (تالیفی)

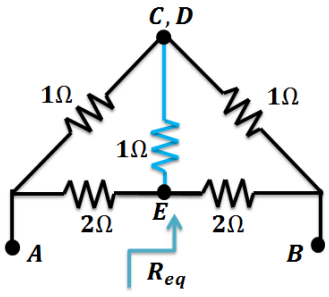


۱. $\frac{4}{3}$ ۲. $\frac{2}{3}$

۳. $\frac{1}{3}$ ۴. $\frac{1}{2}$

پاسخ: با کمی دقت می‌توانیم نقاط هم پتانسیل را مشخص کنیم و مدار را ساده کنیم. نقاط C و D با هم هم پتانسیل هستند. بنابراین مدار به شکل زیر قابل ساده سازی است.





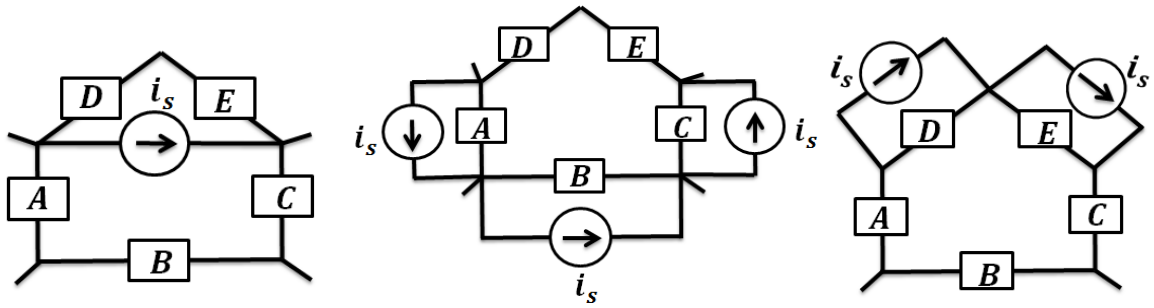
مدار فوق یک پل وتستون است و بنابراین نقاط $\mathbf{E}$ و $\boldsymbol{C}$ با هم هم پتانسیل هستند مقاومت مشخص شده به رنگ آبی مقاومت روی پل وتستون است بنابراین اتصال کوتاه و حذف می‌شود. مقاومت معادل برابر است با:

$$\boldsymbol{R_{eq}} = [(\mathbf{2}+\mathbf{2})\|(\mathbf{1}+\mathbf{1})] = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\Omega$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

انتقال منبع جریان و قاعده پرش خرگوشی

به شرط آن که جریان شاخه های داخلی را نخواهیم می توانیم از قاعده پرش خرگوشی در ساده سازی مدارها به شکل زیر استفاده کنیم. مدارات زیر با هم معادل هستند.

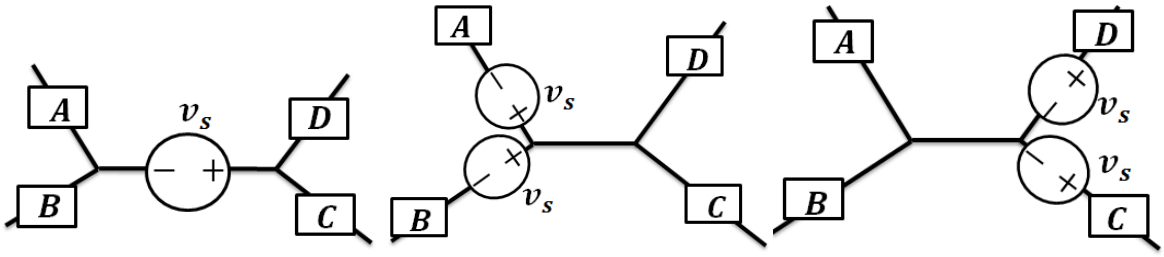




استاد!!! من متوجه نشدم چرا این مدارها با هم معادل اند؟

انتقال منبع ولتاژ

می‌توانیم منبع ولتاژ را به شاخه های کناری منتقل کنیم به طوری که اختلاف پتانسیل قبلی حفظ شود.

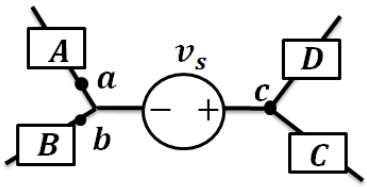


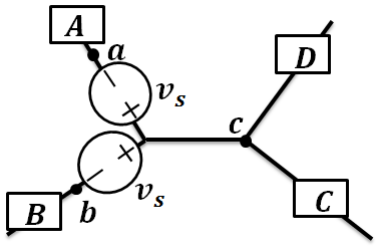


استاد!!! من باز هم متوجه نشدم چرا این مدارها با هم معادل اند؟



با توجه به این که اختلاف پتانسیل نقاط نسبت بهم با انتقال منبع به شاخه‌های کناری تغییری نمی‌کند مدارهای فوق با هم معادل اند. در هر دو مدار زیر ولتاژ نقطه a و b به اندازه v_s از ولتاژ نقطه c بیشتر است. البته باید یادتان باشد که این مدارها فقط از بیرون با هم معادل هستند.





در بخش بعدی از این دو قاعده مثال‌های فراوانی حل خواهیم کرد.

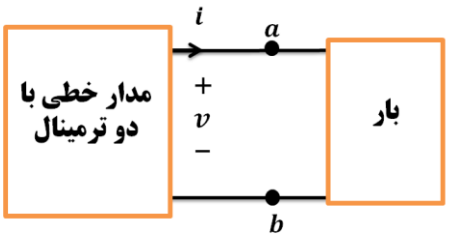
قضیه تونن و نورتن

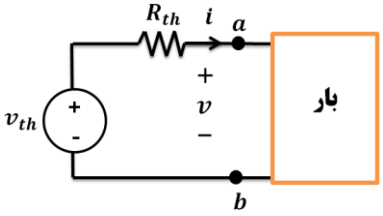
دو قضیه بسیار مهم و کاربردی در مدارهای معادل قضیه تونن و نورتن است این قضایا در ساده سازی مدارهای الکتریکی بسیار کاربرد دارند و حل مسائل را ساده می‌کنند. قضیه تونن و نورتن به ما کمک می‌کنند تا مدارهای خطی را هر چند بسیار پیچیده باشند با یک مقاومت و یک منبع جریان یا ولتاژمدل کنیم.

قضیه تونن

تونن یک مهندس تلگراف فرانسوی بود که کشف کرد:

هر مدار مقاومتی خطی که دو ترمینال داشته باشد را می‌توان با یک منبع ولتاژ و یک مقاومت سری با آن مدل کرد که با هم معادل هستند. این مقاومت و منبع ولتاژ به افتخار تونن مقاومت تونن یا R_{th} و ولتاژ تونن یا v_{th} نامیده می‌شود.

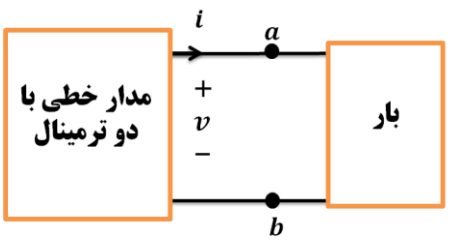


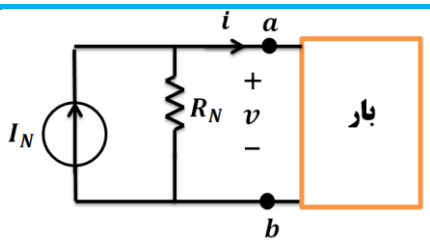


قضیه نورتن

نورتن یک مهندس آمریکایی در لابراتوار تلفن بل بود که کشف کرد:

هر مدار مقاومتی خطی که دو ترمینال داشته باشد را می‌توان با یک منبع جریان و یک مقاومت موازی با آن مدل کرد که با هم معادل هستند. این مقاومت و منبع جریان به افتخار نورتن مقاومت نورتن یا R_N و جریان نورتن یا I_N نامیده می شود.



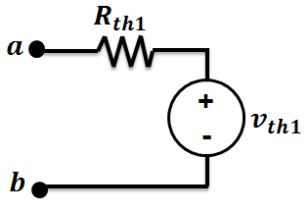


به عبارت دیگر برای هر مدار مقاومتی از دو سر آن می‌توان مدار معادلی به یکی از شکل‌های تونن یا نورتن تعریف کرد. اگر از دو سر مورد نظر معادل یک مقاومت سری با منبع ولتاژ بنویسیم معادل تونن و اگر از دو سر مورد نظر معادل یک مقاومت موازی با منبع جریان بیابیم معادل نورتن مدار را بدست آورده‌ایم.

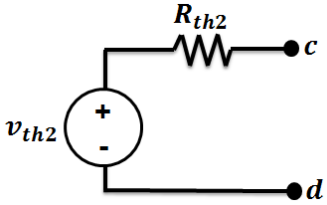
وابستگی معادل مدار به قطب

باید توجه داشته باشید که مدار معادل تونن و نورتن یک مدار به دو سر آن مدار مربوط است و الزاما با معادل تونن و نورتن از سرهای دیگر برابر نیست. یعنی مدار معادل تونن از سرهای a, b با مدار معادل تونن از سرهای c, d متفاوت است البته در حالت‌های خاص ممکن است این دو مدار معادل یکسان باشند.





از دید قطب a, b



از دید قطب c, d



آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم با توجه به این که هر مدار خطی یک مدار معادل تونن و یک مدار معادل نورتن دارد طبیعتا باید این دو مدل برای یک مدار یکسان با هم معادل باشند.



به موضوع خیلی خوبی اشاره کردید. اگر شبکه ای هم معادل تونن داشته باشد و هم معادل نورتن این دو مدار معادل طبیعتا با یک دیگر معادل هستند. در ادامه در مورد چگونگی ارتباط مدار معادل تونن و نورتن بحث می‌کنیم.

استاد مگه ممکنه مداری معادل تونن یا نورتن نداشته باشد؟





ارتباط مدار معادل تونن و نورتن

در مورد نحوه ارتباط مدار معادل تونن و نورتن باید بدانید که:

مقاومت تونن و نورتن با هم برابر اند. اما جریان نورتن با معادله $i_N = v_{th}/\alpha = v_{th}/R_{th}$ با ولتاژ تونن رابطه دارد.

حالا بریم سراغ سوال شما ، فرض کنید رابطه تعادلی یک مدار از قطب مورد نظر به صورت های زیر بدست آمده است:

$v = 0 \times i + \beta \rightarrow v_{th} = \beta \, , R_{th} = 0 \rightarrow i_N = \frac{v_{th}}{0}$ تعریف نشده

بنابر این اگر مداری فقط معادل یک منبع ولتاژ باشد و فقط ولتاژ تونن داشته باشد آن مدار معادل نورتن نخواهد داشت.

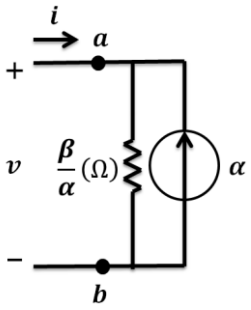
$i = 0 \times v + k \rightarrow i_N = k \, , R_N = 0$

بنابر این اگر مداری فقط معادل یک منبع جریان باشد و فقط جریان نورتن داشته باشد آن مدار معادل تونن نخواهد داشت.

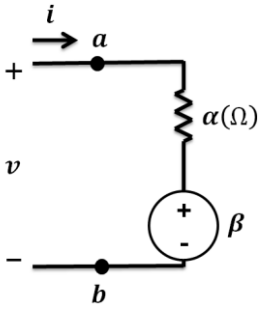
نکته:
نکته۱: اگر در یک مدار خطی مقاومتی منبع مستقل وجود نداشته باشد، ولتاژ تونن و جریان نورتن حتما صفر خواهد بود ولی عکس این قضیه برقرار نیست.
نکته۲: اگر مقاومت معادل مدار خطی مقاومتی صفر باشد، معادل نورتن و اگر مقاومت نورتن بینهایت باشد معادل تونن ندارد.

تبدیل منابع

دو مدار شکل زیر را در نظر بگیرید. مدار اول مدار تونن و دومی مدار نورتن است. رابطه تعادلی دو مدار را بدست می‌آوریم:



مدار معادل نورتن



مدار معادل تونن

رابطه تعادلی دو مدار یکسان است، به عبارت دیگر این دو مدار معادل یکدیگر هستند. از این دو مدل برای تبدیل منبع استفاده می‌شود. در واقع این دو مدل بیان‌گر این است که هرجا یک منبع ولتاژ و یک مقاومت سری داشتیم می‌توانیم آن را به منبع جریان و مقاومت موازی با آن تبدیل کنیم و بالعکس. این قانون در حل مسائل مدار کارایی زیادی دارد.

محاسبه معادل تونن و نورتن مدار

حالا بهتر است برویم سراغ روش های بدست آوردن مدارهای معادل تونن و نورتن.

۱- روش کلی بدست آوردن رابطه تعادلی

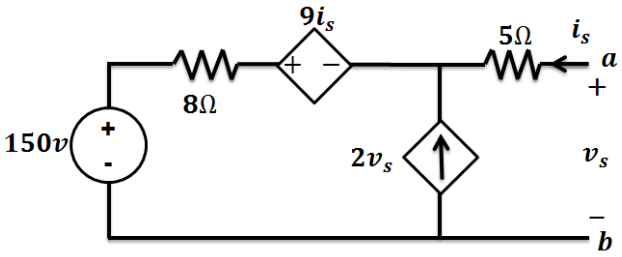
همانطور که در قسمت قبل توضیح دادم در این روش کافی است یک منبع ولتاژ یا جریان تست دو سر نقطه ای که قرار است مدار معادل آن را بیابیم قرار دهیم و رابطه تعادلی که همان رابطه بین ولتاژ و جریان تست است را محاسبه کنیم. به طور خلاصه می توان گفت:

$$v_t = \alpha i_t + \beta \longrightarrow \begin{cases} R_{th} = \alpha \\ V_{th} = \beta \end{cases}$$

یا

$$i_t = \frac{1}{\alpha} v_t - \frac{\beta}{\alpha} \longrightarrow \begin{cases} R_N = \alpha \\ i_N = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

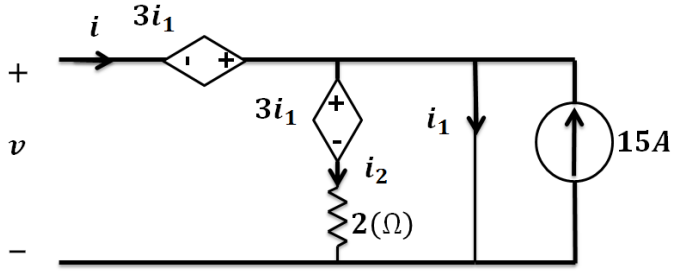
مثال۲۷: در شکل زیر ولتاژ معادل تونن بین a و b برابر ..... ولت و مقاومت معادل تونن برابر ..... اهم است؟(به ترتیب از راست به چپ)



۱. $\frac{4}{5}, -10$ ۲. $-\frac{4}{5}, 10$

۳. $-\frac{4}{5}, -10$ ۴. $\frac{4}{5}, 10$

مثال۲۸: در مدار شکل رو به رو کدام رابطه صحیح است؟



۱. $v + 6i - 90 = 0$

۲. $v - 6i + 90 = 0$

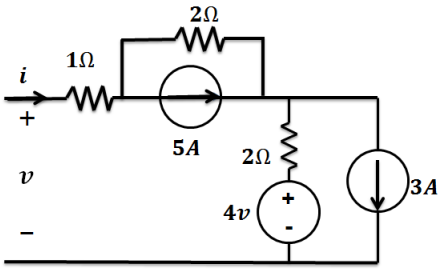
۳. $v - 6i - 90 = 0$

۴. $v + 6i + 90 = 0$

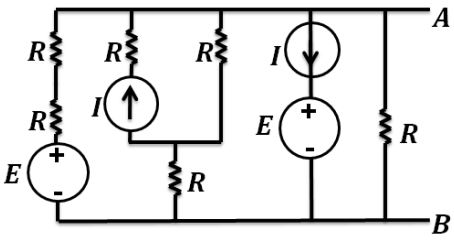
۲- روش ساده سازی مدار

در این روش با استفاده از قاعده پرش خرگوشی، محاسبه معادل مقاومت های سری و موازی و سایر تکنیک های ساده سازی مدار، مدار را آن قدر ساده می‌کنیم که به فرم مورد نظر ما یعنی یک مقاومت سری با منبع ولتاژ یا یک مقاومت موازی با منبع جریان تبدیل شود. از این روش ساده‌سازی معمولا در مدارهای فاقد منبع وابسته استفاده می شود تا بتوانیم با ساده‌سازی به مدار معادل تونن و نورتن برسیم.

مثال ۲۹:مدار معادل تونن متناظر با مدار زیر را از دو سر مشخص شده بیابید.



مثال۳۰: مدار معادل تونن متناظر با مدار زیر از دو سر A و B کدام است؟ (هوش مصنوعی-۹۱)



۱. $V_{th}=\frac{E+RI}{2}, R_{th}=\frac{6}{13}R$

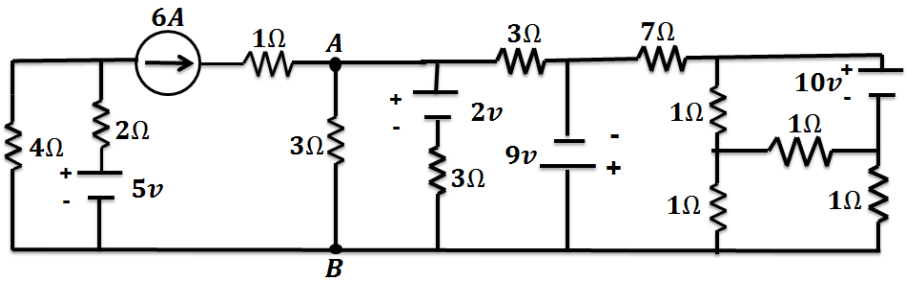
۲. $V_{th}=E, R_{th}=2R$

۳. $V_{th}=\frac{E+RI}{4}, R_{th}=R$

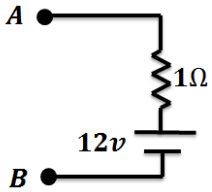
٤. $V_{th}=\frac{E+RI}{4}, R_{th}=\frac{R}{2}$

پاسخ:

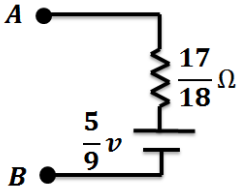
مثال۳۱: مدار معادل تونن متناظر با مدار زیر از دو سر A و B کدام است؟(مهندسی برق- ۷۴)



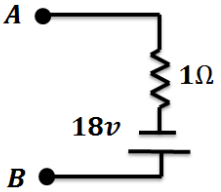
۱.



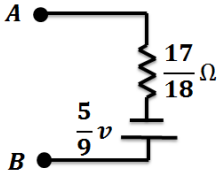
۲.



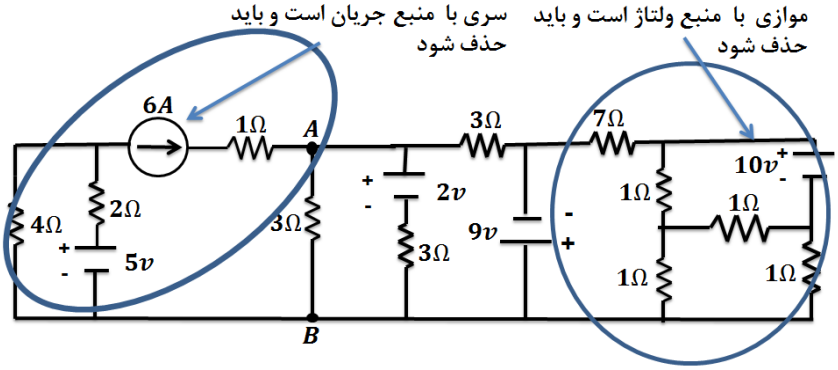
۳.



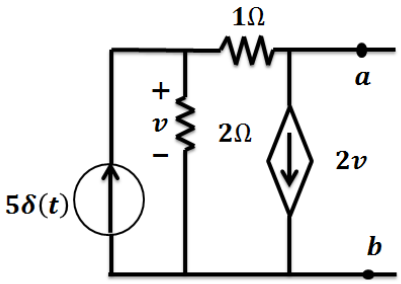
۴.



پاسخ: چون مدار فاقد منبع وابسته است می‌توانیم از روش ساده سازی استفاده کنیم.



مثال۳۲: مدار معادل تونن متناظر با مدار زیر از دو سر a و b برابر است با: (مهندسی برق- ۸۷)



۱. $V_{th} = \delta(t), R_{th} = 2$

۲. $V_{th} = 2\delta(t), R_{th} = 3\Omega$

۳. $V_{th} = -2\delta(t), R_{th} = \frac{3}{5}\Omega$

٤. $V_{th} = -\delta(t), R_{th} = \frac{3}{5}\Omega$

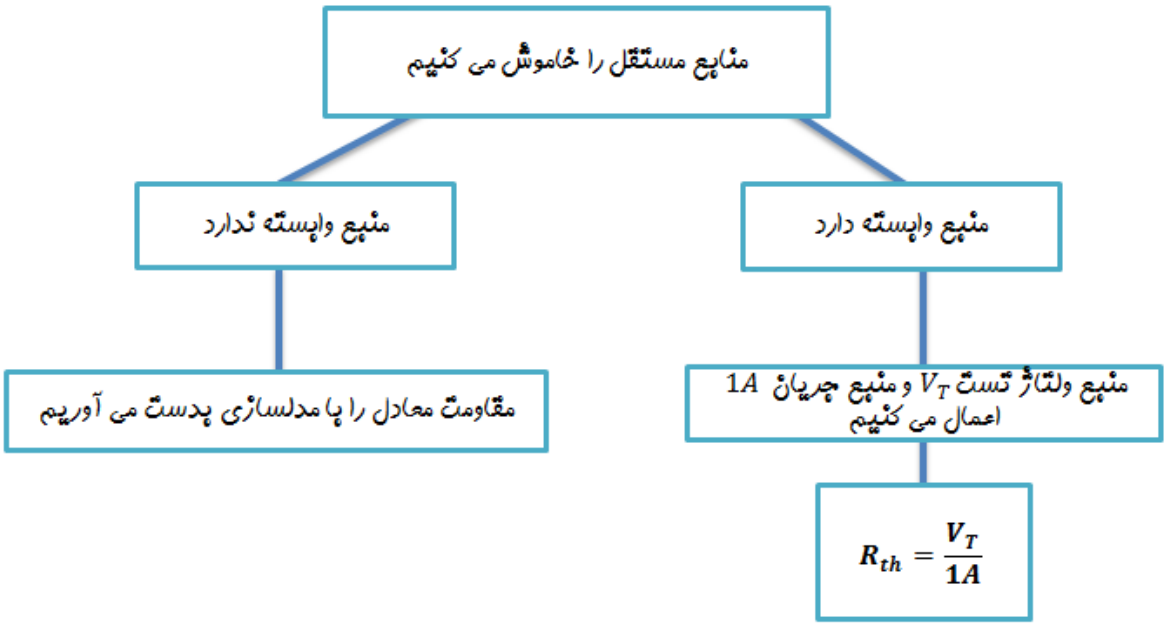
پاسخ:

روش‌های آزمایشگاهی محاسبه مدار معادل تونن و نورتن

در این بخش به روش های آزمایشگاهی محاسبه مدار معادل تونن و نورتن می پردازیم.

الف) محاسبه فقط مقاومت معادل:

اگر فقط مقاومت معادل مد نظر باشد مانند تست اهمی در آزمایشگاه ابتدا مدار را خاموش کرده و از دو سر خواسته شده با استفاده از اهم متر مقاومت دیده شده را می‌سنجیم. به این منظور الگوریتم زیر را انجام می‌دهیم:



نکته:

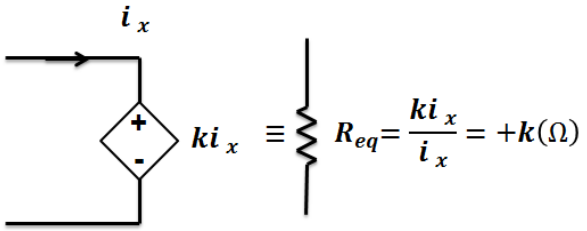
نکته۱: اگر تمام مقاومت های مدار مثبت باشد و منبع وابسته هم نداشته باشیم امکان صفر شدن R_{th} وجود ندارد. چون فقط با وجود منبع وابسته امکان ایجاد مقاومت منفی وجود دارد تا اثر مقاومت‌های دیگر مدار صفر شود.

نکته۲: اگر تمام مقاومت های مدار مثبت باشد و منبع وابسته هم نداشته باشیم امکان منفی شدن R_{th} وجود ندارد.

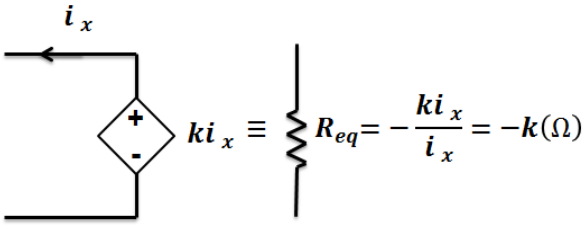
روش ساخت مقاومت منفی

با استفاده از منبع وابسته در برخی از حالات می‌توان خاصیت مقاومت ایجاد کرد. اگر منبع ولتاژ وابسته به وسیله جریان شاخه خودش کنترل شود یا منبع جریان وابسته با ولتاژ شاخه

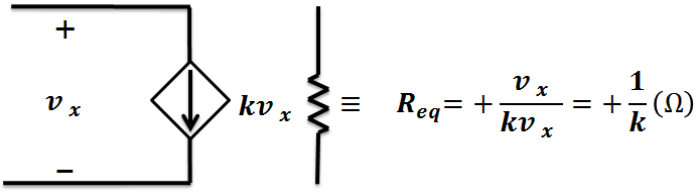
خودش کنترل شود، معادل با یک مقاومت عمل می کنند. به عبارت دیگر اگر ولتاژ و جریان منبع وابسته هر دو از یک جنس باشند می‌توان آن منبع وابسته را با مقاومت مدل کرد که مثبت و منفی بودن مقاومت را پلاریته ولتاژ و جهت جریان تعیین می کند.



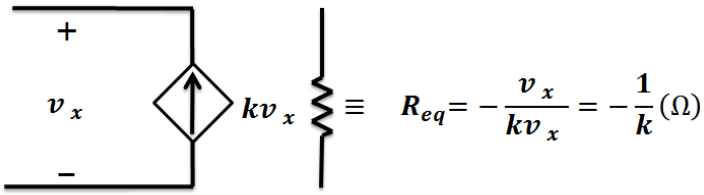
$$\equiv \quad R_{eq}=\frac{ki_x}{i_x}=+k(\Omega)$$



$$\equiv \quad R_{eq}=-\frac{ki_x}{i_x}=-k(\Omega)$$



$$\equiv \quad R_{eq}=+\frac{v_x}{kv_x}=+\frac{1}{k}(\Omega)$$

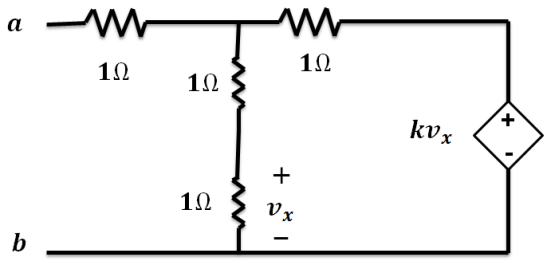


$$\equiv \quad R_{eq}=-\frac{v_x}{kv_x}=-\frac{1}{k}(\Omega)$$



استاد!!! من نفهمیدم چه طور مثبت یا منفی بودن مقاومت رو تشخیص بدهم؟

مثال۳۳: در مدار شکل مقابل به ازاء چه مقدار k مقاومت دیده شده در سرهای a و b منفی است؟*(مهندسی برق-۸۲)*



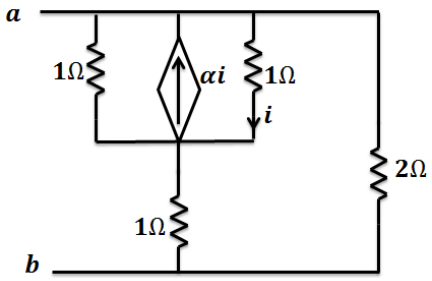
۱ 1

۲. 2

۳. 2.5

٤. 4

مثال۳٤:کمیت α در مدار شکل مقابل چه مقداری داشته باشد تا مقاومت دیده شده در سرهای a و b منفی بشود؟(مهندسی کامپیوتر-گرایش معماری - ۸۲)



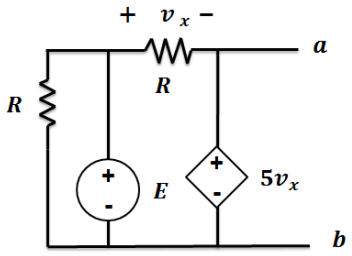
۱. $\frac{7}{3} < \alpha < 3$

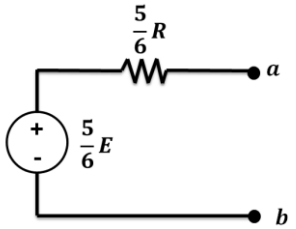
۲. $2 < \alpha < 3$

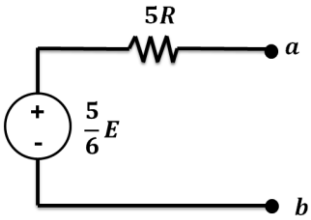
۳. $\frac{7}{3} < \alpha < 4$

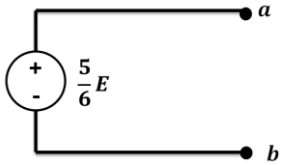
٤. $2 < \alpha < 4$

مثال۳۵: مدار معادل تونن شکل مقابل را به دست آورید.(مهندسی برق- ۸٤)



۱. 

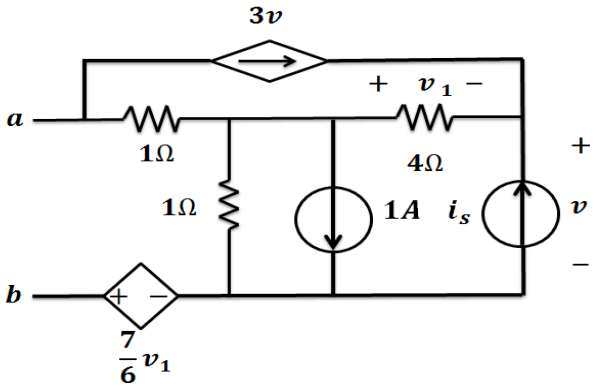
۲. 

۳. 

٤. معادل تونن ندارد

پاسخ:

مثال۳٦: مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است: (مهندسی برق- ۸۷)



۱. $\frac{5}{11}\Omega$

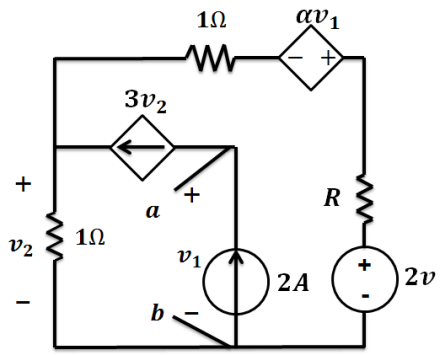
۲. 1Ω

۳. 3Ω

٤. $\frac{39}{11}\Omega$

پاسخ:

مثال۳۷: در مدار زیر به ازای چه مقدار α مقاومت دیده شده از دو سر a و b به صورت $R_{th} = R$ است؟ (مهندسی برق - ۹۵)



۱. $\alpha = 0$

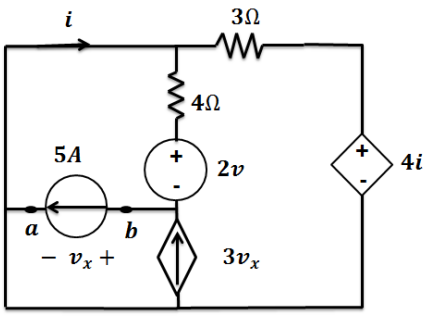
۲. $\alpha = 0.5$

۳. $\alpha = 1$

٤. تمامی مقادیر $\alpha \neq 0$

پاسخ:

مثال۳۸: در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر a و b چند اهم است ؟ (دکتری مهندسی برق- ۹۵)



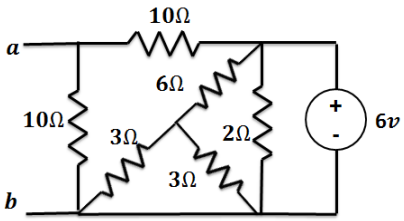
۱. $-4\ \Omega$

۲. $3\ \Omega$

۳. $-\frac{4}{11}\Omega$

٤. $\frac{1}{11}\Omega$

مثال۳۹:در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر a و b چند اهم است؟



۱. $3\ \Omega$

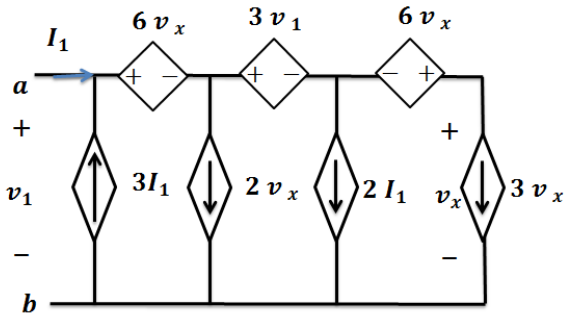
۲. $4\ \Omega$

۳. $5\ \Omega$

٤. صفر

پاسخ:

مثال۴۰: در مدار زیر مقاومت دیده شده از دو سر a و b چند اهم است ؟



۱. $0.2\ \Omega$

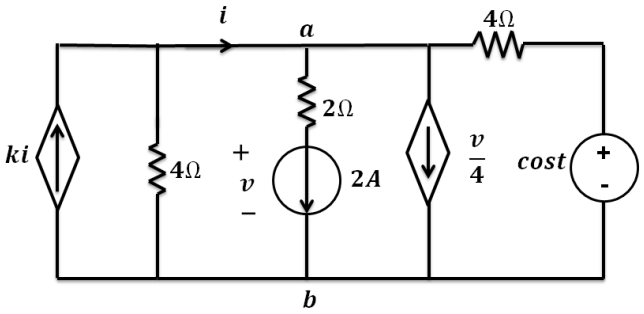
۲. $-0.2\ \Omega$

۳. $1\ \Omega$.

