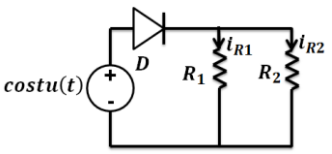
فصل دوم

مدارهای مقاومتی و روش های تحلیل مدار

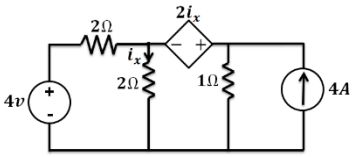
در این فصل قصد داریم به تحلیل مدارهای مقاومتی به دو شیوه کلاسیک (روش دانشگاهی) و ترکیبی (روش تستی) بپردازیم. لازم به ذکراست که تمامی این روش‌ها مبنایی برای فصول آینده است.

مدارهای مقاومتی

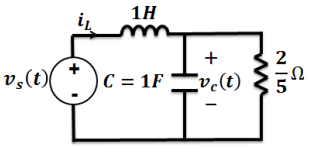
مداری است که تنها شامل مقاومت، منابع مستقل و وابسته بوده و فاقد سلف و خازن باشد. نوع منابع تاثیری در مقاومتی بودن یا نبودن مدار ندارد.



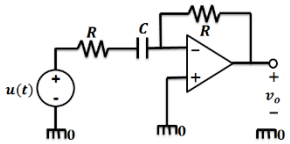
مدار مقاومتی



مدار مقاومتی



مدار غیرمقاومتی



مدار غیرمقاومتی

نکته ۱: در فصل‌های آینده خواهیم آموخت وجود دیود ایده‌آل در مدار باعث غیرمقاومتی شدن آن نمی‌شود ، زیرا به صورت اتصال کوتاه یا اتصال باز عمل می‌کند.

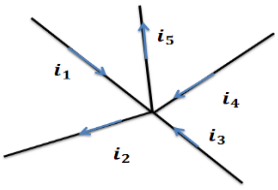
نکته ۲: آپ امپ ایده‌آل نیز سبب غیرمقاومتی شدن مدار نمی‌شود ، زیرا مدار معادل آن مقاومتی است.

قوانین کیرشف[1]

علاوه بر قانون اُهم دو قانون مهمی که کیرشف ، فیزیکدان آلمانی ، برای تحلیل مدارهای الکتریکی ارائه کرده است به شرح زیراند:

قانون جریان (KCL)

در هر مدار فشرده مجموع جریان‌های ورودی به هر سطح، برابر با مجموع جریان‌های خروجی از آن سطح بسته است. به بیانی دیگر جمع جبری جریان‌های ورودی و خروجی به یک سطح بسته برابر با صفر است. به معادله‌ی مجموع جریان‌ها در یک سطح بسته KCL می‌گویند.

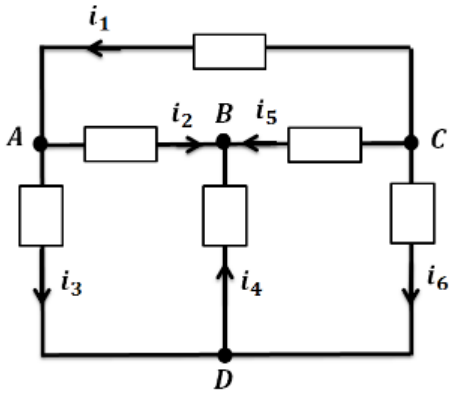


$$kcl: \quad i_1 + i_2 + i_4 = i_2 + i_5$$
$$kcl: \quad i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

قرارداد: جریان‌های ورودی را مثبت و جریان‌های خروجی را منفی در نظر می‌گیریم.

توجه کنید که این صرفا یک قرار داد بوده و در کتب و مراجع دیگر می‌تواند متفاوت باشد.

مثال۲-۱) اگر جریان شاخه‌های مدار تعریف شده باشد، معادلات KCL را می‌توان به صورت زیر نوشت:

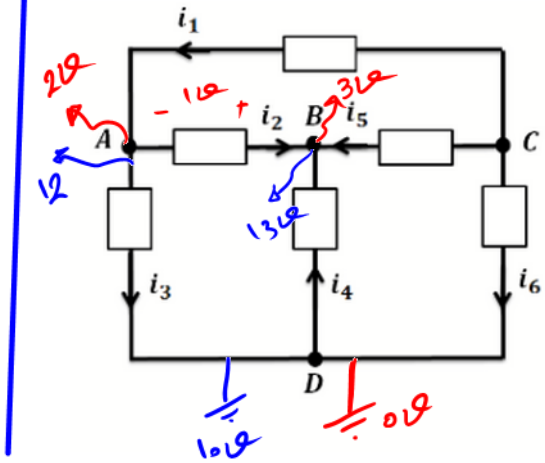


$KCL\ A: \quad i_1 = i_2 + i_3$

$KCL\ B: \quad i_2 + i_4 + i_5 = 0$

$KCL\ C: \quad i_1 + i_5 + i_6 = 0$

$KCL\ D: \quad i_3 + i_6 = i_4$



نکته ۱: باکس‌های استفاده شده در این مدار، هرالمانی می‌توانند باشند که تاثیری در روند حل سوال نخواهند داشت.

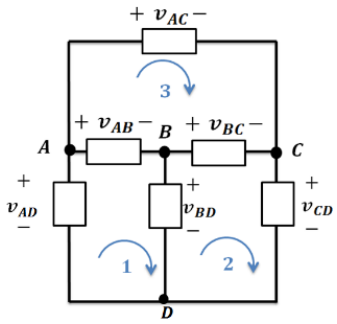
نکته ۲: در مدارهای الکتریکی، یک نقطه را به عنوان مرجع در نظر گرفته و معمولا ولتاژ مرجع را زمین یا صفر ولت، قرارداد می‌کنیم.

قانون ولتاژ (KVL)

در هر مسیر بسته‌ی مدار ، مجموع ولتاژها در هر لحظه صفر است. به معادله‌ی مجموع ولتاژها در یک مسیر بسته KVL می‌گویند. برای نوشتن معادله KVL از یک نقطه از حلقه شروع کرده و ولتاژ دو سر هر المان را به صورت جبری با هم جمع می‌کنیم. اگر از سر منفی به مثبت حرکت کنیم، ولتاژ المان را با علامت منفی ، و اگر از سر مثبت به منفی حرکت کنیم ولتاژ المان را با علامت مثبت جمع می‌کنیم.

[1] Kirchhoff's Laws

مثال ۲-۲) برای مدار زیر معادلات KVL را می‌نویسیم:



KVL ۱ : $-v_{AD} + v_{AB} + v_{BD} = 0$

KVL ۲ : $-v_{BD} + v_{BC} + v_{CD} = 0$

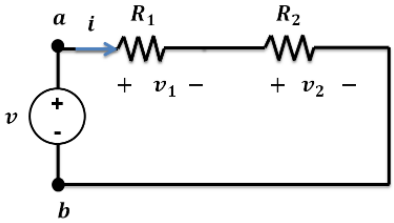
KVL ۳ : $+v_{AC} - v_{BC} - v_{AB} = 0$

نکته ۱: با کمی دقت می‌توان متوجه شد KVL حلقه ی بیرونی برابر با مجموع KVL حلقه های درونی است، بنابراین معادله مستقلی تشکیل نداده و نوشتن آن کمکی به حل مسئله نمی‌کند.

نکته ۲: بهتراست ولتاژ در جهت جریان تعریف شده در حلقه و یا مسیری که بیشترین اُفت ولتاژ را دارد زده شود.

قانون تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان

تقسیم ولتاژ: با دانستن ولتاژ کل چند مقاومت سری، می‌توان ولتاژ دوسر هرکدام از مقاومت‌ها را محاسبه نمود.



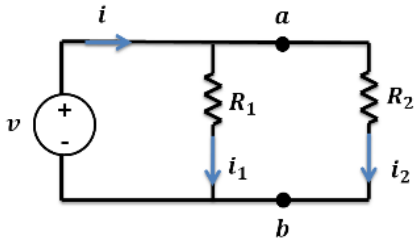
$$v_1 =$$

$$v_2 =$$

همچنین برای چند مقاومت سری خواهیم داشت:

$$v_n = \frac{R_n}{R_1+R_2+R_3+\cdots+R_n} v$$

تقسیم جریان: با دانستن جریان کل چند مقاومت موازی، می‌توان جریان هرکدام از مقاومت‌ها را محاسبه نمود.



$$i_2 =$$

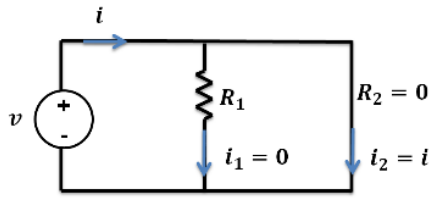
$$i_1 =$$

همچنین برای چند مقاومت موازی خواهیم داشت:

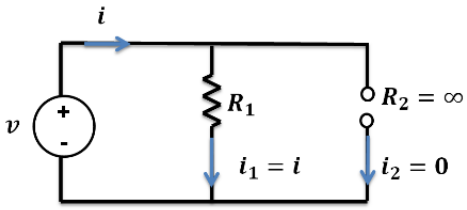
$$i_n = \frac{R_1 \| R_2 \| R_3 \| \cdots \| R_{n-1}}{R_1 \| R_2 \| R_3 \| \cdots \| R_{n-1} + R_n} i$$

نکته: دو حالت مهم و پرکاربرد در شاخه‌های موازی، شاخه‌های اتصال کوتاه و اتصال باز است.

