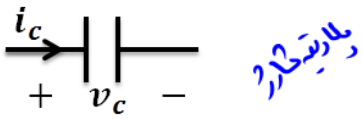
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

آشنایی با خازن LTI

رابطه ولتاژ و بار الکتریکی در یک خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر است:



$$q(t) = C\,v_c(t)$$

برای بدست آوردن جریان خازن با توجه به این که جریان تغییرات بار در واحد زمان است کافی است از معادله بار الکتریکی مشتق بگیریم:

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d\big(Cv_c(t)\big)}{dt} = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

بنابراین رابطه جریان در یک خازن خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$i_c = C\,v_c'$$

خازن با مشتق‌گیری از سیگنال ولتاژ سبب ایجاد معادلات دیفرانسیل در مدار می‌شود.

نکات تکمیلی

نکته۱: برخلاف ظرفیت خازن ،رابطه ولتاژ و جریان خازن به شکل فیزیکی و هندسی خازن بستگی ندارد.

نکته۲: با توجه به رابطه ولتاژ و جریان خازن می‌توان نتیجه گرفت:

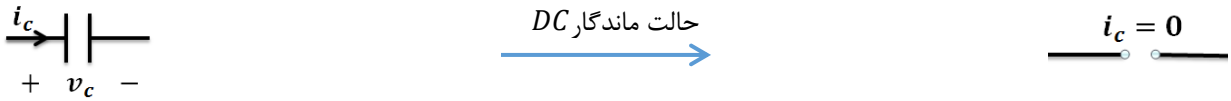
الف) $C = 0 \rightarrow i_c = 0 \rightarrow$ خازن مدار باز است

ب) $C = \infty \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow v_c =$ عدد ثابت یا $v_c = 0 \rightarrow$ خازن بدون ولتاژ اولیه اتصال کوتاه است

ج) اگر ولتاژ خازن ثابت باشد، جریان خازن صفر می‌شود پس خازن در حالت ماندگار DC معادل مدار باز عمل می‌کند.

$v_c =$ عدد ثابت $\rightarrow \frac{dv_c}{dt} = 0 \rightarrow i_c = 0 \rightarrow$ خازن مدار باز است

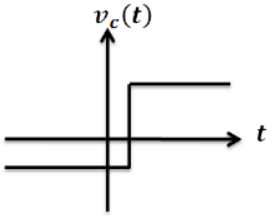
Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com



به عبارت دیگر می‌توان گفت خازن، ولتاژ DC را فیلتر می‌کند. توجه کنید ولتاژ خازن در این حالت الزاما صفر نیست.

نکته۳: ولتاژ خازن می‌تواند تغییر سریع داشته باشد ولی تغییرات آنی (پله‌ای) نمی‌تواند داشته باشد

سوال: استاد چرا ولتاژ خازن نمی‌تواند تغییرات آنی داشته باشد ؟



$i_c = C v_c'$ LTI ← i_c نمی‌تواند ∞ شود ← اجازه نمی‌دهد تغییر ناگهانی داشته

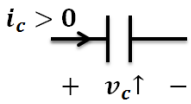
چون اگر تغییر ناگهانی داشته باشد مشتق آن ∞ می‌شود.

با توجه به این که مشتق این سیگنال در لحظه ای که تغییر آنی دارد تعریف نشده است داریم:

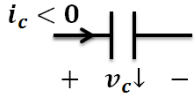
$$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = \infty$$

از طرفی جریان بی‌نهایت برای خازن به معنی تغییر آنی بار الکتریکی است و با توجه به بقای بار، تغییر بار ناگهانی یا آنی نمی‌توان داشت ، پس خازن در مقابل تغییر آنی ولتاژ اینرسی دارد .از این خاصیت در مدارها برای جلوگیری از تغییرآنی ولتاژ استفاده می‌شود.

نکته۴: اگر ولتاژ خازن در حال افزایش باشد ، جریان خازن که مضربی از شیب یا همان تغییرات ولتاژ است مقداری مثبت خواهد داشت و اگر ولتاژ خازن در حال کاهش باشد نرخ تغییرات ولتاژ منفی است بنابراین مقدار جریان منفی خواهدشد.