٤. $-1\ \Omega$

مثال۴۱:در مدار زیر اگر مقاومت دیده شده از دو سر a و b برابر با 4Ω باشد مقدار k برابر است با:

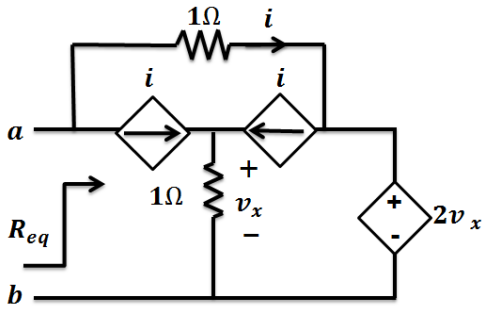
(معماری کامپیوتر ۹۳)



۱. $-2\ \Omega$ ۲. $0.5\ \Omega$

۳. $2\ \Omega$ ۴. $3\ \Omega$

مثال۴۲:در مدار زیر R_{eq} از دو سر a و b کدام است؟ (معماری کامپیوتر ۹۴)



۱. $\frac{1}{2}\ \Omega$

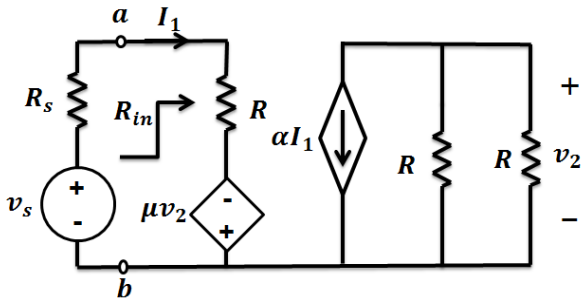
۲. $\frac{2}{3}\ \Omega$

۳. $\frac{3}{2}\ \Omega$

۴. $\frac{5}{2}\ \Omega$

پاسخ:

مثال۴۳: مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است: (معماری کامپیوتر- ۸۸)



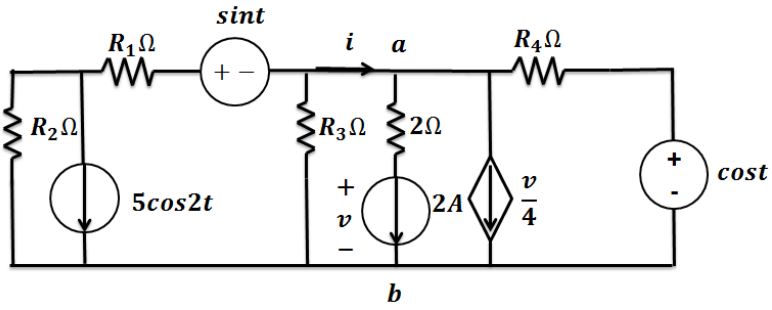
۱. R

۲. $R(1+2\alpha\mu)$

۳. $R\left(1+\frac{\alpha\mu}{2}\right)$

۴. $\frac{R}{3}$

مثال٤٤: اگر در مدار زیر توان متوسط منبع جریان دو آمپری ناشی از خودش برابر (۱۲-) وات باشد. مقاومت معادل مدار از a و b چند اهم است: (معماری کامپیوتر۹۳)



۱. 1Ω

۲. $2\ \Omega$

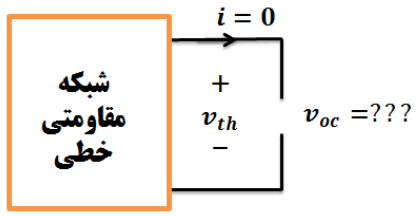
۳. $3\ \Omega$

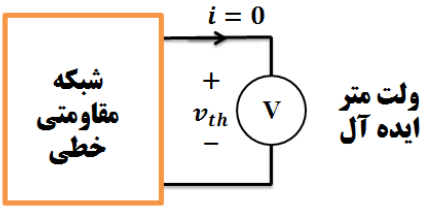
٤. $6\ \Omega$

پاسخ:

محاسبه فقط ولتاژ تونن

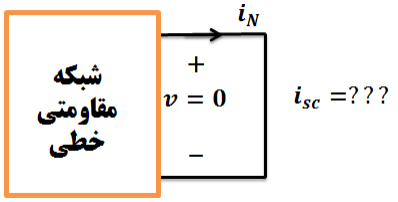
برای محاسبه ولتاژ تونن در آزمایشگاه ولت متر را به مدار روشن متصل می‌کنیم و ولتاژ دو سر را اندازه گیری می‌کنیم. لازم به ذکر است ولتمتر ایده آل جریانش صفر است. یعنی برای محاسبه ولتاژ تونن کافی است ولتاژ مدار باز را از آن دو سر با تحلیل مدار بدست آوریم.

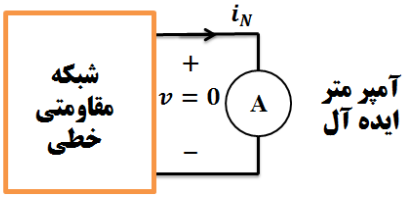




محاسبه فقط جریان نورتن

برای محاسبه جریان نورتن در آزمایشگاه آمپرمتر را به مدار روشن متصل می‌کنیم و جریان را اندازه‌گیری می‌کنیم. لازم به ذکر است آمپرمتر ایده آل مقاومت داخلی ندارد و ولتاژ دو سرش صفر است، بنابر این دو سر مورد نظر را اتصال کوتاه می‌کند. برای محاسبه جریان نورتن کافی است جریان اتصال کوتاه را در سر خواسته شده بدست آوریم.

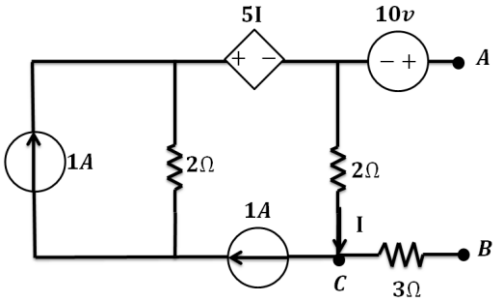




با داشتن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه به شیوه زیر می‌توانیم مقاومت تونن را محاسبه کنیم.

$$v_{th} = v_{oc} \xrightarrow{\frac{v_{th}}{i_N} R_{th} =} \frac{v_{oc}}{i_{s.c}} \;, i_N = i_{s.c} R_{th} =$$

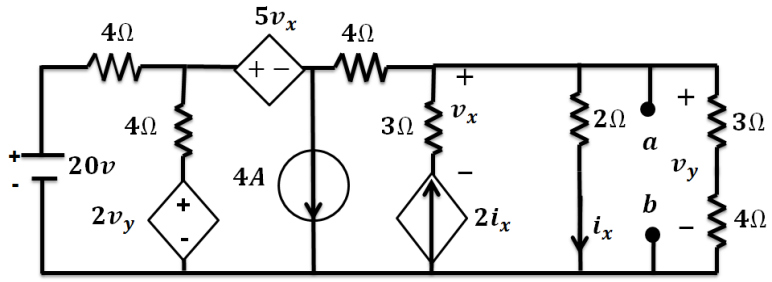
مثال۴۵: ولتاژ و مقاومت تونن از دو سر A و B کدام است: (کامپیوتر۸۶)



۱. ۱۵ ولت و ۲ اهم
۲. ۱۲ ولت و ٤ اهم
۳. ۱۲ ولت و ۵ اهم
٤. ۱۵ ولت و ۵ اهم

پاسخ:

مثال٤٦: جریان نورتن از دو سر a و b کدام است:

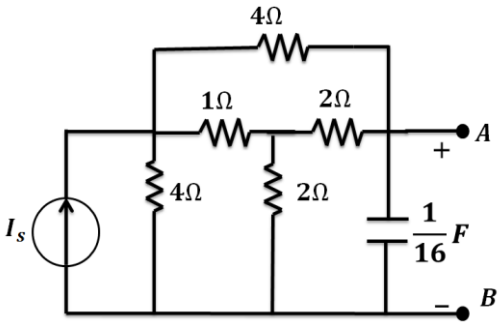


۱. $3A$ ۲. $\frac{1}{4}A$

۳. $4A$ ٤. $\frac{1}{3}A$

پاسخ:

مثال۴۷:در مدار شکل مقابل اگر سرهای A و B را اتصال کوتاه کنیم. جریان I جاری شونده از سر A به B کدام خواهد بود؟(هوش مصنوعی-۸۹)



۱. $\frac{1}{3}I_s$

۲. $\frac{1}{2}I_s$

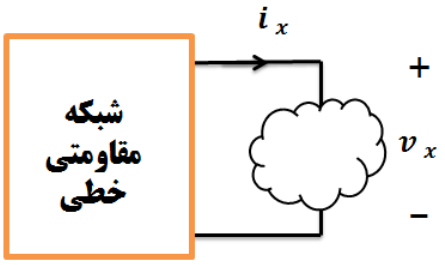
۳. $\frac{1}{4}I_s$

۴. $\frac{2}{3}I_s$

پاسخ:

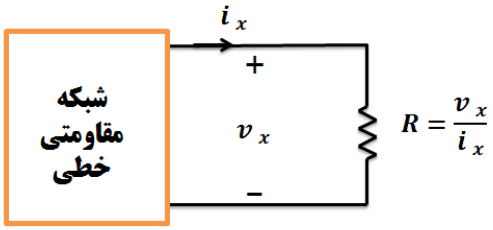
تعویض المان در مدار

گاهی در صورت سوال طراح از شما می خواهد المانی را جایگزین المان دیگر مدار کنید بدون این که ولتاژ و جریان های مدار تغییر کند و خللی در کار مدار ایجاد شود. برای جایگزین کردن المان با یک المان دیگر به این روش عمل می‌کنیم: ابتدا ولتاژ و جریان دو سر المان اصلی را اندازه گیری کرده و به صورت زیر فرض می کنیم.

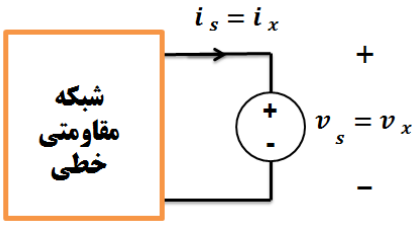


حالت اول، تعویض با مقاومت: با توجه به مقدار ، جهت و پلاریته i_x و v_x المان اصلی، مقاومت جایگزین از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

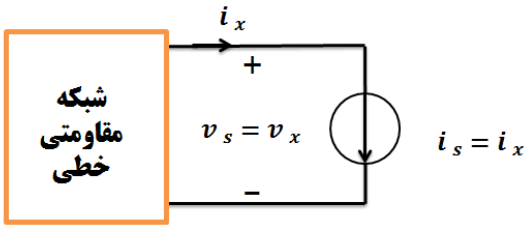
جایگزین $R = \frac{v_x}{i_x}$



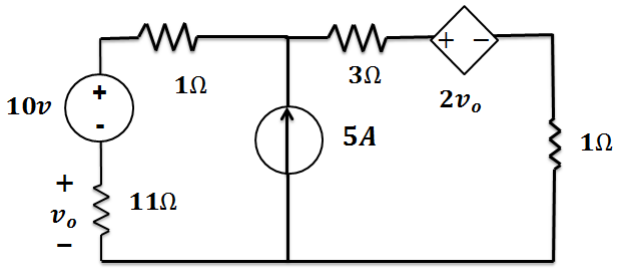
حالت دوم، تعویض با منبع ولتاژ:المان را با منبع ولتاژ $v_s = v_x$ که هم پلاریته v_x است تعویض می کنیم به شرطی که جریانش i_x شود.



حالت سوم ، تعویض با منبع جریان: المان را با منبع جریان $i_s = i_x$ که هم جهت i_x است تعویض می کنیم به شرطی که ولتاژش v_x شود.



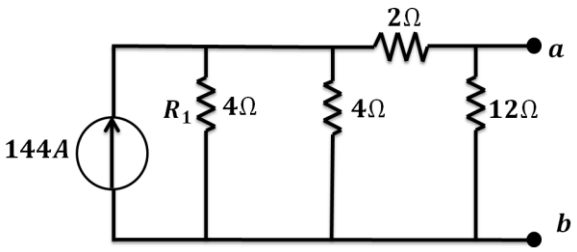
مثال۴۸: در مدار شکل مقابل منبع جریان 5 آمپری را با چه عنصری می توان جایگزین نمود به گونه ای که جریان و ولتاژ شاخه ها هیچ تغییری نکنند؟ (مهندسی برق- ۹۰)



۱. مقاومت ۲ اهمی
۲. منبع ولتاژ ۵ ولتی
۳. مقاومت ٦ اهمی
٤. مقاومت ولتاژ ۱۵ ولتی

پاسخ:

مثال۴۹: می خواهیم مقاومت $R_1 = 4$ اهمی در شکل مقابل را با یک منبع جریان نابسته جانشین سازیم. مقدار این منبع در جهت نشان داده شده چند آمپر باشد تا ولتاژ مدار باز e_{oc} و جریان اتصال کوتاه i_{sc} سرهای a و b تغییر نکند؟(هوش مصنوعی-۸۲)



۱. 18

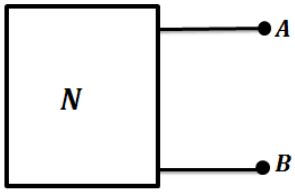
۲. 63

۳. 126

٤. چنین چیزی امکان ندارد

پاسخ:

مثال۵۰: مدار مقاومتی N از تعدادی مقاومت خطی و منابع نابسته و وابسته تشکیل می‌شود. اگر مقاومت 15 اهمی را در سرهای A و B وصل کنیم $v_{AB}=45$ ولت می شود. اگر مقاومت 5 اهمی را در سرهای A و B وصل کنیم $v_{AB}=25$ ولت می شود. اگر مقاومت 40 اهمی را در سرهای A و B وصل کنیمv_{AB} چقدر خواهد بود؟ (معماری-۸۳)



۱. 48

۲. 54

۳. 60

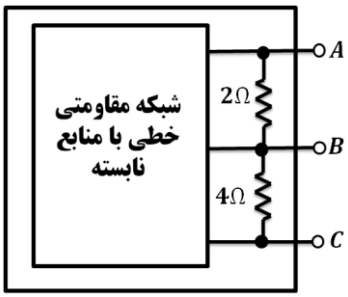
٤. 70

پاسخ:



استاد!!! این مدار که هیچ المانش معلوم نیست فقط یه جعبه است آخه ولتاژ دو سر یه جعبه رو چه جوری میشه حساب کرد؟

مثال۵۱:در مدار شکل زیر، اگر بین A و B را اتصال کوتاه کنیم جریان $2A$ از A به B می‌گذرد. و اگر بین B و C را اتصال کوتاه کنیم جریان $3A$ از B به C می‌گذرد. شبکه معادل تونن دیده شده (V_{th}, R_{th}) از سرهای A و B به ترتیب از راست به چپ چند اهم و چند ولت است؟(ارشد برق ۹۴)



۱. $\frac{3}{2}$ و 3

۲. 2 و 12

۳. 2 و 3

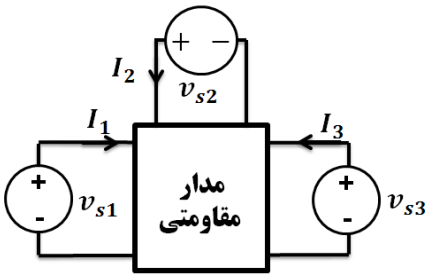
۴. 4 و 3

راه تستی: با توجه به آزمایش اول جریان اتصال کوتاه از سرهای A و B که همان جریان نورتن مدار است برابر است با: $I_{sc} = I_N = 2A$. از طرفی می دانیم که :

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = 2A$$

تنها گزینه ای که در آن ولتاژ تونن دو برابر مقاومت تونن است گزینه ۱ است.

مثال۵۲: مدار شکل مقابل با معادلات $\begin{bmatrix} 10a & 1 & -a \\ a & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ v_{s3} \end{bmatrix}$ توصیف می‌شود. امپدانس دیده شده از دو سر منبع v_{s1} کدام است؟(مهندسی برق -۸۹)



۱. $3a$ ۲. $6a$

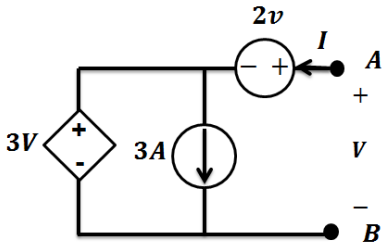
۳. $\frac{3}{2a}$ ۴. $\frac{2}{3a}$

پاسخ:

نقطه کار مدار

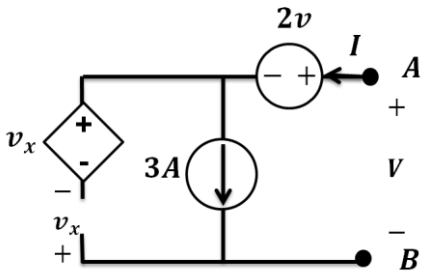
نقطه کار همان ولتاژ و جریان یک پورت از مدار است و مکان نقاط کار رابطه ولتاژ و جریان یک پورت از مدار است.

مثال۵۲: مکان نقاط کار مدار شکل مقابل کدام است؟



۵. این مدار فقط یک نقطه کار دارد.
٦. تمام خط $V=-1$ جزو مکان است.
۷. تمام خط $I=3$ جزو مکان است.
۸. همه نقاط صفحه $(I-V)$ جزو مکان هستند.

مثال۵۳: مکان نقاط کار مدار شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر- گرایش هوش مصنوعی ۸۸)



۱. این مدار فقط یک نقطه کار دارد
۲. تمام خط $V=2$ جزو مکان است
۳. تمام خط $I=3$ جزو مکان است
٤. همه نقاط صفحه $(I-V)$ جزو مکان هستند

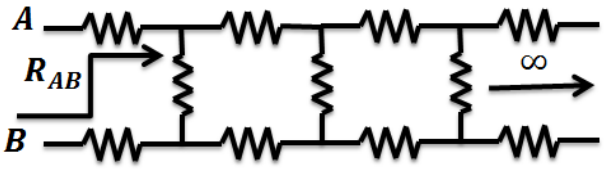
شبکه‌های نامتناهی

در این قسمت می‌خواهیم در مورد مدارهایی بحث کنیم که از یک طرف یا هر دو طرف تا بی‌نهایت امتداد دارند. این مدارها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد دسته اول مدارهایی که از یک طرف تا بی‌نهایت امتداد دارند و دسته دوم مدارهایی که از هر دو طرف به بی‌نهایت می‌روند.

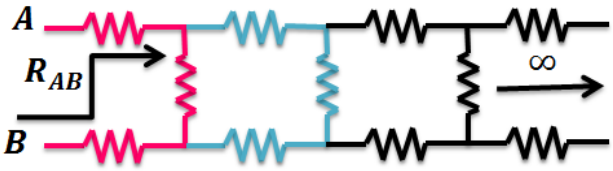
الف) مدارهایی که از یک طرف نامحدود هستند

در این مدارات به خاطر تقارن و تکرار می‌توان قسمتی از مدار را معادل مقاومت کل یا ضریبی از آن مقاومت در نظر گرفت.

مثال۵٤: در شبکه مقاومتی زیر که از یک طرف به بی‌نهایت می‌رود (تکرار می‌شود) با فرض این‌که تمام مقاومت‌ها 1Ω باشند مقاومت معادل را بدست آورید. (تالیفی)

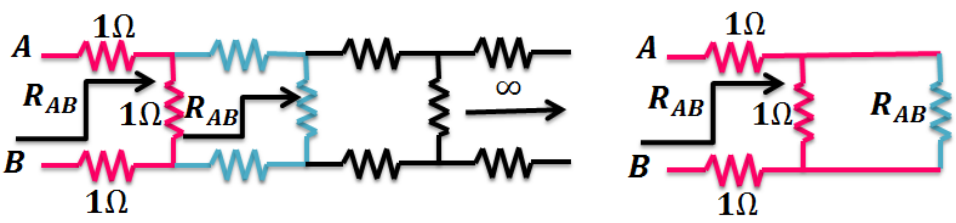


پاسخ: ابتدا باید الگوی تکرار شدن مقاومت‌ها را بیابیم. اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که مقاومت‌ها طبق الگوی زیر تکرار می‌شوند.

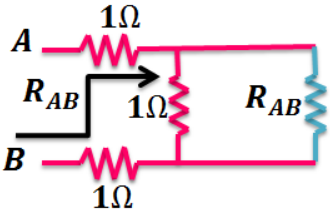


بدیهی است که چون شاخه‌ها تا بی‌نهایت ادامه دارند از شاخه‌ی یکی قبل تر هم مقاومت R_{AB} دیده می‌شود و کم شدن دو سه تا از این مقاومت‌ها تاثیری روی مقاومت کل ندارد.

بنابراین داریم:



حالا که مدار کمی ساده‌تر شد به می‌توانیم مقاومت معادل را بدست آوریم:

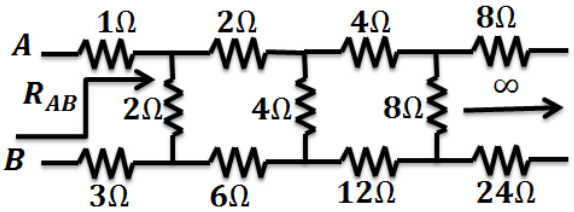


$$R_{AB} = 1 \| R_{AB} + 1\Omega + 1\Omega \rightarrow R_{AB} = 2 + \frac{R_{AB}}{R_{AB}+1} \rightarrow$$
$$R_{AB} = \frac{3R_{AB}+2}{R_{AB}+1} \rightarrow R_{AB}^2 + R_{AB} = 3R_{AB} + 2$$

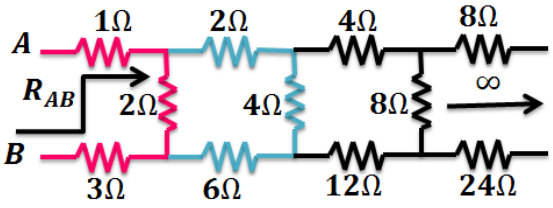
$$R_{AB}^2 - 2R_{AB} - 2 = 0 \rightarrow R_{AB} = \frac{2 \mp \sqrt{4+8}}{2} = \begin{cases} 1+2\sqrt{3} & \text{ق ق} \\ 1-2\sqrt{3} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

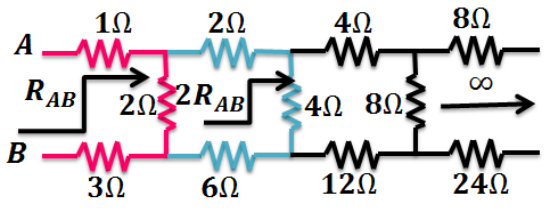
چون مقاومت‌ها همگی مثبت هستند پاسخ نهایی نیز مثبت است و $1-2\sqrt{3}$ غیر قابل قبول است.

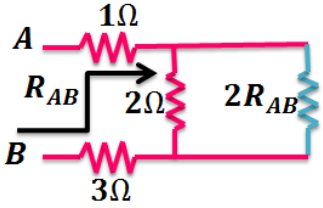
مثال۵۵: مقاومت دیده شده از سرهای A و B مدار شکل زیر چند اهم است؟ (تالیفی)



پاسخ: الگوی تکرار این سوال مشابه سوال قبل است با این تفاوت که مقاومت‌های هر طبقه نسبت به طبقه قبل دو برابر شده‌اند. از طرفی می‌دانیم که اگر مقاومت‌های یک شبکه N برابر شوند مقاومت کل هم N برابر می‌شود. بنابراین داریم:







$$R_{AB} = 2 \| 2R_{AB} + 1\Omega + 3\Omega \rightarrow$$
$$R_{AB} = 4 + \frac{4R_{AB}}{2R_{AB}+2} \rightarrow$$
$$R_{AB} = \frac{6R_{AB}+4}{R_{AB}+1} \rightarrow R_{AB}^2 + R_{AB} = 6R_{AB} + 4$$

$$R_{AB}^2 - 5R_{AB} - 4 = 0 \rightarrow R_{AB} = \frac{5 \mp \sqrt{25+16}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{41}}{2} = 5.7 \text{ ق ق} \\ \frac{5-\sqrt{41}}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

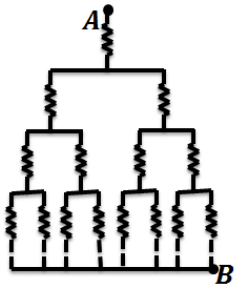
چون مقاومت‌ها همگی مثبت هستند پاسخ نهایی نیز مثبت است.

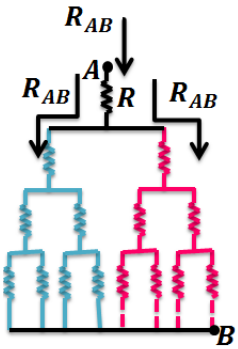
مثال۵۵: مقاومت دیده شده از سرهای A و B مدار شکل زیر چند اهم است؟ تمام مقاومت‌ها یکسان و برابر با R هستند. (تالیفی)

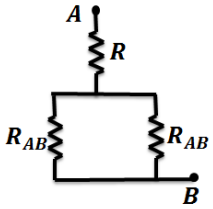
۱. $3R$ ۲. $2R$

۳. $\frac{R}{2}$ ۴. بی‌نهایت

پاسخ: ابتدا باید الگوی تکرار شدن مقاومت‌ها را بیابیم. اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که مقاومت‌ها طبق الگوی زیر تکرار می‌شوند. بدیهی است که چون شاخه‌ها تا بی‌نهایت ادامه دارند از شاخه‌ی یکی قبل تر هم مقاومت R_{AB} دیده می‌شود و کم شدن دو سه تا از این مقاومت‌ها تاثیری روی مقاومت کل ندارد.



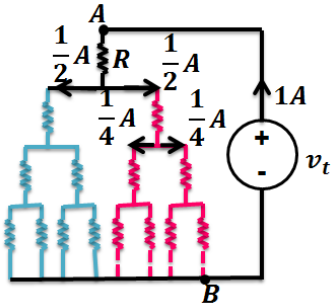




$$R_{AB} = R_{AB} \| R_{AB} + R \rightarrow R_{AB} = R + \frac{R_{AB}}{2} \rightarrow \frac{R_{AB}}{2} = R \rightarrow R_{AB} = 2R$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

راه حل دوم: می‌توانستیم از اعمال منبع ولتاژ تست با جریان $1A$ استفاده کنیم. با توجه به تقارن مدار جریان



به سادگی در آن قابل پخش است. حالا با یک KVL ساده داریم:

$$KVL: v_t = R\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

جملات داخل پرانتز بیانگر مجموع یک تصاعد هندسی هستند که از رابطه

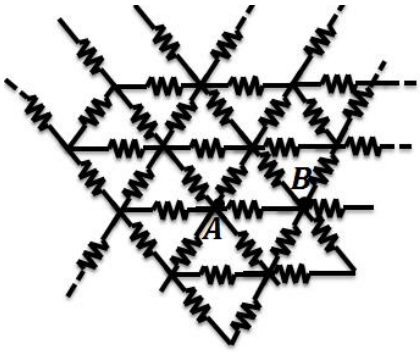
زیر قابل محاسبه می‌باشند.

$$s=\frac{\text{جمله اول}}{\text{1 − قدر نسبت}}\rightarrow v_t=R\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)=R\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=2R$$

الف) مدارهایی که از هر طرف نامحدود هستند

در این مدارات برای محاسبه مقاومت معادل باید منبع تست v_t و i_t را بین دو نقطه مذکور اعمال کنیم. فقط باید توجه داشته باشید که جریان i_t یک بار به نقطه a وارد شده و یک بار دیگر از نقطه b خارج شود یعنی در محاسبه v_t ، ولتاژ v_t دوبار نوشته می‌شود یکی از اثر وارد شدن جریان i_t به گره a و دیگری از اثر خارج شدن جریان i_t از گره b .

مثال۵۵: مقاومت دیده شده از سرهای A و B مدار شکل زیر چند اهم است؟ تمام مقاومت‌ها یکسان و برابر با R هستند. (تالیفی)

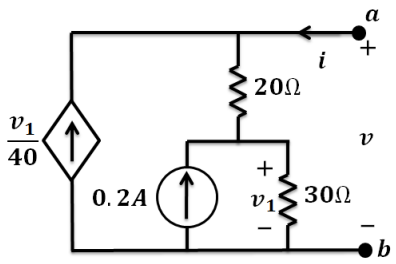


۱. $3R$
۲. $2R$
۳. $\frac{R}{3}$
۴. بی‌نهایت

سلام به همه! خسته نباشید تا الان بیشتر از ۵۰ تا تست آموزشی، مفهومی، ترکیبی و ایده‌دار حل کردیم و اگه با ما خوب پیش اومده باشید و روی درسنامه‌ها مسلط شده باشین، می‌تونید به خودتون مطمئن باشید که سوالات این مبحث رو در کنکور به راحتی تار و مار می‌کنید.

چندتا تست دیگه

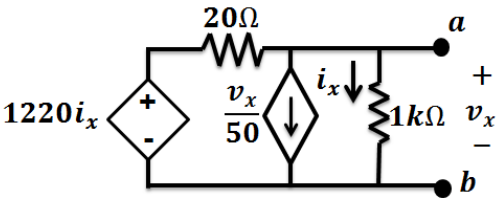
سوال۱: مقاومت تونن از دیدگاه دو نقطه a و b در مدار شکل زیر چند اهم است؟ (مهندسی برق- ٦٧)



۱. 100 ۲. 200

۳. 300 ٤. 400

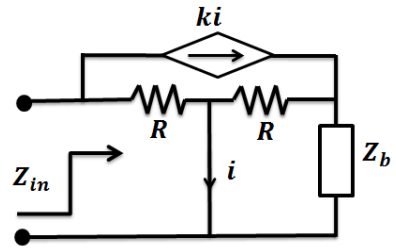
سوال۲: مشخصات مربوط به مدار معادل تونن شکل مقابل از کدام گزینه زیر بدست می‌آید؟ (مهندسی برق- ۷۰)



۱. $R_T = 100\Omega, V_T = 10v$ ۲. $R_T = 180\Omega, V_T = 0v$

۳. $R_T = 120\Omega, V_T = 15v$ ٤. $R_T = 100\Omega, V_T = 0v$

سوال۳: در شبکه زیر $\lim\limits_{k\to\infty} Z_{in}$ چقدر است؟ (مهندسی برق- ۷۷)



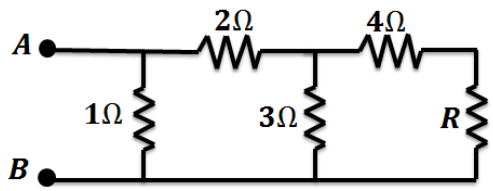
۱. $-Z_a$

۲. $Z_b - R$

۳. $Z_b + R$

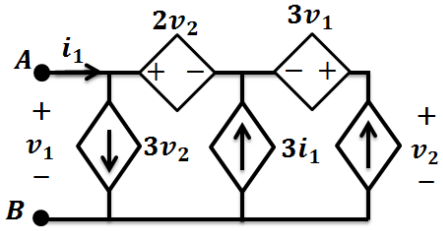
٤. بی‌نهایت

سوال٤: در مورد مقاومت دیده شده R_{in} در دو سر A و B مدار شکل زیر کدام رابطه همواره برقرار است؟ (مهندسی برق- ۸۰)



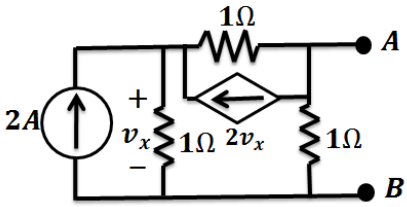
۱. $R_{in} < 0.65$
۲. $R_{in} < 0.7$
۳. $R_{in} < 0.75$
۴. $R_{in} < 0.85$

سوال۵: مقاومت دیده شده از سرهای A و B مدار شکل زیر چند اهم است؟ (مهندسی برق- ۸۰)



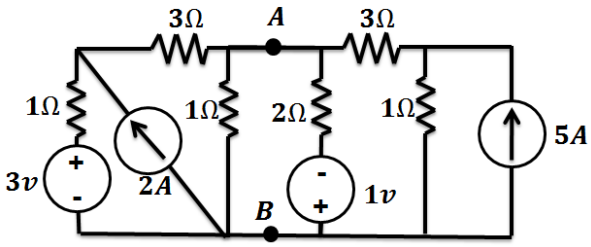
۱. صفر
۲. 0.5
۳. 2
۴. بی‌نهایت

سوال۶: مقاومت دیده شده از سرهای A و B مدار شکل زیر چند اهم است؟ (مهندسی برق- ۸۱)



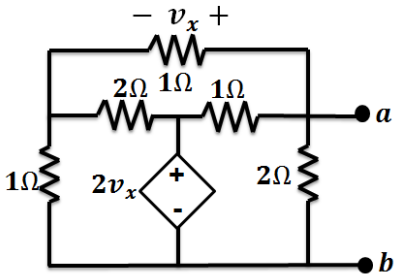
۱. صفر
۲. $\frac{2}{3}$
۳. 1
۴. بی‌نهایت

سوال۷: در مدار مقابل مقدار v_{AB} چند ولت است؟ (مهندسی برق- ۸۲)



۱. 1
۲. 2
۳. $\frac{1}{2}$
۴. $\frac{1}{4}$

سوال۸: مقاومت دیده شده از سرهای a و b مدار شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق- ۸۲)



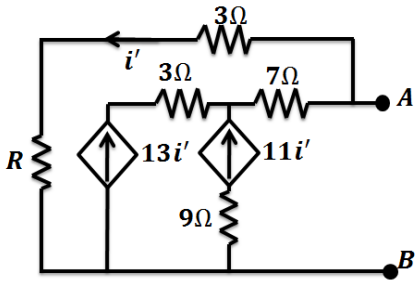
۱. $\frac{4}{7}$

۲. $\frac{15}{14}$

۳. $\frac{7}{4}$

۴. $\frac{14}{15}$

سوال۹: مقاومت معادل بین دو سر A و B مدار داده شده در شکل زیر کدام است؟ (مهندسی برق- ۸۴)



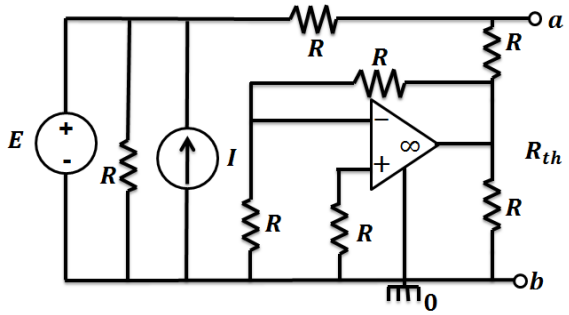
۱. $3R+3/2$

۲. $2R-1/5$

۳. $1/4R+3$

۴. $2/4R+2$

سوال۱۰: مدار معادل تونن از سرهای a و b کدام است؟($op-amp$ در ناحیه خطی و ایده‌آل است) (مهندسی برق- ۸۹)



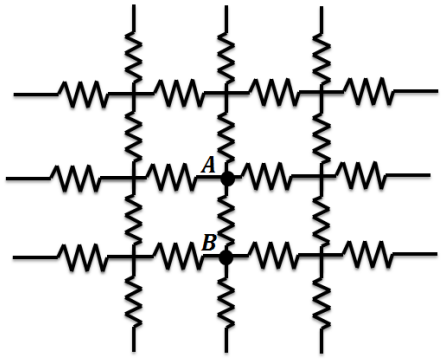
۱. $R_{th}=\frac{2}{3}R, V_{th}=E+RI$

۲. $R_{th}=\frac{10}{11}R, V_{th}=\frac{E+RI}{2}$

۳. $R_{th}=\frac{1}{2}R, V_{th}=\frac{E}{2}$

۴. $R_{th}=R, V_{th}=E$

سوال۱۱: در مدار شکل مقابل تمام مقاومت‌ها یک اهم هستند و از هر طرف به بی‌نهایت می‌رود. مقاومت دیده شده از سرهای A و B چیست؟ (مهندسی برق- ۶۸)



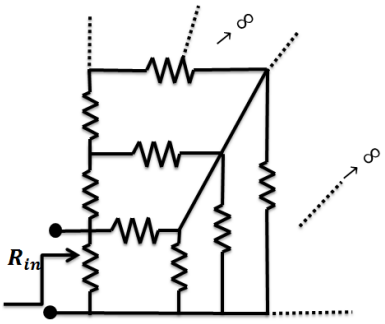
۱. 1

۲. $\frac{1}{2}$

۳. $\frac{1}{4}$

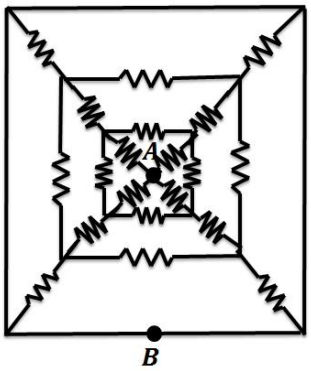
۴. $\frac{1}{8}$

سوال۱۲: اگر مقاومت کلیه شاخه‌ها برابر با R باشد مقاومت ورودی مدار را بیابید؟ (مهندسی برق- ۷٤)



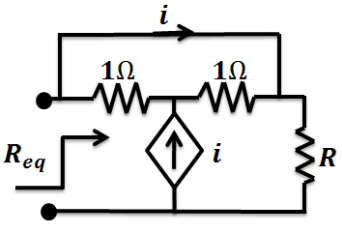
۱. R
۲. $0.618R$
۳. $0.5R$
٤. $0.382R$

سوال۱۳: در مدار شکل مقابل تمام مقاومت‌ها یک اهم هستند. مقاومت دیده شده از سرهای A و B چیست؟ (مهندسی برق- ۷۷)



۱. $\frac{1}{4}$
۲. $\frac{1}{3}$
۳. $\frac{1}{2}$
٤. $\frac{3}{4}$

سوال۱٤: در مدار شکل مقابل R_{eq} برابر است با : (مهندسی برق- ٦۸)



۱. $2R$
۲. $3R$
۳. $\frac{1}{2}R$
٤. $\frac{1}{3}R$

سوال۱۵: مشخصه $v-i$ یک مقاومت به صورت زیر است:

$$v = 2i + e^{-t}i - \frac{1}{2}vcos2t$$

این مقاومت کدام ویژگی را دارا نیست؟(مهندسی برق- ۷۸)

۱. خطی ۲. فعال ۳. دو طرفه ٤. تغییرپذیر با زمان

فصل سوم

برهم نهی و جمع آثار در مدارهای الکتریکی

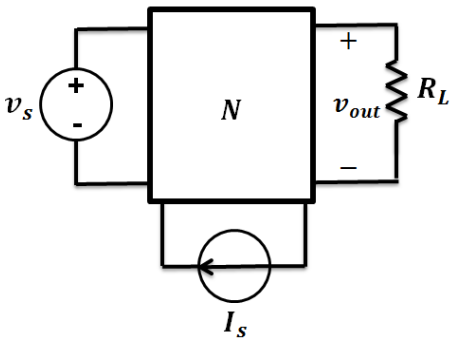
در این فصل به مدارهایی می‌پردازیم که چند منبع ولتاژ یا جریان دارند. در مدارهای الکتریکی که بیش از یک منبع تغذیه دارند، هر منبع به طور مستقل از سایر منابع جریانی در مدار ایجاد می‌کند. بنابر این می‌توانیم ادعا کنیم که جریان هر عنصر از جمع جبری جریان های ایجاد شده توسط منابع مختلف به وجود می‌آید. البته این مساله برای همه مدارها صادق نیست. قضیه بسیار کاربردی در مدارهای به نام قضیه جمع آثار یا اصل برهم نهی[۱۴] به بیان شرایط و محدودیت های این روش می‌پردازد.