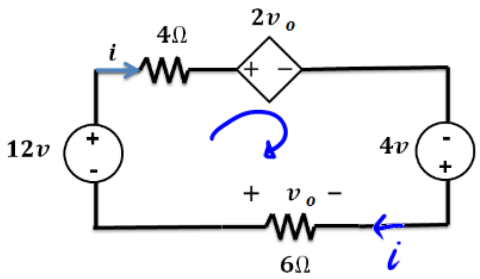
الف) حالت اتصال کوتاه: اگر اختلاف پتانسیل دو سر شاخه‌ای از مدار صفر شود، شاخه اتصال کوتاه می‌شود.



ب) حالت اتصال باز: جریان شاخه‌ی اتصال باز صفر بوده و تمام جریان از شاخه‌های دیگر می‌گذرد.



مثال ۲-۳) در مدار زیر جریان i و ولتاژ v_o را بدست آورید.

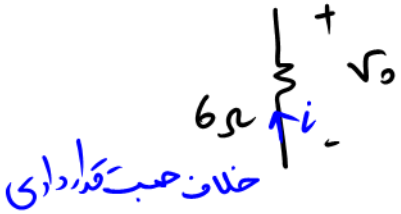


پاسخ:

معادله KVL مدار زیر را بنویسید.

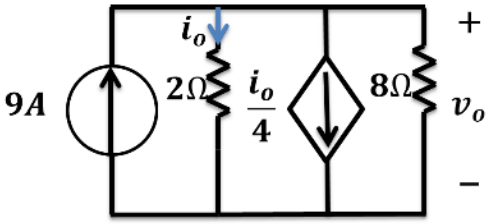
$$KVL: \ -12 + 4i + 2v_o - 4 - 6i = 0 \quad (1)$$

$$\text{اصم}: \ v_o = -6i \quad (2)$$

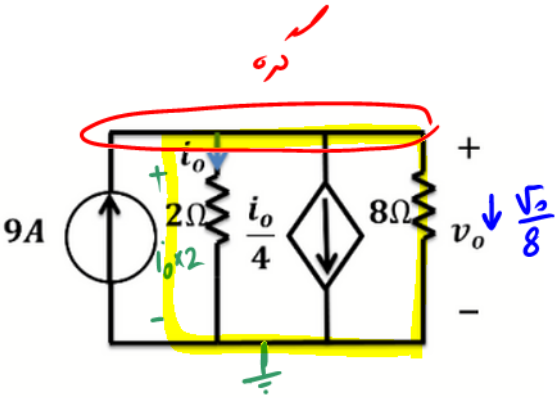


مثال ۲-۴) در مدار زیر جریان i و ولتاژ v را بدست آورید.

پاسخ:



معادلات KCL را برای مدار زیر را بنویسید؟



$$9 = i_o + \frac{i_o}{4} + \frac{v_o}{8}$$

KVL: $v_o - 2i_o = 0$

روش های کلاسیک تحلیل مدار

برای تحلیل مدارهای الکتریکی دو روش کلاسیک (روش مش و روش گره) وجود دارد. این دو روش در تحلیل مدارهای الکتریکی دانشگاه بسیار رایج‌اند، ولی برای کنکور و تست‌زنی روش مناسب‌تری به نام پخش جریان یا ترکیبی وجود دارد که در ادامه معرفی خواهد شد.

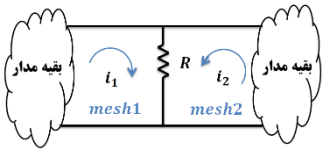
روش مش[1]

به ساده‌ترین حلقه‌ای که هیچ شاخه‌ای درون آن نباشد مش گفته می‌شود. برای تحلیل مدار به روش مش به شیوه زیر عمل می‌کنیم.

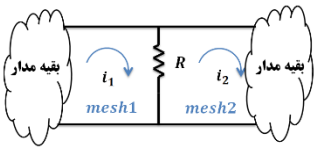
۱- مش‌های مناسب (حلقه های مناسب) مدار را انتخاب می‌کنیم.

نکته: مش باید فاقد منبع جریان باشد و یا در صورت داشتن منبع جریان، ولتاژ دو سر منبع مشخص باشد.

۲- برای هر مش، جریانی با جهت دلخواه در نظر گرفته سپس در مش های مناسب مدار KVL می‌زنیم. هنگام عبور از شاخه مشترک بین دو مش ، اگر جریان مش‌ها هم جهت باشند، جریان شاخه برابر با مجموع جریان مش‌ها بوده، در غیر این صورت برابر با اختلاف دو جریان است.



شکل (الف): $V_R = R(i_1 + i_2)$



شکل (ب): $V_R = R(i_1 - i_2)$

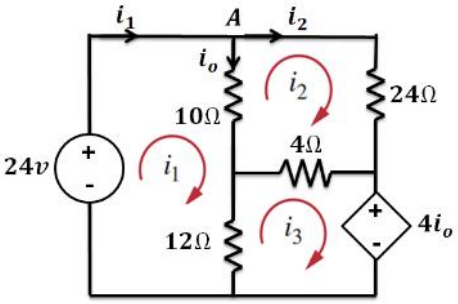
در شکل(ب) اگر چه جریان هر دو مش ساعتگرد است، اما جریان مش ۱ در جهت پایین و جریان مش ۲ در جهت بالا از مقاومت عبور می کند. در شکل(الف) جریان مش۱ ساعتگرد و جریان مش ۲ پادساعتگرد است و هر دو از یک جهت از شاخه مقاومتی عبور می کنند.

۳- برای مرز مش‌ها رابطه جریان مش‌ها را می‌نویسم.

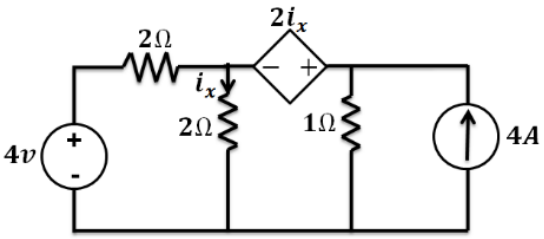
[1] Mesh analysis

مثال ۲-۵) در مدار زیر جریان هر شاخه را حساب کنید.

پاسخ:



مثال۲-۶) در مدار زیر شدت جریان i_x کدام است؟(مهندسی کامپیوتر-گرایش سخت افزار - ۸۰)



۱. $\frac{1}{2}$

۲. ۱

۳. ۲

۴. $\frac{3}{2}$

پاسخ:

روش کرامر: روش کرامر یک روش مناسب و کارآمد برای به دست آوردن جواب دستگاه معادلات با تعداد دلخواهی مجهول است، به شرطی که به همان تعداد مجهول، معادله داشته باشیم.

دستگاه دو معادله دو مجهول را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

جواب این معادلات با استفاده از روش کرامر به شکل زیر خواهد بود:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = -\frac{b1c2-b2c1}{b2a1-b1a2} \quad (۴-۲)$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{a1c2-a2c1}{a1b2-a2b1} \quad (۵-۲)$$

روش گره[1]

در این روش با تعریف ولتاژ برای گره‌های مجهول مدار و اعمال قانون KCL ، ولتاژها و جریان‌های مدار را محاسبه می کنیم. برای تحلیل مدار به روش گره به شیوه‌ی زیر عمل می‌کنیم.

۱- ابتدا گره‌ای را به عنوان گره زمین یا مرجع تعیین می‌کنیم. بهتر است گره‌ای که بیشترین شاخه به آن متصل است را به عنوان زمین مدار در نظر بگیریم.

۲- ولتاژ گره ها را نسبت به گره زمین مشخص می‌کنیم.

۳- با استفاده از قانون اهم جریان شاخه‌ها را بر حسب ولتاژ گره‌ها بدست می‌آوریم.

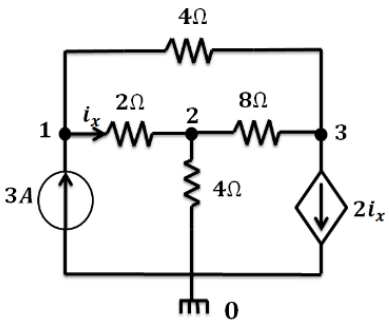
۴- معادلات KCL را برای گره‌های مدار می‌نویسیم.

از حل معادلات، ولتاژ گره‌ها بدست می‌آید. با داشتن ولتاژ هر گره جریان شاخه‌های مدار قابل محاسبه است.