مدار شارژ



مدار دشارژ

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

ولتاژ اولیه خازن

قصد داریم از عبارت $\frac{dv_c}{dt}$ از لحظه $-\infty$ تا زمان t انتگرال بگیریم: (از نظر فیزیکی یعنی از لحظه‌ای که خازن ساخته شده و هنوز در هیچ مداری به کار گرفته نشده است تا لحظه مورد نظر t)

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{dv_c}{dt}dt=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}i_c(t)dt \rightarrow v_c(t)-v_c(-\infty)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}i_c(t)dt \rightarrow$$

چون $v_c(-\infty)=0$ است می‌توان نتیجه گرفت:

$$v_c(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}i_c(t)dt$$

ولی جریان خازن از لحظه $-\infty$ تا t را نمی‌دانیم چراکه خازن در این مدت ممکن است در مدارهای مختلفی کار کرده و از بار الکتریکی پر (شارژ) یا تخلیه (دشارژ) شده باشد. این جریان را از لحظه خاص t_0 که خازن در مدار معینی می‌خواهد کار کند می‌توان پیدا کرد:

$$v_c(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t_0}i_c(t)dt+\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t}i_c(t)dt$$

عبارت $\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t_0}i_c(t)dt$ مقدار ثابتی دارد و از جنس ولتاژ است. این ترم را که مقدار ثابتی دارد ونتیجه کار گذاشتن خازن تا لحظه t_0 است را ولتاژ اولیه خازن می‌نامیم و با $v_c(t_0)$ نشان می‌دهیم:

$$v_c(t)=v_c(t_0)+\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t}i_c(t)dt$$

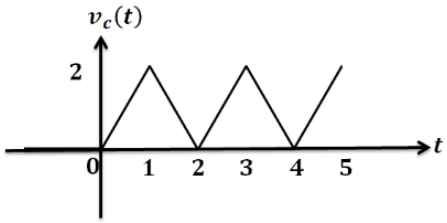
ولتاژ خازن در هر لحظه t ، به گذشته خازن یعنی همان $v_c(t_0)$ وابسته است بنابراین خازن یک المان ذخیره کننده حافظه دار است که اطلاعات گذشته را به صورت ولتاژ در خود ذخیره می‌کند.

$$t_0=0 \rightarrow v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{c}\int_{0}^{t}i_c(t)dt$$

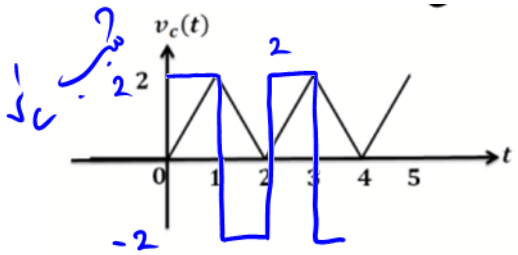
ولتاژ اولیه خازن

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

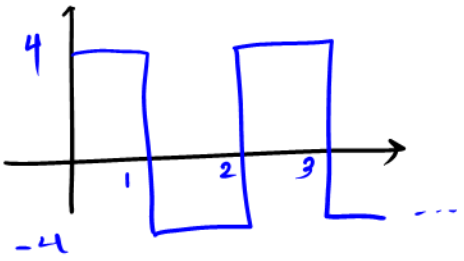
مثال) در یک خازن LTI ، ولتاژ خازن به صورت زیر است، جریان خازن را رسم کنید. $C=2F$



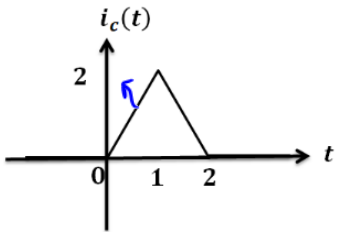
$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = 2v_c' = 2\times$ شیب v_c



i_c / $2v_c'$



مثال) ولتاژ یک خازن LTI ، در $t=0$ ، صفر است و جریانی مطابق شکل زیر از خازن عبور می‌کند. ولتاژ خازن را در $t\geq 0$ پیدا کنید. $(C=1f)$



i_c ⟶ $+\ v_c\ -$

$v_c(0)=0$

$$v_c = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c\,dt$$

$$0<t<1 \longrightarrow i_c = 2t \longrightarrow v_c(t) = 0 + \int_0^t 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2} = t^2$$

$$v_c(1) = t^2\big|_{t=1} = 1$$

$$1<t<2 \longrightarrow i_c = -2t+4 \longrightarrow v_c(t) = 1 + \int_1^t (-2t+4)\,dt$$