قضیه جمع آثار

در هر مدار خطی با جواب یکتا، هر پاسخ از مدار (یعنی هر سیگنال جریان یا ولتاژ) به ورودی ها (منظور منابع مستقل ولتاژ و جریان و یا شرایط اولیه) برابر است با مجموع پاسخ های مدار به تک تک ورودی‌ها، وقتی که هر ورودی به تنهایی به مدار اعمال می‌شود.

به عنوان مثال در مدار خطی زیر برای محاسبه ولتاژ خروجی می توان به دو روش عمل کرد.

۱. در حضور همه منابع ولتاژ خروجی را محاسبه کنیم.
۲. اثر هر منبع را جداگانه روی ولتاژ خروجی محاسبه کنیم و با هم جمع بزنیم.





استاد شبکه N هر چیزی می تواند باشد؟



همانطور که در صورت قضیه بیان شد، قضیه جمع آثار فقط برای شبکه مقاومتی خطی کاربرد دارد. بهتر است کمی قضیه را باز کنیم. اولا مدار خطی همان طورکه در فصل قبل اشاره شد مداری است که خاصیت همگنی و جمع پذیری را با هم داشته باشد.

[۱۴] Superposition

خاصیت همگنی : اگر پاسخ مدار به ورودی $x(t)$ برابر با $y(t)$ باشد، آن‌گاه پاسخ مدار به ورودی $\alpha x(t)$ برابر است با $\alpha y(t)$. یعنی اگر ورودی در عددی ضرب شود خروجی نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

خاصیت جمع پذیری : اگر پاسخ مدار به ورودی $x_1(t)$ برابر با $y_1(t)$ و پاسخ مدار به ورودی $x_2(t)$ برابر با $y_2(t)$ باشد پاسخ مدار به اعمال همزمان $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برابر است با مجموع پاسخ‌های مدار به تک تک ورودی‌ها

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

اعمال $x_1(t) + x_2(t)$ $\longrightarrow$ $y_1(t) + y_2(t)$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که در هر مدار خطی:

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

اعمال $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ $\longrightarrow$ $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$



استاد!!! α و β هر مقداری می توانند داشته باشند ؟



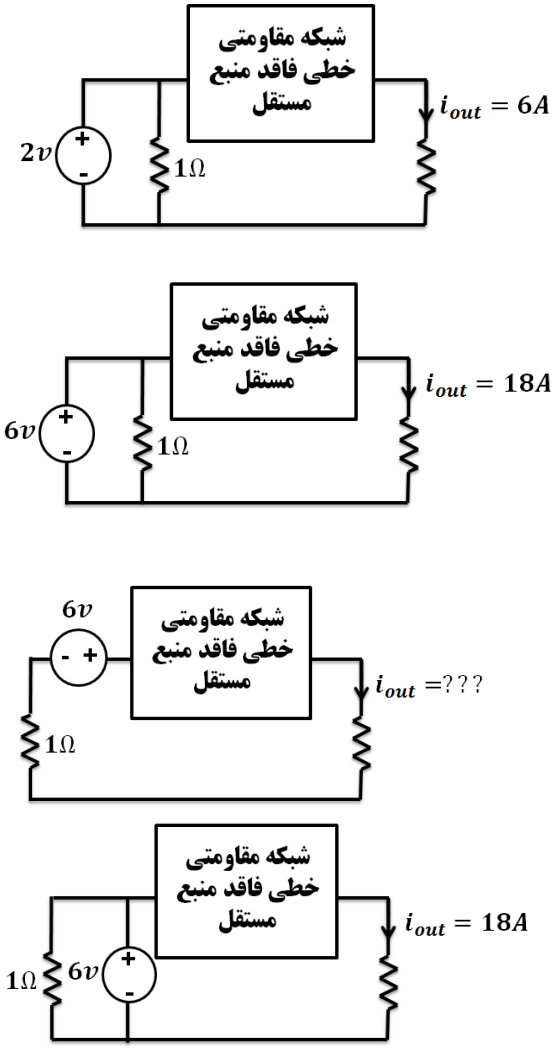
عجب سوالی پرسیدی ازت بعید بود!!!. تا جایی که مدار غیر خطی نشود در عمل مشکلی پیش نمی‌آید.

.

نکات تکمیلی قضیه جمع آثار

نکته اول: توجه داشته باشید که قضیه جمع آثار به جایگاه اولیه ورودی ها حساس است. یعنی اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ برابر با $y(t)$ باشد، آن‌گاه پاسخ مدار به ورودی $\alpha x(t)$ از همان مکان اولیه اعمال $x(t)$ برابر با $\alpha y(t)$ خواهد بود.

مثلا در مدار زیر جریان خروجی به ازای منبع ولتاژ $2v$ از مکان داده شده برابر با $6A$ است.

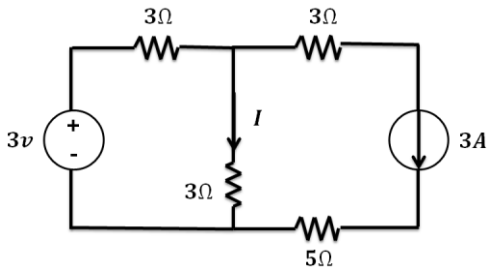


امیدوارم مفهوم حساس بودن جمع آثار به مکان اعمال ورودی را به خوبی درک کرده باشید!!!

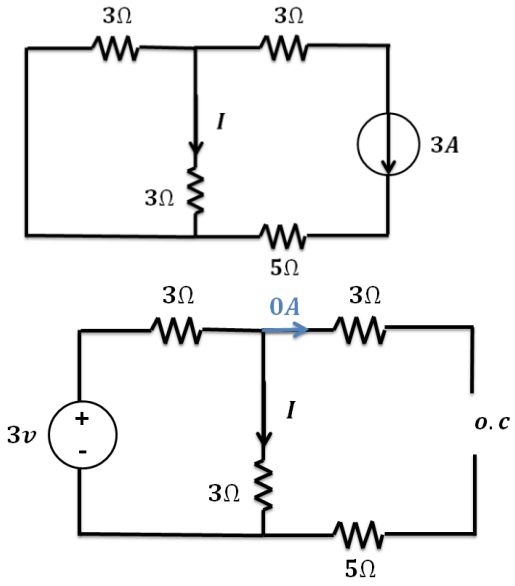
نکته دوم: برای استفاده از قضیه جمع آثار باید اثر هر یک از منابع را به صورت جداگانه و مستقل حساب کنیم برای این کار باید هر بار فقط یک منبع از مدار را نگه می‌داریم و منابع دیگر را حذف می‌کنیم و هر دفعه فقط پاسخ ناشی از یک منبع را بدست می‌آوریم و نهایتا پاسخ ها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال۱: در مدار زیر جریان I ناشی از منبع جریان چند برابر جریان I ناشی از منبع ولتاژ است.

۱. 1
۲. 3
۳. -1
٤. -3



پاسخ: برای محاسبه جریان ناشی از منبع جریان باید منبع ولتاژ را خاموش کنیم برای خاموش کردن منبع ولتاژ آن را اتصال کوتاه می‌کنیم.

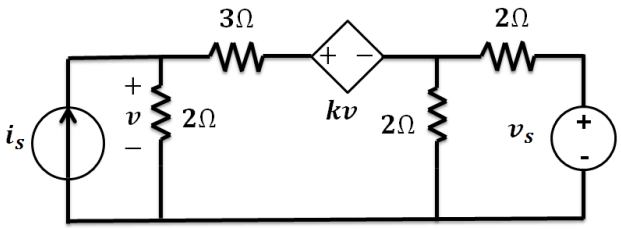


مثال۲: در مدار شکل زیر به ازای چه مقدار k، ولتاژ ناشی از i_s برابر نصف آن می‌شود؟

(مهندسی -برق۹۰)

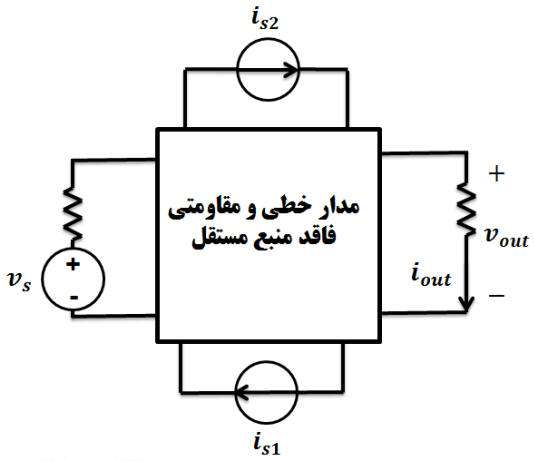
۱. $\frac{1}{2}$ ۲. 1

۳. -5 ۴. هیچ مقدار k، چون این مدار جواب یگانه ندارد.



پاسخ:

اثر منبع مستقل در جعبه سیاه مقاومتی خطی



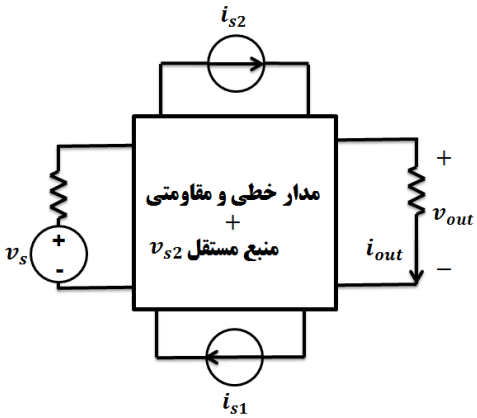
$$i_{out} = \alpha v_s + \beta i_{s1} + \gamma i_{s2}$$

$$v_{out} = \mu v_s + \rho i_{s1} + \tau i_{s2}$$





سوالی داشتم اگر داخل جعبه سیاه منبع دیگری وجود داشته باشد تکلیف چیست؟

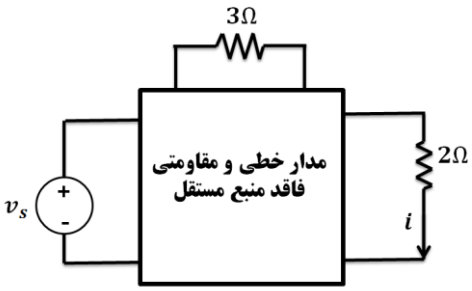


جعبه سیاه شامل یک منبع ولتاژ مستقل است.
سیگنال خروجی i_{out} و v_{out} با اعمال اثر منبع ولتاژ v_{s2} به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$i_{out} = \alpha v_s + \beta i_{s1} + \gamma i_{s2} + \eta v_{s2}$$

$$v_{out} = \mu v_s + \rho i_{s1} + \tau i_{s2} + \lambda v_{s2}$$

مثال۳: در مدار زیر وقتی که $v_s = 3v$ است $i = 4$ آمپر می شود. جریان i را به ازای مقادیر v_s زیر بدست آورید.



الف) $v_s = 6v$

ب) $v_s = 3\cos t$

ج) $v_s = 3 + 6\cos t$

د) توان متوسط مقاومت2 اهم به ازای $v_s = 3 + 6\cos t$

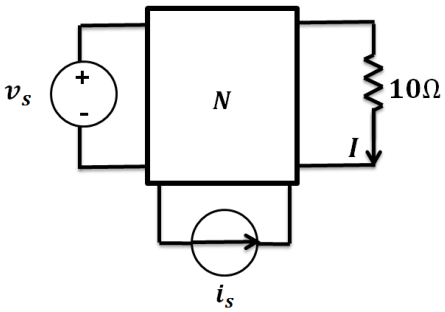
پاسخ:

مثال٤: مدار N شامل تعدادی مقاومت خطی و منابع وابسته است. دو آزمایش زیر انجام می‌گیرد.

الف) برای $v_s = 7v$ و $i_s = 3A$ به دست می‌آوریم $I = 1A$

ب) برای $v_s = 9v$ و $i_s = 1A$ به دست می‌آوریم $I = 3A$

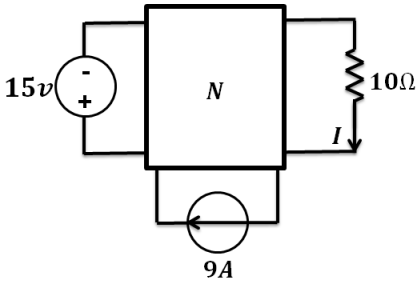
برای $v_s = 15v$ و $i_s = 9A$ مقدار I بر حسب آمپر چقدر است؟ (معماری کامپیوتر -۸۸)



۱. 0.3
۲. 0.6
۳. 3
٤. 6

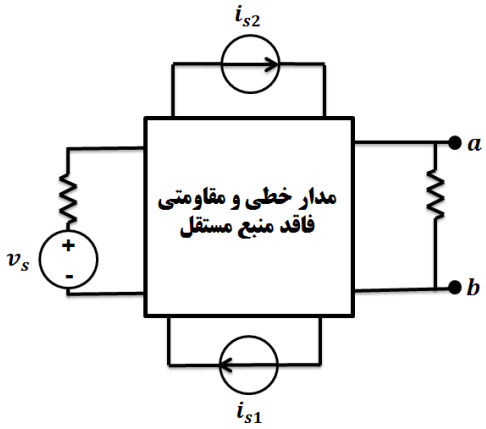


یک سوال مهم! در سوال قبل خروجی را به ازای منبع ولتاژی با پلاریته خلاف جهت v_s و منبع جریانی خلاف جهت i_s به صورت زیر محاسبه کنید.



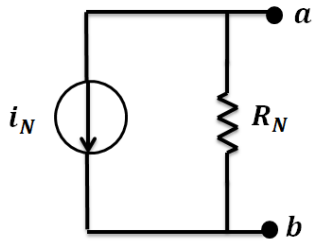
مدار معادل تونن یا نورتن جعبه سیاه

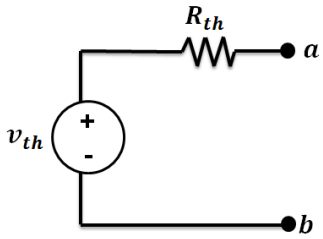
شبکه مقاومتی و خطی زیر را در نظر بگیرید. ولتاژ تونن و جریان نورتن شبکه ترکیب خطی از ورودی های مدار یا همان منابع مستقل مدار است.



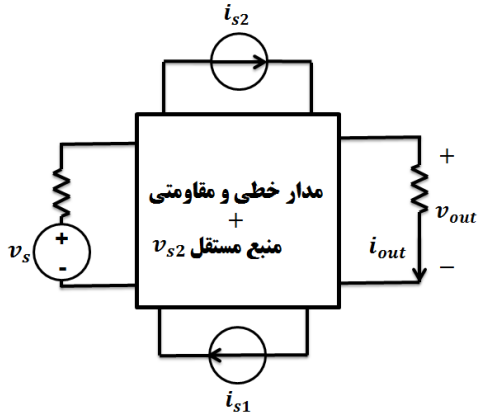
$$v_{th} = \alpha v_s + \beta i_{s1} + \gamma i_{s2}$$

$$i_N = \mu v_s + \rho i_{s1} + \tau i_{s2}$$





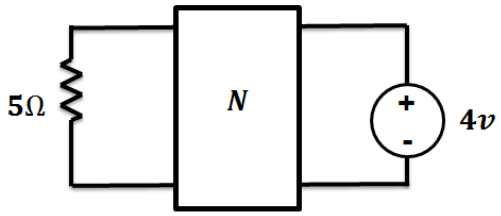
اگر داخل جعبه سیاه منبع مستقل دیگری وجود داشته باشد باید اثر آن منبع را نیز در محاسبه ولتاژ تونن و جریان نورتن لحاظ کنیم. در مورد مقاومت تونن همانطور که قبلا نیز گفته شد مستقل از منابع مستقل مدار است.



$$v_{th} = \alpha v_s + \beta i_{s1} + \gamma i_{s2} + \eta v_{s2}$$

$$i_N = \mu v_s + \rho i_{s1} + \tau i_{s2} + \lambda v_{s2}$$

مثال۵: مدار N داده شده در شکل مقاومتی، خطی و تغییر ناپذیر با زمان است. **80** درصد توان منبع توسط N جذب می‌شود. اندازه منبع ولتاژ ثابت را چند برابر کنیم تا **30** درصد توان آن به مقاومت 5Ω برسد. (برق-۸۸)



۱. $\frac{3}{2}$ برابر

۲. $\frac{9}{4}$ برابر

۳. درصد توان جذب شده توسط مقاومت 5Ω فقط به مقدار مقاومت وابسته است و مستقل از منبع است.

٤. درصد توان جذب شده توسط مقاومت 5Ω به مقدار مقاومت و N وابسته است و مستقل از منبع است.

پاسخ:



استاد می‌توانیم بگوییم که اگر ورودی منبع جریان داشتیم برای شبکه مدار معادل نورتن و اگر منبع ولتاژ داشتیم برای شبکه مدار معادل تونن در نظر می‌گیریم.

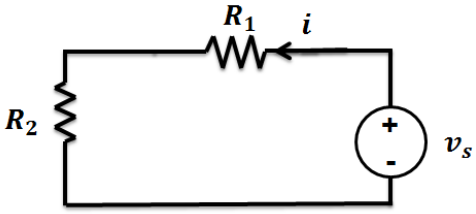


خیر مدار معادل تونن و نورتن ارتباطی به این که نوع منابع ورودی چه باشد ندارد. حتی اگر تمام منابع ورودی شبکه منبع جریان باشد برای شبکه ولتاژ تونن به صورت ترکیب خطی از منابع جریان در نظر می‌گیریم.

در ادامه ارتباط آرایش مدار با درصد توان مصرفی المان‌ها را بیشتر بررسی می‌کنیم:

ارتباط آرایش مدار با درصد توان مصرفی المان‌ها

مقاومت های سری: مدار زیر را در نظر بگیرید. ابتدا توان تک تک المان‌ها را محاسبه می کنیم:



$$P_1 = R_1 i^2$$

$$P_2 = R_2 i^2$$

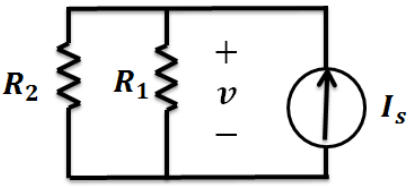
$$P_s = R_1 i^2 + R_2 i^2$$

حالا نسبت توان هر المان را به توان کل منبع محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{P_1}{P_s} = \frac{R_1 i^2}{R_1 i^2 + R_2 i^2} \rightarrow \frac{P_1}{P_s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{P_2}{P_s} = \frac{R_2 i^2}{R_1 i^2 + R_2 i^2} \rightarrow \frac{P_2}{P_s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

مقاومت های موازی:مدار زیر را در نظر بگیرید. مانند حالت قبل ابتدا توان تک تک المان‌ها را محاسبه می کنیم:



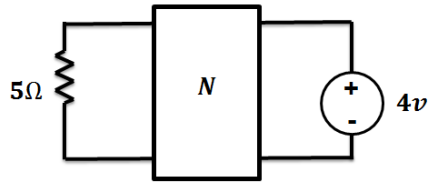
$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{v^2}{R_1} \\ P_2 = \dfrac{v^2}{R_2} \end{cases} \rightarrow P_s = \frac{v^2}{R_1} + \frac{v^2}{R_2}$$

حالا نسبت توان هر المان را به توان کل منبع محاسبه می‌کنیم.

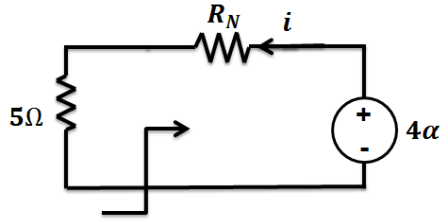
$$\frac{P_1}{P_s}=\frac{\frac{v^2}{R_1}}{\frac{v^2}{R_1}+\frac{v^2}{R_2}}\rightarrow\frac{P_1}{P_s}=\frac{\frac{1^2}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\frac{P_2}{P_s}=\frac{\frac{v^2}{R_2}}{+\frac{v^2}{R_2}}\rightarrow\frac{P_2}{P_s}=\frac{\frac{1^2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

مثال۶: مدار N داده شده در شکل مقاومتی، خطی و تغییر ناپذیر با زمان است. 60 درصد توان منبع توسط N جذب می‌شود. مقاومت معادل از دید مقاومت 5Ω را بدست آورید؟



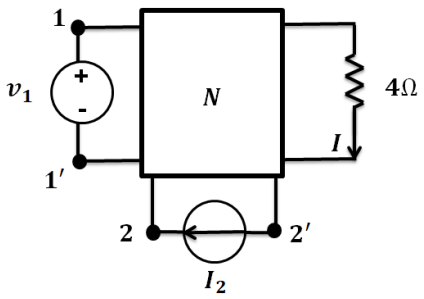
پاسخ: به جای شبکه مدار معادل تونن آن را قرار می‌دهیم. ولتاژ تونن ضریبی از سیگنال ورودی یعنی منبع ولتاژ $4v$ است. بنابراین آن را به صورت 4α در نظر می‌گیریم. حالاتوان جذب شده توسط مقاومت 5Ω و مدار سری با آن را محاسبه می‌کنیم.



$$\begin{cases}P_5=5i^2\\P_N=\mathrm{R}_N i^2\\P_s=5i^2+\mathrm{R}_N i^2\end{cases}\rightarrow\quad\frac{P_N}{P_s}=0.6\rightarrow\frac{\mathrm{R}_N i^2}{5i^2+\mathrm{R}_N i^2}=0.6\rightarrow\frac{\mathrm{R}_N}{5+\mathrm{R}_N}=0.6\rightarrow$$
$$\mathrm{R}_N=0.6(5+\mathrm{R}_N)\rightarrow\mathrm{R}_N=3+0.6\mathrm{R}_N\rightarrow0.4\mathrm{R}_N=3$$
$$\rightarrow\mathrm{R}_N=\frac{30}{4}\Omega=7.5\Omega$$

نکته: درصد توان جذب شده توسط شبکه یا مقاومت ارتباطی با مقدار منبع ولتاژ ندارد و از آن مستقل است. اما میزان توان هر المان به مقدار منبع وابسته است.

مثال۷: در شکل زیر شبکه N مقاومتی، خطی و تغییر ناپذیر با زمان می‌باشد. اگر $v_1 = 3v$ و $I_2 = 3A$ انتخاب گردند $I = 6A$ می‌شود. اگر قطب $1', 1$ اتصال کوتاه و $I_2 = -2A$ باشد مقدار $I = 2A$ بدست خواهد آمد. اکنون $v_1 = -2$ و قطب $2', 2$ مدار باز می‌شود، در این حالت I برابر خواهد بود با:



۱. 6- آمپر
۲. 6 آمپر
۳. 4 آمپر
٤. هیچ کدام

پاسخ:



استاد اگر به تغییر ناپذیر با زمان بودن شبکه تاکید نمی‌کرد بازهم می‌شد از این روش استفاده کنیم؟

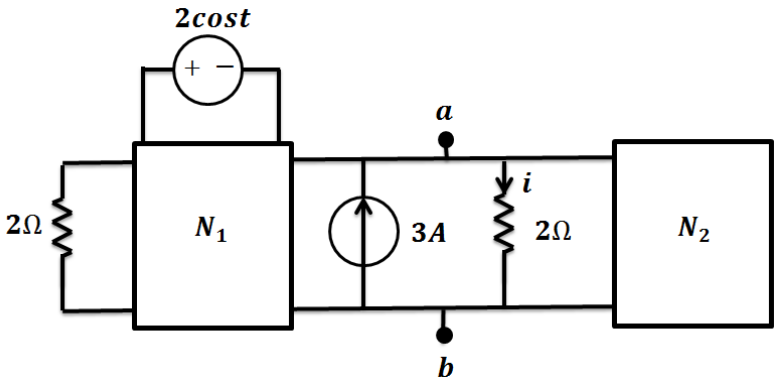


همان‌طور که قبلا گفته شد، همین که مدار مقاومتی و خطی باشد کافی است.

مثال۸: در مدار زیر N_1 و N_2 مقاومتی خطی و فاقد منابع مستقل هستند و $i = \frac{1}{5}\ cost$ – 2 است.

الف) اگر مقدار منبع جریان $4A$ شود i چند آمپر خواهد شد؟

ب) مقاومت معادل از دو سر a و b چند اهم است؟





استاد!!! سر مقاومت 2Ω چه بلایی اومد چرا حذف شد؟

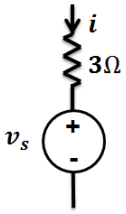


استاد!!! از کجا فهمیدید عبارت کسینوسی در خروجی فقط ناشی از منبع $\boldsymbol{cost}$ است؟ و منابع دیگر روی آن تاثیری ندارد؟

تست‌های بعدی یه چالش بزرگ براتون محسوب اگه درست حل کنید می‌تونید ادعا کنید خیلی کارتون درسته و خیلی خفنید. ولی اگر نتونستید حل کنید یعنی هنوز خیلی خفن نشدید پس تلاش کنید!!!

مثال۹: در مدار زیر N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی مثبت تشکیل شده اند و $cost$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ $v=$

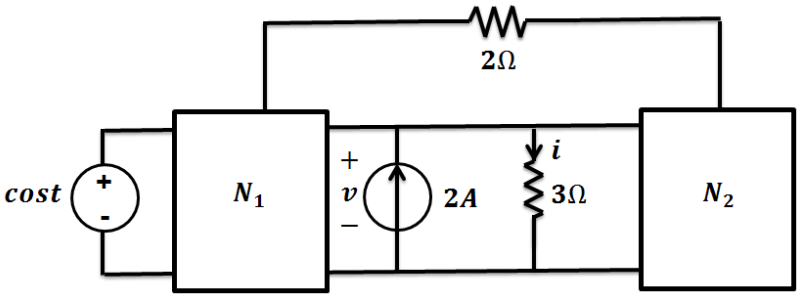
ولت است. اگر منبع ولتاژ $v_s=12$ ولت را با مقاومت 3Ω سری کنیم.(به صورت



جریان i به اندازه:

۱. $\frac{11}{3}$ آمپر کم می شود. ۲. 3 آمپر کم می شود.

۳. 4 آمپر کم می شود. ٤. 4 آمپر اضافه می شود.

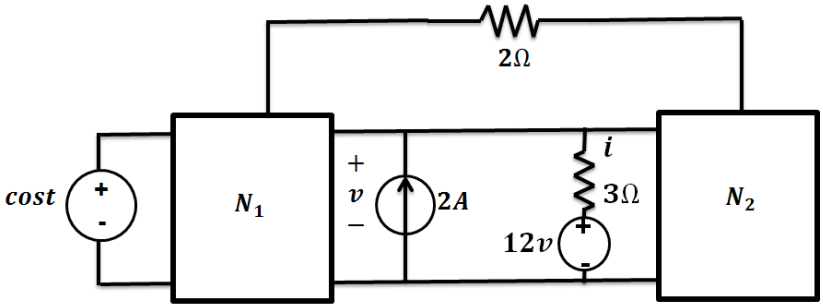




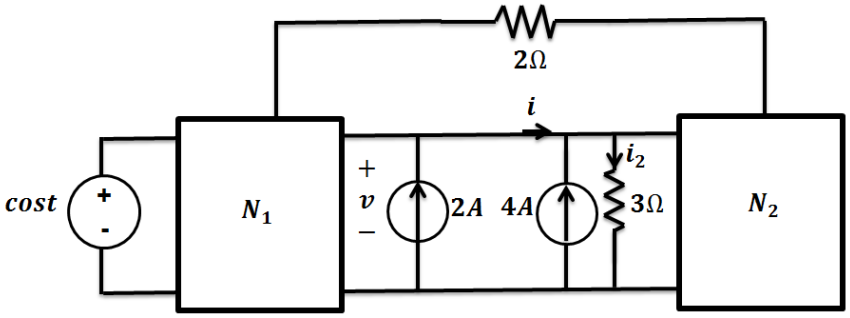
پاسخ: استاد من یک راه حل ساده تر دارم اگر منبع ولتاژ $v_s=12$ ولت را با مقاومت 3Ω سری کنیم با توجه به تبدیل تونن و نورتن معادل این است که یک منبع جریان $\frac{12}{3}$ آمپری با مقاومت 3Ω موازی شده باشد. با این دید توپولوژی مدار تغییر نکرده و فقط مقدار منبع جریان موازی با مقاومت 3Ω تغییر کرده. یعنی در مجموع منبع جریانی با جریان:

$$\frac{12}{3}+2=6$$

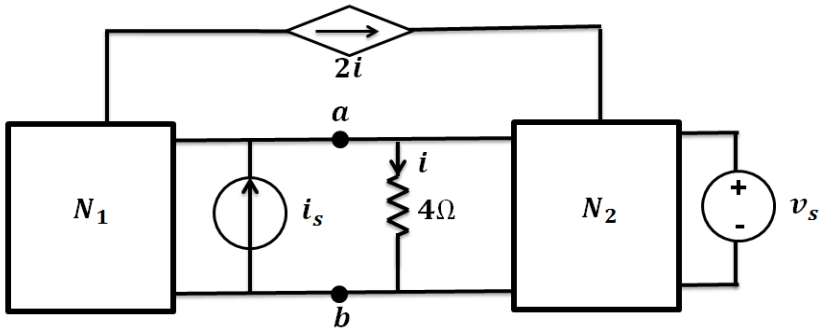
با مقاومت 3Ω موازی شده. در واقع به جای پیدا کردن سیگنال i در مدار زیر



سیگنال i را در مدار زیر پیدا می‌کنیم



مثال۱۰: در مدار زیر(با فرض جواب یکتا)N_1 وN_2 از مقاومت‌های خطی تشکیل شده و $i = \frac{2}{7}(v_s + i_s)$ می‌باشد. به جای مقاومت 4Ω چه مقاومتی را بگذاریم تا مقاومت کل مدار از دو سر a و b برابر $\frac{8}{9}\Omega$ شود؟(برق ۸۶)



۱. $\frac{8}{7}\Omega$

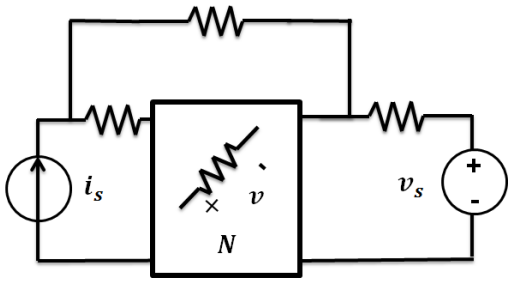
۲. $\frac{8}{5}\Omega$

۳. 2Ω

۴. 4Ω

پاسخ:

مثال۱۱: در مدار مقاومتی خطی با جواب یگانه و با منابع مستقل $v_s = 2 + cost$ و $i_s = 3A$ ولتاژ v در داخل N برابر $v = \frac{1}{2}cost + 3$ است. بدون تغییر v_s مقدار i_s را چند برابر کنیم تا بیشترین مقدار v برابر با 5 ولت شود؟(برق ۹۱)



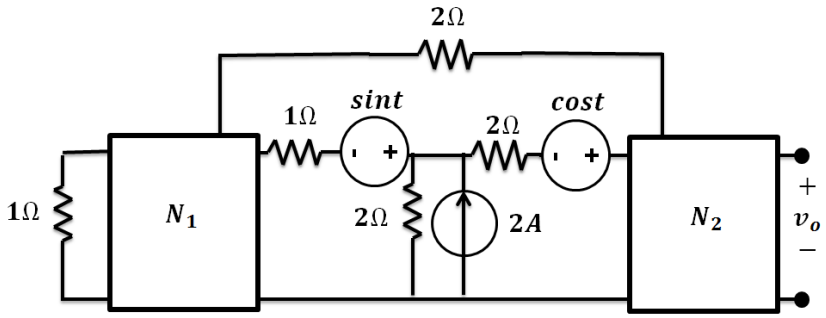
۱. $\frac{1}{2}$

۲. $\frac{1}{3}$

۳. $\frac{7}{4}$

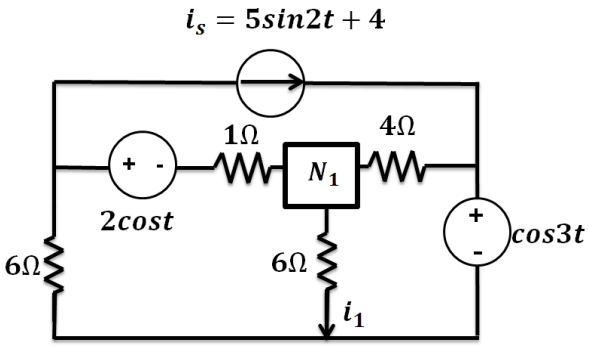
۴. $\frac{2}{3}$

مثال۱۲: در مدار زیر شبکه‌های N_1 و N_2 مقاومتی خطی و بدون منابع مستقل هستند اگر ولتاژ خروجی $v_o = \alpha sint + 0.2cost - 0.4$ باشد α کدام است؟



پاسخ:

مثال۱۳: در مدار مقاومتی خطی با جواب یگانه زیر، اگر $i_s = 5sin2t + 4$ آمپر باشد، در جریان i_1 یکی از جملات برابر با $-\frac{1}{5}cost$ است. جمله ثابت در i_1 کدام است.(N_1 بدون منبع مستقل است.) (برق ۹۲)



۱. -6

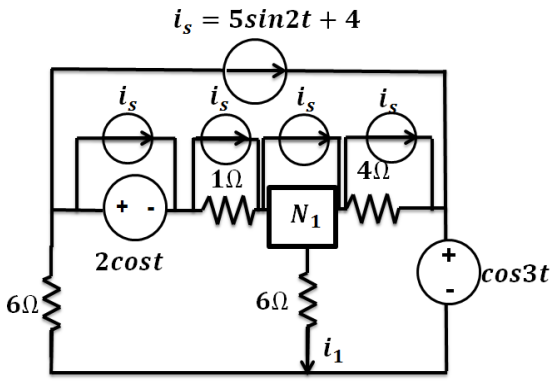
۲. $-2/4$

۳. $-0/4$

۴. 4



استاد!!! نمی‌توانستیم از مسیر دیگری برای منبع i_s پرش خرگوشی بزنیم؟ مثلا این‌طوری:



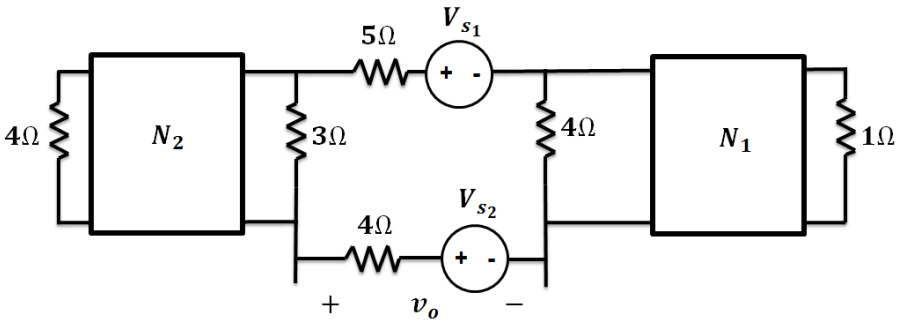


بیایید با هم بررسی کنیم با این پرش یک منبع جریان موازی با منبع ولتاژ به وجود می‌آید که قابل حذف است. منبع جریان موازی با مقاومت را با استفاده از تبدیل تونن به نورتن می‌توان به منبع ولتاژ سری با مقاومت تبدیل کرد. اما با منبع جریان متصل به شبکه N_1 چه باید کرد؟؟؟ پس در انتخاب مسیر پرش خرگوشی دقت کنید.