[1] Node analysis

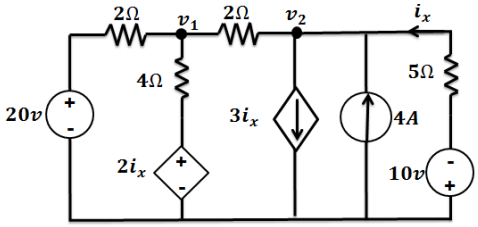
مثال ۲-۷) در مدار زیر ولتاژ گره ها و جریان شاخه ها را محاسبه کنید.

پاسخ:



مثال۲-۸) در مدار زیر v_2 کدام است؟

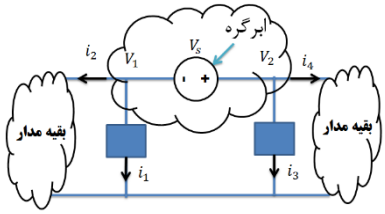
پاسخ:



نکته:

۱.برای تشخیص روش مناسب حل سوالات ، تعداد مش‌های مناسب مدار را با تعداد گره‌های مناسب مدار مقایسه می‌کنیم ،اگر تعداد گره‌های مناسب کمتر بود باید از روش گره استفاده کرد چون تعداد معادلات روش گره کمتر می‌شود و بالعکس. اما اگر در تعداد برابر بودند ، باید به خواسته مساله توجه کنیم.

۲. در برخی از موارد در تحلیل گره می‌توان از ابر گره استفاده نمود.



بنابراین معادله KCL در ابر گره به صورت زیر خواهد بود:

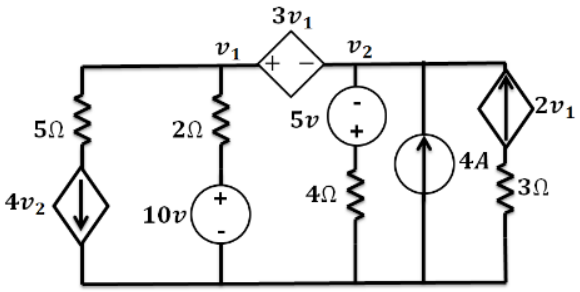
$$i_۱ + i_۲ + i_۳ + i_۴ = ۰$$

با توجه به اینکه دو گره را یک گره در نظرگرفتیم، بنابراین یک معادله از تعداد معادلات کم شده و نمی‌توانیم مجهول های مدار را محاسبه کنیم و از معادله کمکی ولتاژ ابرگره استفاده می‌کنیم:

$$V_۲ - V_۱ = V_s$$

مثال ۲-۹) مدار زیر را در نظر بگیرید. در این مدار حاصل $v_2 - v_1$ را با استفاده از روش گره بیابید.

پاسخ:



روش ترکیبی یا پخش جریان

در بسیاری از مسائل استفاده از روش مش یا روش گره محاسبات را پیچیده و طولانی کرده و باعث ایجاد مجهولات زیادی در مدار می شود ، برای حل این مشکل از یک روش ترکیبی به نام پخش جریان استفاده می‌کنیم . همانطورکه از نام آن مشخص است ، در این روش با استفاده از KCL ، جریان‌های هر شاخه را برحسب جریان های واقعی مدار می‌نویسیم.

در مدار زیر می‌توانید پخش جریان را مشاهده کنید.

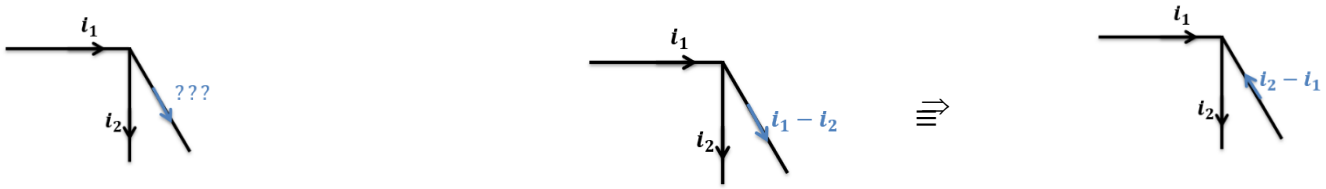


روش انجام:

۱. اگر ولتاژ دو سر مقاومت مشخص و تعریف شده باشد، با استفاده از قانون اهم جریان آن را می‌نویسیم:

$$i = \frac{v}{R}$$

۲. جریان های هر شاخه را برحسب جریان های واقعی مدار می نویسیم، برای مثال داریم:



۳. اگر جریان دو شاخه مجهول بود و نمی‌توانستیم بر حسب متغیرهای مدار بنویسیم به ناچار خودمان یک جریان با جهت دلخواه اضافه می‌کنیم.

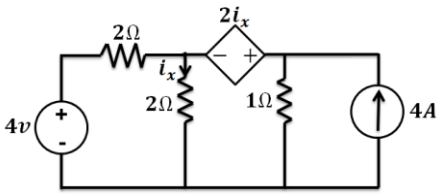


۴. روی یک شاخه نمی‌توانیم دو جریان داشته باشیم بنابراین اگر دو جریان روی شاخه‌ای داشتیم که هم جهت بودند حتما با هم مساوی اند و اگر مختلف الجهت بودند حتما با هم قرینه اند.



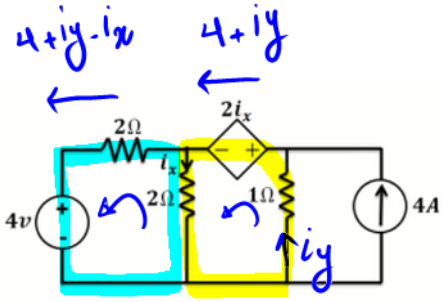
۵. در حلقه‌های مناسب KVL بزنید.(حلقه ای که ولتاژ دو سر المان‌های آن مشخص باشد و شامل منبع جریانی نباشد که ولتاژ دو سرش تعریف نشده است)

مثال ۲-۱۰) در مدار زیر شدت جریان i_x کدام است؟(مهندسی کامپیوتر- گرایش سخت افزار- ۸۰)



۱. $\frac{1}{2}$
۲. ۱
۳. ۲
۴. $\frac{3}{2}$

پاسخ:



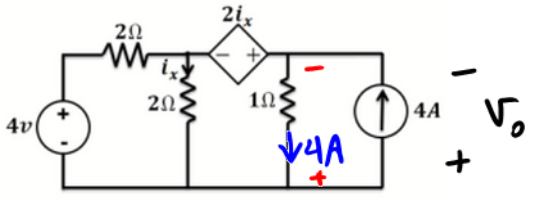
KVL: $i_y + 2i_x + 2i_x = 0$

KVL: $-2i_x + 2(4+i_y-i_x) + 4 = 0$

$$\begin{cases} 4i_x + i_y = 0 \\ -4i_x + 2i_y = -12 \end{cases} \Rightarrow 3i_y = -12 \rightarrow i_y = -4A$$

$$4i_x - 4 = 0 \rightarrow i_x = 1A$$

تمرین: ولتاژ دو سر منبع جریان 4A

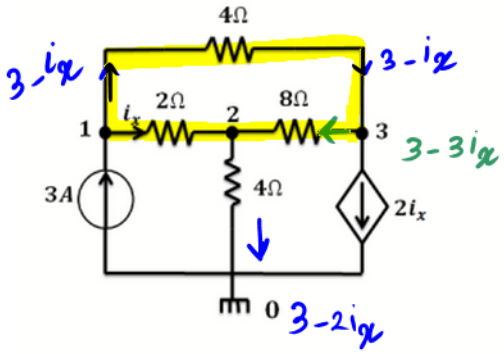




$V_o = -4 \times 1 = 4V$

مثال ۲-۷) در مدار زیر ولتاژ گره ها و جریان شاخه ها را محاسبه کنید.

پاسخ:

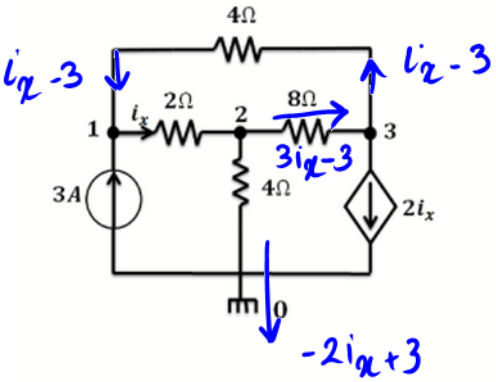


$$4(3-i_x) + 8(3-3i_x) - 2i_x = 0$$

$$\rightarrow i_x = \checkmark$$

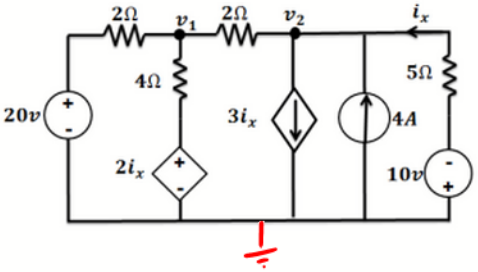
مثال ۲-۷) در مدار زیر ولتاژ گره ها و جریان شاخه ها را محاسبه کنید.