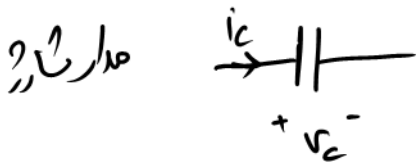
$$= 1 + (-t^2+4t+C)\Big|_1^t = 1 + (t^2+4t+C) - (1+4+C) = t^2+4t+6$$

$$v_c(2) = 2^2 + 4\times 2 + 6 = 18$$

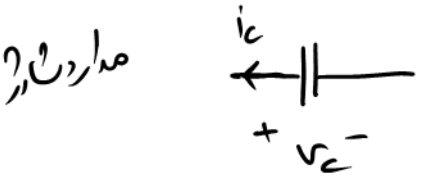
$$t>2 \longrightarrow i_c = 0 \longrightarrow v_c(t) = v_c(2) + \frac{1}{C}\int i\,dt = v_c(2) = 18$$

نکته: لحظه‌ای که $i_c=0$ می‌شود ولتاژ خازن مقدار قبلی را نگه می‌دارد.

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com



$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{c}\int_0^t i_c\,dt$$



$$v_c(t) = v_c(0) - \frac{1}{c}\int_0^t i_c\,dt$$

نکته: درصورتی که جریان خازن محدود باشد(شامل تابع ضربه نباشد) ، حتی اگر i_c ناپیوستگی هم داشته باشد ، ولتاژ خازن پیوسته خواهد بود ، یعنی در هر لحظه از زمان خواهیم داشت: $v_c(t_o^+) = v_c(t_o^-)$

انرژی ذخیره شده در خازن

انرژی ذخیره شده در بازه $[t_o, t]$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$w(t_o,t) = \int_{t_0}^{t} p(t)dt$$

$$p = v_c(t).\, i_c(t) = v_c(t).\, c\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$w(t_o,t) = c\int_{t.}^{t} v_c(\tau).\frac{dv_c(\tau)}{dt}dt = \frac{c}{2}v_c^2\Big|_{t.}^{t}$$

$$w(t_o,t) = \frac{c}{2}\left(v_c^2(t) - v_c^2(t.)\right)$$

انرژی ذخیره شده در خازن در هر لحظه دلخواه مانند t را با قراردادن $t_o = 0$ می‌توان بدست آورد.

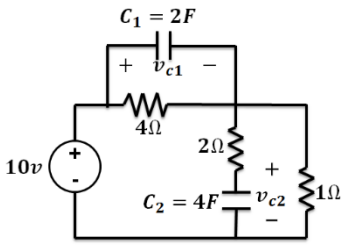
$$w(t) = \frac{c}{2}\left(v_c^2(t) - v_c^2(0)\right)$$

اگر انرژی خازن را در لحظه ای خاص خواستند نه در بازه خاص

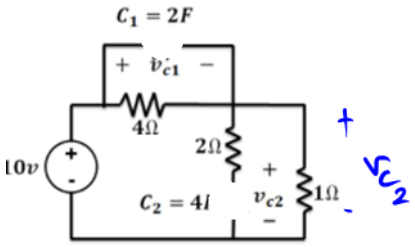
$$w(t) = \frac{1}{2}c\,v_c^2(t)$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

مثال) انرژی ذخیره شده در خازن C_1 چندبرابر انرژی ذخیره شده در خازن C_2 است؟ مدار به حالت ماندگار رسیده است.



در حالت ماندگار $\rightarrow$ مدار باز



$$v_{c_1} = 10 \frac{4}{4+1} = 8v$$

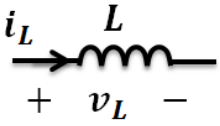
$$v_{c_2} = 10 \frac{1}{1+4} = 2v$$

$$w_{c_1}(\infty) = \frac{1}{2} C_1 v_{c_1}(\infty)^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2$$

$$w_{c_2}(\infty) = \frac{1}{2} C_2 v_{c_2}(\infty)^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2$$

آشنایی با سلف LTI

در یک سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان رابطه جریان و شارالکتریکی به صورت زیراست:



$$\varphi(t) = L\, i$$

با توجه به این نکته که ولتاژ سلف ، تغییرات شار در واحد زمان است ، برای بدست آوردن آن از معادله شار الکتریکی مشتق می‌گیریم:

$$v_L(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\left(Li_L(t)\right)}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

بنابراین رابطه ولتاژ بر حسب جریان در یک سلف خطی و تغییرناپذیر با زمان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v_L = L\, i'$$

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

سلف با مشتق‌گیری از سیگنال جریان باعث ایجاد معادلات دیفرانسیل در مدار می‌شود.