مثال۱٤: در شکل زیر شبکه‌های N_1 و N_2 تنها از مقاومت‌های خطی و منابع وابسته خطی تشکیل شده اند. ولتاژ خروجی برابر است با $v_o = \frac{2}{5} v_{s_1} + \beta v_{s_2}$ ضریب β کدام است؟

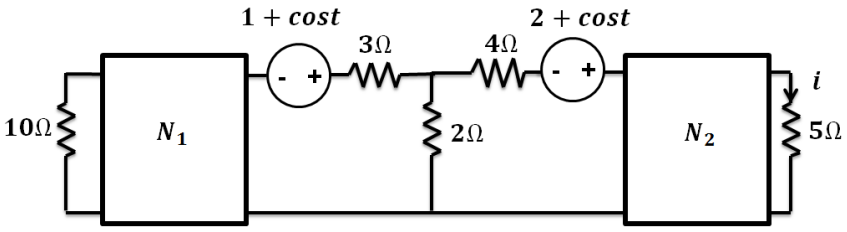
۱. 0.6 ۲. 0.4

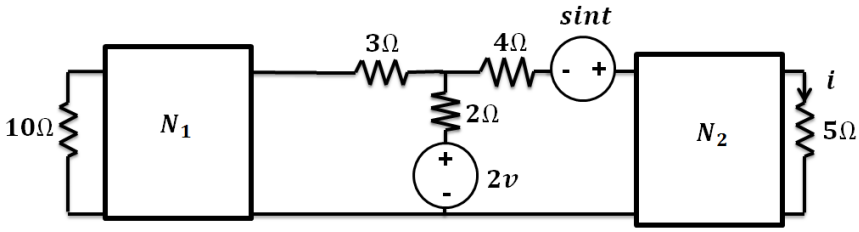
۳. 2.5 ٤. -0.3



پاسخ:

مثال۱۵: در شکل زیر، شبکه‌های N_1 و N_2 مقاومتی خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند. در شکل۱، جریان i برابر $5+3cost$ است. درشکل۲، جریان i چند آمپر است؟





۱. $-2+2sint$ ۲. $2+2sint$

۳. $6+2sint$ ۴. $-6+2sint$

پاسخ:

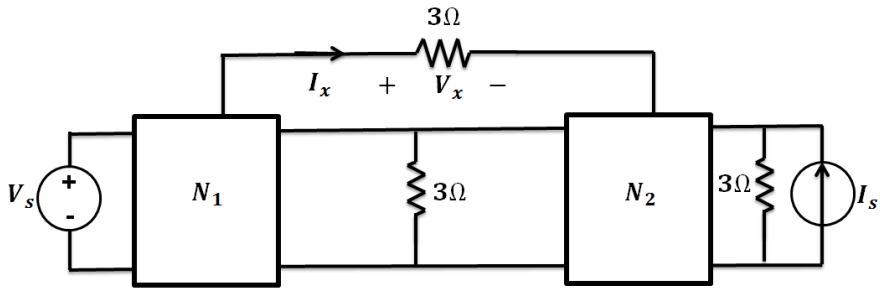


استاد!!! این سوالها خیلی فسفر می‌سوزونند من راه حل این سوالات را به خوبی متوجه می‌شوم. اما این راه حل‌ها از ابتدا به ذهن من نمی‌رسید.

مثال۱۶: در شکل زیر، شبکه‌های N_1 و N_2 از مقاومت‌های خطی LTI تشکیل شده اند. به ازاء $V_s = 1 + cost$ و $i_s = 3$ جریان $I_x(t=0) = 1A$ و $I_x\left(t=\frac{\pi}{2}\right) = -1A$ است اگر به ازای $i_s = 5A$ و $V_s = Acos2t$ مقدار $V_x(0) = 5v$ باشد مقدار A کدام است؟

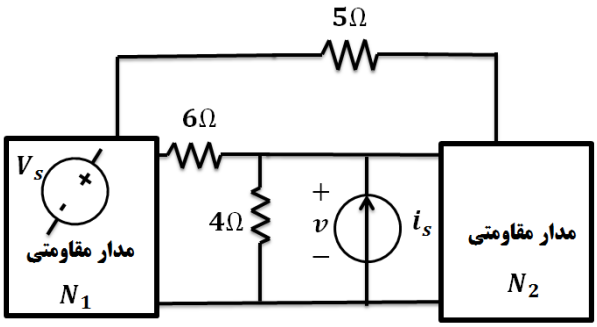
۱. $\frac{10}{3}$ ۲. $\frac{3}{10}$

۳. $\frac{4}{10}$ ۴. $\frac{10}{4}$



پاسخ:

مثال۱۷: در مدار زیر با مقاومت‌های خطی و منابع مستقل v_s و i_s می‌دانیم که $v = 3i_s + v_s$ است. به جای مقاومت 4Ω چه مقاومتی (بر حسب اهم) بگذاریم تا توان مصرفی منبع $\frac{1}{2}$ جریان i_s سه برابر شود؟



۱. 12

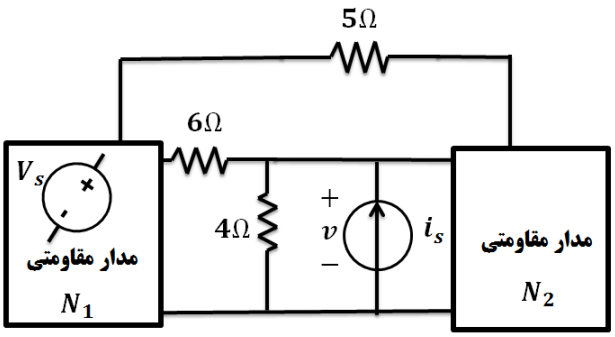
۲. 16

۳. 36

۴. 24

پاسخ:

مثال۱۸:در مدار زیر با مقاومت‌های خطی و منابع مستقل v_s و i_s می‌دانیم که $v = 3i_s + v_s$ است. منابع v_s و i_s چه تغییری کنند تا توان مصرفی مقاومت 4Ω چهار برابر شود؟ $\frac{1}{2}$



پاسخ: توان مصرفی در مقاومت از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P = \frac{v^2}{R}$$

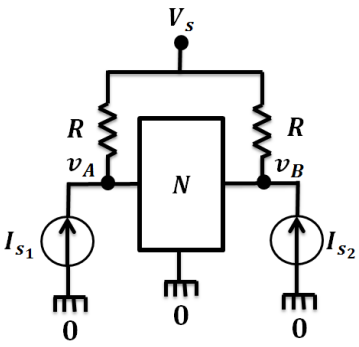
بنابراین اگر v دو برابر شود توان مقاومت 4Ω چهار برابر می‌شود. از طرفی چون توپولوژی مدار تغییری نمی‌کند رابطه بین ورودی‌ها و خروجی تغییر نمی‌کند یعنی α و β تغییر نمی کند.

$$v = \alpha V_s + \beta I_s$$

بنابراین اگر بخواهیم v دو برابر شود هر دو منبع باید دو برابر شوند.

نکته: اگر تمام ورودی‌های مدار خطی مقاومتی n برابر شوند. خروجی مدار هم (هر سیگنال جریان یا ولتاژ) n برابر می‌شود. به شرط این که توپولوژی مدار خطی مقاومتی عوض نشود.

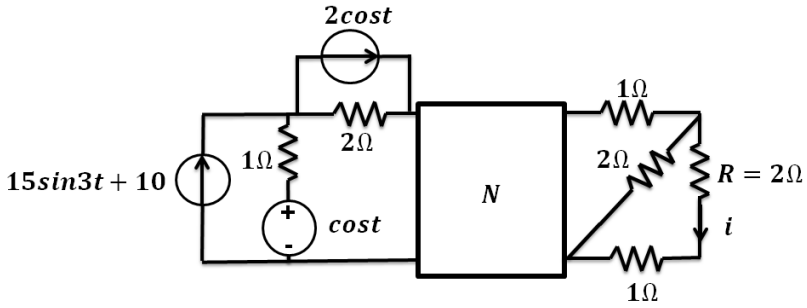
مثال۱۹: در شکل زیر N مقاومتی و خطی است و نسبت به محور عمودی از وسط مدار متقارن است . اگر $i_{s_1} = 1 + 2sint$ و $i_{s_2} = cos2t$ و $v_s = 3$ باشد. اگر ولتاژ گره A به صورت $v_A = 0.6sint + 0.2cos2t$ باشد ولتاژ v_B چگونه خواهد بود؟



پاسخ:

قضیه جمع آثار برای توان الکتریکی متوسط

مثال۲۰: در مدار زیر N شامل مقاومت‌های خطی و بدون منابع مستقل است. اگر جمله ثابت i برابر 2 آمپر باشد، توان متوسط مقاومت $R = 2\Omega$ چند وات است؟ (دکتری برق ۹۵)



۱. 14 ۲. 15 ۳. 10 ۴. 18

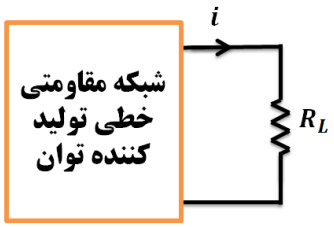
پاسخ:

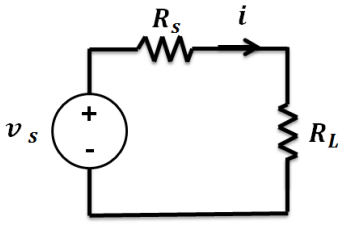
فصل چهارم

انتقال ماکزیمم توان

قضیه انتقال توان ماکزیمم

خیلی وقت‌ها نیاز داریم مداری طراحی کنیم که به یک بار متصل است و توان مورد نیاز بار را تامین می‌کند. در بعضی کاربردها مانند شبکه مخابراتی می‌خواهیم بیشترین توان را به بار انتقال دهیم. برای بدست آوردن ماکزیمم توان انتقالی از شبکه خطی به یک بار می‌توانیم از معادل تونن شبکه استفاده کنیم. شبکه زیر را در نظر بگیرید که R_L مصرف کننده توان، R_s مقاومت شبکه تولید کننده توان و v_s تولید کننده توان است.





$$i = \frac{v_s}{R_L + R_s} \qquad \xrightarrow{R_L \text{ توان مصرفی}} \qquad P_{R_L} = R_L i^2 = R_L \left(\frac{v_s}{R_s + R_L}\right)^2$$

شرط آن‌که بیشترین توان تولیدی منبع سهم R_L شود این است که مشتق توان نسبت R_L صفر شود.

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = 0 \xrightarrow{} \frac{d}{dR_L}\frac{R_L}{(R_L + R_s)^2} = 0 \qquad \frac{(R_L + R_s)^2 - 2(R_L + R_s)R_L}{(R_L + R_s)^2} = 0$$

$$R_L = R_s$$

برقراری رابطه فوق را تطبیق امپدانس[۱۵] می‌گوییم. وقتی $R_L = R_s$ باشد، توان R_L ماکزیمم و برابر با پنجاه درصد توان تولیدی منبع می‌شود. چون مقاومت بار و منبع برابر شد به هر یک پنجاه درصد توان می‌رسد.

توان مصرفی بار در حالت تطبیق:

$$P_{L_{max}} = R_L i^2 = R_L \left(\frac{v_s}{R_L + R_L}\right)^2 = \frac{v_s^2}{4R_L} = \frac{v_{th}^2}{4R_L} = \frac{v_{th}^2}{4R_s} \quad (1)$$

برای برقراری تطبیق امپدانس باید مقاومت معادل از دید بار را محاسبه کنیم و شرط تطبیق $R_L = R_{th}$ را اعمال کنیم.

بنابراین اگر در صورت سوال مقدار مقاومت بار را خواستند که به ازای آن حداکثر توان به بار منتقل می‌شود مقاومت تونن را از دو سر بار محاسبه می کنیم و طبق شرط تطبیق امپدانس باید R_L با R_{th} و برابر باشد و اگر توان ماکزیمم انتقالی به بار را هم خواستند کافی است ولتاژ تونن را محاسبه کنیم و از رابطه (1) حداکثر توان را بدست آوریم.



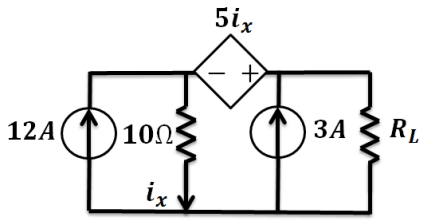
استاد!!! مگر نه این که در مدار فوق نسبت توان به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{P_L}{P_s} = \frac{R_L}{R_s + R_L}$$

.

[۱۵] Impedance matching

مثال۱:در مدار زیر R_L چقدر باشد تا بیشترین توان به آن منتقل شود؟ (اتوماسیون۹۱)

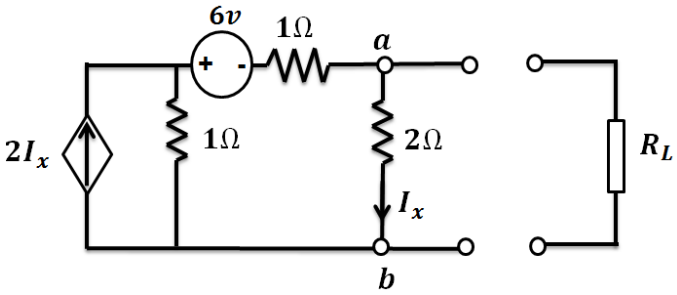


۱. 5 ۲. 10

۳. 15 ۴. 20

پاسخ:

مثال۲:حداکثر توانی که به بار مقاومتی R_L توسط شبکه نشان داده شده قابل تحویل است. کدام است؟(مهندسی کامپیوتر گرایش هوش مصنوعی ۸٤)



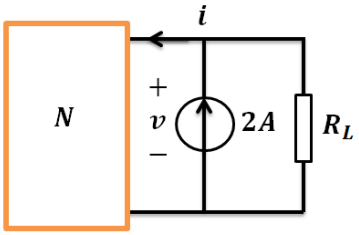
۱. 2/25 وات
۲. 4/5 وات
۳. 6 وات
٤. 9 وات

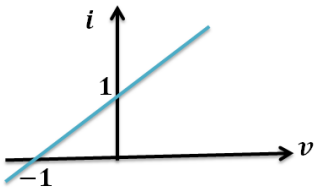
پاسخ:

.

مثال۳: در شکل زیر مشخصه $i - v$ شبکه N که یک شبکه مقاومتی خطی است داده شده .

حداکثر توان قابل انتقال به بار R_L چند وات است؟



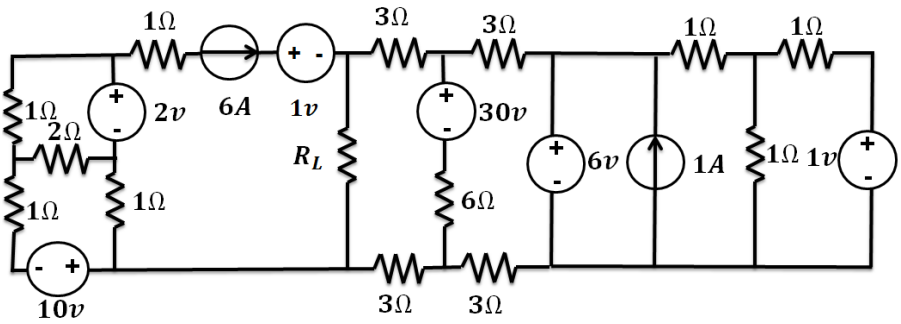


پاسخ:

مثال٤: در مدار شکل زیرحداکثر توانی که به بار مقاومتی R_L می‌رسد کدام است؟(مهندسی برق-۸۳)

۱. $36w$ ۲. $144w$

۳. $150w$ ٤. $225w$



پاسخ

مثال۵:توان ماکزیمم که از سرهای 1 و $1'$ بر روی بار تطبیق شده می‌توان بدست آورد برابر است با: (برق۷٤)

۱. $9w$ ۲. $4w$

۳. $1w$ ٤. $\frac{1}{4}w$

قضیه انتقال توان ماکزیمم برای منابع سینوسی

اگر مدار مقاومتی خطی باشد و دارای منابع سینوسی قضیه انتقال توان ماکزیمم قابل اعمال است با این تفاوت که به جای دامنه منبع مستقل سینوسی باید مقدار موثر یا همان $\boldsymbol{rms}$ را قرار دهیم.



استاد!!! مقدار $\boldsymbol{rms}$ چیه دیگه؟

مقدار $\boldsymbol{rms}$ سیگنال سینوسی و کسینوسی از رابطه زیر بدست می‌آید:

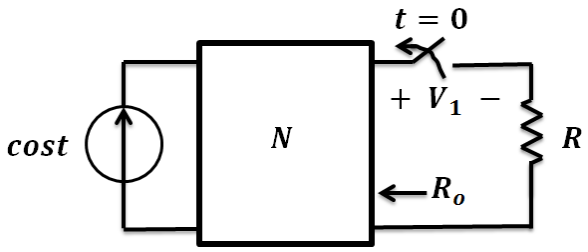
$$\boldsymbol{Acost} \xrightarrow{\boldsymbol{rms}} \frac{\text{دامنه}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}$$

$$\boldsymbol{Asint} \xrightarrow{\boldsymbol{rms}} \frac{\text{دامنه}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}$$

مثال٦: در مدار شکل زیر، شبکه N مقاومتی خطی و تغییرناپذیر با زمان است. وقتی کلید بسته است ماکزیمم توان در مقاومت R برابر $\frac{1}{6}$ وات می‌باشد. اگر ولتاژ دو سر کلید (V_1) در $t = \frac{\pi}{4}$ برابر با $\sqrt{2}$ ولت باشد، R_o چند اهم است؟(برق-۸۱)

۱. 3 ۲. $\frac{2}{3}$

۳. 6 ٤. $\frac{3}{2}$



پاسخ:



استاد!!! چرا از دید منبع جریان مدار معادل تونن نگذاشتیم؟

فصل پنجم

مدارهای مقاومتی غیرخطی

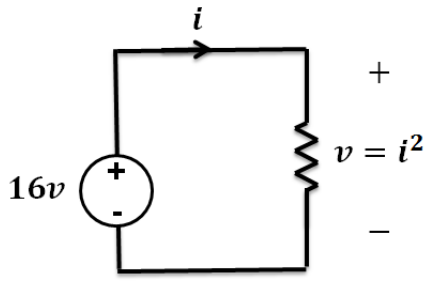
با توجه به این که بسیاری از مدارهای الکتریکی در عمل غیرخطی هستند. در این فصل به بررسی مدارهای غیرخطی می‌پردازیم. بهتر است این مبحث را با تعریف المانهای غیرخطی شروع کنیم.

المان غیرخطی: المانی که منحنی مشخصه آن خطی نباشد المان غیرخطی نامیده می‌شود.

مقاومت غیرخطی: مقاومتی که مشخصه $v-i$ آن خط راست گذرنده از مبدا نباشد را مقاومت غیرخطی می‌گوییم. یک مقاومت غیرخطی کل مدار مقاومتی را غیرخطی می‌کند.

نقطه کار مدارهای غیرخطی: مقادیر ولتاژها ، جریان‌ها، بارهای الکتریکی و شار الکتریکی صادق در معادلات KVL ، KCL و روابط مدار را نقطه کار می‌گوییم. یک مدار غیرخطی ممکن است چندین نقطه کار داشته باشد.

مثال۱: مدار غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.





استاد سوالی داشتم چه طور ممکن است یک مدار دو جریان داشته باشد؟

روش‌های تحلیل مدارهای غیرخطی

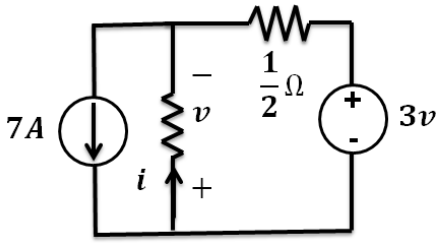
برای تحلیل مدارهای غیرخطی دو روش کلی وجود دارد: ۱- روش عددی۲- روش ترسیمی

روش عددی

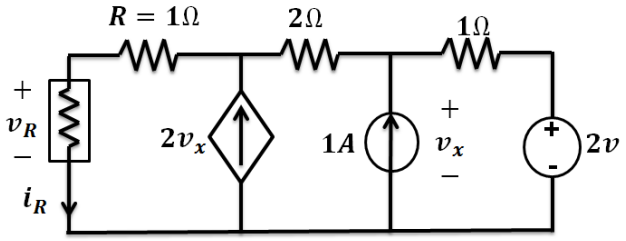
در این روش ، معادلات جریان و ولتاژ مدار را به همراه روابط ریاضی المان‌ها می‌نویسیم و دستگاه معادلات جبری حاصل را که یک دستگاه غیرخطی است حل می‌کنیم. به شرط وجود جواب برای دستگاه مدل مدار، جواب مدار فیزیکی یکی از جواب‌های مدل مدار است. برای راحتی حل مساله می‌توان به جای مدار خطی معادل تونن آن را از دید المان غیرخطی قرار داد.

مثال۲: در مدار غیر خطی زیر، معادله مشخصه مقاومت غیرخطی به صورت $v = i^3 + 2$ است. نقاط کار مدار را بدست آورید.

پاسخ:



مثال۳: در مدار شکل زیر یک مقاومت غیرخطی با رابطه $i_R = \frac{v_R}{2} + \frac{5}{6} v_R^2$ وجود دارد، توان مقاومت R چند وات است؟



۱. $12w$

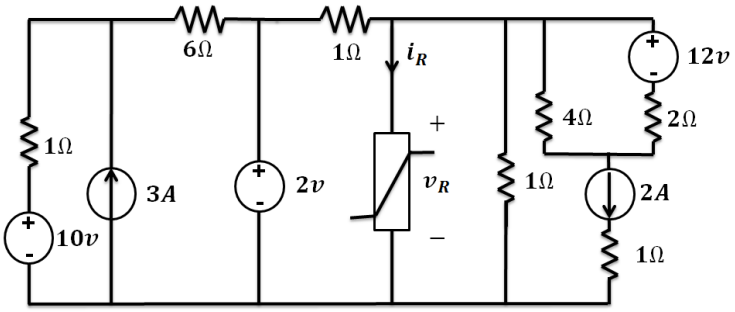
۲. $18w$

۳. $36w$

۴. $54w$

پاسخ:

مثال٤: در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت غیرخطی بامشخصه $V_R = \frac{3}{2} i_R^3$ چند وات است؟(ارشد برق٩٤)



۱. $\frac{1}{3}$

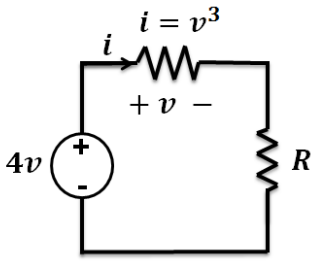
۲. $\frac{2}{3}$

۳. $\frac{3}{2}$

٤. 3

پاسخ:

مثال۵: در مدار شکل زیر عنصر غیرخطی با رابطه $i = v^3$ تعریف می‌شود. مقدار R برای انتقال حداکثر توان به آن کدام است؟ (ارشد برق۸۷)



۱. 27

۲. $\frac{1}{9}$

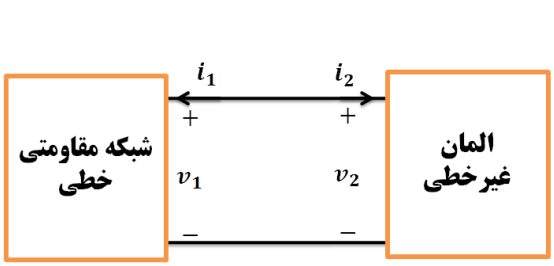
۳. $\frac{1}{27}$

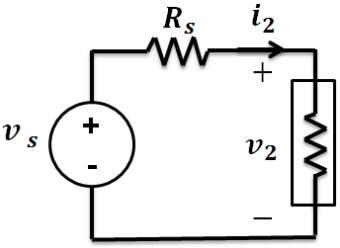
۴. $\frac{2}{27}$

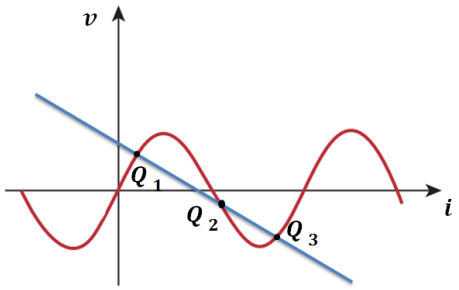
پاسخ:

روش ترسیمی

مدارهای غیرخطی را می‌توان به دو بخش خطی و غیرخطی تقسیم کرد. برای این کار از دید المان یا شبکه غیرخطی معادل تونن یا نورتن مدار خطی را قرار می‌دهیم.







برای تحلیل مدار کافی است مشخصه $v-i$ المان غیرخطی را با مشخصه $v-i$ حاصل از معادله KVL یا KCL مدار قطع دهیم.

انواع مسائل مدارهای غیرخطی

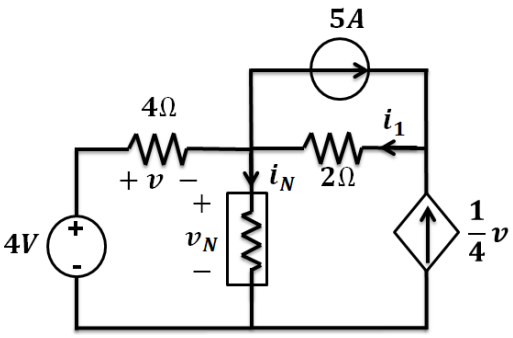
۱) نقطه کار المان غیرخطی مشخص است: در این موارد کافی است جریان و ولتاژ المان غیرخطی را روی مدار اعمال کرده و مانند یک مدار مقاومتی ساده تحلیل کنیم.

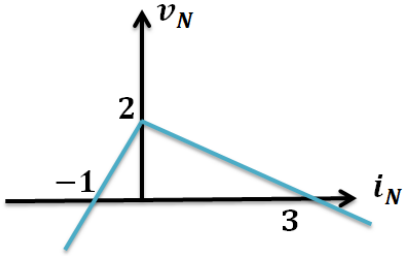
۲) نقطه کار المان غیرخطی مشخص نیست: در این موارد رابطه تعادلی المان غیرخطی را با رابطه تعادلی شبکه خطی دو سر آن قطع می‌دهیم. در این موارد بهتر است مدار خطی را از دید المان غیرخطی ساده کنیم.

مثال۶: در مدار شکل مقابل اگر $i_N = \frac{3}{2}\ A$ باشد، i_1 چند آمپر است؟ (مدار دارای جواب یگانه است)(برق-۸۹)

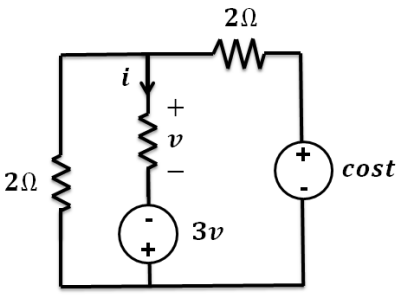
۱. $\frac{23}{4}$ ۲. $\frac{17}{4}$

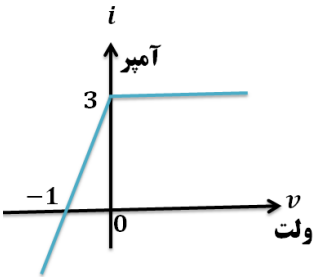
۳. $\frac{17}{8}$ ۴. $\frac{23}{8}$





مثال۸: در مدار شکل زیر وقتی جریان مقاومت غیرخطی $i-v$ برابر با 3 آمپر است، بیشترین مقدار v چند ولت است؟ (ارشد برق-۹۱)

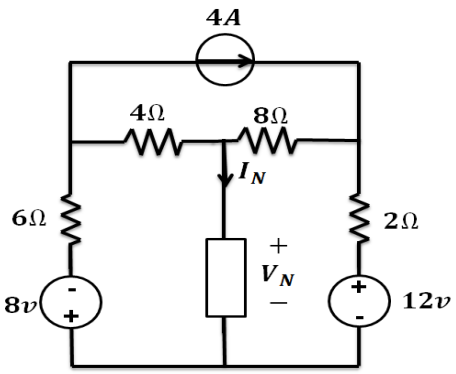


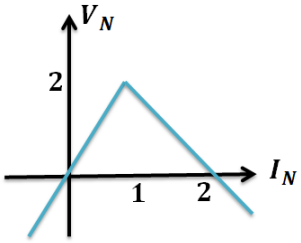


۱. 0
۲. $\frac{1}{2}$
۳. 1
۴. 2

پاسخ:

مثال۹: مشخصه عنصر غیرخطی در شکل زیر بیان شده است توان المان غیرخطی چند وات است؟





۱. $\frac{4}{7}$

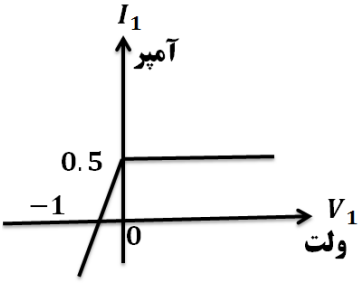
۲. $\frac{200}{49}$

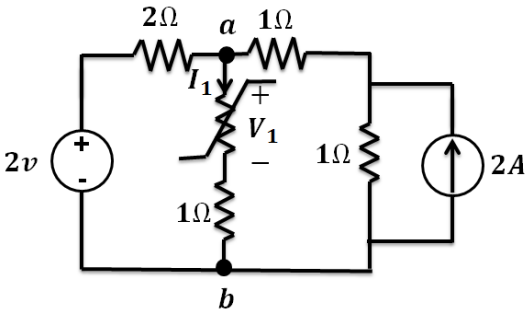
۳. $\frac{7}{8}$

۴. $\frac{8}{9}$

پاسخ:

مثال ۱۰: ولتاژ v_{ab} در مدار زیر چند ولت است؟

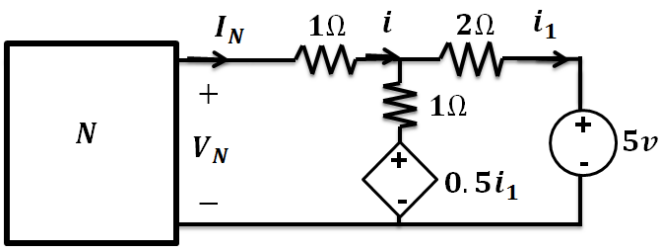




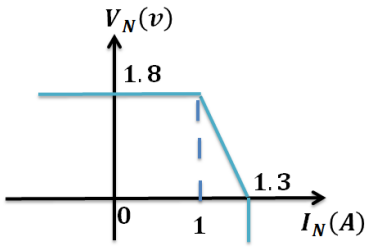
۱. $\frac{1}{2}$ ۲. 2 ۳. $\frac{3}{2}$ ٤. $\frac{5}{2}$

پاسخ:

مثال۱۱: مشخصه یک قطبی N در مدار شکل زیر داده شده است، جریان i در این مدار برابر است با:

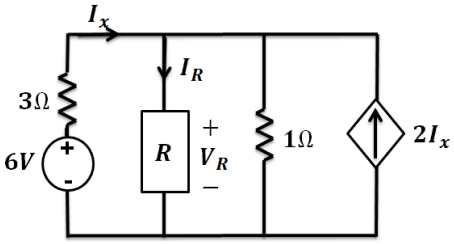


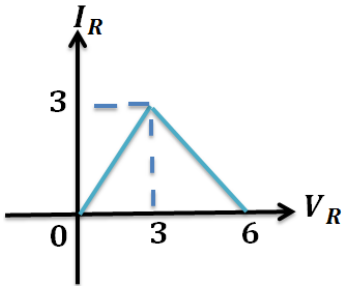
۱. $-\frac{5}{9}$ ۲. $-\frac{4}{9}$ ۳. $\frac{5}{9}$ ۴. $\frac{4}{9}$



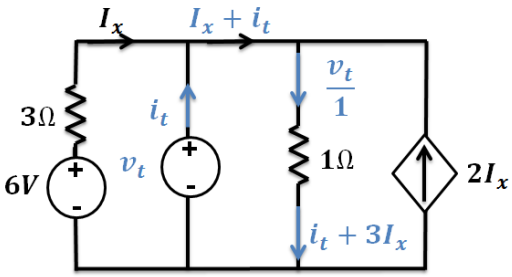
مثال۱۲: در مدار شکل زیر مشخصه مقاومت غیرخطی R در شکل داده شده است. جریان I_R گذرنده از این مقاومت کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر -۷۸)

۱. 1 ۲. $1/5$ ۳. 2 ۴. $2/5$





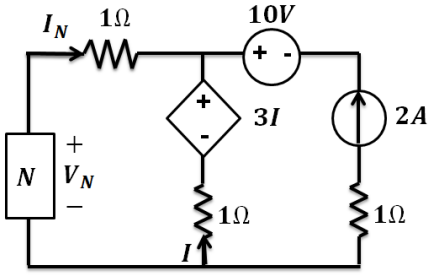
پاسخ: از دید المان غیرخطی مدار معادل تونن را بدست می‌آوریم. چون منبع وابسته داریم از روش منبع ولتاژ و جریان تست استفاده می‌کنیم.