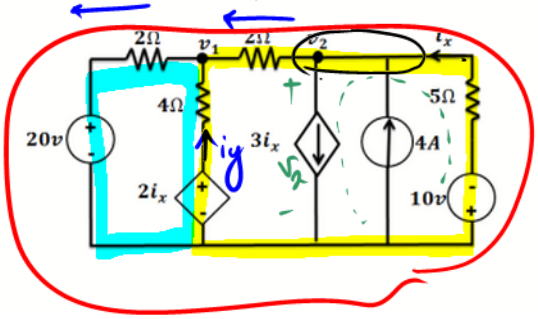
پاسخ:



مثال۲-۸) در مدار زیر v_2 کدام است؟

پاسخ:





kvL: $+10+5i_x+2(-2i_x+4)-4i_y+2i_x=0$

kvL: $-2i_x+4i_y+2(4-2i_x+i_y)+20=0$

$$\begin{cases} 3i_x-4i_y=-18 \\ -6i_x+6i_y=-28 \end{cases} \longrightarrow -2i_y=+64$$

$$i_y=32\,A$$

$$\Rightarrow 3i_x=(128-18)$$

$$i_x=\frac{110}{3}$$

kvL: $+10+5i_x+v_2=0$

$10+5\times\frac{110}{3}+v_2=0 \longrightarrow v_2=\checkmark$

مثال۲-۱۱) جریان i_o در مدار شکل مقابل چند آمپر است؟

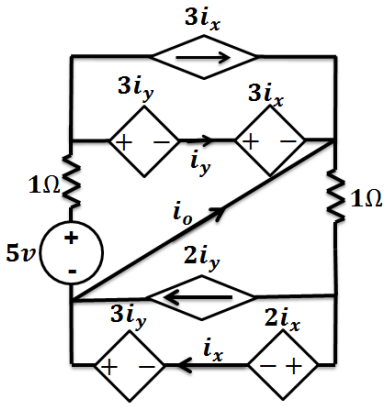
(مهندسی کامپیوتر- گرایش هوش مصنوعی- ۸۰)

۱. ۲ A

۲. ۳ $A.$

۳. $\frac{۵}{۱۸}$A.

٤. $\frac{۶}{۵}$A



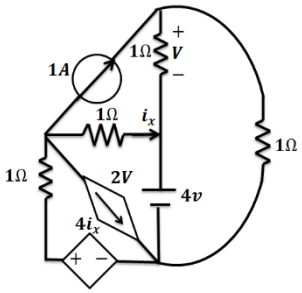
نکته: ولتاژ دوسرشاخه اتصال کوتاه، صفراست ولی جریان آن الزاما صفر نیست وهرمقداری می‌تواند باشد.

قرارداد : علامت $\overrightarrow{\rightarrow}$ بیانگر این مساله است که بعد از پخش جریان، دو جریان هم جهت روی یک شاخه قرار گرفته اند.

قرارداد : علامت $\overrightarrow{\leftarrow}$ بیانگر این مساله است که بعد از پخش جریان، دو جریان در راستای مخالف هم ، روی یک شاخه قرار گرفته اند.

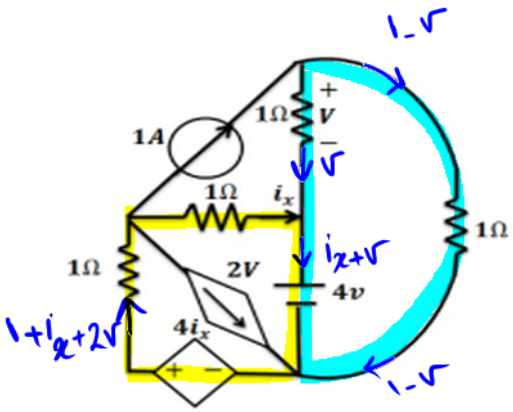
پاسخ:

مثال ۲-۱۲) جریان i_x در شکل مقابل چند آمپر است؟ (مهندسی کامپیوتر- گرایش هوش مصنوعی ۸۳)



۱. ۱
۲. ۲
۳. ۳
۴. ۲-

پاسخ:



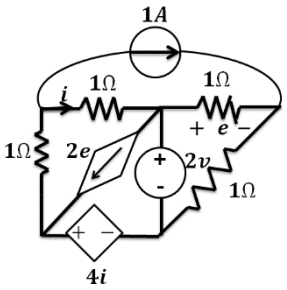
KVL $\quad 1\cdot V - 4 - V = 0 \rightarrow V = -\frac{3}{2}$

$i_x + 4 - 4i_x + 1 + i_x + 2V = 0$

$-2i_x + (-3) + 5 = 0$

$i_x = 1A$

مثال ۲-۱۳) در مدار زیر شدت جریان i کدام است.(مهندسی برق-۷۲)



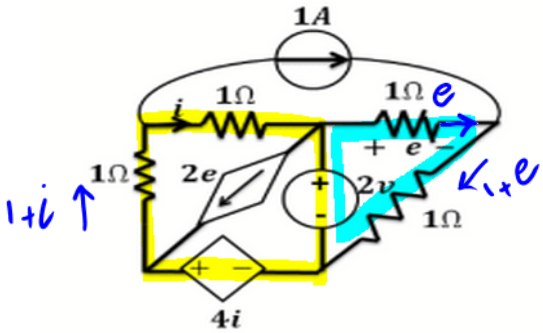
۱. ۱.۵ A ✓

۲. ۲ A

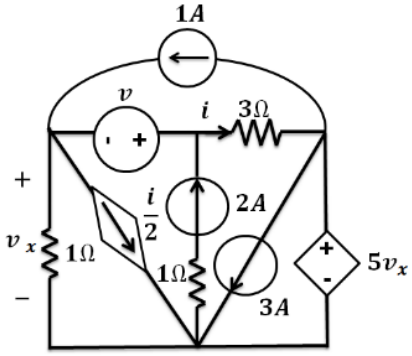
۳. ۲.۵ A

۴. −۰.۵ A

پاسخ:



مثال۲-۱۴) در مدار زیر مقدار v چقدر باشد تا $v_x = 0$ شود؟(مهندسی برق-۷۳)



۱. ۳

۲. ۶

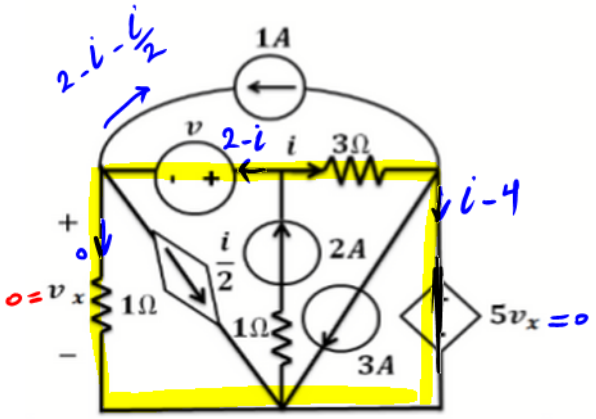
۳. ۱۲

۴. ۱۸

پاسخ:

نکته: اگر در صورت سوال مطلب مسئله را دادند (مثلاً $v_x=0$ و $i=1A$ و ...) مطلب مسئله را روی مدار اعمال میکنیم و مدار را تحلیل میکنیم

نکته: اگر جریان یک شاخه صفر شود حق نداریم شاخه را از مدار باز کنیم.



$\rightleftarrows \quad 2-i-\frac{i}{2}=-1 \Rightarrow \frac{3}{2}i=3$

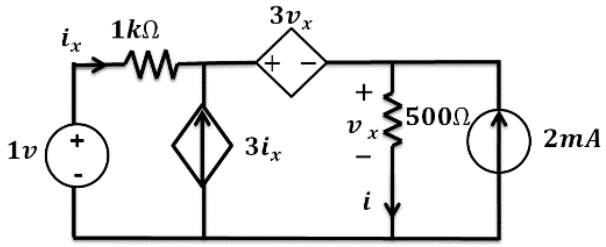
$i=2A$

KVL: $0-3i+v+0=0$

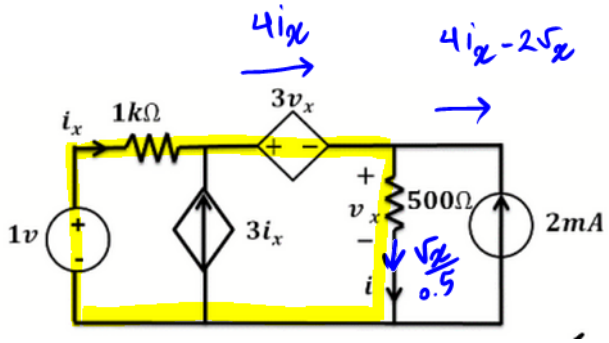
$v=6$ (ع)

مثال۲-۱۵) در مدار زیر شدت جریان i را حساب کنید.(مهندسی برق- ۷۴)

پاسخ:



نکته: اگر مقاومت‌ها برحسب kΩ و ولتاژها برحسب V و درنتیجه جریان‌ها برحسب mA باشد



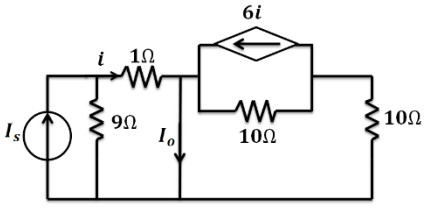
$$4i_x - 2v_x = -2$$

KVL: $-1 + i_x + 3v_x + v_x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2i_x - v_x = -1 \\ i_x + 4v_x = 1 \end{cases} \longrightarrow -9v_x = -3 \longrightarrow v_x = \frac{1}{3} \ (V)$$

تقسیم جریان $i = \frac{v_x}{0.5} = \frac{2}{3} \ (mA)$

مثال۲-۱۶) در مدار زیر نسبت I_o/I_s چقدر است؟(مهندسی برق-۷۵)

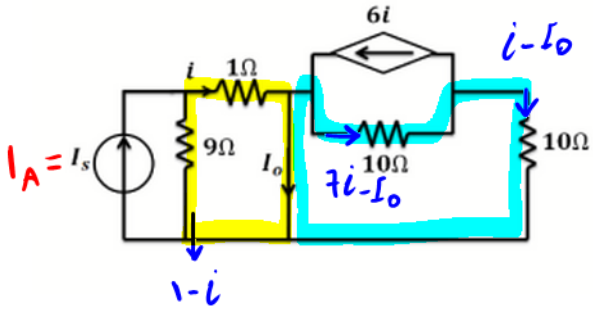


۱. ۱.۸-
۲. ۰.۹
۳. ۲.۷
۴. ۳,۶

نکته: هر زمان نسبت x/y را از ما خواستند ، برای راحتی کار می‌توانید y را مساوی یک قرار داده و x را بدست آورید که برابر با نسبت x/y است.

پاسخ:

$$\frac{I_o}{I_s} = I_o\Big|_{I_s=1}$$



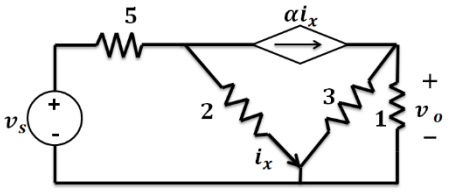
KVL $\quad 0 - i + 9(1-i) = 0 \Rightarrow i = \frac{9}{10}$

KVL $\quad 0 + 10(7i - I_o) + 10(i - I_o) = 0$

$$\rightarrow 80i - 20I_o = 0$$

$$4\left(\frac{9}{10}\right) - I_o = 0 \rightarrow I_o = 3.6\,(A)$$

مثال۲-۱۷) در مدار شکل مقابل مقاومت ها بر حسب مهو داده شده اند. حداقل مقدار α که به ازای آن مدار برای خروجی v_o مانند یک تقویت کننده عمل می کند. چیست؟(مهندسی برق- ۷۸)



۱. ۱۰

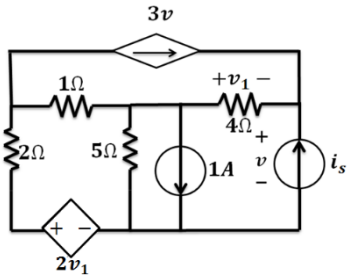
۲. ۱۲

۳. ۱۴

۴. به علت وجود منبع وابسته این مدارهمیشه مانند تقویت کننده عمل می‌کند.

$\frac{v_o}{v_s} > 1 \rightarrow v_o|_{v_s=1} > 1$

مثال۲-۱۸) در مدار زیر شدت جریان i_s را چنان تعیین کنید که جریان منبع ولتاژ وابسته صفر شود.



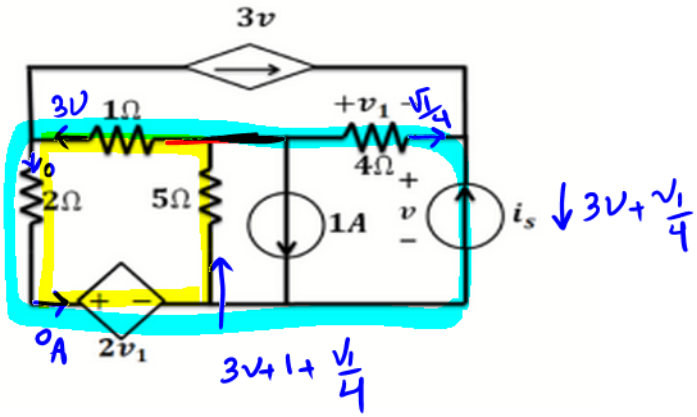
۱. $\frac{25}{23}$ ✓

۲. $\frac{-25}{23}$

۳. $\frac{20}{23}$

۴. $\frac{-10}{23}$

پاسخ:



$-i_s = 3v + \frac{v_1}{4}$ ①

$3v+1+\frac{v_1}{4}$

$3v+\frac{v_1}{4}$

KVL: $5\left(3v+1+\frac{v_1}{4}\right)+3v+2v_1=0 \rightarrow 18v+\frac{13}{4}v_1=-5$ ②

KVL $-v-v_1+3v+2v_1=0 \rightarrow 2v+v_1=0$ ③

$18v+\frac{13}{4}(-2v)=-5 \rightarrow \frac{36-13}{2}v=-5$

$\boxed{v=\frac{-10}{23}} \rightarrow v_1=\frac{+20}{23}$

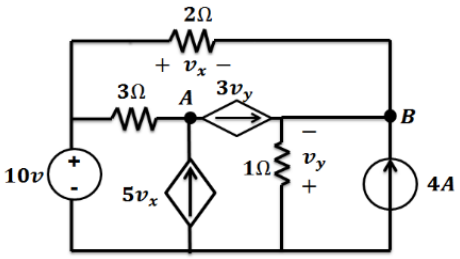
در معادله ۱ قرار دهیم

$-i_s=3\left(\frac{-10}{23}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{20}{23}\right)$

$\boxed{i_s=\frac{25}{23}}$

مثال۲-۱۹) مقادیر v_x و v_y در مدار شکل مقابل بر حسب ولت کدام است؟

(مهندسی کامپیوتر – سخت افزار- ۷۹)



۱. $v_x = ۸$ و $v_y = ۲$

۲. $v_x = -۸$ و $v_y = ۲$

۳. $v_x = ۸$ و $v_y = -۲$

٤. $v_x = -۸$ و $v_y = -۲$

پاسخ:

مثال۲-۲۰) جریان i_x نشان داده شده در شکل مقابل چند آمپر است؟

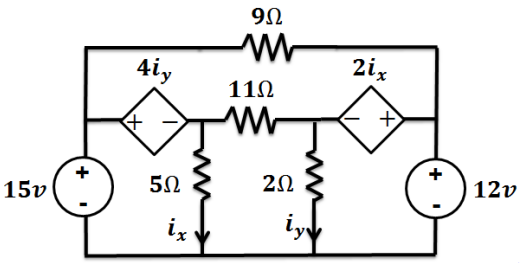
(مهندسی کامپیوتر- گرایش معماری- ۸۳)

۱. ۲

۲. ۲

۳. ۹−

۴. ۱۵



پاسخ:

مثال۲-۲۱) در مدار زیر مقدار منبع i_s (برحسب آمپر) در صورتی که $I = 0$ باشد کدام است؟

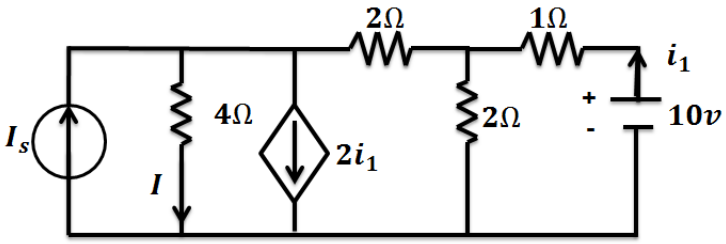
(مهندسی برق- ۷۵)