نکات تکمیلی

نکته۱: برخلاف خود سلف ، رابطه ولتاژ و جریان سلف به شکل فیزیکی و هندسی سلف بستگی ندارد.

نکته۲: با توجه به رابطه ولتاژ و جریان سلف می‌توان نتیجه گرفت:

الف) $L = 0 \rightarrow v_L = 0 \rightarrow$ سلف اتصال کوتاه است

ب) $L = \infty \rightarrow \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow i_L =$ عدد ثابت یا $i_L = 0 \rightarrow$ سلف بدون جریان اولیه مدار باز است

ج) اگر جریان سلف ثابت باشد، ولتاژ سلف صفر می‌شود پس سلف در حالت ماندگار DC معادل اتصال کوتاه عمل می‌کند.

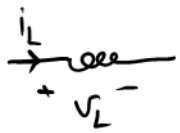
$i_L =$ عدد ثابت $\rightarrow \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow v_L = 0 \rightarrow$ سلف اتصال کوتاه است

به عبارت دیگر می‌توان گفت سلف جریان DC را فیلتر می‌کند.

نکته۳: جریان سلف می‌تواند تغییر سریع داشته باشد ولی تغییر آنی نمی‌تواند داشته باشد. سلف نسبت به تغییرات آنی جریان اینرسی دارد. ولی ولتاژ سلف می‌تواند تغییر آنی داشته باشد.(تغییر شیب جریان سلف باعث تغییر آنی ولتاژ سلف می‌شود)

if $v_L \neq \infty \rightarrow v_L = L i'$

نکته۴: اگر v_L مثبت باشد ، نرخ تغییرات جریان سلف مثبت است بنابراین جریان در حال افزایش است.



if $v_L > 0 \rightarrow L i' > 0 \rightarrow i' > 0 \rightarrow i \uparrow$

نکته۵: اگر v_L منفی باشد ، نرخ تغییرات جریان سلف منفی است بنابراین جریان در حال کاهش است.

if $v_L < 0 \rightarrow L i' < 0 \rightarrow i' < 0 \rightarrow i \downarrow$

جریان اولیه سلف

اگر از رابطه $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ از لحظه $-\infty$ تا t انتگرال بگیریم(از نظر فیزیکی یعنی از لحظه‌ای که سلف تازه ساخته شده و هنوز در هیچ مداری به کار گرفته نشده است تا لحظه مورد نظر t)

$$\int_{-\infty}^{t} v_L dt = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di_L}{dt}dt = L\, i_L \rightarrow \; i_L(t) - i_L(-\infty) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt \rightarrow$$

چون $i_L(-\infty) = 0$ است می‌توان نتیجه گرفت:

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt$$

ولی جریان سلف از لحظه $-\infty$ تا t را نمی‌دانیم چون سلف در این مدت ممکن است در مدارهای مختلفی کار کرده باشد و از بار الکتریکی پر (شارژ) یا تخلیه (دشارژ) شده باشد. این جریان را از لحظه خاص $t_.$ که سلف در مدار معینی می‌خواهد کار کند می‌توان پیدا کرد:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_.} v_L(t)dt + \frac{1}{L}\int_{t_.}^{t} v_L(t)dt$$

عبارت $\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_.} v_L(t)dt$ مقدار ثابتی دارد و از جنس جریان است. این ترم که نتیجه‌ی کارگذاشتن سلف تا لحظه $t_.$ است را جریان اولیه سلف نامیده و با $i_L(t_.)$ نشان می‌دهیم:

$$i_L(t) = i_L(t_.) + \frac{1}{L}\int_{t_.}^{t} v_L(t)dt$$

پس جریان سلف در هر لحظه t ، به گذشته سلف یعنی همان $i_L(t_.)$ وابسته می‌باشد ، بنابراین سلف یک المان ذخیره کننده حافظه دار است که اطلاعات گذشته را به صورت جریان در خود ذخیره می‌کند.