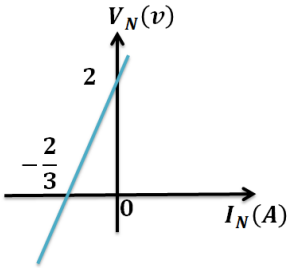


$$\begin{cases} -6 + 3I_x + v_t = 0 \\ v_t = I_t + 3I_x \end{cases} \rightarrow v_t = \frac{1}{2}I_t + 3 \rightarrow \begin{cases} R_{th} = \frac{1}{2} \\ v_{th} = 3 \end{cases}$$

مثال۱۳: در مدار شکل زیر، مدار N دارای منحنی ولتاژ – جریان $(V-I)$ نشان داده شده در نمودار می‌باشد. جریان I_N چند آمپر است؟ (هوش-۹۱)

۱. -2 ۲. -4 ۳. -1 ۴. -3



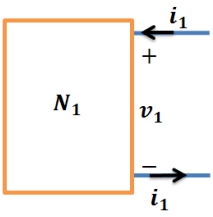


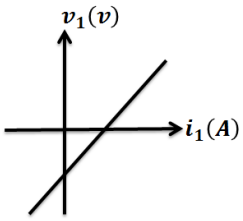
پاسخ:

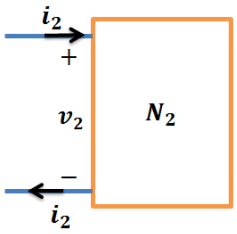
روش اول:

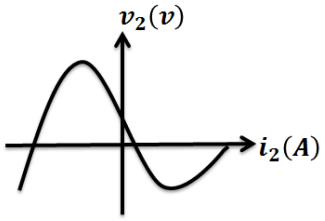
اتصال دو مدار به یکدیگر

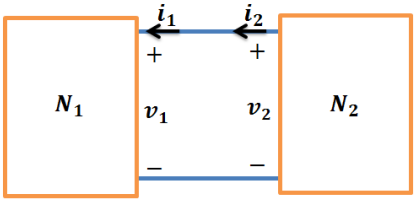
دو مدار زیر را با مشخصه های داده شده را در نظر بگیرید.



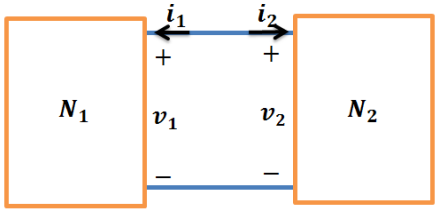




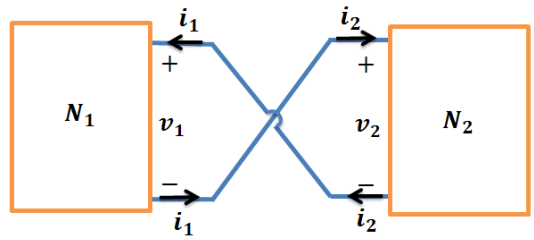




الف) اگر دو مدار به صورت رو به رو بهم متصل شوند چون $v_1 = v_2$ و $i_1 = i_2$ است. نقطه کار نقطه ای است که در مشخصه هر دو منحنی صدق کند و از برخورد دو منحنی بدست می‌آید.

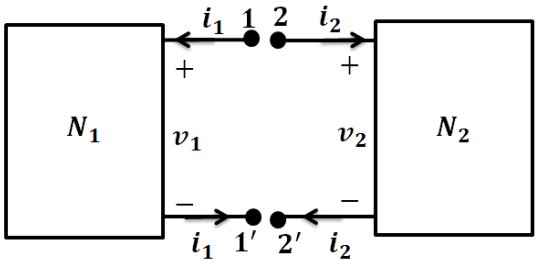


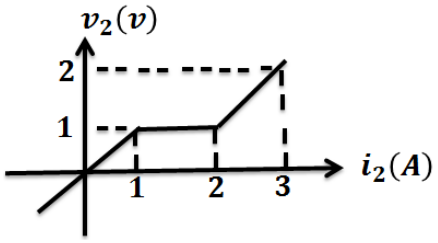
ب) اگر دو مدار به صورت رو به رو بهم متصل شوند چون $v_1 = v_2$ و $i_1 = -i_2$ است. برای پیدا کردن نقطه کار ابتدا باید مشخصه یکی از مدارها را نسبت به جریان قرینه کنیم سپس با هم تلاقی دهیم.



ج) اگر دو مدار به صورت رو به رو بهم متصل شوند چون $v_1 = -v_2$ و $i_1 = i_2$ است. برای پیدا کردن نقطه کار ابتدا باید مشخصه یکی از مدارها را نسبت به ولتاژ قرینه کنیم سپس با هم تلاقی دهیم.

مثال۱٤: دو شبکه شکل زیر را در نظر بگیرید در صورتی که سر 2 را به $1'$ و سر 1 را به $2'$ وصل کنیم. ولتاژ دائمی v_2 را تعیین کنید. شبکه N_1 دارای مشخصه $-v_1 + i_1 = 2$ و شبکه N_2 دارای مشخصه غیرخطی به فرم زیر می‌باشد.





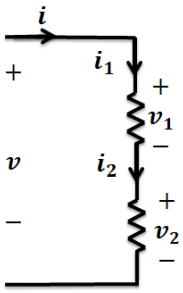
۱. 1 ۲. $1/5$ ۳. 2 ٤. 0

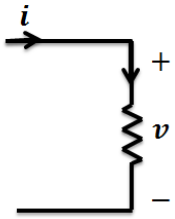
پاسخ:

تعیین رابطه تعادلی با روش ترسیمی

در این بخش می‌خواهیم معادله مشخصه یا رابطه تعادلی ناشی از اتصال دو شبکه بهم را بررسی کنیم.

معادل دو مقاومت سری: معادل مقاومت‌های سری $(i_1 - v_1)$ و $(i_2 - v_2)$ یک مقاومت غیرخطی با رابطه $(i - v)$ است.



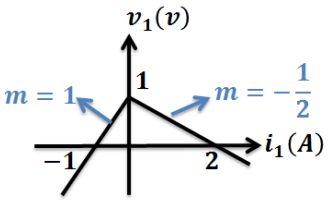


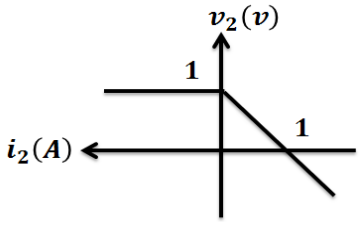
که در آن:

$$v = v_1 + v_2 \ , \ \ i = i_1 = i_2$$

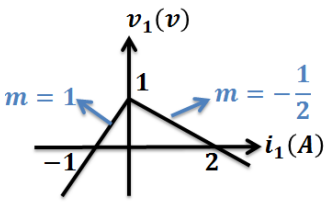
یعنی برای رابطه $v - i$ باید به ازای جریان‌های مساوی مشترک، ولتاژها را با جمع می‌کنیم. از لحاظ نموداری باید هر دو نمودار v برحسب i کشیده شود و دو نمودار را با هم جمع کنید. (شیب ها با هم جمع و نقاط نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند)

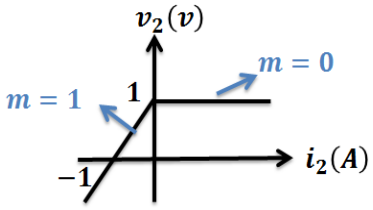
مثال ۱۵: منحنی مشخصه دو مقاومت غیر خطی به صورت زیر است. بعد از اتصال این دو مقاومت به صورت سری منحنی مشخصه به چه شکل خواهد بود؟



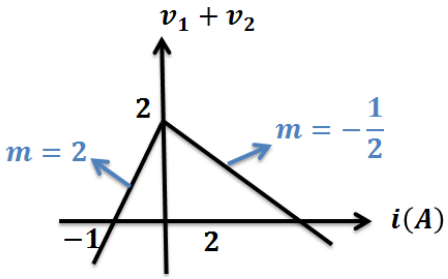


پاسخ: باید این دو منحنی مشخصه را با هم جمع بزنیم:

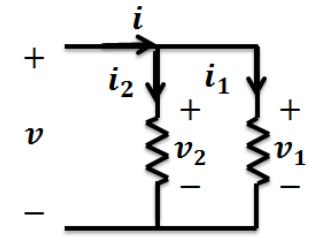


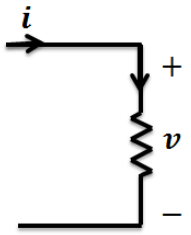


برای جمع کردن دو نمودار شیب ها با هم و عرض از مبدا ها باهم جمع می‌شوند. بنابراین داریم:



معادل دو مقاومت موازی است: معادل مقاومت‌های سری $(i_1 - v_1)$ و $(i_2 - v_2)$ یک مقاومت غیرخطی با رابطه $(i - v)$ است.

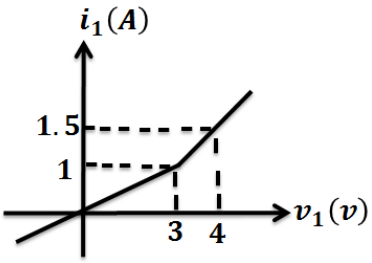


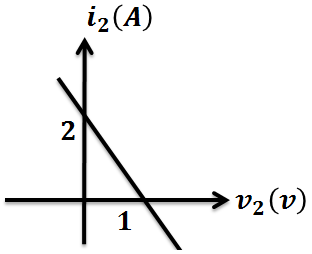


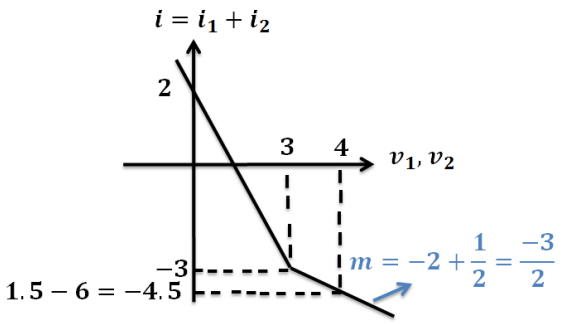
$$i = i_1 + i_2 \ , \ v = v_1 = v_2$$

در اتصال موازی برای محاسبه رابطه تعادلی معادل دو المان، برای هر المان مشخصه i را برحسب v رسم و نمودارهای المان‌های موازی را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۱۶: منحنی مشخصه دو مقاومت غیر خطی به صورت زیر است. بعد از اتصال این دو مقاومت به صورت موازی، منحنی مشخصه به چه شکل خواهد بود؟



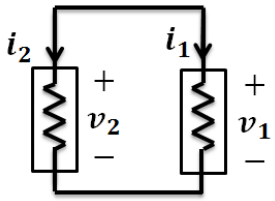


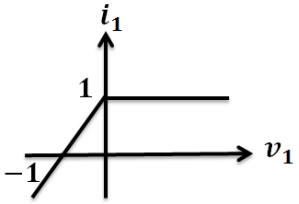


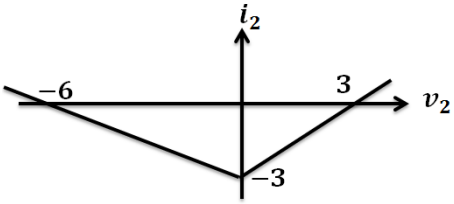
مثال۱۷: اگر دو المان غیرخطی به صورت شکل زیر قرار گیرند، مقدار i_2 کدام است؟

۱. 1 ۲. 2

۳. -2 ۴. -1.5



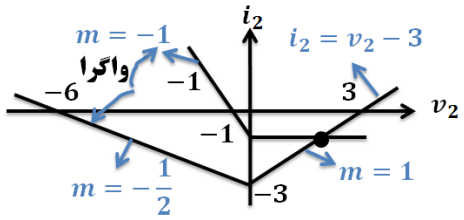




پاسخ: با توجه به مدار:

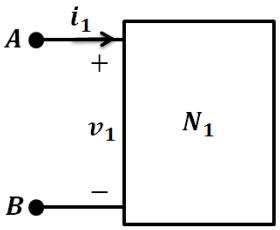
$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ i_1 = -i_2 \end{cases}$$

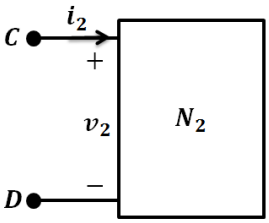
بنابراین چون ولتاژ ها مساوی است و جریان‌ها قرینه نمودار جریان برحسب ولتاژ یکی از المان‌ها را قرینه می‌کنیم و با دیگری تلاقی می‌دهیم . در این‌جا نمودار i_1 بر حسب v_1 قرینه شده است. با قرینه شدن این نمودار باید با نمودار i_2 بر حسب v_2 برابر شود. بنابراین نقاط تلاقی دو نمودار جواب‌های مساله اند.



$$\begin{cases} i_2 = -1A \\ v_2 = 2\ v \end{cases} \rightarrow i_1 = -i_2 = 1A$$

مثال۱۸: مشخصه $i-v$ مربوط به دو مدار N_1 و N_2 مطابق شکل زیر داده شده است.





اگر A را به D و B را به C وصل کنیم داریم: (برق-٦٧)

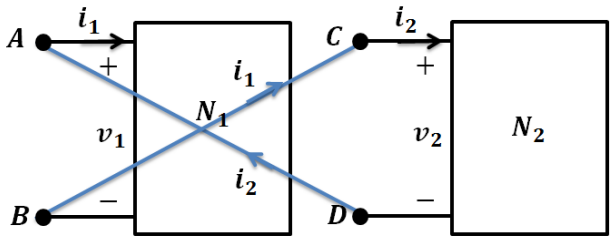
۱. $i_1 = i_2 = \frac{1}{2}$ و $v_1 = -v_2 = \frac{1}{2}$

۲. $i_1 = -i_2 = \frac{1}{2}$ و $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$

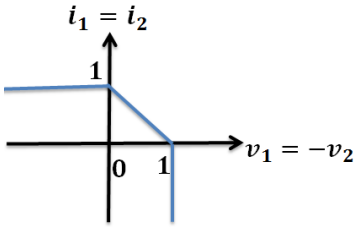
۳. $i_1 = i_2 = -\frac{1}{2}$ و $v_1 = -v_2 = \frac{1}{2}$

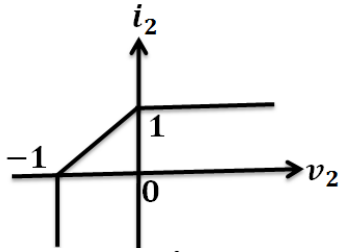
٤. $i_1 = i_2 = \frac{1}{2}$ و $v_1 = -v_2 = -\frac{1}{2}$

پاسخ: بعد از وصل کردن A به D و B به C داریم:

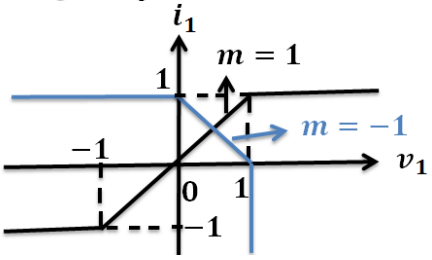


حالا نمودار i_2 و v_2 را برحسب i_1 و v_1 رسم می‌کنیم.





$$i_1 - 0 = 1(v_1 - 0) \rightarrow i_1 = v_1 \quad (1)$$



$$i_1 - 0 = -1(v_1 - 1) \rightarrow i_1 = -v_1 + 1 \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (1) در (2) داریم:

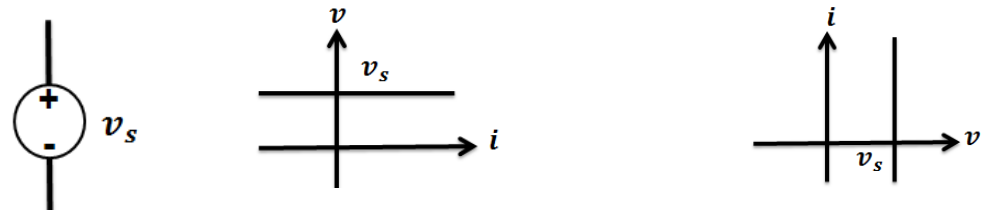
$$v_1 = -v_1 + 1 \rightarrow v_1 = \frac{1}{2} = -v_2 \rightarrow v_2 = -\frac{1}{2}$$

همچنین:

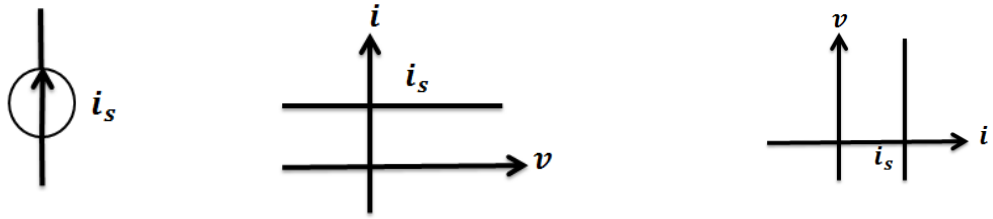
$$i_1 = i_2 = \frac{1}{2}$$

مشخصه چند المان معروف

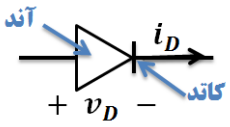
منبع ولتاژ ایده آل: منبع ولتاژ ایده‌آل، ولتاژ دو سر آن ثابت v_s و جریان آن هر مقداری با توجه به مدار متصل به آن می‌تواند داشته باشد.



منبع جریان ایده آل: منبع جریان ایده‌آل، جریانش ثابت و برابر با i_s و ولتاژ آن هر مقداری با توجه به مدار متصل به آن می‌تواند داشته باشد.



دیود ایده آل: جهت قرار دادی جریان دیود از سر آند به سر کاتد است و ولتاژ قرار دادی دیود اختلاف ولتاژ سر آند نسبت به کاتد است.

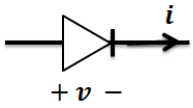


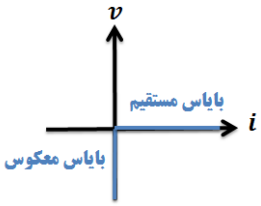
انواع بایاس دیود

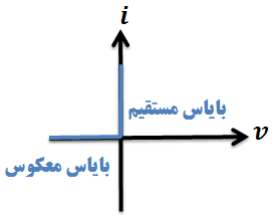
بایاس مستقیم: اگر بایاس مدار طوری باشد که جریان بخواهد از آند به کاتد برقرار شود، دیود در بایاس مستقیم و جریان دیود مقداری مثبت خواهد بود در این حالت دیود ایده‌آل اتصال کوتاه و ولتاژ دو سرش صفر است.

بایاس معکوس: اگر بایاس مدار طوری باشد که جریان بخواهد از کاتد به آند برقرار شود معکوس حرکت کند با سر دیود مواجه می‌شود و جریانی عبور نمی‌کند و جریان دیود صفر می‌شود و همچنین ولتاژ دو سر دیود منفی خواهد بود.

مشخصه دیود ایده آل به صورت زیر است.





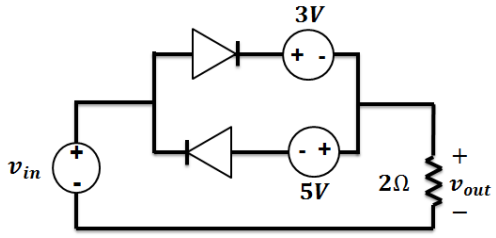


یعنی اگر دیود در بایاس مستقیم باشد ولتاژ دوسرش صفر است و جریان آن با توجه به مداری که در آن قرار گرفته است هر مقداری می‌تواند داشته باشد و اگر دیود در بایاس معکوس باشد جریانی از خود عبور نمی‌دهد و ولتاژ دو سرش با توجه به مداری که در آن قرار گرفته است هر مقداری می‌تواند داشته باشد.

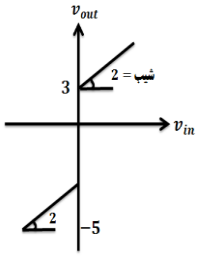
الگوریتم حل مسائل دیود

با توجه به مدار و جهت جریان مدار (جریان از ولتاژ بیشتر به ولتاژ کمتر برقرار است) یک فرض مناسب برای دیود در نظر می‌گیریم و مدار معادل دیود را جایگزین می‌کنیم. اگر بایاس مستقیم فرض کردید باید اثبات کنید که جریان دیود مثبت است و اگر بایاس معکوس فرض کردید باید اثبات کنید ولتاژ دیود منفی است و در صورت عدم اثبات فرض را عوض کنید.

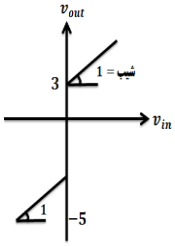
مثال۱۹: در مدار رو به رو دیودها ایده‌آل هستند. مشخصه $v_{out} - v_{in}$ کدام است؟(برق-٦٧)



۱.

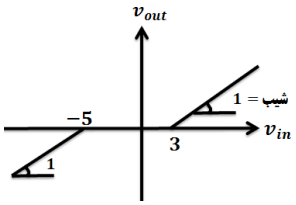


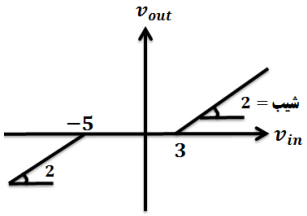
۲.



۳.

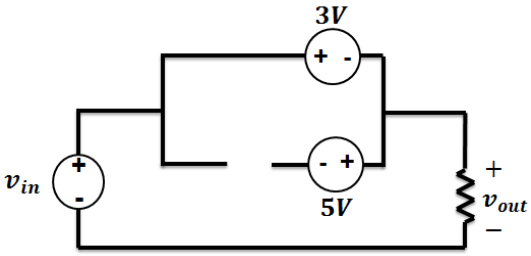
۴.





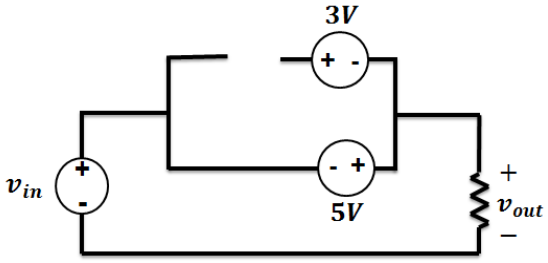
پاسخ: برای تشخیص سریع باياس مستقیم یا معکوس بودن دیود بیشترین مقدار مثبت ولتاژ ورودی $v_i = \infty$ و کم‌ترین مقدار منفی سیگنال ورودی $v_i = -\infty$ را به آن اعمال می‌کنیم.

فرض کنید ولتاژ ورودی $v_i = \infty$ باشد.در این حالت دیود باياس مستقیم است و اتصال کوتاه:



$$KVL: v_o = v_i - 3$$

فرض کنید ولتاژ ورودی $v_i = -\infty$ باشد. در این حالت دیود باياس معکوس است و مدار باز:



$$KVL: v_o = v_i + 5$$

بنابراین گزینه۳ صحیح است.

روش سیگنال کوچک تحلیل مدارهای غیرخطی

اگر مدار غیرخطی باشد و ورودی‌های مدار علاوه بر منابع DC شامل منابع AC یا متناوب هم باشد به شرطی که دامنه سیگنال AC نسبت به منبع مستقل خیلی کوچک (حداقل 0.1 کوچکتر) باشد می‌توانیم از جمع آثار با روش زیر استفاده کنیم.



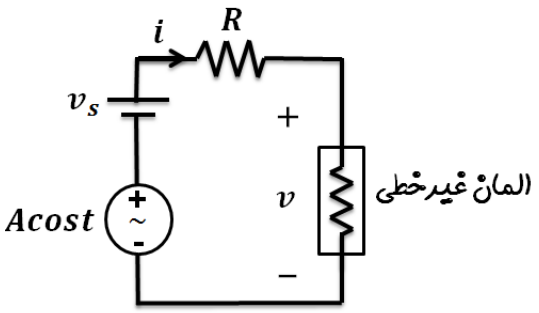
استاد!!! جمع آثار که فقط برای مدارهای خطی استفاده می‌شد!!!

در این مدار اگر:

$$A \ll v_s \quad \text{یا} \quad A < 0.1 v_s$$

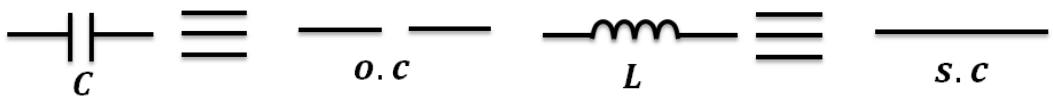
آن‌گاه:

$$i = i\big|_{v_s=0} + i\big|_{Acost=0}$$



روش کار

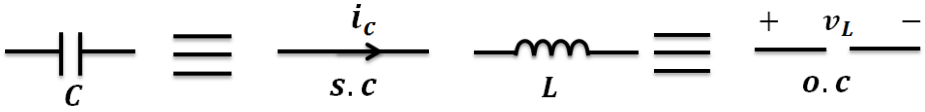
گام اول: نقطه کار DC (پاسخ مدار به ورودی‌های ثابت) را بدست می‌آوریم. در این مرحله منابع AC را خاموش می‌کنیم. خازن‌ها اتصال باز و سلف‌ها را اتصال کوتاه می‌کنیم. نقطه کار DC مدار را با (i_Q, v_Q) نشان می‌دهیم.



گام دوم: المان غیر خطی را حول نقطه کار DC تقریب مقاومت خطی می‌زنیم. (مدل سیگنال کوچک المان غیرخطی را جایگزین می‌کنیم)

$$v = f(i) \rightarrow R_{\text{خطی شده}} = \frac{\partial v}{\partial i}\Big|_{(i_Q, v_Q)}$$

گام سوم: پاسخ AC مدار خطی شده را بدست می‌آوریم. در این حالت منابع DC را خاموش، خازن را اتصال کوتاه و سلف را مدار باز می‌کنیم.



گام چهارم: پاسخ کامل مدار حاصل جمع پاسخ AC و DC است.



بچه‌ها اگر به جای نمودار ولتاژ برحسب جریان، نمودار جریان برحسب ولتاژ را داشته باشیم چطور تقریب خطی مقاومت را بدست آوریم ؟



خوب معلومه باید تابع معکوس حساب کنیم یعنی از روی تابع داده شده جریان برحسب ولتاژ ، ضابطه ولتاژ برحسب جریان را بدست بیاوریم.
به نظر من این بدترین راه حل ممکنه اونم برای کنکور کافی
به این شکل عمل کنیم:

$$i = f(v) \rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}}_{\text{خطی شده}} = \frac{\partial i}{\partial v}\Big|_{(i_Q, v_Q)}$$

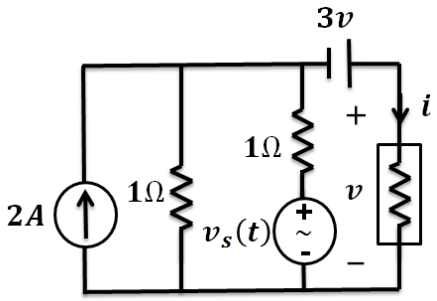
ممنونم خیلی عالی بود!!!

مثال ۲۰: در مدار زیر المان غیرخطی $i = \begin{cases} -v^2 + v & v < 5 \\ 0 & v > 5 \end{cases}$ بر حسب میلی آمپر توصیف می‌شود. سیگنال v_s توسط N تقویت می‌شود یا تضعیف؟ $(v_s = 0.1sint)$

پاسخ:

مثال۲۱: در مدار زیر، ولتاژ $v(t)$ دو سر مقاومت غیرخطی به کدام جواب نزدیک تر است. $(v_s = 0.18cos2t)$

مشخصه مقاومت غیر خطی: $i = \begin{cases} v^2 & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$ (مهندسی برق -۸۸)



۱. $v(t) = 2 + (0.03cos2t)$

۲. $v(t) = 2 + (0.06cos2t)$

۳. $v(t) = 4 + (0.018cos2t)$

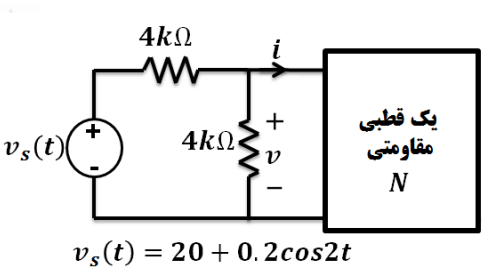
٤. $v(t) = 4 + (0.036cos2t)$

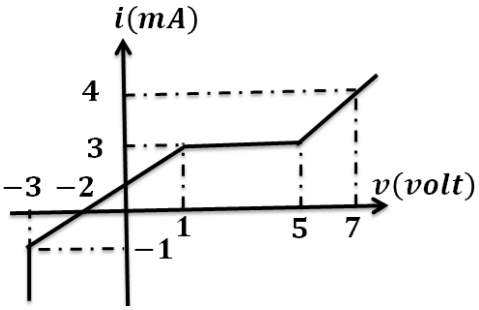
پاسخ:

مثال۲۲: با توجه به مشخصه $v-i$ داده شده برای یک قطبی مقاومتی N ، مقدار v در مدار شکل زیر چند ولت است؟ (مهندسی برق-۷۵)

۱. 4 ۲. $4+0.1cos2t$

۳. $6+0.02cos2t$ ۴. $6+0.05cos2t$





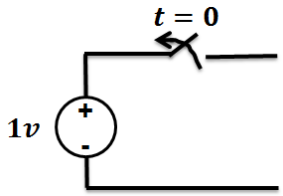
پاسخ:

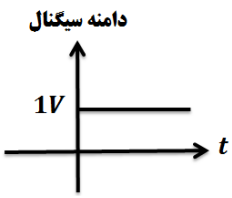
فصل ششم

معادلات دیفرانسیل و عناصر ذخیره‌کننده انرژی

از آن‌جایی‌که معادلات حاکم بر بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و سیستم‌ها به صورت معادلات دیفرانسیلی و یا انتگرالی است، مبحث معادلات دیفرانسیل در شاخه‌های مختلف رشته‌های مهندسی اهمیت ویژه ای دارد. تاکنون با مدارهای مقاومتی سر و کار داشتیم که هیچ انرژی در خود ذخیره نمی‌کردند در این فصل مدارهای پیچیده‌تری را بررسی می‌کنیم که عناصر ذخیره کننده انرژی مانند سلف و خازن دارند حضور این عناصر در مدار باعث پیدایش مشتق سیگنال‌های ولتاژ و جریان می‌شود تحلیل این مدارها، منجر به پیدایش معادلات دیفرانسیل می‌شود. از این رو در این فصل به مبحث شیرین معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم البته با دید یک مهندس برق و نه از دید ریاضیات محض.قبل از پرداختن به مبحث معادلات دیفرانسیل بهتر است با برخی از توابع و سیگنال‌های مهم آشنا شویم.

تابع پله: یک مدار الکتریکی عملا در لحظه خاصی شروع به کار می‌کند و فاصله زمانی کار آن محدود است، علاوه بر این منابع مستقل در لحظه معینی وارد مدار می‌شوند. برای بیان ریاضی لحظه شروع یا دوره زمانی کار منابع و همچنین برای بیان ناپیوستگی یا تغییرآنی ولتاژها یا جریان‌ها از تابع پله استفاده می‌کنیم.





تابع پله با دامنه A را با $Au(t)$ نشان می‌دهیم که اگر $A=1$ باشد تابع پله واحد نامیده می‌شود.

$$Au(t)=\begin{cases}A & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

تابع $Au(t)$، منبع مستقل به اندازه ثابت A را نشان می‌دهد که در لحظه $t=0$ وارد مدار می‌شود و در زمان‌های $t<0$ تاثیری در مدار ندارد. به بیان دیگر ناپیوستگی یا تغییر آنی به اندازه A را در $t=0$ با تابع پله نشان می‌دهیم. اثر این منبع در $t>0$ یا $t\geq 0^+$ مشاهده می‌شود و در نتیجه شرایط 0^- موجود در مدار را که برای حل معادله دیفرانسیل مدار لازم است را تغییر نمی‌دهد.



استاد!!! منظور از زمان‌های 0^- و 0^+ چیست؟



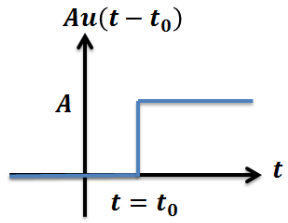
زمان 0^- زمان قبل از لحظه صفر و خیلی نزدیک به آن هستند و زمان 0^+ زمان بعد از لحظه صفر و خیلی نزدیک به آن هستند.



استاد چرا اصلا درمورد زمان 0^- بحث می کنیم مگر زمان منفی معنای فیزیکی دارد؟

سوال خوبی بود زمان صفر منفی شاید مفهوم نامأنوسی برای شما داشته باشد. برای فهم این موضوع، فرض کنید لحظه حال مبدا زمان یا 0 باشد ، با این حساب تمام لحظات قبل از آن زمان‌های منفی اند مثلا دیروز یک زمان منفی است. زمان 0^- برای یک مدار، زمان قبل از این است که مدار شروع به کار کند چون زمان راه اندازی مدار را لحظه صفر یا مبدا زمان در نظر می‌گیریم با این حساب لحظات قبل از شروع به کار مدار زمان منفی هستند. بررسی این زمان ها از این جهت حائز اهمیت است که تحلیل مدار منجر به یک سری معادله دیفرانسیل می شود که از اطلاعات مدار مثلا ولتاژها و جریان ها در زمان 0^- به عنوان شرایط اولیه این معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کنیم.

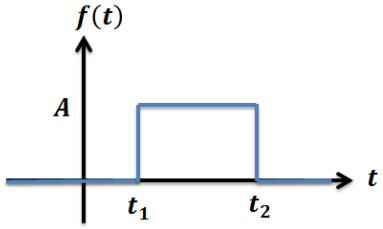
نکته۱: اگر منبع ثابت A در لحظه $t = t_0$ اعمال شود با تابع $Au(t-t_0)$ بیان می‌شود.



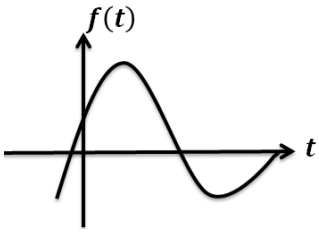
نکته۲: اعمال یک منبع ثابت در یک بازه $t_1 < t < t_2$ را با تفاضل دو تابع پله به صورت زیر بیان می‌کنیم.

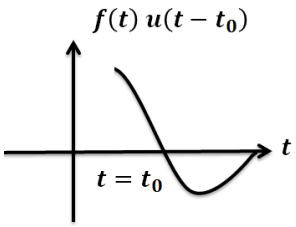
$$f(t) = A\big(u(t-t_1) - u(t-t_2)\big)$$

t_1 زمان شروع سیگنال و t_2 زمان پایان سیگنال است.

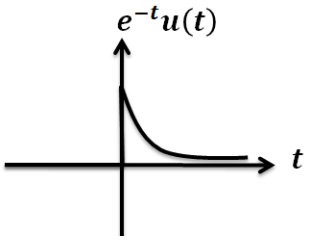


نکته۳: لحظه شروع منابع $(t = t_0)$ با استفاده از ضرب مقدار منبع در سیگنال $u(t-t_0)$ بیان می‌شود.