۱. $2.5\ A$

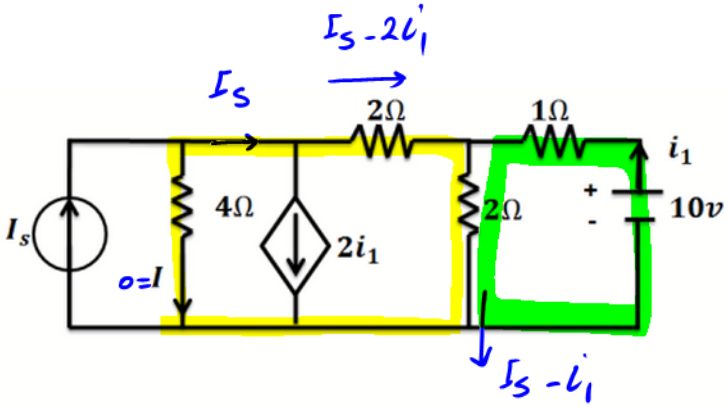
۲. $7.5\ A$

۳. $22.5\ A$

۴. $27.5\ A$



پاسخ:



$$o + 2I_s - 4i_1 + 2I_s - 2i_1 = o$$

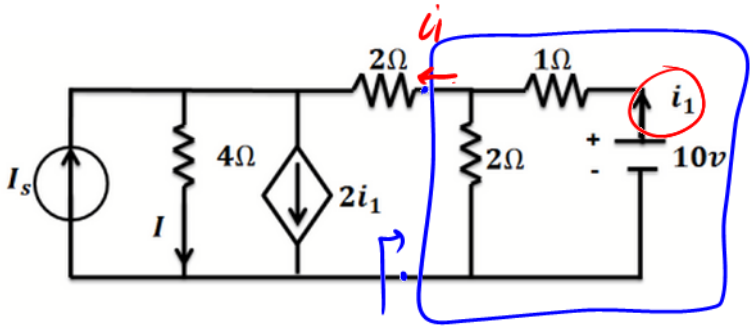
$$4I_s - 6i_1 = o \quad (1)$$

$$i_1 + 2I_s - 2i_1 = 10$$

$$\rightarrow 2I_s - i_1 = 10 \quad (2)$$

$$1,2 \rightarrow -8I_s = -60 \longrightarrow I_s = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7.5(A)$$

روش صفر سازی تونن نورتن

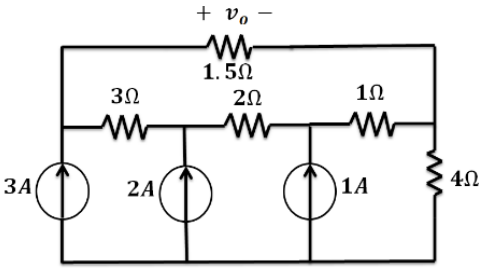


$$V_{th} = 10\frac{2}{2+1} = \frac{20}{3}$$

$$R_{th} = \frac{2}{3}$$

چون i_1 داخل حلقه است نمیتوان مدار آن را صفر کرد

مثال۲-۲۲) ولتاژ v_o در مدار شکل مقابل چند ولت است؟ (مهندسی کامپیوتر-گرایش معماری - ۸۹)



۱. $\frac{۲۷}{۵}$

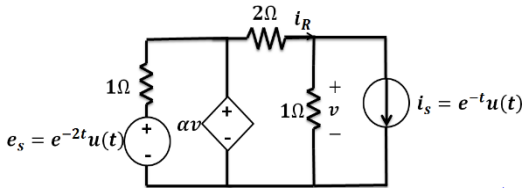
۲. ۵

۳. $\frac{۲۴}{۵}$

۴. ۶

پاسخ:

مثال۲-۲۳) در مدار شکل زیر α را چنان تعیین کنید که شدت جریان مقاومت ۲ اهمی $i_R = \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$ باشد؟ (مهندسی برق- ۸۲)



۱. ۳-

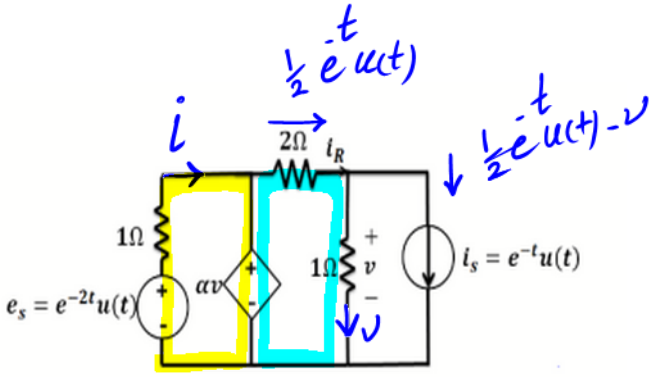
۲. ۱-

۳. ۱

۴. ۳

نکته: در مدارات مقاومتی جنس ورودی اهمیت نداشته و روش تحلیل مدار تغییر نمی‌کند ، جنس ورودی و خروجی مدار نیز مشابه اند.

پاسخ:



$$\text{KVL} \quad -e^{-2t}u(t) + i + \alpha v = 0 \quad (1)$$

$$\text{KVL} : \quad -\alpha v + 2\left(\tfrac{1}{2}e^{-t}u(t)\right) + v = 0 \quad (2)$$

$$\downarrow\downarrow \quad e^{-t}u(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}u(t) - v \quad (3)$$

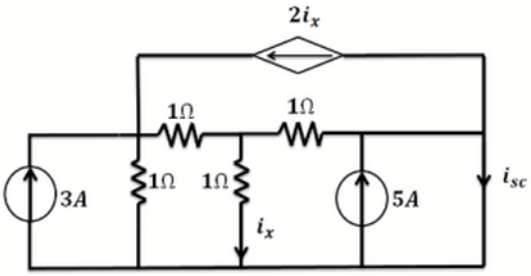
$$(1-\alpha)\left[\tfrac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-t}u(t)\right] + e^{-t}u(t) = 0$$

$$(1-\alpha)\left(-\tfrac{1}{2}e^{-t}u(t)\right) + e^{-t}u(t) = 0$$

$$e^{-t}u(t)\left[\frac{\alpha-1}{2} + 1\right] = 0 \qquad t = +\infty,\ t < 0$$

$$\frac{\alpha-1}{2} + 1 = 0 \longrightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

مثال۲-۲۴) جریان اتصال کوتاه I_{sc} کدام است؟(مهندسی برق- ۸۳)



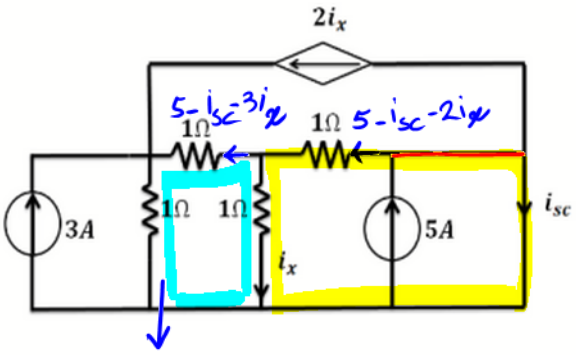
۱. ۱ A

۲. ۲ A

۳. ۴ A

۴. ۸ A

پاسخ:



$8-i_{sc}-i_x$

KVL: $0+5-i_{sc}-2i_x+i_x=0$

KVL $-i_x+5-i_{sc}-3i_x+8-i_{sc}-i_x=0$

$$\begin{cases} i_x+i_{sc}=5 \\ 5i_x+2i_{sc}=13 \end{cases} \Rightarrow -3i_{sc}=-12$$

$$i_{sc}=4\ A$$

مثال۲-۲۵) ولتاژ خروجی v_o در مدار شکل مقابل کدام است؟(مهندسی برق- ۸۶)

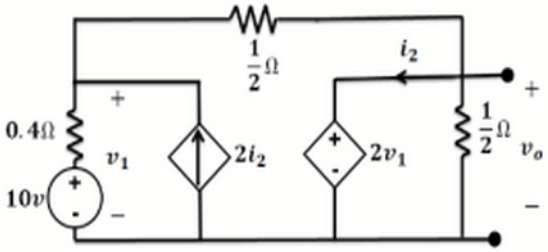
۱. ۲

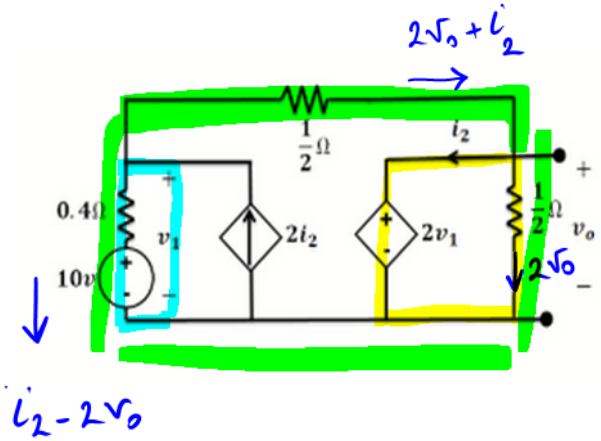
۲. ۴

۳. ۶

۴. ۸

پاسخ:





$v_o = 2v_1$ ①

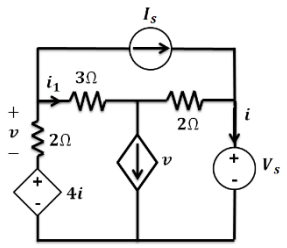
$v_1 = 0.4(i_2 - 2v_o) + 10$ ②

$-v_1 + \frac{1}{2}(2v_o + i_2) + v_o = 0$ ③

$$\frac{v_o}{2} = 0.4i_2 - \frac{4}{5}v_o + 10 \longrightarrow \begin{cases} 1.8v_o = 4i_2 + 10 \\ \frac{3}{2}v_o = -\frac{1}{2}i_2 \end{cases}$$

$$-\frac{v_o}{2} + v_o + v_o + \frac{1}{2}i_2 = 0$$

مثال۲-۲۶) اگر در مدار شکل زیر $i = ۲i_۱$ باشد مقدار V_s/I_s کدام است؟ (مهندسی برق -۸۷)



۱. $\frac{-۱}{۳}$

۲. $\frac{-۱}{۲}$

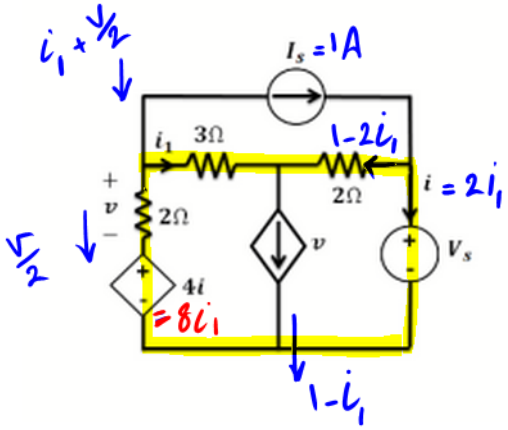
۳. ۲

۴. ۳ ✓

پاسخ:

اشتباه متداول: توجه کنید که در منبع جریان وابسته، جریان وابسته به ولتاژ v است و نباید اشتباها ولتاژ دو سر آن را v در نظرگرفت. در این شاخه با توجه به این که ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته نامشخص است نمی توان KVL زد.