$$t_. = 0 \rightarrow i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v_L(t)dt$$

انرژی ذخیره شده در سلف

انرژی ذخیره شده در سلف در بازه $[t_o, t]$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$w(t_o, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau$$

$$p = v_L.\ i_L(t) = L\frac{di_L}{dt}.i_L(t)$$

$$w(t_o, t) = \int_{t_.}^{t} L\frac{di_L(\tau)}{dt}.\ i_L(\tau)d\tau = \frac{L}{2}i_L^2\Big|_{t_.}^{t}$$

$$w(t_o, t) = \frac{L}{2}\left(i_L^2(t) - i_L^2(t_.)\right)$$

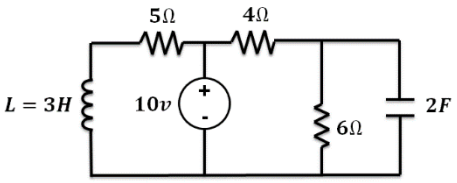
انرژی ذخیره شده در سلف را در هر لحظه دلخواه مانند t را می‌توان با قراردادن $t_o = 0$ بدست آورد.

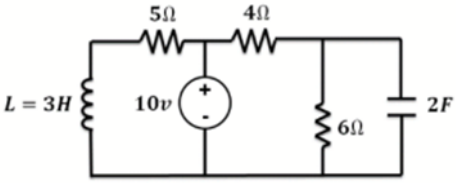
$$w(t) = \frac{L}{2}\left(i_L^2(t) - i_L^2(0)\right)$$

$w(t) = \frac{1}{2}L\,i_L^2(t)$ انرژی در یک لحظه خاص

Produced with a Trial Version of PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

مثال) با فرض این‌که مدار به حالت ماندگار رسیده است انرژی ذخیره شده در کل سیستم چند ژول است؟





شارژ خازن

اگر منبع جریان ثابت DC به خازن اعمال کنیم با توجه به رابطه

$$v_c(t) = v_c(t.) + \frac{1}{c}\int_{t.}^{t} i_c(t)dt$$

با گذشت زمان ولتاژ ذخیره شده در خازن به صورت تابعی انتگرالی از جریان آن زیاد می‌شود بنابراین تابع ولتاژ آن درجه یک و شیب دار خواهد بود. با قطع کلید جریان خازن صفر و ولتاژ خازن مقدار شارژ شده باقی می‌ماند. می‌توان خازن شارژ شده را از مدار جدا کرده و در مدار دیگری استفاده نمود.

شارژ سلف

اگر منبع ولتاژ ثابت DC به سلف اعمال کنیم با توجه به رابطه

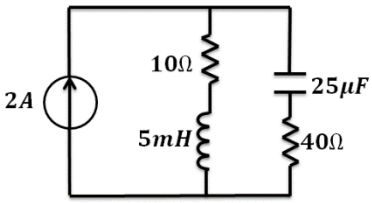
$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v_L(t)dt$$

با گذشت زمان جریان ذخیره شده در سلف به صورت تابعی انتگرالی از ولتاژ دو سر سلف زیاد می‌شود بنابراین تابع جریان آن درجه یک و شیب دار خواهد بود. با قطع کلید ولتاژ سلف صفر شده و جریان سلف مقدار شارژ شده باقی می‌ماند.

نکته۱: برای یک سلف با توجه به رابطه $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ اگر $v_L = 0$ باشد تغییرات جریان صفر است ، بنابراین جریان ثابت مانده و شرایط اولیه تغییر نمی‌کند.

نکته۲: برای یک خازن با توجه به رابطه $i_c = C\frac{dv_c}{dt}$ اگر $i_c = 0$ باشد تغییرات ولتاژ صفر است ، بنابراین ولتاژ ثابت مانده و شرایط اولیه تغییر نمی‌کند.

مثال) در مدار شکل مقابل کل انرژی ذخیره شده در مدار چند میلی ژول است؟(مهندسی کامپیوتر ۸۹)



۱. ۱۰

۲. ۵

۳. ۱۵

۴. ۲۰

مثال) جریان زیر از یک خازن $۲۰۰\mu f$ عبور می‌کند انرژی ذخیره شده در خازن چقدر است؟