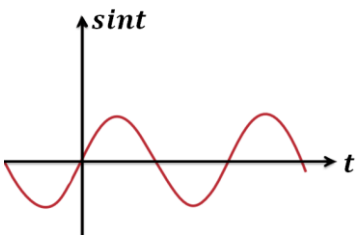


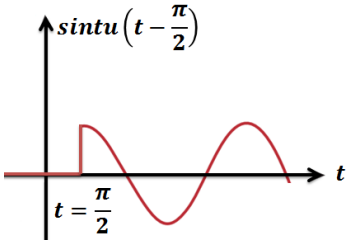


مثال۱: سیگنال e^{-t} به دلیل ضرب شدن در سیگنال $u(t-0)$ در لحظات قبل از $t = 0$ صفر می‌شود.



مثال۲: سیگنال $sint$ به دلیل ضرب شدن در سیگنال $u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$ در لحظات قبل از $t=\frac{\pi}{2}$ صفر می‌شود.



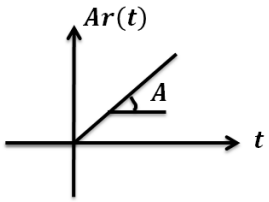


انتگرال و مشتق تابع پله: در معادلات مدارهای غیرمقاومتی به دلیل وجود سلف‌ها یا خازن‌ها، مشتق و انتگرال ورودی‌ها نیز ظاهر می‌شود و چون ورودی‌ها را با توابع پله بیان کنیم باید بتوانیم مشتق و انتگرال تابع پله را بدست آوریم.

انتگرال اول تابع پله:

$$\int_{0^-}^{t} Au(t)dt = \begin{cases} At & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = Atu(t) = Ar(t)$$

تابع $Atu(t)$ را تابع شیب[۱۶] می‌گوییم.

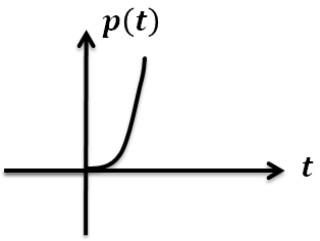


انتگرال دوم تابع پله:

$$\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{t} Au(t)dt = \int_{0^-}^{t} Atu(t) \begin{cases} \frac{A}{2}t^2 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = \frac{A}{2}t^2u(t) = p(t)$$

تابع $\frac{A}{2}t^2u(t)$ را تابع سهمی[۱۷] می‌گوییم.

[۱۶] Ramp function
[۱۷] parabolic function



انتگرال معین از 0^- تا 0^+ تابع پله:

$$\Big|_{t=0^-}^{t=0^+} = 0 \int_{0^-}^{0^+} Au(t)dt = Atu(t) =$$

انتگرال معین از 0^- تا 0^+ تابع شیب:

$$\Big|_{t=0^-}^{t=0^+} = 0 \int_{0^-}^{0^+} Atu(t)dt = \frac{A}{2}t^2u(t) =$$

انتگرال معین از 0^- تا 0^+ تابع سهمی:

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{A}{2}t^2u(t)\,dt = \frac{A}{6}t^3u(t)\Big|_{t=0^-}^{t=0^+} = 0$$

مشتق تابع پله:

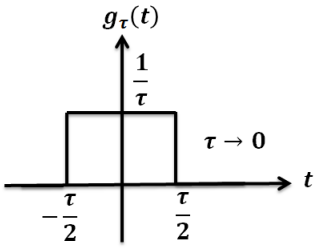
مشتق تابع پله در همه نقاط غیر از $t=0$ صفر است و این تابع در $t=0$ ناپیوسته است و مشتق ندارد.

$$\frac{du}{dt} = lim_{\tau\to 0}\frac{u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}{\tau} = lim_{\tau\to 0}g_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t\neq 0 \\ \infty & t=0 \end{cases}$$

که $g_\tau(t)$ دنباله ای توابع پیوسته است که

اولا سطح زیر همه آن‌ها برابر یک است (دامنه پله)

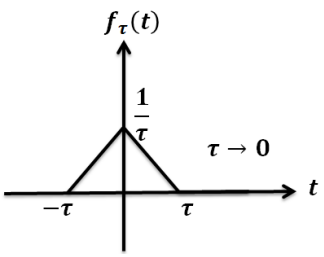
دوما حد همه آن‌ها در $\tau\to 0$ با مشتق تابع پله یا همان $\frac{du}{dt}$ بیان می‌شوند.

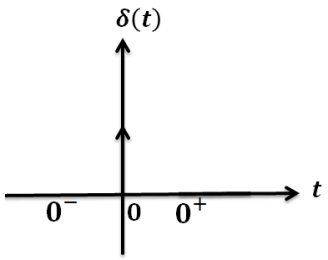


این سیگنال را اصطلاحا تابع ضربه می‌گویند.

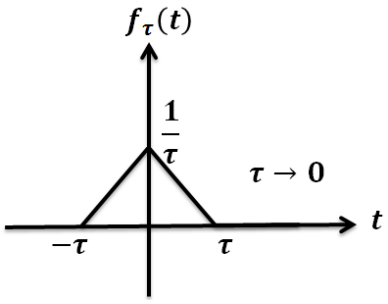
تابع ضربه:

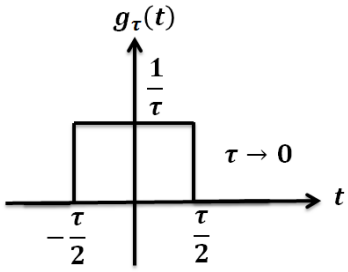
تعریف تابع ضربه: هر سیگنالی که عرض خیلی کم و ارتفاع خیلی زیادی داشته باشد به طوری که مساحت زیر آن یک شود می‌تواند معرف یک سیگنال ضربه باشد. سیگنال $f_\tau(t)$ را در نظر بگیرید وقتی که $\tau \to 0$ میل می‌کند عرض این سیگنال کم و ار تفاع آن زیاد تر می‌شود همچنین نکته مهم دیگر در مورد این سیگنال این است که سطح زیر آن برابر یک است. در حالت حدی این سیگنال را می‌توان معادل $\delta(t)$ که همان تابع ضربه است در نظر گرفت.





مساله مهم در مورد تابع ضربه این است که این تابع شکل منحصر به فردی ندارد و هر تابعی که ارتفاع زیاد و عرض کم داشته باشد و مساحت زیر آن یک شود می‌تواند معرف تابع ضربه باشد چه پالسی شکل باشد چه مثلثی شکل.





بنابراین تابع ضربه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

نکته۱: انتگرال این تابع که همان مساحت زیر نمودار آن است برابر با یک است.

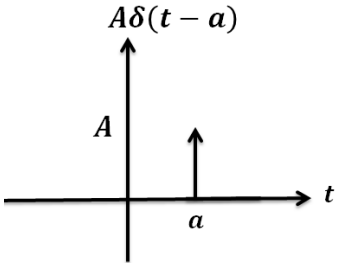
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(t)dt=\int_{0^+}^{0^-}\delta(t)dt=1$$

نکته۲: اگر سطح زیر تابع A باشد،آن را با $A\delta(t)$ نمایش می‌دهیم که همان تابع ضربه است که سطح زیرش برابر A است.

$$\int_{0^-}^{t}A\delta(t)=\begin{cases}A & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}=Au(t)$$

نکته۳: اگر تابع ضربه با سطح A در $t=a$ وجود داشته باشد با $A\delta(t-a)$ قابل نمایش است.



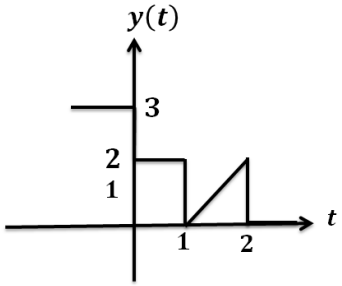


استاد تابع ضربه اصلا در تعریف تابع صدق نمی‌کند یک خط که موازی با محور y است به ازای یک مقدار x بی‌نهایت y به ما می‌دهد و مقدار y به ازای هر x منحصر به فرد نیست.



آفرین خیلی عالی بود. نکته خیلی مهم در مورد تابع ضربه این است که این سیگنال اصلا تابع نیست اما در مراجع به تابع ضربه معروف است!!!

مثال۳: تابع $y(t)$ و مشتق آن را برحسب تابع پله و ضربه بنویسید.



در زمان‌های قبل از صفر یک سیگنال پله‌ای شکل داریم تابع پله ای که در زمان کمتر از صفر مقدار داشته باشد و در زمان‌های بزرگتر از صفر ، صفر باشد با $u(-t)$ قابل نمایش است و چون دامنه آن ۳ است آن را به صورت $3u(-t)$ می‌نویسیم. بعد از زمان صفر هم یک تابع پله داریم با دامنه ۲، که آن را به صورت $2u(t)$ نمایش می‌دهیم. در ثانیه ۱ این سیگنال پله

حذف می‌شود بنابراین باید در این لحظه یک سیگنال پله با دامنه برابر از آن کم شده باشد پس در ثانیه ۱ سیگنال $-2u(t-1)$ اعمال شده است بعد از زمان ۱ ثانیه یک تابع شیب

داریم که آن را به صورت $1r(t-1)$ نمایش می‌دهیم در ثانیه ۲ با کم کردن $+1r(t-2)$ آن را حذف می‌کنیم.

$$y(t)=3u(-t)+2u(t)-2u(t-1)+1r(t-1)-1r(t-2)-u(t-2)$$

حالا به سادگی از این سیگنال مشتق می‌گیریم:

$$y'(t)=3\delta(-t)+2\delta(t)-2\delta(t-1)+u(t)-u(t-2)-\delta(t-2)$$

خواص مهم تابع ضربه

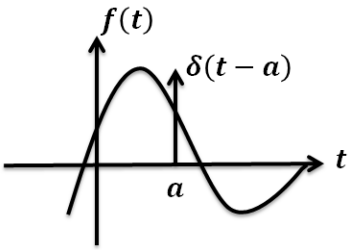
۱) از تعریف تابع ضربه واضح است که:

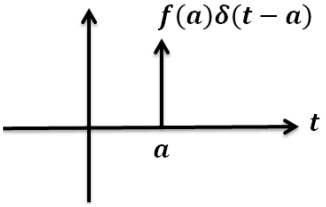
$$\delta(0^+)=\delta(0^-)=0$$

۲) تابع $\delta(t-a)$ فقط در $t=a$ وجود دارد و ضرب آن نیز در هر تابع $f(t)$ که در $t=a$ مقدار معین $f(a)$ را دارد عبارتست از:

$$f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a)$$

به این خاصیت خاصیت غربالی نیز گفته می‌شود.





بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم:

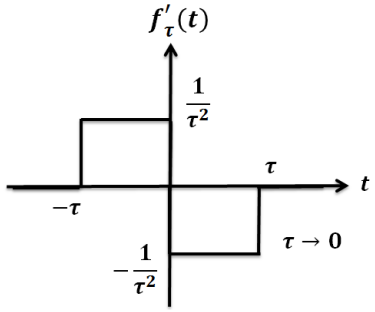
$$\int_{a^-}^{a^+} f(t)\delta(t-a)dt=\int_{a^-}^{a^+} f(a)\delta(t-a)=f(a)$$

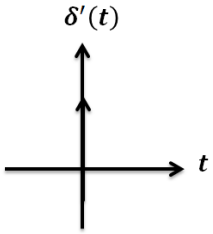
$$\frac{d}{dt}\big(g(t)u(t)\big)=g'(t)u(t)+g(t)\delta(t)=g'(t)u(t)+g(0)\delta(t)$$

مثال٤:

$$sintu(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} costu(t) + sin(0)\delta(t) = costu(t)$$

مشتق گیری از $\delta(t)$: اگر تابع $\delta(t)$ حد دنباله ای باشد، مشتق $\delta(t)$ یا همان $\delta'(t)$ را می‌توان به صورت حد مشتق آن دنباله تعریف کرد.





$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \pm\infty & t = 0 \end{cases} \rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty} \delta'(t)dt = \int_{0^+}^{0^-} \delta'(t)dt = \delta(t)\Big|_{t=0^-}^{t=0^+} = 0 - 0 = 0$$

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}u(t)$$

$$\delta''(t) = \frac{d^3}{dt^3}u(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \frac{d\delta'(t)}{dt}$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{t} \delta''(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta'(t)dt = 0$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{t} \delta'(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

رابطه کلی انتگرال ضربه

$$\int_{a^-}^{a^+} f(t)\delta^n(t-a)dt = (-1)^n f^{(n)}(a)$$

نکته مهم: برای هر تابع$g(t)$ که تابع ضربه در $t=0$ نداشته باشد خواهیم داشت:

$$\int_{0^-}^{0^+} g(t)dt = 0$$

فقط:

$$\int_{0^-}^{0^+} A\delta(t)dt \neq 0 = A$$



بچه‌ها تفاوت سیگنال $\delta(t)$ و $2\delta(t)$ در چیست؟



خوب معلومه دیگه ارتفاع $2\delta(t)$ دو برابر $\delta(t)$ است.
نه کاملا غلطه!!! ارتفاع این دو تابع که هر دو تعریف نشده یا بی‌نهایت است اما تفاوت این دو سیگنال در مساحت زیر نمودار آن‌هاست. مساحت زیر نمودار $2\delta(t)$ دو برابر مساحت $\delta(t)$ است.

معادله دیفرانسیل معمولی[۱۸] خطی با ضرایب ثابت مرتبه n ام

در این قسمت می‌خواهیم حل یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را مورد بررسی قرار دهیم. یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$y'''(t)+3y''(t)+y'(t)+4y(t)=sint$$

این معادله دیفرانسیل یک معادله خطی است چون که در آن اثری از به توان رسیدن سیگنال $y(t)$ یا مشتقات آن نیست مثلا $y^2(t)$ و $\left(y''(t)\right)^2$ نداریم. ضرایب این معادله هم اعداد ثابت است و وابسته به زمان نیست.

توصیف کلی: مدار LTI را که در $t=0$ شروع به کار می‌کند در نظر بگیرید. منابع مستقل در این مدار در $t>0^-$ و همچنین شرایط اولیه آن (ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها) در $t=0^-$ معلوم است.

می‌خواهیم متغیر دلخواه $y(t)$ را در $t>0^-$ تعیین کنیم. فرض کنید معادله دیفرانسیلی که متغیرهای مورد نظر را به هم مربوط می‌کند به صورت زیر بدست آمده باشد.

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots a_1 y'(t)+a_0 y(t)=f(t)$$

که در آن $y^{(k)}(t)$ مشتق k ام سیگنال $y(t)$ است.

نکته۱: این معادله خطی است، یعنی تمام جملات سمت چپ معادله نسبت $y(t)$ و مشتقات آن از مرتبه اول می‌باشد.

نکته۲: مرتبه معادله دیفرانسیل بزرگ‌ترین درجه مشتق سیگنال $y(t)$ یعنی n است.

نکته۳: تعداد شرایط اولیه متغیر $y(t)$ در لحظه $t=0^-$ که برای حل معادله دیفرانسیل لازم است برابر است با مرتبه معادله دیفرانسیل یعنی n. بنابراین برای حل معادله دیفرانسیلی با مرتبه n باید مشتقات سیگنال تا مرتبه $n-1$ ام را در لحظه $t=0^-$ در اختیار داشته باشیم یعنی $\{y(0^-),y'(0^-),\dots,y^{(n-1)}(0^-)\}$ که جمعا تعدادشان n است

[۱۸] Ordinary differential equation

نکته٤: شرایط اولیه مدار با ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها تعیین می‌شود. به مجموعه‌ی شرایط اولیه مدار $\{y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)\}$ حالت‌های معادله دیفرانسیل نیز می‌گویند.

نکته٥: برای بدست آوردن سیگنال $y(t)$ در زمان‌های $t \geq 0^+$ به شرایط اولیه مدار در لحظه 0^+ یعنی $\{y(0^+), y'(0^+), \dots, y^{(n-1)}(0^+)\}$ نیاز داریم ولی معمولا شرایط مدار را در لحظه $t=0^-$ در اختیار ما قرار می‌دهند و شرایط $t = 0^+$ را خودمان باید محاسبه کنیم.

نکته٦:در یک مدار LTI ضرایب a_0 تا a_n ثابت‌های حقیقی و وابسته به مقادیر المان‌ها و منابع وابسته و شکل مدار است.

نکته٧: سیگنال $f(t)$ از جنس ورودی‌های مستقل مدار و مشتقات آن است.

بنابراین طرف اول معادله دیفرانسیل که سیگنال $y(t)$ و مشتقات آن است وابسته به توپولوژی مدار است و طرف دوم یعنی سیگنال $f(t)$ وابسته به ورودی‌های مدار است و از جنس ورودی و مشتقات آن است مثلا اگر ورودی مدار پله باشد طرف دوم ترکیب خطی از سیگنال پله و مشتقات آن است و اگر ورودی سینوسی باشد طرف دوم توابع سینوسی و مشتقات آن است.

نکته٨: شرایط مدار در $t = 0^+$ و $t = 0^-$ لزوما با هم برابر نیستند.



استاد!!! وقتی که مدار در لحظه صفر راه اندازی می‌شود ولتاژها و جریان‌ها در لحظه 0^- حتما صفر هستند دیگه چون مدار که قبل از این لحظه کار نمی‌کرده.



سوال خیلی خوبی بود. شما تا این‌جا فقط با مقاومت‌ها سر و کار داشتید که هیچ انرژی در خودشان ذخیره نمی‌کنند. اما بر خلاف مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها می‌توانند در خود انرژی ذخیره کنند و قبل از این‌که در مدار قرار بگیرند ولتاژ و جریان اولیه غیر صفر داشته باشند. در ثانی شما در این فصل با مدارهایی آشنا می‌شوید که کلید دارند و در یک لحظه خاص مثلا $t = 0$ با باز یا بسته شدن کلید مدار به حالت دیگری سوئیچ می‌کند بنابراین در قبل از باز یا

بسته شدن کلید مدار در حال کار کردن در مد[۱۹] کاری دیگری بوده بنابراین الزاما می‌شود ولتاژها و جریان‌ها در لحظه 0^- صفر نیستند.

نکته: خازن‌ها و سلف‌ها برخلاف مقاومت می‌توانند انرژی ذخیره کنند و قبل از این که در مدار قرار بگیرند ولتاژ و یا جریان اولیه داشته باشند در حالی که ولتاژ و جریان مقاومت‌ها قبل از قرار گرفتن در مدار صفر است.



بچه‌ها اگر زمان شروع $t = t_0 \neq 0$ باشد چه باید کرد؟



اگر لحظه شروع $t = t_0 \neq 0$ باشد از تغییر متغیر $t' = t - t_0$ استفاده می‌کنیم و در معادله به جای $y(t)$ و $f(t)$ به ترتیب $y(t')$ و $f(t' + t_0)$ می‌گذاریم و با حل معادله $y(t')$ را در $t' > 0^-$ پیدا می‌کنیم.



احسنت بر شما کاملا درسته!!!بچه‌ها چرا با وجود این‌که لحظات $t = 0^+$ و $t = 0^-$ بسیار به هم نزدیک اند شرایط مدار در $t = 0^+$ و $t = 0^-$ الزاما با هم برابر نیست؟



چون ممکن است سیگنال $y(t)$ و مشتقات آن در لحظه $t = 0$ ناپیوسته باشد و حد چپ و راست آن با هم برابر نباشد.

آفرین کاملا درسته!!!

پاسخ معادله دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت مرتبه n ام

تابع $y(t)$ را که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب یا پاسخ معادله دیفرانسیل می‌نامیم. در این‌جا می‌خواهم شما را با مفهوم پاسخ معادله دیفرانسیل و بعضی از ویژگی‌های آن آشنا کنم بنابراین به این چند مثال خوب دقت کنید.

مثال۵: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$1)\ y'(t) + 2y(t) = 0$$

[۱۹] mode

سیگنال $y(t) = 3e^{-2t}$ یکی از جواب‌های این معادله دیفرانسیل است زیرا در آن صدق می‌کند

$$y(t) = 3e^{-2t} \rightarrow y'(t) = -6e^{-2t}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$-6e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

بنابراین جواب ارائه شده در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

می‌توان نشان داد هر ضریبی از سیگنال e^{-2t} نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند زیرا:

$$y(t) = Ae^{-2t} \rightarrow y'(t) = -2Ae^{-2t}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$-2Ae^{-2t} + 2Ae^{-2t} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

مثال۶: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$2)\ y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

سیگنال $y_1(t) = e^{-t}$ و $y_2(t) = 3e^{-2t}$ جواب‌های این معادله دیفرانسیل هستند زیرا:

$$y_1(t) = e^{-t} \rightarrow {y_1}'(t) = -e^{-t} \rightarrow {y_1}''(t) = e^{-t}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$e^{-t} - 3e^{-t} + 2e^{-t} = 0 \rightarrow 0 = 0$$

بنابراین جواب ارائه شده در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. همچنین برای سیگنال $y_2(t) =$ $3e^{-2t}$ داریم

$$y_2(t) = 3e^{-2t} \rightarrow {y_2}'(t) = -6e^{-2t} \rightarrow {y_2}''(t) = 12e^{-2t}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$12e^{-2t} - 18e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0 \rightarrow 0 = 0$$



استاد!!! باید جواب را حدس بزنیم؟



خیر هدف ما در این‌جا فقط آشنایی با مفهوم پاسخ معادله دیفرانسیل بود در ادامه روش‌های محاسبه جواب را توضیح می‌دهم.

پاسخ معادله دیفرانسیل به چند دسته تقسیم می‌شود ۱) پاسخ همگن ۲) پاسخ خصوصی ۳) پاسخ کامل

پاسخ همگن یا ورودی صفر معادله دیفرانسیل

پاسخ همگن یا پاسخ ورودی صفر، همانطور که از اسم آن مشخص است پاسخ معادله دیفرانسیل است وقتی ورودی مدار صفر باشد. معادله دیفرانسیل $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$ را وقتی که $f(t) = 0$ است یک معادله همگن می‌نامیم و به هر جواب معادله دیفرانسیل در این حالت یک پاسخ همگن می‌گوییم و با $y_h(t)$ نشان می‌دهیم.

اگر $y_{h1}(t)$ ، $y_{h2}(t)$ پاسخ‌های همگن معادله دیفرانسیل باشند، هر ترکیب خطی از این پاسخ‌ها نیز ، یک پاسخ همگن برای معادله دیفرانسیل است.

$$y_h(t) = A y_{h1}(t) + B y_{h2}(t)$$

مثال۷: معادله دیفرانسیل مثال قبل را در نظر بگیرید:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

همانطور که دیدید سیگنال $y_1(t) = e^{-t}$ و $y_2(t) = e^{-2t}$ جواب‌های این معادله دیفرانسیل هستند. ترکیب خطی سیگنال‌های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را به صورت $y(t) = A y_1(t) + B y_2(t)$ در نظر می‌گیریم.

$$y(t) = A y_1(t) + B y_2(t) = A e^{-t} + B e^{-2t} \rightarrow y'(t) = -A e^{-t} - 2B e^{-2t}$$

$$y''(t) = A e^{-t} + 4B e^{-2t}$$

$$A e^{-t} + 4B e^{-2t} + 3(-A e^{-t} - 2B e^{-2t}) + 2(A e^{-t} + B e^{-2t}) = 0 \rightarrow 0 = 0$$

بنابراین ترکیب خطی سیگنال‌های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل

معادله $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$ را وقتی‌که $f(t) \neq 0$ است در نظر بگیرید به هر جواب معادله دیفرانسیل در این حالت یک پاسخ خصوصی می‌گوییم و با $y_P(t)$ نشان می‌دهیم.

نکته: فرم و ساختار $y_P(t)$ به معادله دیفرانسیل و $f(t)$ وابسته است.

مثال۸: آیا $y_P(t) = \frac{1}{2}$ جواب خصوصی معادله $y'(t) + 2y(t) = 1$ است.

پاسخ:

$$\left(\frac{1}{2}\right)' + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \rightarrow 1 = 1$$

بنابراین $y_P(t) = \frac{1}{2}$ جواب خصوصی این معادله دیفرانسیل است.

پاسخ خصوصی از جنس ورودی $f(t)$ است یعنی اگر $f(t)$ عدد ثابت باشد پاسخ خصوصی $y_p(t) = k$

است و مثلا اگر $f(t)$ به صورت نمایی $e^{\alpha t}$ باشد پاسخ خصوصی $y_p(t) = ke^{\alpha t}$ یا $y_p(t) = kt^m e^{\alpha t}$ است.

نکته: اگر چند ورودی در مدار داشته باشیم، پاسخ خصوصی ترکیبی خطی از ورودی‌هاست. یعنی اگر پاسخ خصوصی به معادله $f(t) = g_i(t)$ برابر $y_{pi}(t)$ باشد، آن‌گاه پاسخ خصوصی معادله به $f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, g_i(t)$ برابر با $y_P = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_{pi}(t)$ خواهد بود.

پاسخ کامل معادله دیفرانسیل

به مجموع پاسخ همگن و پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل پاسخ کامل می‌گوییم. پاسخ کامل در معادله با $f(t) \neq 0$ صدق می‌کند.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

برای هر معادله خطی با n شرایط اولیه یک پاسخ کامل در $t > 0^-$ وجود دارد این پاسخ، مجموع یک پاسخ همگن و یک جواب خصوصی است که در معادله صدق می‌کند و شرایط اولیه را برآورد می‌کند.

حل معادله دیفرانسیل

حالا بهتره بریم سراغ حل معادله دیفرانسیل اولین گام برای حل یک معادله دیفرانسیل محاسبه جواب همگنه که در ادامه روش محاسبه آن را با هم بررسی می‌کنیم.

محاسبه جواب همگن: اولین قدم برای حل معادله دیفرانسیل خطی ضرایب ثابت تشکیل معادله دیفرانسیل همگن است.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

تشکیل معادله همگن: با صفر کردن ترم ورودی که در طرف دوم معادله دیفرانسیل همگن بدست می‌آید.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad (1)$$

برای بدست آوردن معادله مشخصه در معادله همگن به دست آمده به ازای هر درجه مشتق $y(t)$ از درجه n مقدار s^n را قرار می‌دهیم. یعنی به جای عبارت $y'(t)$ مقدار s^1 ، به جای عبارت $y''(t)$ مقدار s^2 و به جای عبارت $y(t)$ مقدار $s^0 = 1$ را جایگزین می‌کنیم.

$$y^{(n)}(t) \rightarrow s^n$$

بنابراین معادله مشخصه (1) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\Delta(s): a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0 = 0$$

این معادله مشخصه جبری است . ریشه‌های معادله مشخصه را فرکانس طبیعی و یا قطب می‌نامند. فرکانس‌های طبیعی فرم جواب دیفرانسیل را تعیین می‌کنند. چهار حالت برای ریشه‌های معادله مشخصه خواهیم داشت: برای راحتی کار فرض می‌کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ است و حالت‌های مختلف فرکانس‌های طبیعی را بیان می‌کنیم.

۱- فرکانس‌ها حقیقی ساده $s_{1,2} = \alpha$وβ

۲- فرکانس‌ها حقیقی مضاعف $s_{1,2} = \alpha$وα

۳- فرکانس‌های موهومی خالص $s_{1,2} = \pm\beta j$

٤- فرکانس‌های مختلط $s_{1,2} = \alpha \pm \beta j$

نکته۱: ریشه‌های معادله مشخصه y را یعنی s_1 و s_2 و... s_n را فرکانس طبیعی متغیر y می‌گوییم.

نکته۲: ریشه‌های معادله مشخصه به توپولوژی مدار، مقادیر المان‌ها و مقادیر منابع وابسته وقتی ورودی‌ها یا همان منابع مستقل خاموش اند بستگی دارد.

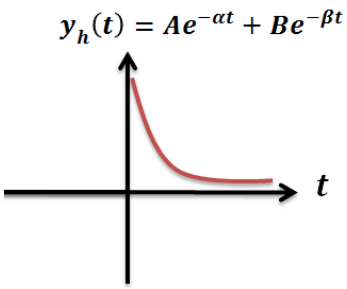
فرم جواب همگن با توجه به فرکانس‌های طبیعی داده شده

ریشه‌ها حقیقی ساده

اگر ریشه‌ها حقیقی ساده باشند یعنی $s_{1,2} = \alpha$وβ . فرم جواب همگن به صورت نمایی خواهد بود یعنی:

$$y_h(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

فرکانس‌های طبیعی حقیقی توان ترم‌های نمایی را می‌سازد.



مثال۹: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

پاسخ: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta(s): s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow (s+1)(s+2) = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \text{ و } -1$$

بنابراین فرم جواب به صورت $y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$ است.

ریشه‌های حقیقی مضاعف

اگر ریشه‌های حقیقی مضاعف باشند یعنی $s_{1,2} = \alpha \text{و} \alpha$. فرم جواب همگن باز هم به صورت نمایی خواهد بود اما با این تفاوت که یک ترم در t ضرب می‌شود.

$$y_h(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t}$$

فرکانس مضاعف باعث ضرب شدن t می‌شود. اگر از درجه۳ تکرار بشه t^2 ضرب می‌شودیعنی در این حالت داریم:

$$y_h(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} + Ct^2e^{\alpha t}$$

و برای تکرار فرکانس طبیعی از درجه چهار خواهیم داشت:

$$y_h(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t} + Ct^2e^{\alpha t} + Dt^3e^{\alpha t}$$

مثال۱۰: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$$

پاسخ: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta(s): s^2 + 6s + 9 = 0 \rightarrow (s+3)^2 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -3 \text{و} -3$$

چون ریشه‌ها مضاعف هستند داریم:

$$y_h(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}$$

ریشه‌های موهومی خالص

اگر ریشه‌هاموهومی خالص $s_{1,2} = 0 \pm \beta j$ باشند، چون فرکانس‌های موهومی باعث نوسان می‌شوند پاسخ ناشی از آن‌ها ترم‌های سینوسی و کسینوسی به صورت زیر است:

$$y_h(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t$$

مثال۱۱: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

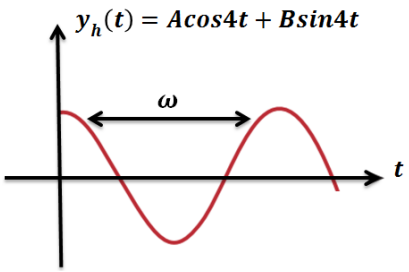
$$y''(t) + 16y(t) = 0$$

پاسخ: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta(s): s^2 + 16 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{-16} = \pm j\sqrt{-16} = \pm 4j$$

فرکانس نوسان 4 رادیان بر ثانیه است.

$$y_h(t) = A\cos 4t + B\sin 4t$$



۴- اگر ریشه‌های مختلط $s_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ داشته باشیم قسمت حقیقی باعث ایجاد ترم نمایی و قسمت موهومی باعث ایجاد ترم نوسانی یعنی سینوسی و کسینوسی می‌شود.

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$$

مثال۱۲: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0$$

پاسخ: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta(s): s^2 + 2s + 4 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3}$$
$$= -1 \pm j\sqrt{-3}$$

$$s^2 + as + b = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} s_{1,2} = \frac{-a \pm j\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2}$$

$$y_h(t) = e^{-t}\left(A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t\right)$$

فرکانس نوسان $\sqrt{3}$ است.

مثال۱۳: برای معادله دیفرانسیل زیر جواب همگن را بدست آورید.

$$y'''(t) + 8y''(t) + 16y'(t) = 0$$

پاسخ: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta(s): s(s^2 + 8s + 16) = 0 \rightarrow s_{1,2} = 0 \text{ و } -4 \text{ و } -4$$

ریشه‌های معادله مشخصه حقیقی و غیرتکراری هستند بنابراین جواب به فرم نمایی است

$$y_h(t) = Ae^{0t} + Be^{-4t} + Cte^{-4t} = A + Be^{-4t} + Cte^{-4t}$$

مثال۱٤: برای معادله مشخصه‌های داده شده جواب همگن را بدست آورید.

$$\Delta(s): s^2 + 6s + 11$$

پاسخ:

$$\Delta(s): s^2 + 6s + 11 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{11 - \left(\frac{6}{2}\right)^2}}{2} = \frac{-3 \pm j\sqrt{\frac{8}{4}}}{2} = -3 \pm j\sqrt{2}$$
$$= -1 \pm j\sqrt{-3}$$

چون ریشه‌ها مختلط هستند قسمت حقیقی باعث ایجاد ترم نمایی و قسمت موهومی باعث ایجاد ترم نوسانی یعنی می‌شود.

$$y_h(t) = e^{-3t}\left(A\cos\sqrt{2}t + B\sin\sqrt{2}t\right)$$

$$\Delta(s): s^2(s+2)(s+1)^3$$

پاسخ:

$$\Delta(s): s^2(s+2)(s+1)^3 = 0 \rightarrow s = 0 \text{ و } 0 \text{ و } -2 \text{ و } -1 \text{ و } -1 \text{ و } -1$$

$$y_h(t) = Ae^{0t} + Bte^{0t} + Ce^{-2t} + Ee^{-t} + Fte^{-t} + Gt^2e^{-t}$$

$$\Delta(s): s(s^2+3)^2[(s+1)^2+1](s+2)$$

پاسخ:

$$\Delta(s): s(s^2+3)^2[(s+1)^2+1](s+2) = 0 \rightarrow s = 0 \text{ و } \pm j\sqrt{3} \text{ و } -1 \pm j \text{ و } -2$$

$$y_h(t) = k + \left(Acos\sqrt{3}t + Bsin\sqrt{3}t\right) + t\left(A'cos\sqrt{3}t + B'sin\sqrt{3}t\right) + e^{-t}(Ccost + Dsint) + Ee^{-2t}$$

در مورد این فرکانس‌های طبیعی باید بدانید که حضور یا عدم حضور این فرکانس‌های طبیعی در پاسخ ورودی صفر (همگن) بستگی به شرایط اولیه دارد. ممکن است شرایط اولیه طوری باشد که بعضی از ضرایب A و B و ... پاسخ همگن صفر شود. اگر ضرایب A و B و ... مربوط به فرکانس s_i غیرصفر باشد فرکانس s_i در پاسخ ظاهر می‌شود.

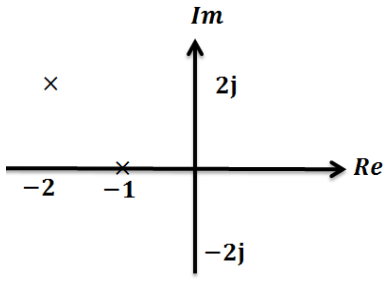


استاد اگر در یک مدار مقادیر منابع مستقل تغییر کنند فرکانس‌های طبیعی چه تغییری می‌کنند؟ اگر به جای منبع ولتاژ منبع جریان قرار گیرد چطور؟

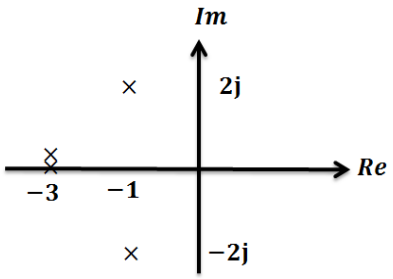


اگر فقط مقادیر منابع تغییر کند چون شکل هندسی مدار تغییر نمی‌کند فرکانس‌های طبیعی هم تغییر نمی‌کنند ولی اگر نوع منبع مستقل تغییر کند شکل هندسی مدار تغییر می‌کند و فرکانس طبیعی نیزعوض می‌شود.

مثال۱۵: محل ریشه‌های معادله مشخصه $y(t)$ در شکل‌های زیر نشان داده شده است. کدام یک می‌تواند فرکانس طبیعی مدار باشد؟ پاسخ همگن آن را بنویسید.