در صدارای ل کنیم $i = 2i_1$



$$\frac{V_s}{I_s} = V_s\Big|_{I_s=1}$$

$$i_1' + \frac{v}{2} = -1 \quad (۱)$$

$$-V_s + 2(1-2i_1') - 3i_1' + v + 8i_1' = 0 \quad (۲)$$

$$v = 1 - i_1 \quad (۳)$$

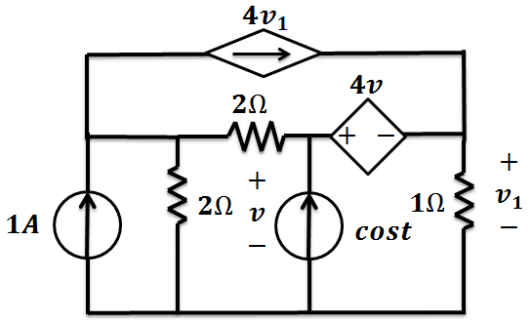
$$\begin{cases} i_1' + \frac{v}{2} = -1 \\ i_1' + v = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2}v = 2 \rightarrow v = 4 \rightarrow i_1' = -3$$

در معادله ۲ قرار می دهیم

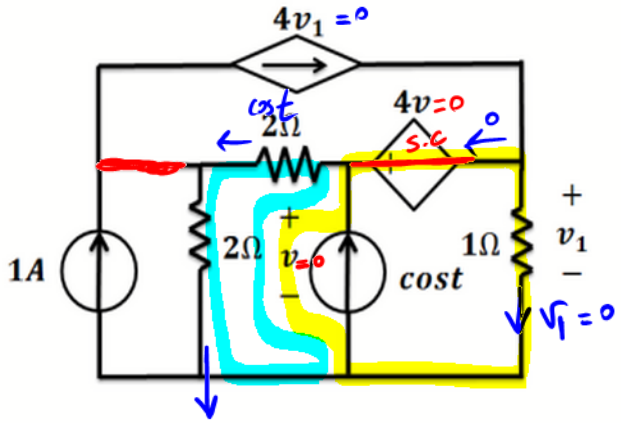
$$-V_s + (-3) + 4 + 2 = 0 \rightarrow \boxed{V_s = 3}$$

مثال۲-۲۷) در مدار شکل زیر در چه لحظاتی $v(t) = 0$ است؟(در گزینه ها k عددی صحیح است)

(مهندسی برق -۹۰)



پاسخ: مدار مقاومتی و منابع DC + سینوسی ← خروجی مدار تابعی از منابع DC و سینوسی است. و تابعی از زمان است

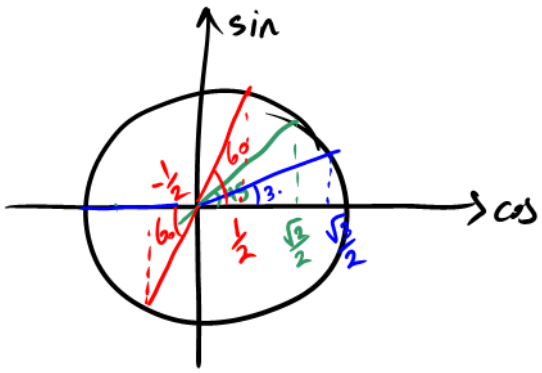


$v_1 + 0 + 0 = 0 \longrightarrow v_1 = 0$

$0 + 2cost + 2(1 + cost) = 0$

$4cost + 2 = 0$

$cost = -\frac{1}{2}$



$t = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$

$t = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}$

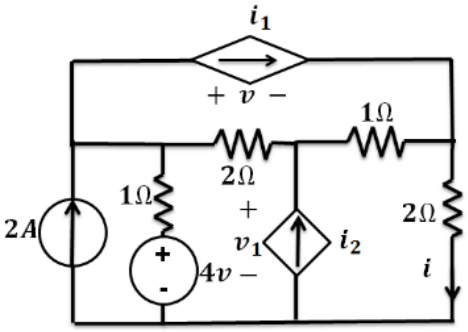
$t = 2k\pi - \pi + \frac{\pi}{3}$

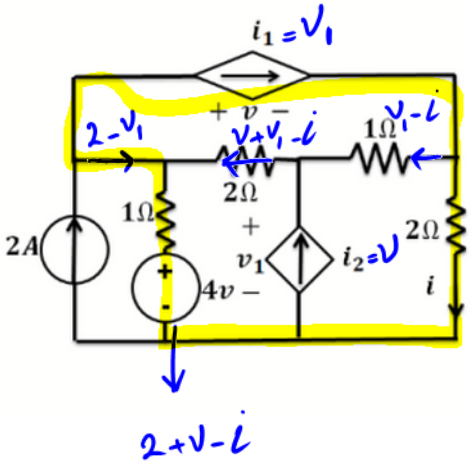
مثال۲-۲۸) در مدار شکل مقابل $i_1 = v_1$ و $i_2 = v$ است جریان i چند آمپر است؟

(مهندسی برق- ۹۱)

۱. ۴-
۲. ۲
۳. ۱
۴. ۲-

پاسخ:





$$v + 2i - 4 - (2 + v - i) = 0$$

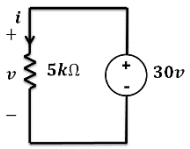
$$3i = 6 \rightarrow \boxed{i = 2A}$$

چون به طور شانسی v در معادله ساده شد نیازی به KVL های دیگر نبود.

یکتایی جواب

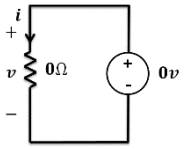
پاسخ خروجی در تحلیل یک مدار در دنیای واقعی و مدل مداری متفاوت است ، زیرا در مدل‌سازی از درنظرگرفتن برخی پارامترها همچون مقاومت سیم‌ها، به سبب ساده‌سازی صرف نظر می‌شود. خروجی مدار در واقعیت در هر لحظه یکتاست ولی در مدل مداری می‌تواند سه حالت سازگار،ناسازگار یا بدون جواب داشته باشد.

مدار سازگار- جواب یکتا



$KVL:\quad 30 = 5i \rightarrow i = 6\,(mA)$

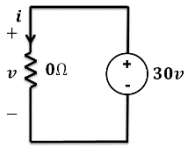
مدار ناسازگار- بی شمار جواب



$KVL:\quad 0 = 0i$

در این حالت i هرمقداری می‌تواند اختیار کند.

مدار ناسازگار- بدون جواب



$KVL:\quad 30 = 0 \times i$

در این حالت مدار جواب ندارد.

یکتایی جواب در معادلات چند حلقه ای

برای بررسی یکتایی جواب مدارات پیچیده‌تر باید دستگاه معادلات جریان گره‌ها یا دستگاه معادلات ولتاژ مش ها را تشکیل داده و با توجه به نکات زیرعمل کرد.

اگر دستگاه معادلات مدار به صورت $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ درنظر گرفته شود که در آن x و y متغیرهای ولتاژ و جریان مدار و a,b,c,a',b',c' ضرایب ثابت هستند. می‌توان گفت اگر دترمینان دستگاه معادله مدار مخالف صفر باشد دستگاه جواب یکتا دارد و در غیر این صورت بدون جواب یا دارای بی شمار جواب است، همچنین:

$\det = ab' - ba' \neq 0 \rightarrow$ جواب یکتا دارد

جواب یکتا دارد اگر:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \det \neq 0$$

بی شمار جواب دارد اگر:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

بدون جواب است اگر:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

مثال۲-۲۹) دستگاه‌های زیر را از لحاظ سازگاری و ناسازگاری بررسی کنید.

$\begin{cases} ۲i_۱ + ۳i_۲ = ۵ \\ ۳i_۱ + ۶i_۲ = ۶ \end{cases}$

$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{6} \neq \frac{5}{6} \longrightarrow$ جواب یکتا دارد

حتما برای تمام منبع‌های مدار متعدد یک جواب دارد.

$det( ) = 2\times6 - 3\times3 \neq 0 \longrightarrow$ جواب یکتا دارد

بدون جواب

$\begin{cases} ۲i_۱ + ۳i_۲ = ۵ \\ ۴i_۱ + ۶i_۲ = ۱۰ \end{cases}$ $det = 2\times6 - 3\times4 = 0 \longrightarrow$ جواب یکتا ندارد ↗ ↘ بی‌شمار جواب

بی‌شمار جواب

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \longrightarrow$ بی‌شمار جواب دارد

$\times -2 \begin{cases} -4i'_1 - 6i'_2 = -10 \\ 4i'_1 + 6i'_2 = 10 \end{cases} \longrightarrow 0i'_1 + 0i'_2 = 0 \longrightarrow$ هر عددی برای i'_1 و i'_2 در نظر بگیریم ۲ معادله را ارضا می‌کند

$\begin{cases} ۲i_۱ + ۳i_۲ = ۵ \\ ۴i_۱ + ۶i_۲ = ۱۵ \end{cases}$ $det( ) = 12 - 12 = 0$ جواب یکتا ندارد

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{5}{15} \longrightarrow$ جواب ندارد

$\times -2 \begin{cases} -4i'_1 - 6i'_2 = -10 \\ 4i'_1 + 6i'_2 = 15 \end{cases} \longrightarrow 0i'_1 + 0i'_2 = 5 \longrightarrow$ هیچ i'_1 و i'_2 نمی‌توان پیدا کرد که این معادله را ارضا کند.

مثال۲-۳۰) کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟(دکتری مهندسی برق- ۹۵)

۱. یک مدار متشکل از عناصر واقعی (فیزیکی)، می تواند بی‌نهایت جواب داشته باشد.

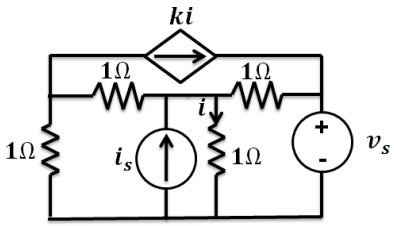
۲. یک مدار متشکل از عناصر مدل (مداری)، می‌تواند بی‌نهایت جواب داشته باشد.

۳. یک مدار متشکل از عناصر مدل (مداری)، می‌تواند جواب نداشته باشد.

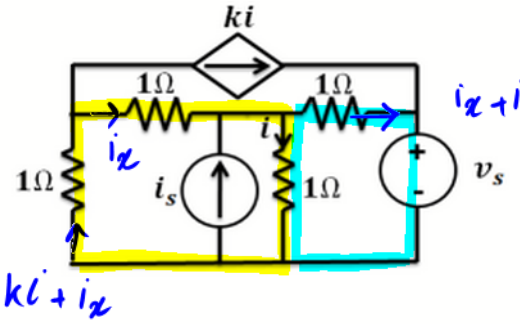
۴. جواب های یک مدار واقعی، الزاما با جواب های مدار معادل ایدئال آن یکی نیست.

مثال۲-۳۱) در مدار زیر k را چنان تعیین کنید که دستگاه معادلات مدار جواب یکتا نداشته باشد. سپس بررسی کنید که به ازای همین مقدار k با چه شرطی روی مقادیر i_s و v_s دستگاه معادلات سازگار است؟

پاسخ:



KVL $ki + i_x + i_x + i = 0$



$i_x + i_s - i$ KVL $-i + i_x + i_s - i + v_s = 0$

$$\begin{cases} (1+k)i + 2i_x = 0 \\ -2i + i_x = -v_s - i_s \end{cases} \qquad \begin{cases} -4i + 2i_x = 0 \\ -2i + i_x = 0 \\ 0i + 0i_x = 0 \end{cases}$$

if $\det[\,] = 0 \longrightarrow$ جواب یکتا ندارد $\quad 1 + k - (2x - 2) = 0$

$$\boxed{k = -5}$$

اگر جواب یکتا نداشته باشد:
۱- بی شمار جواب ← سازگار
۲- جواب ندارد ← ناسازگار

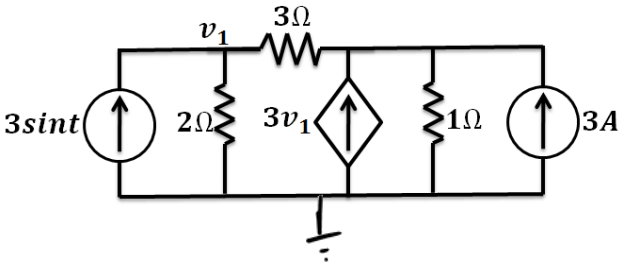
$$\begin{cases} -4i + 2i_x = 0 \\ -2i + i_x = -v_s - i_s \end{cases} \qquad \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = \frac{0}{-v_s - i_s}$$

باید مخرج صفر شود

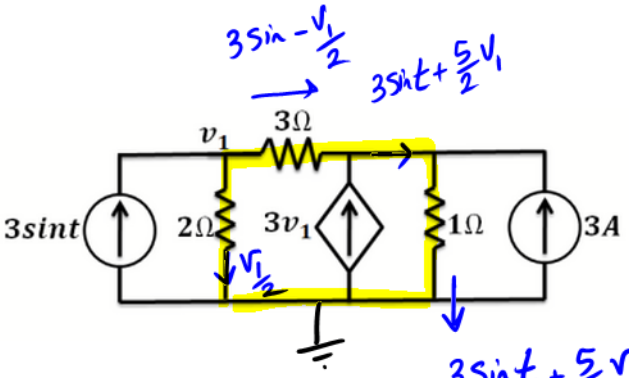
$$-v_s - i_s = 0$$

$$\boxed{v_s = -i_s}$$

مثال۲-۳۲) در مدار زیر در چه لحظاتی بی شمار جواب برای ولتاژها و جریان ها وجود دارد؟



پاسخ:



KVL $\quad -v_1 + 9\sin t - \frac{3}{2}v_1 + 3\sin t + \frac{5}{2}v_1 + 3 = 0$

$0 + 12\sin t = -3$

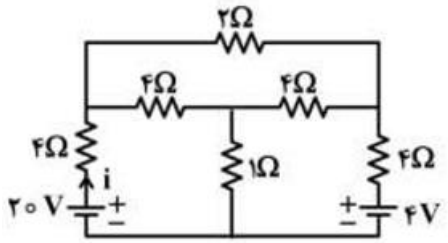
$\sin t = -\frac{1}{4}$

$\sin t + \frac{1}{4} = 0$

اگر صدا مجاهد جواب نکتا داشته باشد

$\sin t = -\frac{1}{4} \rightarrow t = 2k\pi + \sin^{-1}\frac{1}{4}$

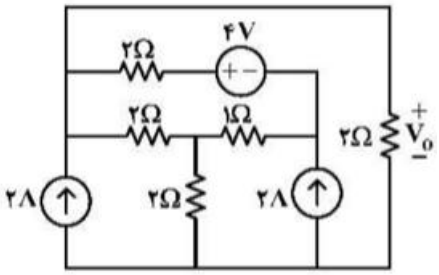
مثال۲-۳۳) در مدار مقاومتی زیر، جریان i چند آمپر است؟ (دکتری برق- ۹۸)

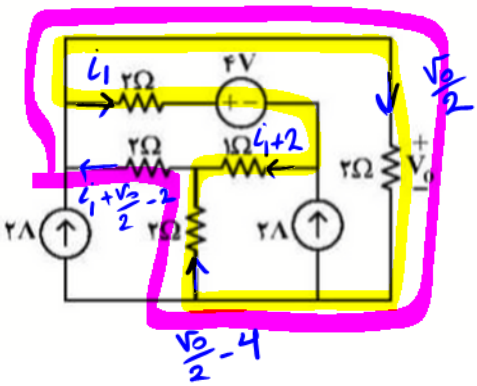


۱. ۲/۵
۲. ۳/۷
۳. $\frac{43}{15}$
۴. $\frac{53}{15}$

مثال۲-۳۴) ولتاژ خروجی V_O در مدار زیر، چند ولت است؟(مهندسی برق- ۹۹)

۱. $\frac{۲۴}{۱۳}$
۲. $\frac{۳۲}{۱۳}$
۳. $\frac{۴۸}{۱۳}$
۴. $\frac{۶۴}{۱۳}$





$$v_o + v_o - 8 - i_1' - 2 - 4 - 2i_1' = 0$$

$$2v_o - 3i_1' = 14 \quad (1)$$

$$v_o + v_o - 8 + 2i_1' + v_o - 4 = 0$$

$$3v_o + 2i_1' = 12 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2v_o - 3i_1' = 14 \\ 3v_o + 2i_1' = 12 \end{cases}$$

$$v_o = -\frac{(-36-28}{4+9} = \frac{36+28}{13}$$

$$i_1' = \frac{24-42}{4+9}$$