الف



ب

الف) چون ضرایب معادله دیفرانسیل اعداد حقیقی هستند و مختلط نیستند، ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به محور حقیقی متقارن اند. یعنی هر فرکانس مختلطی که داشتیم باید مزدوج آن نیز در بین فرکانس‌ها موجود باشد. یعنی برای یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت خطی امکان پذیر نیست که فرکانس مختلطی داشته باشیم، که مزدوج آن در بین فرکانس‌های طبیعی وجود نداشته باشد. بنابراین نمودار الف نمی‌تواند بیانگر فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد.

ب) نمودار ب این مشکل را ندارد و می‌تواند بیانگر فرکانس‌های طبیعی یک مدار باشد. بنابراین برای قسمت ب داریم:

$$y_h(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t} + e^{-t}(Ccos2t + Dsin2t)$$

جواب خصوصی

پس از این‌که جواب همگن را پیدا کردیم، اگر معادله دیفرانسیل ورودی $f(t) \neq 0$ داشته باشد. تاثیر این ورودی در پاسخ خصوصی نیز ظاهر می‌شود. بنابراین روی جواب کامل هم اثر می‌گذارد.

فرم جواب خصوصی با توجه به نوع ورودی

حالت اول : تابع $f(t)$ یک چندجمله ای از درجه r باشد و $s = 0$ فرکانس طبیعی نباشد.

در این حالت چون پاسخ خصوصی از جنس ورودی است. پاسخ خصوصی به فرم چند جمله ای$p(t)$ از درجه r خواهد بود که با گذاشتن $p(t)$ در معادله دیفرانسیل ضرایب $p(t)$ بدست می‌آید.

مثال۱۶: پاسخ خصوصی و همگن معادله زیر را بدست آورید.

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=3t^2+1$$

پاسخ:

$$\Delta(s): s^2+2s+1=0 \rightarrow s=-1 \text{ و } -1 \rightarrow y_h(t)=Ae^{-3t}+Bte^{-3t}$$

تابع $f(t)$ یک چندجمله ای از درجه 2 است و $s=0$ فرکانس طبیعی نیست بنابراین پاسخ خصوصی را به صورت یک چندجمله ای از درجه 2 در نظر می‌گیریم.

$$y_p(t)=p(t)=at^2+bt+c$$

با قرار دادن این چندجمله‌ای در معادله دیفرانسیل داریم:

$$2a+2(2at+b)+(at^2+bt+c)=3t^2+1 \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ 4a+b=0 \rightarrow b=-12 \\ 2a+2b+c=1 \rightarrow c=19 \end{cases}$$

بنابراین پاسخ خصوصی به صورت زیر بدست می‌آید

$$y_p(t)=p(t)=3t^2-12t+19$$



استاد!!! اگر$f(t)$ عدد ثابت باشد جواب خصوصی به چه فرمی است؟



آفرین سوال خوبی بود فعال شدی!!! اگر$f(t)$ عدد ثابت باشد با یک چندجمله‌ای از درجه صفر مواجه هستیم $(r=0)$ پس جواب خصوصی $p(t)$ به فرم عدد ثابت می‌شود یعنی همانطور که قبلا گفتیم پاسخ خصوصی کاملا همجنس سیگنال ورودی است. (چندجمله‌ای از درجه 0)

حالت دوم: اگر تابع $f(t)$ یک چندجمله ای از درجه r باشد و $s=0$ فرکانس طبیعی با درجه تکرار m باشد در این حالت جواب خصوصی به فرم $t^m p(t)$ خواهد بود که $p(t)$ از درجه r است و با گذاشتن $t^m p(t)$ در معادله دیفرانسیل ضرایب مجهول $p(t)$ بدست می‌آید.

مثال۱۷: پاسخ خصوصی و همگن معادله زیر را بدست آورید.

$$y''(t)+2y'(t)=t+1 \quad y'(0)=y(0)$$

پاسخ:

$$\Delta(s): s^2+2s=0 \rightarrow s=0\ ,-2 \rightarrow y_h(t)=A+Be^{-2t}$$

$$f(t)=t+1=t^1+1$$

تابع $f(t)$ یک چندجمله ای از درجه 1 باشد و $s=0$ فرکانس طبیعی با مرتبه تکرار ۱ است

$$y_p(t)=p(t)=t^1(at^1+b)$$

با قرار دادن در معادله دیفرانسیل داریم:

$$(2a+0)+2(2at+b)=t+1$$

$$\begin{cases} 2(2at)=t \rightarrow a=\frac{1}{4} \\ 2a+2b=1 \rightarrow b=\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow y_p(t)=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=(A+Be^{-2t})+\frac{1}{4}(t^2+t)$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \rightarrow A+B=0 \\ -2B+\frac{1}{4}=0 \rightarrow B=\frac{1}{8}\ , A=\frac{1}{8} \end{cases}$$

بنابراین پاسخ کامل عبارت است از:

$$y(t)=\frac{1}{8}(-1+e^{-2t})+\frac{1}{4}(t^2+t)$$

مثال۱۸: پاسخ خصوصی ، همگن و کامل معادله زیر را بدست آورید.

$$y''(t)+4y'(t)+5y(t)=t+2$$

پاسخ:

$$y''(t)+4y'(t)+5y(t)=0 \rightarrow \Delta(s): s^2+4s+5=0 \rightarrow$$

$$s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm j$$

$$y_h(t)=e^{-2t}(Asint+Bcost)$$

تابع $f(t)$ یک چندجمله ای از درجه r باشد و $s=0$ فرکانس طبیعی نیست. بنابراین پاسخ خصوصی یک چند جمله‌ای درجه یک خواهد بود.

$$y_p(t)=at+b$$

با قرار دادن در معادله دیفرانسیل داریم:

$$0+4a+5(at+b)=t+2 \rightarrow \begin{cases} 5a=1 \rightarrow a=\frac{1}{5} \\ 4a+5b=2 \rightarrow a=\frac{6}{25} \end{cases} \rightarrow y_p(t)=\frac{1}{5}t+\frac{6}{25}$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=e^{-2t}(Asint+Bcost)+\frac{1}{5}t+\frac{6}{25}$$

برای محاسبه ضرایب مجهول A و B باید شرایط اولیه را داشته باشیم. که در صورت سوال شرایط اولیه داده نشده بنابراین تا همین حد کافیه!!!

حالت سوم: اگر $f(t)$ از نوع ثابت، نمایی، سینوسی یا حاصلضرب آن‌ها باشد. همه این نوع توابع را می‌توان برای $t\geq 0$ به فرم $ke^{\beta t}$ بیان کرد که در حالت کلی k و β عدد مختلط هستند.



استاد!!! اگر تابع $f(t)$ یک تابع ثابت باشد $\beta=0$ است اما تابع سینوسی را چگونه به فرم نمایی بنویسیم؟



سوال خیلی خوبی بود. همانطور که در درس ریاضی مهندسی خوانده اید می‌دانید که:

$$e^{jx}=cosx+jsinx \rightarrow \begin{cases} cosx=Re\{e^{jx}\} \\ sinx=Im\{e^{jx}\} \end{cases}$$

بنابراین با استفاده از این رابطه سیگنال‌های سینوسی و کسینوسی قابل تبدیل

به فرم نمایی

هستند. حالا چند مثال را با هم بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم سیگنال‌های زیر را به فرم نمایی بنویسیم:

مثال۱۹:

الف) $f(t)=5$

پاسخ:

$$f(t)=5 \rightarrow f(t)=5e^{0t}: \quad k=5, \beta=0$$

ب) $f(t)=-2sin\pi t$

پاسخ:

$$f(t)=-2sin\pi t \rightarrow f(t)=-2Im\{e^{j\pi t}\}=Im\{-2e^{j\pi t}\} \quad : \quad k=-2\,, \beta=j\pi$$

ج) $f(t)=\frac{1}{2}cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

پاسخ:

$$f(t)=\frac{1}{2}cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f(t)=\frac{1}{2}Re\left\{e^{j\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}=Re\left\{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt}\right\}: \quad k=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\,, \beta=j$$

د) $f(t)=e^{-3t}cos2t$

پاسخ:

$$f(t)=e^{-3t}cos2t \rightarrow e^{-3t}Re\{e^{j2t}\}=Re\{e^{(2j-3)t}\}: \quad k=1\,, \beta=2j-3$$

حالا به ادامه مبحث می‌پردازیم:

الف) در حالت سوم، اگر β فرکانس طبیعی(ریشه معادله مشخصه) نباشد: در این حالت جواب خصوصی را به فرم $Ae^{\beta t}$ در نظر می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا A بدست آید.

$$a_n y^{(n)}(t)+\cdots+a_0 y(t)=ke^{\beta t}$$

با جایگذاری $y_p(t) = Ae^{\beta t}$ داریم:

$$a_n A\beta^n e^{\beta t} + \cdots + a_0 A e^{\beta t} = ke^{\beta t}$$

بنابراین A برابر است با:

$$A = \frac{k}{a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_0}$$

با جایگذاری A در جواب خصوصی $(y_p(t) = Ae^{\beta t})$ داریم:

$$y_p(t) = \frac{ke^{\beta t}}{a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + a_0} \rightarrow y_p(t) = \frac{ke^{\beta t}}{\Delta(s)\big|_{s=\beta}}$$

مثال ۲۰: پاسخ معادله زیر را بدست آورید.

$$y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = u(t) + e^{-t}u(t) + e^{-t}sint\,u(t) \quad t > 0^-$$

پاسخ: ابتدا معادله مشخصه سیستم را می‌نویسیم و ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم:

$$\rightarrow \Delta(s): s^2 + 8s + 16 = 0 \rightarrow (s+4)^2 = 0 \;\rightarrow\; s_{1,2} = -4, -4$$

بنابراین جواب همگن به فرم $y_h(t) = Ae^{-4t} + Bte^{-4t}$ است از طرفی ورودی های مدار عبارتند از :

$$u(t) \rightarrow \; k = 1, \beta = 0$$

$$e^{-t} \rightarrow \; k = 1, \beta = -1$$

$$e^{-t}sint = e^{-t}Im\{e^{jt}\} = Im\{e^{-t}e^{jt}\} = Im\{e^{(j-1)t}\} \rightarrow k = 1, \beta = j - 1$$

چون $\beta = -1$ فرکانس طبیعی مدار نیست پاسخ ناشی از هر ورودی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u(t) = e^{0\times t} \rightarrow \; \frac{1}{0 + 8\times 0 + 16}$$

$$e^{-t} \rightarrow \frac{1\times e^{-t}}{(-1)^2 + 8\times(-1) - 16}$$

$$e^{-t}sint = Im\{e^{(j-1)t}\} \rightarrow Im\left\{\frac{e^{(j-1)t}}{(j-1)^2 + 8\times(j-1) + 16}\right\}$$

پاسخ کامل از جمع پاسخ خصوصی و همگن بدست می‌آید.

$$y(t) = Ae^{-4t} + Bte^{-4t} + \frac{1}{0+8\times 0+16} + \frac{1\times e^{-t}}{(-1)^2+8\times(-1)-16} + Im\left\{\frac{e^{(j-1)t}}{(j-1)^2+8\times(j-1)+16}\right\}$$

از طرفی عبارت $Im\left\{\frac{e^{(j-1)t}}{(j-1)^2+8\times(j-1)+16}\right\}$ به فرم زیر قابل ساده سازی است.

$$Im\left\{\frac{e^{(j-1)t}}{(j-1)^2+8\times(j-1)+16}\right\} = e^{-t}Im\left\{\frac{e^{jt}}{(-1+1-2j)+8(j-1)+16}\right\}$$
$$= e^{-t}Im\left\{\frac{e^{jt}}{8+6j}\right\} = e^{-t}Im\left\{\frac{e^{jt}}{\sqrt{8^2+6^2}e^{tg^{-1}\frac{6}{8}j}}\right\} = \frac{e^{-t}}{10}Im\left\{e^{j\left(t-tg^{-1}\frac{3}{4}\right)}\right\}$$
$$= \frac{e^{-t}}{10}sin\left(t-tg^{-1}\frac{3}{4}\right)$$

$$y(t) = Ae^{-4t} + Bte^{-4t} + \frac{e^{-t}}{10}sin\left(t-tg^{-1}\frac{3}{4}\right)$$



استاد اگر تابع $f(t)$ از نوع $\delta(t)$ باشد پاسخ خصوصی به چه فرمی است؟



سوال خیلی خوبی بود. اگر تابع $f(t)$ از نوع $\delta(t)$ یا مشتقات آن باشد، پاسخ خصوصی ایجاد نمی‌کند $(y_p = 0)$ بنابراین پاسخ همگن همان پاسخ کامل است.این ورودی فقط شرایط اولیه را تغییر می‌دهد یعنی در این حالت $y(0^-) \neq y(0^+)$ خواهد شد .دلیل این امر واضح است سیگنال ضربه سیگنالی است که در یک لحظه ظاهر و فورا صفر می‌شود پس نمی‌تواند در لحظات بعد و در پاسخ سیستم تاثیری بگذارد فقط توانایی تغییر شرایط اولیه سیستم را دارد. علی الحساب در مورد ورودی ضربه به همین مقدار بسنده کنید در فصل‌های بعد به طور کامل تابع ضربه را بررسی می‌کنیم.

مثال۲۱: پاسخ معادله زیر را بدست آورید.

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \delta'(t) + \frac{1}{2}\delta(t) + e^{-3t}$$

پاسخ:

$\Delta(s)$: $\mathbf{s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow s = -1}$ و $\mathbf{-2}$

معادله مشخصه فرکانس صفر ندارد بنابراین پاسخ همگن به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}}$$

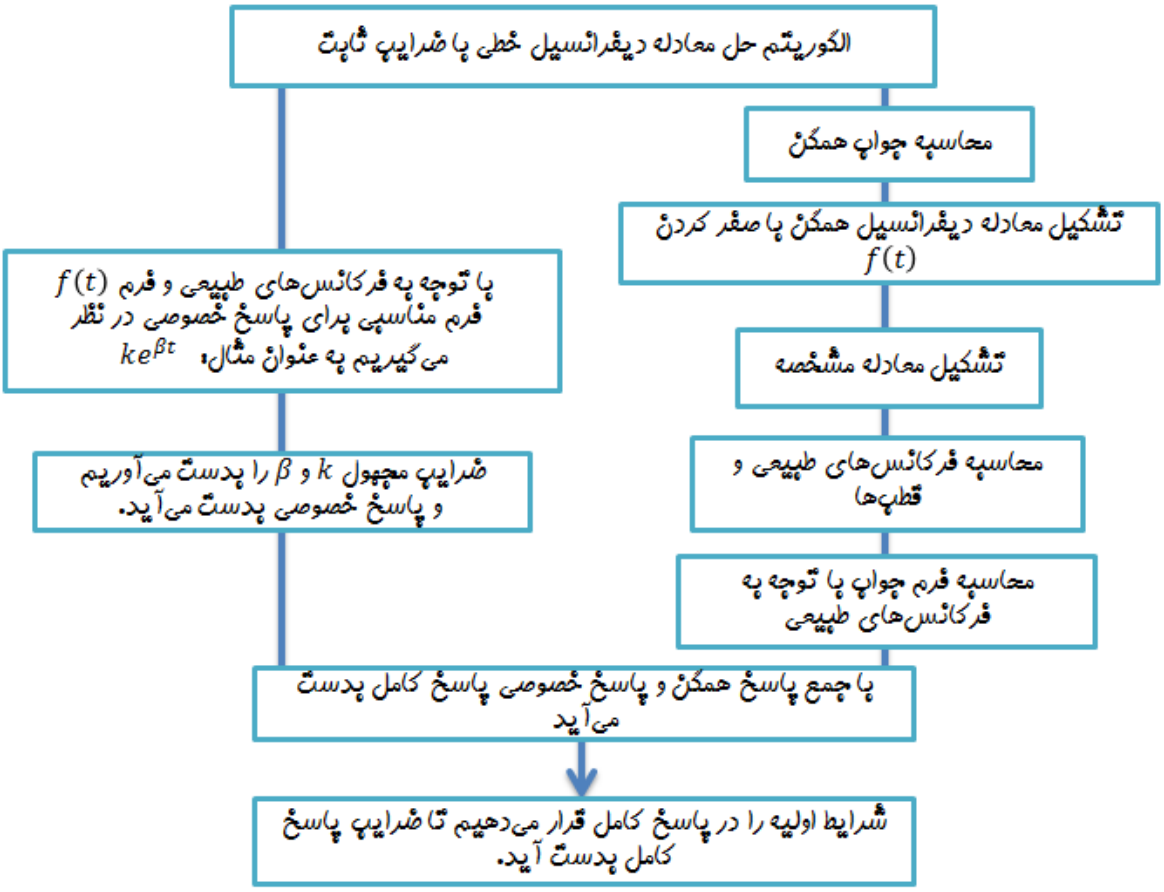
ورودی ضربه پاسخ خصوصی ایجاد نمی‌کند بنابراین پاسخ خصوصی به فرم زیرخواهد بود:

$$\boldsymbol{y_p(t) = 0 + 0 + \frac{e^{-3t}}{\Delta(s)\big|_{s=-3}} = \frac{e^{-3t}}{(-3)^2 + 3 \times (-3) + 2} = \frac{e^{-3t}}{2} = \frac{1}{2}e^{-3t}}$$

توجه داشته باشید که برای محاسبه $\mathbf{A}$ و $\boldsymbol{B}$ باید شرایط اولیه $\mathbf{0^+}$ را در معادله کامل قرار دهیم اما چون ورودی $\boldsymbol{\delta(t)}$ و $\boldsymbol{\delta'(t)}$ داریم:

$$\boldsymbol{y(0^-) \neq y(0^+)}$$

بنابراین مراحل حل معادله دیفرانسیل را می‌توانیم در الگوریتم زیر خلاصه کنیم.



مثال۲۲: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2u(t)+3e^{-3t}u(t)$$

پاسخ:

$$2u(t)\rightarrow\ \ k=2,\beta=0$$

$$\Delta(s):\ s^2+3s+2=0\rightarrow s=-1\ و\ -2$$

$$y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+\frac{2}{(0)^2+2\times(0)+3}+\frac{3e^{-2t}}{(-2)^2+2\times(-2)+3}\quad t>0$$

$$y(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}+\frac{2}{3}+e^{-2t}\quad t>0$$

ب) اگر β فرکانس طبیعی باشد از مرتبه l باشد: در این حالت جواب خصوصی را به فرم $At^le^{\beta t}$ در نظر می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا A بدست آید.

مثال ۲۳: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$\frac{d^3y}{dt^3}+5\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}=u(t)+2tu(t)+e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)+costu(t)+\delta(t)$$

پاسخ: طرف دوم $\delta(t)$ دارد این ورودی جواب خصوصی ایجاد نمی‌کند اما شرایط اولیه را در لحظه 0^+ تغییر می‌دهد. برای محاسبه پاسخ همگن ریشه‌های معادله مشخصه را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(s):\ s^3+5s^2+4s=0\rightarrow s=0\ ,-1,-4$$

$$y_h(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-4t}$$

ورودی را کمی مرتب می‌کنیم:

$$u(t)+2tu(t)+e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)+costu(t)+\delta(t)$$
$$=(1+2t)u(t)+e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)+costu(t)+\delta(t)$$

پاسخ خصوصی را به تک تک ورودی‌ها بدست می‌آوریم:

$$(1+2t)u(t):\ \left(\text{فرکانس } s=0 \text{ داریم}\right) \rightarrow p(t)=t^1(at+b)$$

$$e^{-t}u(t): k=1, \beta=-1 \left(\text{فرکانس طبیعی } s=-1\right) \rightarrow p(t)=ct^1e^{-t}u(t)$$

$$\frac{1}{2}e^{-3t}u(t): k=1, \beta=-3 \left(\text{فرکانس طبیعی } s=\beta\right) \rightarrow p(t)=\frac{\frac{1}{2}e^{-3t}}{\Delta(s)\big|_{s=-3}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}e^{-3t}}{-27+45-12}$$

$$costu(t)=Re\{e^{jt}\} \rightarrow k=1, \beta=j \rightarrow Re\left\{\frac{e^{jt}}{j^3+5\times(j)^2+4j}\right\}=Re\left\{\frac{e^{jt}}{-5+3j}\right\}$$

$$=Re\left\{\frac{e^{jt}}{\sqrt{5^2+3^2}e^{j\left(\pi-tg^{-1}\frac{3}{5}\right)}}\right\}=Re\left\{\frac{e^{j\left(t-\pi+tg^{-1}\frac{3}{5}\right)}}{\sqrt{34}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{34}}cos\left(t-\pi+tg^{-1}\frac{3}{5}\right)$$

$$\delta(t) \rightarrow y_p(t)=0$$

$$y_p(t)=cte^{-t}+\frac{\frac{1}{2}e^{-3t}}{6}\frac{1}{\sqrt{34}}cos\left(t-\pi+tg^{-1}\frac{3}{5}\right)+0$$

با قرار دادن عبارت cte^{-t} در معادله c بدست می‌آید. به دلیل حجم محاسبات بالا در اینجا از محاسبه c صرف نظر می‌کنیم. بنابراین پاسخ کامل عبارت است از:

$$y_h(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-4t}+cte^{-t}+\frac{\frac{1}{2}e^{-3t}}{6}\frac{1}{\sqrt{34}}cos\left(t-\pi+tg^{-1}\frac{3}{5}\right)$$

فرکانس طبیعی صفر

اگر در پاسخ همگن جملات ثابت یا DC داشته باشیم (Ae^{0t}) به عبارت دیگر فرکانس صفر در معادله مشخصه داشته باشیم، اثر آن در $y_p(t)$ به یکی از دو صورت زیر ظاهر می‌شود.

حالت اول: اگر ورودی ثابت یا DC در سمت راست معادله وجود داشته باشد:

در این حالت چون فرکانس ورودی و فرکانس طبیعی یکی شده‌اند در پاسخ خصوصی جمله $ktu(t)$ خواهیم داشت که موجب بی‌کران شدن پاسخ کامل در $t \to \infty$ خواهد شد در این حالت می‌گوییم فرکانس طبیعی صفر در ارتباط با ورودی دیده می‌شود.

مثال ۲۴: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y''(t) + 2y'(t) = 3u(t) + 3e^{-3t}u(t)$$

پاسخ:

$$\Delta(s): s^2 + 2s = 0 \to s = 0 \text{ و } -2$$

هم فرکانس صفر در معادله مشخصه داریم و هم ووردی DC در معادله دیفرانسیل بنابراین پاسخ ناشی از ورودی ثابت را به صورت $ktu(t)$ در نظر می‌گیریم.

$$3u(t) \to \beta = 0 \to p(t) = ktu(t)$$

این پاسخ را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا ضریب مجهول

$$0 + 2k = 3 \to k = \frac{3}{2} \to y_p(t) = p(t) = \frac{3}{2}tu(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left(A + Be^{-2t} + \frac{3}{2}t\right)u(t)$$

حالت دوم: ورودی ثابت یا DC در سمت راست معادله وجود نداشته باشد و فقط مشتقات آن ظاهر شود، در این حالت جمله ای در $y_p(t)$ ایجاد نمی‌کند و در پاسخ خصوصی در $t \to \infty$ کران‌دار است.

مثال ۲۵: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y''(t) + 2y'(t) = 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

پاسخ:

$\Delta(s): \mathbf{s^2 + 2s = 0 \rightarrow s = 0}$ و $\mathbf{-2 \rightarrow y_h(t) = A + Be^{-2t}}$

ورودی ثابت یا DC در سمت راست معادله وجود ندارد و فقط مشتقات آن ظاهر شده است بنابراین:

$$\boldsymbol{y_p(t) = 0 + 0}$$

$$\boldsymbol{y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A + Be^{-2t}}$$

مثال ۲۶: در معادله دیفرانسیل زیر نشان دهید که فرکانس‌های طبیعی صفر $\boldsymbol{y(t)}$ در ارتباط با $\boldsymbol{i_s}$ دیده می‌شود ولی در ارتباط با $\boldsymbol{v_s}$ دیده نمی‌شود

$$\boldsymbol{y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = v_s' + i_s}$$

$$\boldsymbol{y(0^-) = y'(0^-) = y''(0^-) = 0}$$

الف) $\boldsymbol{i_s = 0, v_s = u(t)}$

ب) $\boldsymbol{i_s = u(t), v_s = 0}$

پاسخ:

ابتدا پاسخ همگن مدار را بدست می‌آوریم این پاسخ برای هر دو حالت الف و ب یکسان است چون وابستگی‌ای به ورودی مدار ندارد.

$\Delta(s): \mathbf{s^3 + 3s^2 + 2s = 0 \rightarrow s = 0}$ و $\mathbf{-1}$و $\mathbf{-2 \rightarrow y_h(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-2t}}$

الف)

$$\boldsymbol{f(t) = \delta(t) + 0}$$

ورودی $\boldsymbol{\delta(t)}$ پاسخ خصوصی ایجاد نمی‌کند اما شرایط اولیه را در لحظه $\mathbf{0^+}$ نسبت به $\mathbf{0^-}$ تغییر می‌دهد.

$$\boldsymbol{y_p(t) = 0}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (\mathbf{A} + Be^{-t} + Ce^{-2t})u(t)$$

چون در سمت راست معادله دیفرانسیل مشتق سیگنال v_s را داریم و این سیگنال یک سیگنالDC است پاسخ خضوصی ایجاد نمی‌کند.

ب)

$$f(t) = u(t) + 0$$

$$y_p(t) = ktu(t) \rightarrow \text{جایگذاری در معادله} \ : \ 0 + 0 + 2k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$y_p(t) = \frac{1}{2}tu(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \left(\mathbf{A} + Be^{-t} + Ce^{-2t} + \frac{1}{2}t\right)u(t)$$

چون در سمت راست سیگنال i_s را داریم و این سیگنال یک سیگنالDC است و همچنین معادله مشخصه یک فرکانس صفر دارد در پاسخ مدار عبارت $\frac{1}{2}\,t\,u(t)$ ظاهر شد که باعث بیکران شدن خروجی می‌شود. بنابراین همانطور که دیدید فرکانس‌های طبیعی صفر $y(t)$ در ارتباط با i_s دیده می‌شود ولی در ارتباط با v_s دیده نمی‌شود.

مثال ۲۷: پاسخ کامل معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5e^{-t}$$

پاسخ:

$$\Delta(s): \mathbf{s^2} + 3s + 2 = 0 \rightarrow \mathbf{s} = -1 \text{ و } -2$$

$$y_h(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

$\beta = -1$ فرکانس طبیعی از مرتبه 1 است بنابراین جواب خصوصی را به فرم kt^1e^{-t} در نظر می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم تا k بدست آید.

$$y_p(t) = kte^{-t} \rightarrow \text{جایگذاری در معادله} \ : (ke^{-t} - kte^{-t})' + 3(ke^{-t} - kte^{-t}) + 2kte^{-t} = 5e^{-t} \rightarrow k = \cdots$$

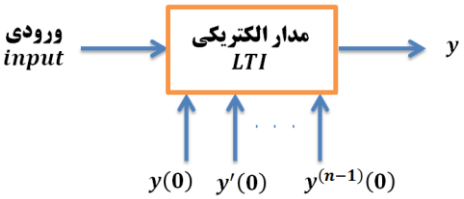
می‌توانستیم از همان ابتدا برای محاسبه k به شیوه زیر عمل کنیم:

$$k = \frac{5}{(-1)^2 + 3 \times (-1) + 2 \times (-1)} = \frac{5}{-6}$$

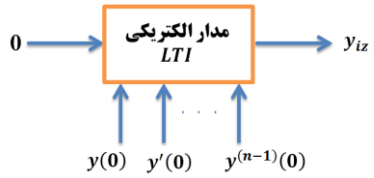
$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} - \frac{5te^{-t}}{6}$$

پاسخ ورودی صفر[۲۰] و حالت صفر[۲۱]

دسته بندی دیگری روی پاسخ‌های معادله دیفرانسیل علاوه بر پاسخ همگن و خصوصی وجود دارد. که پاسخ معادله دیفرانسیل را از لحاظ نوع ورودی ای که پاسخ از آن ناشی می‌شود بررسی می‌کند. در حالت کلی پاسخ یک مدار الکتریکی ناشی از ورودی‌های مدار و حالت‌های مدار یا همان شرایط اولیه مدار است.

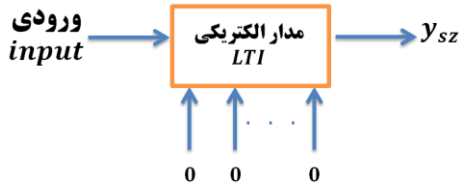


پاسخ ورودی صفر: پاسخ کامل مدار است وقتی $f(t)=0$ یا همان ورودی‌های مدار صفر باشد. در واقع پاسخ ورودی صفر یک پاسخ همگن است که در شرایط اولیه هم صدق می‌کند.



نکته: پاسخ ورودی صفر تابعی خطی از شرایط اولیه است. یعنی اگر ورودی صفر باشد با A برابر شدن شرایط اولیه، خروجی y_{iz} هم A برابر می‌شود.

پاسخ حالت صفر: پاسخ کامل مدار است وقتی که شرایط 0^- همگی صفر باشند.



نکته۱: پاسخ حالت صفر تابعی خطی از ورودی‌های مدار است. یعنی اگر شرایط اولیه صفر باشد با A برابر شدن ورودی، خروجی y_{sz} هم A برابر می‌شود.

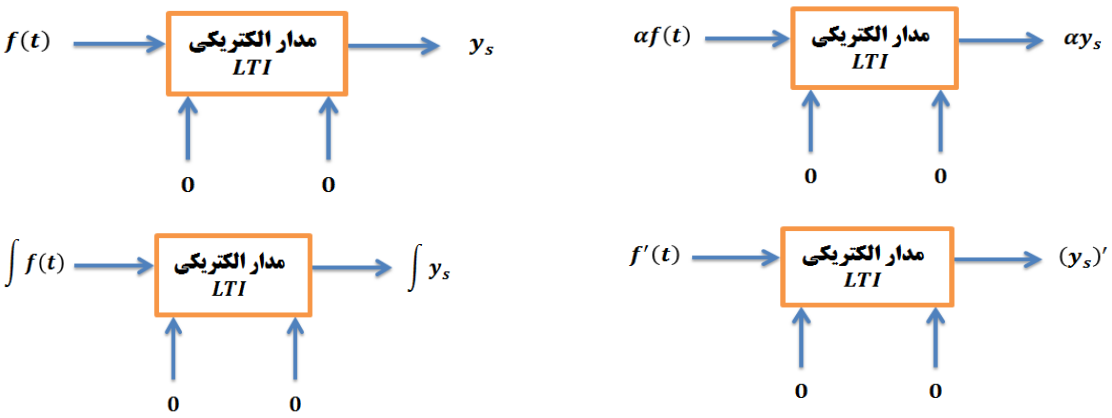
---

[۲۰] Zero input response
[۲۱] Zero state response

نکته۲: پاسخ حالت صفر، مستقل از لحظه اعمال ورودی است یعنی اگر $y(t)$ پاسخ حالت صفر به ورودی $f(t)$ باشد، پاسخ حالت صفر به ورودی $f(t-t_0)$ برابر با $y(t-t_0)$ خواهد شد.

از این‌جا به بعد نمادها را ساده تر می کنیم و پاسخ حالت صفر را با y_s و پاسخ ورودی صفر را با y_i نشان می‌دهیم.

نکته۳: اگر y_s پاسخ حالت صفر به ورودی $f(t)$ باشد آن‌گاه $\frac{dy_s}{dt}$ و $\int_{0^-}^{t} y_s\,dt$ به ترتیب پاسخ حالت صفر به $f'(t)$ و $\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt$ خواهد بود.



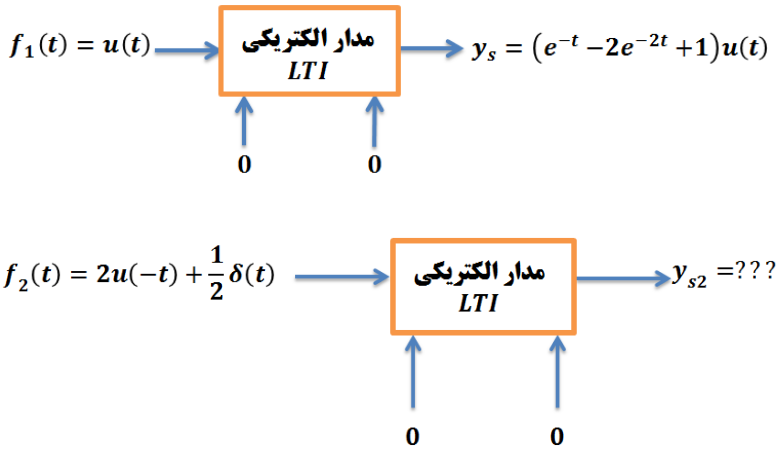
بنابراین هر بلایی سر ورودی بیاریم همون بلا سر پاسخ حالت صفر هم میاد.

نکته٤: با توجه به قضیه جمع آثار پاسخ کامل از مجموع پاسخ‌های حالت صفر و ورودی صفر بدست می‌آید.

مقایسه $u(t)$ و $\delta(t)$ مشتقات آن‌ها در سمت راست معادله دیفرانسیل

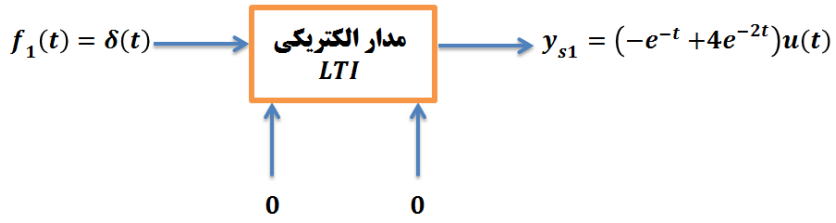
توابع $u(t)$ و $g(t)u(t)$ شرایط اولیه $t=0^-$ را تا لحظه $t=0^+$ تغییر نمی‌دهند چرا که اثر گذاری این ورودی‌ها در لحظه $t=0^+$ آغاز می‌شود ولی $\delta(t)$ و مشتقات آن که در لحظه $t=0$ ($0^- \le t \le 0^+$) ظاهر می‌شوند شرایط اولیه $t=0^-$ را تا لحظه $t=0^+$ تغییر می‌دهند. پس اگر سمت راست معادله دیفرانسیل، $f(t)$ شامل ضربه یا مشتقات آن‌ها نباشد، شرایط در $t=0^-$ و $t=0^+$ مساوی است.

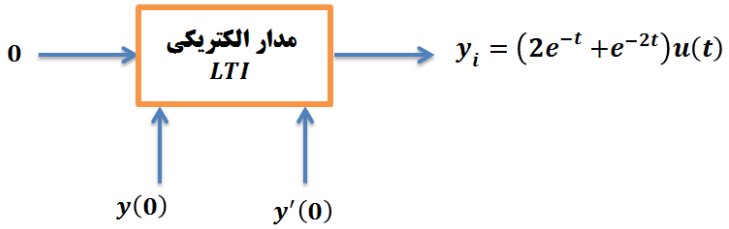
مثال۲۸: پاسخ حالت صفر معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به ورودی $f_1(t)=u(t)$ در لحظات $t\geq 0^+$ عبارت است از: $y_s=(e^{-t}-۲e^{-2t}+1)u(t)$. پاسخ حالت صفر این معادله را به ورودی $f_2(t)=2u(-t)+\frac{1}{2}\delta(t)$ بیابید.

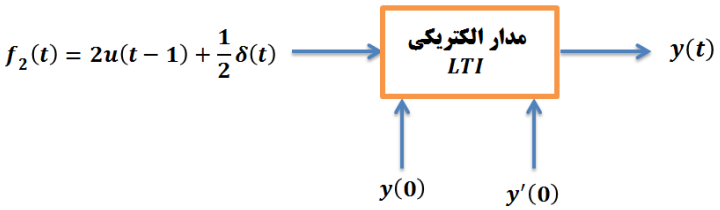


پاسخ:

مثال۲۹: پاسخ حالت صفر معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به ورودی $f_1(t)=\delta(t)$ عبارت است از: $y_{s1}=(-e^{-t}+4e^{-2t})u(t)$. اگر پاسخ ورودی صفر آن $y_i=(2e^{-t}+e^{-2t})u(t)$ باشد، پاسخ کامل این معادله را به ورودی $f_2(t)=2u(t-1)+\frac{1}{2}\delta(t)$ بیابید







پاسخ:

مثال۳۰: پاسخ همگن و خصوصی یک معادله دیفرانسیل خطی به ازای $t \geq 0^+$ به ترتیب عبارتند از: $y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$ و $\frac{1}{2} y_p(t) =$. اگر $y(t)$ پاسخ کامل معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه $y(0^+) = 0$ و $y'(0^+) = -1$ باشد، $y(t)$ را بیابید.

پاسخ

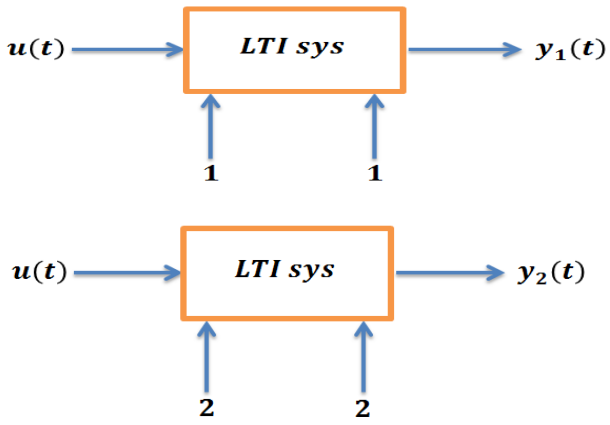
مثال۳۱: پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی و نامتغیر با زمان به ورودی پله واحد به ازای دو دسته شرایط اولیه مختلف x_1 و x_2 به قرار زیر است:

$$x_1(0)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = y_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

$$x_2(0)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

پاسخ ضربه کدام است؟ (ارشد برق۹٤)

۱. $-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$
۲. $-e^{-2t}u(t) + \delta(t)$
۳. $\frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(t)$
٤. $-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \delta(t)$



۱

تبدیل لاپلاس

در این بخش قصد داریم روشی بسیار کاربردی برای حل مدارهای الکتریکی به نام تبدیل لاپلاس را بررسی کنیم. تبدیل لاپلاس نخستین بار توسط یک ستاره‌شناس و ریاضیدان فرانسوی به نام لاپلاس ارائه شد. تبدیل لاپلاس از این جهت حائز اهمیت است که طیف وسیعی از مسائل با استفاده از آن قابل حل است به کمک تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل می‌شوند که حل آن‌ها به مراتب ساده‌تر است.

تعریف ریاضی تبدیل لاپلاس : تبدیل لاپلاس یک تابع مانند $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

که در این رابطه $s = \sigma + j\omega$ ، یک متغیر مختلط است از آن جایی که نمای تابع نمایی باید فاقد دیمانسیون باشد عبارت st واحد ندارد بنابراین واحد s باید وارون ثانیه $\frac{1}{s}$ یا فرکانس باشد ، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تبدیل لاپلاس یک تبدیل است که سیگنالی را از حوزه زمان به حوزه فرکانس می‌برد.

مثال۳۲: تبدیل لاپلاس تابع پله واحد $u(t)$ را بدست آورید.

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \int_{0^-}^{\infty} 1e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\Big|_{0^-}^{\infty} = -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}(1) = \frac{1}{s}$$

مثال۳۳: تبدیل لاپلاس تابع نمایی $e^{-\alpha t}u(t)$ را بدست آورید.

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}u(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = -\frac{1}{(s+\alpha)}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

مثال۳٤: تبدیل لاپلاس تابع ضربه $\delta(t)$ را بدست آورید.

$$\mathcal{L}[\sigma(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \sigma(t)e^{-st}dt = e^{-0} = 1$$

مثال۳۵: تبدیل لاپلاس تابع $sin\omega tu(t)$ را بدست آورید.

$$\mathcal{L}[sin\omega tu(t)] = \int_0^\infty sin\omega t e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}dt =$$

$$\frac{1}{2j}\int_0^\infty \left(e^{(s-j\omega)t} - e^{-(s-j\omega)t}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s+j\omega} - \frac{1}{s-j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

چون در درس مدار فقط با خواص تبدیل لاپلاس سر و کار داریم بنابراین وارد جزئیات و مباحث ریاضی مربوط به آن نمی‌شویم و به خواص تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

خواص تبدیل لاپلاس

خطی بودن:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

شیفت فرکانسی:

$$e^{-\alpha t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+\alpha)$$

$$e^{-\alpha t} f(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} F(s+\alpha)$$

شیفت زمانی:

$$f(t)u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}F(s)$$

$$f(t)u(t-a) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-as}F(s)$$

مشتق‌گیری زمانی:

$$\xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$$

مشتق‌گیری فرکانسی:

$$(-1)^n t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

$$(-1)^n t^n f(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

انتگرال‌گیری زمانی:

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)$$

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)dt \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{s} F(s)$$

انتگرال‌گیری فرکانسی:

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^s F(s)ds$$

$$\frac{f(t)}{t} \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^s F(s)ds$$

تغییر مقیاس زمانی:

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$f(at) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

در ادامه برخی از این خواص را برای علاقه مندان اثبات می‌کنیم.

اثبات خاصیت خطی بودن: اگر $F_1(s)$ و $F_2(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس‌های $f_1(t)$ و $f_2(t)$ باشند آن‌گاه:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \int_{0^-}^{\infty} (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) e^{-st} dt =$$

$$\alpha_1 \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt + \int_{0^-}^{\infty} \alpha_2 f_2(t)e^{-st}dt = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

این خاصیت با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس کاملا واضح است زیرا انتگرال مجموع دو تابع با مجموع انتگرال‌های آن دو تابع برابر است.

اثبات رابطه شیفت فرکانسی: اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد آن‌گاه:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)u(t)] = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt = F(s+\alpha)$$

بنابراین:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)u(t)] = F(s+\alpha)$$

یعنی تبدیل لاپلاس تابع $e^{-\alpha t}f(t)$ با استفاده از تبدیل لاپلاس $f(t)$ و باجایگذاری $s+\alpha$ به جای s

قابل محاسبه است. این خاصیت به شیفت فرکانسی یا انتقال فرکانسی معروف است.

تمام خواص ذکر شده برای تبدیل لاپلاس با استفاده از تعریف آن به راحتی قابل اثبات است.

حالا بهتره بریم سراغ تبدیل لاپلاس توابع کاربردی در مدار الکتریکی.

تبدیل لاپلاس توابع مهم

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}u(t)$	1	$\sigma(t)$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$sin\omega t u(t)$	$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$cos\omega t u(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$r(t)=t$
s^i	$\sigma^i(t)$ مشتق i ام تابع ضربه	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n u(t)$
		$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t}t^n u(t)$

مثال۳۶: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

الف)

$cos\omega(t-a)u(t-a)$

پاسخ:

ب)

$e^{-at}cos\omega(t)u(t)$

پاسخ:

ج)

$$e^{-at}sin\omega(t)u(t)$$

پاسخ:

مثال ۳۷: عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

الف)

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}$$

ب)

$$F(s)=\frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

پاسخ

پاسخ: تابع $F(s)$ این مثال ریشه مضاعف دارد. این کسر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$F(s)=\frac{6}{s(s+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+1}$$

نوشتن کسرهای مربوط به ریشه مضاعف را تا رسیدن به توان 1 ادامه می‌دهیم. حالا عامل‌هایی را که خودشان با همان توان در صورت سوال ظاهر شده‌اند، مشابه روش قبل بدست می‌آوریم

$$A=\frac{6}{\cancel{s}(s+1)^2}\Big|_{s=0}=6 \qquad B=\frac{6}{\cancel{s(s+1)^2}}\Big|_{s=-1}=-6$$

حالا نوبت به پارامتر C می‌رسد چون توان مخرج آن یکی از صورت سوال کمتر شده است برای محاسبه آن یک بار از کسر کلی مشتق می‌گیریم و در مقدار $\frac{1}{1!}$ ضرب می‌کنیم:

$$C=\frac{1}{1!}\left(\frac{6}{s(s+1)^2}\right)'=\frac{1}{1!}\left(\frac{6}{s}\right)'=\frac{-6}{s^2}$$

$$C=\frac{-6}{s^2}\Big|_{s=-1}=-6$$

$$f(t)=6u(t)-6te^{-t}u(t)-6e^{-t}u(t)$$

د)

$$F(s)=\frac{6}{s(s+2)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)^3}+\frac{C}{(s+2)^2}+\frac{D}{s+2}$$

این کسر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{\cancel{s}(s+2)^3}\Big|_{s=0}=\frac{1}{8} \qquad B=\frac{1}{\cancel{s(s+2)^3}}\Big|_{s=-2}=-\frac{1}{2}$$

$$C=\left(\frac{1}{s(s+2)^3}\right)'\frac{1}{1!}=\frac{-1}{s^2}\frac{1}{1!}\Big|_{s=-2}=-\frac{1}{4}$$

برای محاسبه پارامتر D چون توان مخرج آن دوتا از صورت سوال کمتر شده است دو بار از کسر کلی مشتق می‌گیریم و در مقدار $\frac{1}{2!}$ ضرب می‌کنیم:

$$D=\left(\frac{1}{s(s+2)^3}\right)''\frac{1}{2!}=\left(\frac{-1}{s^2}\right)'\frac{1}{2!}\Big|_{s=-2}=\frac{1}{2}\frac{2}{s^3}=\frac{1}{s^3}\Big|_{s=-2}=-\frac{1}{8}$$

$$f(t)=\frac{1}{8}u(t)-\frac{1}{4}t^2e^{-2t}u(t)-\frac{1}{4}te^{-2t}u(t)-\frac{1}{8}e^{-2t}u(t)$$

ه)

$$F(s)=\frac{9}{s(s^2+9)}$$

پاسخ: تابع $F(s)$ این مثال دارای ریشه مختلط است. این کسر را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$F(s)=\frac{9}{s(s^2+9)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+9}$$

$$A=\frac{9}{s(s^2+9)}\Big|_{s=0}=1\rightarrow$$

$$\left(\frac{9}{s(s^2+9)}=\frac{1}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+9}\right)\times s\rightarrow\frac{9s}{s(s^2+9)}=\frac{1s}{s}+\frac{Bs^2+Cs}{s^2+9}$$

$$s\rightarrow\infty\ \ 0=1+B\rightarrow B=-1$$

$$s=1\rightarrow\ \frac{9}{10}=1+\frac{-1+C}{10}\rightarrow C=0$$

قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی

قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی به ما این امکان را می‌دهد که مقدار اولیه تابع $f(0)$ و مقدار نهایی $f(\infty)$ را به طور مستقیم از تبدیل لاپلاس تابع بدست آوریم.

قضیه مقدار اولیه:

$$lim_{t\rightarrow0}f(t)=lim_{s\rightarrow\infty}sF(s)$$

قضیه مقدار نهایی:

$$lim_{t\rightarrow\infty}f(t)=lim_{s\rightarrow0}sF(s)$$

مثال۳۸: اگر $F(s)=\frac{s+2}{(s+2)^2+10^2}$ باشد، مقدار $f(0)$ و $f(\infty)$ را بدست آورید.

$$lim_{t\to 0}f(t)=lim_{s\to\infty}sF(s)=lim_{s\to\infty}s\frac{s+2}{(s+2)^2+10^2}=1$$

$$lim_{t\to \infty}f(t)=lim_{s\to 0}sF(s)=lim_{s\to 0}s\frac{s+2}{(s+2)^2+10^2}=0$$

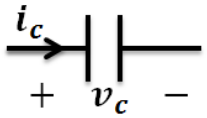
اگر لاپلاس معکوس $F(s)$ را محاسبه کنیم تابع $f(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+10^2}\right]=e^{-2t}cos10(t)\to f(0)=1\,,f(\infty)=0$$

حالا وقتشه بریم با المان‌های دردسر ساز مداری که باعث ایجاد معادلات دیفرانسیل در مدار می‌شوند آشنا بشیم.

آشنایی با خازن LTI

در یک خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان رابطه ولتاژ و بار الکتریکی به صورت زیر است:



$$q(t) = Cv_c(t)$$

که در آن C ظرفیت خازن برحسب فاراد، $v_c(t)$ ولتاژ دو سر خازن برحسب ولت و $q(t)$ بار الکتریکی ذخیره شده در خازن برحسب کولن است. برای بدست آوردن جریان خازن با توجه به این که جریان تغییرات بار در واحد زمان است کافی است از معادله بار الکتریکی مشتق بگیریم:

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\big(Cv_c(t)\big)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

بنابراین رابطه جریان در یک خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

همانطور که می‌بینید خازن با مشتق‌گیری از سیگنال ولتاژ باعث میشه سر و کله معادلات دیفرانسیل در مدار پیدا بشه.

نکات تکمیلی

نکته۱: رابطه ولتاژ و جریان خازن به شکل فیزیکی و هندسی خازن بستگی ندارد ولی ظرفیت خازن به شکل هندسی و عایق خازن بستگی دارد.

نکته۲: با توجه به رابطه ولتاژ و جریان خازن می‌توان نتیجه گرفت:

الف) اگر

$C = 0 \rightarrow i_c = 0 \rightarrow$ خازن مدار باز است

$C = \infty \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow$ خازن بدون ولتاژ اولیه اتصال کوتاه $\rightarrow v_c = 0$ یا $v_c =$ عدد ثابت

ج) اگر ولتاژ خازن ثابت باشد، جریان خازن صفر می‌شود پس خازن در حالت ماندگار DC معادل مدار باز عمل می‌کند.

خازن مدار باز است $\rightarrow i_c = 0 \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow$ عدد ثابت $= v_c$



به عبارت دیگر می‌توان گفت خازن ولتاژ DC را فیلتر می‌کند. توجه کنید ولتاژ خازن در این حالت الزاما صفر نیست.

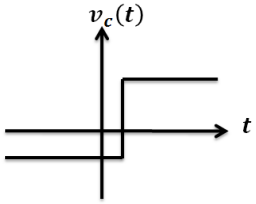
نکته۳:ولتاژ خازن می‌تواند تغییر سریع داشته باشد ولی تغییرات آنی (پله‌ای) نمی‌تواند داشته باشد



استاد چرا ولتاژ خازن نمی‌تواند تغییرات آنی داشته باشد ؟



فرض کنید ولتاژ خازن تغییر آنی یا پله‌ای داشته باشد

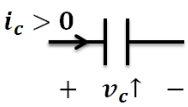


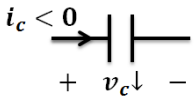
با توجه به این که مشتق این سیگنال در لحظه ای که تغییر آنی دارد تعریف نشده است داریم:

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = \infty$$

از طرفی جریان بی‌نهایت برای خازن به معنی تغییر آنی بار الکتریکی است و با توجه به بقای بار، تغییر بار ناگهانی یا آنی نمی‌توان داشت پس خازن در مقابل تغییر آنی ولتاژ اینرسی دارد .از این خاصیت در مدارها برای جلوگیری از تغییر آنی ولتاژ استفاده می‌شود.

نکته٤: اگر ولتاژ خازن در حال افزایش باشد جریان خازن که مضربی از شیب یا همان تغییرات ولتاژ است مقداری مثبت خواهد داشت و اگر ولتاژ خازن در حال کاهش باشد نرخ تغییرات ولتاژ منفی است بنابراین مقدار جریان منفی می‌شود.





ولتاژ اولیه خازن

می‌خواهیم از عبارت $\frac{dv_c}{dt}$ از لحظه $-\infty$ تا زمان t انتگرال بگیریم: (از نظر فیزیکی یعنی از لحظه‌ای که تازه خازن ساخته شده است و هنوز در هیچ مداری به کار گرفته نشده تا لحظه مورد نظر t)

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dv_c}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt \rightarrow v_c(t) - v_c(-\infty) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt \rightarrow$$

چون $v_c(-\infty) = 0$ است می‌توان نتیجه گرفت:

$$v_c(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} i_c(t)dt$$

ولی جریان خازن از لحظه $-\infty$ تا t را نمی‌دانیم چون خازن در این مدت ممکن است در مدارهای مختلفی کار کرده باشد و از بار الکتریکی پر (شارژ) یا تخلیه (دشارژ) شده باشد. این جریان را از لحظه خاص t_0 که خازن در مدار معینی می‌خواهد کار کند می‌توان پیدا کرد:

$$v_c(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t_0} i_c(t)dt + \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t} i_c(t)dt$$

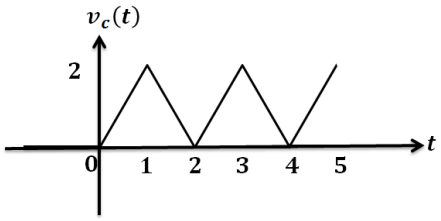
عبارت $\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t_0} i_c(t)dt$ مقدار ثابتی دارد و از جنس ولتاژ است. این ترم را که مقدار ثابتی دارد ونتیجه کار گذاشتن خازن تا لحظه t_0 است را ولتاژ اولیه خازن می‌نامیم و با $v_c(t_0)$ نشان می‌دهیم:

$$v_c(t) = v_c(t_0) + \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t} i_c(t)dt$$

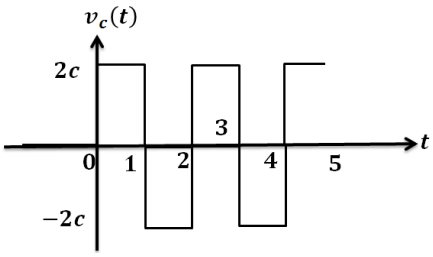
پس ولتاژ خازن در هر لحظه t ، به گذشته خازن یعنی همان $v_c(t_0)$ وابسته است بنابراین خازن یک المان ذخیره کننده حافظه دار است که اطلاعات گذشته را به صورت ولتاژ در خود ذخیره می‌کند.

$$t_0 = 0 \;\rightarrow\; v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{c}\int_0^t i_c(t)dt$$

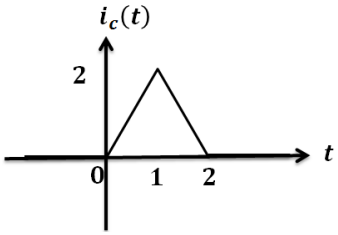
مثال۳۹: در یک خازن LTI ، ولتاژ خازن به صورت زیر است، جریان خازن را رسم کنید.



پاسخ:



مثال۴۰: ولتاژ یک خازن LTI ، در $t = 0$ ، صفر است و جریانی مطابق شکل زیر از خازن عبور می‌کند. ولتاژ خازن را در $t \geq 0$ پیدا کنید. $(C = 1f)$



پاسخ: با استفاده از رابطه ولتاژ جریان خازن داریم:

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{c}\int_0^t i_c(t)dt$$

چون معادله سیگنال جریان در بازه‌های مختلف، متفاوت است انتگرال را به بازه‌های مختلف تقسیم می‌کنیم:

$$t<0 \ \rightarrow i_c=0 \rightarrow \ v_c(t)=v_c(-\infty)+\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}0dt=0+0=0$$

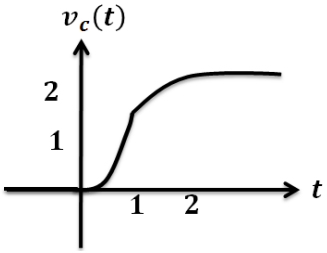
$$0\le t\le 1 \ \rightarrow i_c=2t \rightarrow \ v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{c}\int_{0}^{t}2tdt=0+t^2\Big|_0^t=t^2$$

$$1\le t\le 2 \rightarrow i_c=-2t+4 \ \rightarrow \ v_c(t)=v_c(1)+\frac{1}{c}\int_{1}^{t}(-2t+4)dt=1^2-t^2+4t\Big|_0^t$$

$$v_c(t)=1^2-t^2+4t+1-4=-t^2+4t-2$$

$$t\ge 2 \rightarrow i_c=0 \ \rightarrow \ v_c(t)=v_c(2)+\frac{1}{c}\int_{2}^{t}0dt=-2^2+4\times 2-2=2$$

بنابراین شکل سیگنال ولتاژ به صورت زیر خواهد بود:



روش دوم: ولتاژ خازن در هر لحظه از زمان از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{c}\Big(\text{مساحت زیر نمودار از } 0 \text{ تا } t\Big)$$

بنابراین:

$$v_c(\infty)=v_c(0)+\frac{1}{c}\Big(\text{مساحت زیر نمودار از } 0 \text{ تا } \infty\Big)=\frac{1}{1}\times\left(\frac{2\times 2}{2}\right)=2$$

چون در اینجا شکل سیگنال ولتاژ را می‌خواستیم نه مقدار نهایی را از رابطه مساحت استفاده نکردیم.

نکته:
اگر جریان خازن محدود باشد یعنی شامل تابع ضربه نباشد، انتگرال آن یعنی ولتاژ خازن حتی اگر i_c ناپیوستگی هم داشته باشد پیوسته خواهد بود یعنی در هر لحظه از زمان $v_c(t_o^+) = v_c(t_o^-)$.

انرژی ذخیره شده در خازن

انرژی ذخیره شده در بازه $[t_o, t]$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$w(t_o, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau$$

$$p = v_c(t).\, i_c(t) = v_c(t).\, c\frac{dv_c(t)}{dt}$$

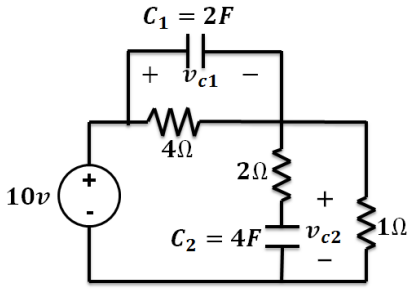
$$w(t_o, t) = c\int_{t_0}^{t} v_c(\tau).\frac{dv_c(\tau)}{dt} d\tau = \frac{c}{2} v_c^2 \Big|_{t_0}^{t}$$

$$w(t_o, t) = \frac{c}{2}\left(v_c^2(t) - v_c^2(t_0)\right)$$

اگر انرژی ذخیره شده در خازن را در هر لحظه دلخواه مانند t خواستید می‌توانید $t_o = 0$ قرار دهید و انرژی خازن را در لحظه مورد نظر t به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w(t) = \frac{c}{2}\left(v_c^2(t) - v_c^2(0)\right)$$

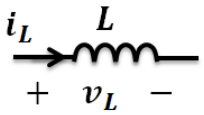
مثال۴۱: انرژی ذخیره شده در خازن C_1 چندبرابر انرژی ذخیره شده در خازن C_2 است؟ مدار به حالت ماندگار رسیده است.



پاسخ:

آشنایی با سلف LTI

در یک سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان رابطه جریان و شار الکتریکی به صورت زیر است:



$$\varphi(t) = Li_L(t)$$

که در آن L ظرفیت سلف برحسب هانری، $i_L(t)$ جریان سلف برحسب آمپر و $\varphi(t)$ شار الکتریکی برحسب وبر است. برای بدست آوردن ولتاژ سلف با توجه به این که ولتاژ تغییرات شار در واحد زمان است کافی است از معادله شار الکتریکی مشتق بگیریم:

$$v_L(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\left(Li_L(t)\right)}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

بنابراین رابطه ولتاژ بر حسب جریان در یک سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

سلف با مشتق‌گیری از سیگنال جریان باعث ایجاد معادلات دیفرانسیل در مدار میشه.

نکات تکمیلی

نکته۱: رابطه ولتاژ و جریان سلف به شکل فیزیکی و هندسی سلف بستگی ندارد ولی خود L به شکل هندسی و هسته سیم پیچ بستگی دارد.

نکته۲: با توجه به رابطه ولتاژ و جریان سلف می‌توان نتیجه گرفت:

الف) اگر

$L = 0 \rightarrow v_L = 0 \rightarrow$ سلف اتصال کوتاه است

$L = \infty \rightarrow \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow i_L =$ عدد ثابت یا $i_L = 0 \rightarrow$ سلف بدون جریان اولیه مدار باز است

ج) اگر جریان سلف ثابت باشد، ولتاژ سلف صفر می‌شود پس سلف در حالت ماندگار DC معادل اتصال کوتاه عمل می‌کند.

سلف اتصال کوتاه است $\rightarrow v_L = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow$ عدد ثابت $= i_L$

به عبارت دیگر می‌توان گفت سلف جریان DC را فیلتر می‌کند.

نکته۳: جریان سلف می‌تواند تغییر سریع داشته باشد ولی تغییر آنی نمی‌تواند داشته باشد. سلف نسبت به تغییرات آنی جریان اینرسی دارد. ولی ولتاژ سلف می‌تواند تغییر آنی داشته باشد.(تغییر شیب جریان سلف باعث تغییر آنی ولتاژ سلف می‌شود)

نکته٤: اگر v_L مثبت باشد نرخ تغییرات جریان سلف مثبت است بنابراین جریان در حال افزایش است.

نکته٥: اگر v_L منفی باشد نرخ تغییرات جریان سلف منفی است بنابراین جریان در حال کاهش است.

جریان اولیه سلف

اگر از رابطه $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ از لحظه $-\infty$ تا t انتگرال بگیریم(از نظر فیزیکی یعنی از لحظه‌ای که سلف تازه ساخته شده است و هنوز در هیچ مداری به کار گرفته نشده تا لحظه مورد نظر t)

$$\int_{-\infty}^{t} v_L dt = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di_L}{dt}dt = L\,i_L \rightarrow \; i_L(t) - i_L(-\infty) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt \rightarrow$$

چون $i_L(-\infty) = 0$ است می‌توان نتیجه گرفت:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt$$

ولی جریان سلف از لحظه $-\infty$ تا t را نمی‌دانیم چون سلف در این مدت ممکن است در مدارهای مختلفی کار کرده باشد و از بار الکتریکی پر (شارژ) یا تخلیه (دشارژ) شده باشد. این جریان را از لحظه خاص t_0 که سلف در مدار معینی می‌خواهد کار کند می‌توان پیدا کرد:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v_L(t)dt + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)dt$$

عبارت $\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v_L(t)dt$ مقدار ثابتی دارد و از جنس جریان است. این ترم را که مقدار ثابتی دارد ونتیجه کار گذاشتن سلف تا لحظه t_0 است را جریان اولیه سلف می‌نامیم و با $i_L(t_0)$ نشان می‌دهیم:

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)dt$$

پس جریان سلف در هر لحظه t ، به گذشته سلف یعنی همان $i_L(t_0)$ وابسته است بنابراین سلف یک المان ذخیره کننده حافظه دار است که اطلاعات گذشته را به صورت جریان در خود ذخیره می‌کند.

$$t_0 = 0 \;\rightarrow\; i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)dt$$

انرژی ذخیره شده در سلف

انرژی ذخیره شده در سلف در بازه $[t_o, t]$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$w(t_o, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau$$

$$p = v_L.\, i_L(t) = L\frac{di_L}{dt}.i_L(t)$$

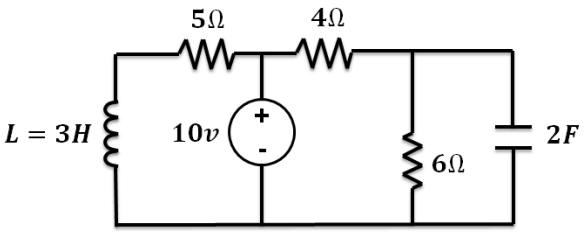
$$w(t_o, t) = \int_{t_0}^{t} L\frac{di_L(\tau)}{dt}.\, i_L(\tau)d\tau = \frac{L}{2}i_L^2 \Big|_{t_0}^{t}$$

$$w(t_o, t) = \frac{L}{2}\left(i_L^2(t) - i_L^2(t_0)\right)$$

اگر انرژی ذخیره شده در سلف را در هر لحظه دلخواه مانند t خواستید می‌توانید $t_o = 0$ قرار دهید و انرژی سلف را در لحظه مورد نظر t به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w(t) = \frac{L}{2}\left(i_L^2(t) - i_L^2(0)\right)$$

مثال۴۲: با فرض این‌که مدار به حالت ماندگار رسیده است انرژی ذخیره شده در کل سیستم چند ژول است؟



شارژ خازن

اگر منبع جریان ثابت DC به خازن اعمال کنیم با توجه به رابطه

$$v_c(t) = v_c(t_0) + \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} i_c(t)dt$$

با گذشت زمان ولتاژ ذخیره شده در خازن به صورت تابعی انتگرالی از جریان آن زیاد می‌شود بنابراین تابع ولتاژ درجه یک و شیب دار خواهد بود و مقدار تابع ولتاژ، مقدار ولتاژ ذخیره شده در خازن را نشان می‌دهد. وقتی که کلید را قطع کنیم جریان خازن صفر می‌شود و ولتاژ خازن مقدار شارژ شده باقی می‌ماند. می‌توان خازن شارژ شده را از مدار جدا کرد و در مدار دیگری استفاده نمود. خازن مانند یک بانک عمل می‌کند که انرژی را مصرف نمی‌کند و در خود ذخیره می‌کند و در مواقع نیاز انرژی را پس می‌دهد و دشارژ می‌شود.

شارژ سلف

اگر منبع ولتاژ ثابت DC به سلف اعمال کنیم با توجه به رابطه

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)dt$$

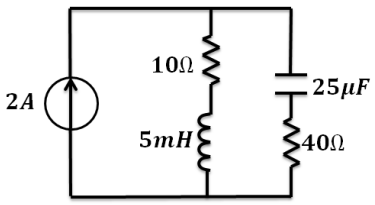
با گذشت زمان جریان ذخیره شده در سلف به صورت تابعی انتگرالی از ولتاژ دو سر سلف زیاد می‌شود بنابراین تابع جریان درجه یک و شیب دار خواهد بود و مقدار تابع جریان، مقدار جریان ذخیره شده در سلف را نشان می‌دهد . وقتی که کلید را قطع کنیم ولتاژ سلف صفر می‌شود و جریان سلف مقدار شارژ شده باقی می‌ماند. سلف نیز مانند یک بانک عمل می‌کند که انرژی را مصرف نمی‌کند و در خود ذخیره می‌کند و در مواقع نیاز انرژی را پس می‌دهد و دشارژ می‌شود.

نکته:

برای یک سلف با توجه به رابطه $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ اگر $v_L = 0$ باشد تغییرات جریان صفر خواهد بود بنابراین جریان ثابت می‌ماند و شرایط اولیه تغییر نمی‌کند.

برای یک خازن با توجه به رابطه $i_c = C\frac{dv_c}{dt}$ اگر $i_c = 0$ باشد تغییرات ولتاژ صفر خواهد بود بنابراین ولتاژ ثابت می‌ماند و شرایط اولیه تغییر نمی‌کند.

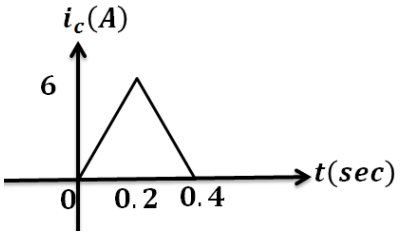
مثال۴۳: در مدار شکل مقابل کل انرژی ذخیره شده در مدار چند میلی ژول است؟(مهندسی کامپیوتر ۸۹)



۱) 10 ۲) 5

۳) 15 ٤) 20

مثال٤٤: جریان زیر از یک خازن $200\mu f$ عبور می‌کند انرژی ذخیره شده در خازن چقدر است؟



پاسخ:

مدل‌سازی عناصر مداری در حوزه لاپلاس

با مقاومت شروع می‌کنیم مقاومت خطی R را به صورت مقابل در نظر بگیرید:

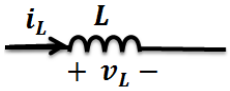


$$v(t) = Ri(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s) = RI(s)$$

بنابراین مقاومت R در حوزه لاپلاس به صورت زیر قابل مدل سازی است:

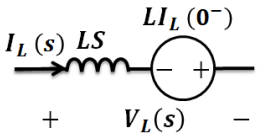


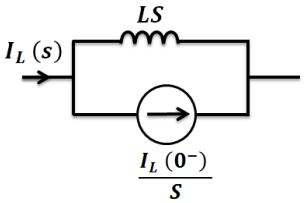
سلف L را به صورت مقابل در نظر بگیرید:



$$v_L(t) = Li_L'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0^-)] = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

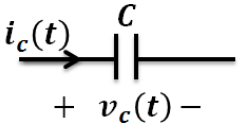
بنابراین سلف L در حوزه لاپلاس به صورت زیر قابل مدل سازی است:





همانطور که می‌بینید معادله دیفرانسیلی سلف به یک معادله جبری در حوزه فرکانس تبدیل شد.

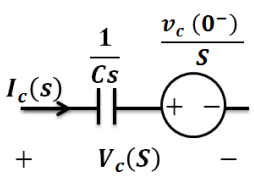
خازن C را به صورت مقابل در نظر بگیرید:

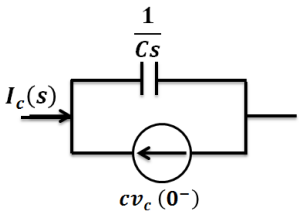


$$i_c(t) = Cv_c'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I_c(s) = C[sV_c(s) - v_c(0^-)] = sCV_c(s) - Cv_c(0^-)$$

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} I_c(s) + \frac{v_c(0^-)}{s}$$

بنابراین خازن C در حوزه لاپلاس به صورت زیر قابل مدل سازی است:





همانطور که می‌بینید معادله دیفرانسیلی خازن نیز به یک معادله جبری در حوزه فرکانس تبدیل شد.

فصل هفتم

تحلیل مدارهای غیرمقاومتی

با مقدماتی که در فصل قبل گفته شد، دیگه برای یادگیری روش‌های تحلیل مدارهای غیرمقاومتی آماده شدید. در این فصل قصد دارم تحلیل مدارهای غیرمقاومتی (منظورم مدارهایی است که سلف و خازن دارند) را به شیوه‌ای کاملا مافوق حرفه‌ای بهتون آموزش بدم. پس با من تا آخر فصل همراه باشید چون این فصل، به شدت در کنکور سوال خیز است و البته یکی از جاهایی است که تفاوت اصلی دانشجویان رو در رقابت کنکور مشخص می‌کنه.

روش‌های تحلیل مدارات غیرمقاومتی

منظور از تحلیل مدارات غیرمقاومتی، حل معادله یک متغیر از مداری که شامل سلف یا خازن و یا هر دو باشد است. برای تحلیل یک مدار غیر مقاومتی چند راه وجود دارد :

۱) تحلیل در حوزه زمان: در این روش باید شرایط اولیه مدار را در t_0^+ داشته باشیم و پس از تشکیل معادله دیفرانسیل مدار آن معادله دیفرانسیل را حل کنیم.

۲) تحلیل در حوزه لاپلاس: با استفاده از عملگر لاپلاس اگر مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد می‌توان به جای نوشتن معادله دیفرانسیل معادله جبری در حوزه لاپلاس را نوشت و مدار را حل کرد.

۳) تحلیل در حوزه فیزور یا فازور: با استفاده از خاصیت فوریه می‌توانیم مداراتی که شامل منبع DC یا سینوسی هستند را تحلیل می‌کنیم. تحلیل در فضای فازور مبحث درس فصل‌های بعده پس بی‌خودی الان ذهن تون رو درگیرش نکنید.